



УДК 519.642

Устойчивость и сходимость локально-одномерной схемы А. А. Самарского, аппроксимирующей многомерное интегро-дифференциальное уравнение конвекции-диффузии с неоднородными граничными условиями первого рода

З. В. Бештокова

Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН,
Россия, 360000, Нальчик, ул. Шортанова, 89а.

Аннотация

Изучена первая начальная-краевая задача для многомерного (по пространственным переменным) интегро-дифференциального уравнения конвекции-диффузии. Для приближенного решения поставленной задачи предложена локально-одномерная схема А. А. Самарского с порядком аппроксимации $O(h^2 + \tau)$. Исследование единственности и устойчивости решения проводится с помощью метода энергетических неравенств. Получены априорные оценки решения локально-одномерной разностной схемы, откуда следуют единственность решения, непрерывная и равномерная зависимость решения от входных данных, а также сходимость решения схемы к решению исходной дифференциальной задачи со скоростью, равной порядку аппроксимации разностной схемы. Для двумерной задачи построен алгоритм численного решения, проведены численные расчеты тестовых примеров, иллюстрирующие полученные в работе теоретические результаты.

Ключевые слова: уравнение конвекции-диффузии, первая начальная-краевая задача, нелокальный источник, многомерная задача, разностные схемы, априорная оценка, устойчивость и сходимость.

Получение: 26 апреля 2023 г. / Исправление: 23 августа 2023 г. /


Принятие: 19 сентября 2023 г. / Публикация онлайн: 28 сентября 2023 г.

Дифференциальные уравнения и математическая физика

Научная статья

© Коллектив авторов, 2023

© СамГТУ, 2023 (составление, дизайн, макет)

 Контент публикуется на условиях лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru) (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Образец для цитирования

Бештокова З. В. Устойчивость и сходимость локально-одномерной схемы А. А. Самарского, аппроксимирующей многомерное интегро-дифференциальное уравнение конвекции-диффузии с неоднородными граничными условиями первого рода // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2023. Т. 27, № 3. С. 407–426. EDN: XXIUYM. DOI: [10.14498/vsgtu2014](https://doi.org/10.14498/vsgtu2014).

Сведения об авторе

Заряна Владимировна Бештокова  <https://orcid.org/0000-0001-8020-4406>

младший научный сотрудник; отд. вычислительных методов; e-mail: zarabaeva@yandex.ru

Введение. При исследовании прикладных задач механики сплошной среды, тепло- и массопереноса широко используются методы математического моделирования и вычислительной математики. В качестве основных при исследовании многих процессов в движущихся средах можно выделить диффузионный перенос той или иной субстанции и перенос, обусловленный движением среды, т. е. конвективный перенос. В газо- и гидродинамике одним из базовых моделей многих процессов выступают краевые задачи для нестационарных уравнений конвекции-диффузии (т. е. параболическое уравнение второго порядка с младшими членами) [1].

Математические модели, детально описывающие реальные процессы и явления природы, представляют собой сложные системы. Сложность задач математической физики в основном обусловлена их многомерностью и нелинейностью. Получить точные аналитические решения таких задач очень трудно. В этой связи используются приближенные методы решения. Одним из самых распространенных методов приближенного решения краевых задач является метод конечных разностей.

С точки зрения численной реализации в отличие от одномерных задач при изучении многомерных задач возникает сложность, заключающаяся в значительном увеличении объема вычислений. В этой связи актуальное значение приобретает задача построения экономичных разностных схем для численного решения многомерных задач, обладающих возможностью достаточно эффективной стабилизации решений (устойчивостью) и требующих при переходе со слоя на слой проведения числа арифметических операций Q , пропорционального числу узлов сетки, так что $Q = O(h^{-p})$, где $h = \min_{1 \leq i \leq p} h_i$, p — размерность пространства, h_i — шаг сетки по направлению x_i .

К эффективным методам приближенного решения сложных многомерных задач математической физики на основе их конечно-разностных аппроксимаций относятся методы расщепления, они были развиты в работах J. Douglas, D. W. Peaceman, H. H. Rachford [2,3], Н. Н. Яненко [4], А. А. Самарского [5,6], Г. И. Марчука [7], Е. Г. Дьяконова [8], И. В. Фрязинова [9–11] и др. Их отказ от классического понятия аппроксимации и замена его более слабым условием суммарной аппроксимации существенно расширяют класс решаемых задач.

Целью и новизной настоящей работы является разработка и обоснование численного метода решения интегро-дифференциального уравнения конвекции-диффузии с неоднородными краевыми условиями первого рода в многомерной области. Для приближенного решения поставленной задачи предложена локально-одномерная разностная схема А. А. Самарского с порядком аппроксимации $O(h^2 + \tau)$. Ввиду того, что уравнение содержит первую производную от неизвестной функции по пространственной переменной x_α для повышения порядка точности локально-одномерной схемы используется известный метод, предложенный А. А. Самарским при построении монотонной схемы второго порядка точности по h_α для уравнения параболического типа общего вида, содержащего односторонние производные, учитывающие знак $r_\alpha(x, t)$. Исследование единственности и устойчивости решения проводится с помощью метода энергетических неравенств. Получены априорные оценки решения локально-одномерной разностной схемы, откуда следуют единственность решения, непрерывная и равномерная зависимость решения от входных данных, а также сходимости решения схемы к решению исходной дифферен-

циальной задачи со скоростью, равной порядку аппроксимации разностной схемы. Для двумерной задачи построен алгоритм численного решения, проведены численные расчеты тестовых примеров, иллюстрирующие полученные в работе теоретические результаты.

Следует отметить, что применение принципа максимума [5, 6] для исследования единственности, устойчивости и сходимости решения локально-одномерной схемы, аппроксимирующей многомерное интегро-дифференциальное уравнение конвекции-диффузии, не представляется возможным, а исследование методом энергетических неравенств решения многомерного интегро-дифференциального уравнения параболического типа с однородными краевыми условиями первого рода возможно, но при этом сходимость схемы доказывается лишь со скоростью $O(h + \sqrt{\tau})$. В этой связи в данной работе предлагается подход к получению априорной оценки решения локально-одномерной схемы, с помощью которой доказывается сходимость схемы со скоростью $O(h^2 + \tau)$.

Численным методам решения локальных и нелокальных краевых задач для многомерных дифференциальных уравнений в частных производных параболического типа на основе построения локально-одномерных разностных схем посвящены работы [12–15].

1. Постановка задачи. В замкнутой области $\bar{Q}_T = \bar{G} \times [0, T]$, основанием которой является p -мерный куб $\bar{G} = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_p) : 0 \leq x_\alpha \leq l, \alpha = 1, 2, \dots, p\}$ с границей $\Gamma, \bar{G} = G \cup \Gamma$, рассматривается следующая задача [16, стр. 442]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu + f(x, t), \quad (x, t) \in Q_T, \quad (1)$$

$$u|_\Gamma = \mu(x, t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \bar{G}, \quad (3)$$

где $Lu = \sum_{\alpha=1}^p L_\alpha u, L_\alpha u = k_\alpha(t) \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2} + r_\alpha(t) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} - q_\alpha(x, t)u - \int_0^l H_\alpha(x, t)u dx_\alpha;$

$0 < c_0 \leq k_\alpha(t) \leq c_1, |r_\alpha(t)|, |H_\alpha(x, t)|, |q_\alpha(x, t)| \leq c_2, c_0, c_1, c_2 = \text{const} > 0;$

$$u(x, t) \in C^{4,2}(Q_T), \quad k_\alpha(t), r_\alpha(t) \in C^1[0, T],$$

$$H_\alpha(x, t), q_\alpha(x, t), f(x, t) \in C^{2,1}(Q_T), \quad (4)$$

$\mu_{\pm\alpha}(x, t), u_0(x)$ — непрерывные функции, $\alpha = 1, 2, \dots, p,$

$C^{m,n}$ — класс функций, непрерывных вместе со своими частными производными порядка m по x и n по t ; c_0, c_1, c_2 — положительные постоянные; $Q_T = G \times (0, T]$.

Далее через $M_i, i = 1, 2, \dots,$ обозначаются положительные постоянные, зависящие только от входных данных рассматриваемой задачи.

2. Локально-одномерная схема. Пространственную сетку выберем равномерной по каждому направлению Ox_α с шагом $h = l/N$ (кубическая сетка с шагом h) [16, стр. 475]:

$$\bar{\omega}_h = \bar{\omega}_{h,\alpha}^p, \quad \bar{\omega}_{h,\alpha} = \{x_\alpha^{(i_\alpha)} = i_\alpha h : i_\alpha = 1, \dots, N - 1, x_\alpha^{(0)} = 0, x_\alpha^{(N)} = Nh/2\},$$

$$\omega_h = \omega_{h,\alpha}^p, \quad \omega_{h,\alpha} = \{x_\alpha^{(i_\alpha)} = i_\alpha h : i_\alpha = 1, \dots, N-1\}, \quad \alpha = 1, 2, \dots, p.$$

На отрезке $[0, T]$ также введем равномерную сетку $\bar{\omega}_\tau = \{t_j = j\tau, j = 0, 1, \dots, j_0\}$ с шагом $\tau = T/j_0$. Каждый из отрезков $[t_j, t_{j+1}]$ разобьем на p частей, введя точки $t_{j+\alpha/p} = t_j + \tau\alpha/p$, $\alpha = 1, 2, \dots, p-1$, и обозначим через $\Delta_\alpha = (t_{j+(\alpha-1)/p}, t_{j+\alpha/p}]$ полуинтервал, где $\alpha = 1, 2, \dots, p$.

Уравнение (1) перепишем в виде

$$\mathfrak{R}u = \frac{\partial u}{\partial t} - Lu - f = 0,$$

или

$$\sum_{\alpha=1}^p \mathfrak{R}_\alpha u = 0, \quad \mathfrak{R}_\alpha u = \frac{1}{p} \frac{\partial u}{\partial t} - L_\alpha u - f_\alpha, \quad \sum_{\alpha=1}^p f_\alpha = f,$$

где $f_\alpha(x, t)$, $\alpha = 1, 2, \dots, p$, — произвольные функции, обладающие той же гладкостью, что и $f(x, t)$, удовлетворяющие условию нормировки $\sum_{\alpha=1}^p f_\alpha = f$.

На каждом полуинтервале Δ_α , $\alpha = 1, 2, \dots, p$, будем последовательно решать задачи

$$\mathfrak{R}_\alpha \vartheta_\alpha = \frac{1}{p} \frac{\partial \vartheta_\alpha}{\partial t} - L_\alpha \vartheta_\alpha - f_\alpha = 0, \quad x \in G, t \in \Delta_\alpha, \alpha = 1, 2, \dots, p, \quad (5)$$

$$\begin{cases} \vartheta_\alpha = \mu_{-\alpha}, & x_\alpha = 0, \\ \vartheta_\alpha = \mu_{+\alpha}, & x_\alpha = l, \end{cases}$$

полагая при этом [16, стр. 522]

$$\vartheta_{(1)}(x, 0) = u_0(x), \quad \vartheta_{(1)}^j(x, t_j) = \vartheta_{(p)}^{j-1}(x, t_j), \quad j = 1, 2, \dots, j_0,$$

$$\vartheta_{(\alpha)}^j(x, t_{j+(\alpha-1)/p}) = \vartheta_{(\alpha-1)}^j(x, t_{j+(\alpha-1)/p}), \quad \alpha = 2, \dots, p, \quad j = 0, 1, 2, \dots, j_0 - 1,$$

$\mu_{-\alpha} = \mu(x', 0, t)$, $\mu_{+\alpha} = \mu(x', l, t)$ — непрерывные функции.

Аналогично [16, стр. 401] получим для уравнения (5) номера α монотонную схему второго порядка аппроксимации по h . Для этого рассмотрим уравнение (5) номера α с возмущенным оператором \tilde{L}_α :

$$\frac{1}{p} \frac{\partial \vartheta_\alpha}{\partial t} = \tilde{L}_\alpha \vartheta_\alpha + f_\alpha, \quad t \in \Delta_\alpha, \quad (6)$$

где

$$\tilde{L}_\alpha \vartheta_\alpha = \varkappa_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(k_\alpha(x, t) \frac{\partial \vartheta_\alpha}{\partial x_\alpha} \right) + r_\alpha(x, t) \frac{\partial \vartheta_\alpha}{\partial x_\alpha} - q_\alpha \vartheta_\alpha - \int_0^l H_\alpha(x, t) \vartheta_\alpha dx_\alpha;$$

$$\varkappa_\alpha = \frac{1}{1 + R_\alpha}, \quad R_\alpha = \frac{h|r_\alpha|}{2k_\alpha} \text{ — разностное число Рейнольдса; } r_\alpha = r_\alpha^+ + r_\alpha^-,$$

$$r_\alpha^+ = (r_\alpha + |r_\alpha|)/2 \geq 0, \quad r_\alpha^- = (r_\alpha - |r_\alpha|)/2 \leq 0; \quad b_\alpha^+ = r_\alpha^+/k_\alpha, \quad b_\alpha^- = r_\alpha^-/k_\alpha.$$

Аппроксимируем каждое уравнение (6) номера α неявной схемой на полуинтервале Δ_α , тогда получим цепочку из p одномерных разностных уравнений:

$$\frac{y^{j+\alpha/p} - y^{j+(\alpha-1)/p}}{\tau} = \tilde{\Lambda}_\alpha y^{j+\alpha/p} + \varphi_\alpha^{j+\alpha/p}, \quad x_\alpha \in \omega_h, \quad \alpha = 1, 2, \dots, p, \quad (7)$$

где

$$\tilde{\Lambda}_\alpha y^{j+\alpha/p} = \varkappa_\alpha a_\alpha y_{\bar{x}_\alpha x_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}} + b_\alpha^+ a_\alpha y_{x_\alpha}^{j+\alpha/p} + b_\alpha^- a_\alpha y_{\bar{x}_\alpha}^{j+\alpha/p} - d_\alpha y^{j+\alpha/p} - \sum_{i_\alpha=0}^N \delta_{\alpha, i_\alpha} y_{i_\alpha}^{j+\alpha/p} \bar{h};$$

$$a_\alpha = k_\alpha(\bar{t}), \quad r_\alpha = r_\alpha(\bar{t}), \quad d_\alpha = q_\alpha(x, \bar{t}), \quad \delta_\alpha = H_\alpha(x_\alpha, \bar{t}), \quad \varphi_\alpha = f_\alpha(x, \bar{t}), \quad \bar{t} = t_{j+1/2},$$

$$\bar{h} = \begin{cases} h, & i_\alpha = 1, 2, \dots, N-1, \\ h/2, & i_\alpha = 0, N; \end{cases}$$

$x = (x_1, x_2, \dots, x_p)$, $x' = (x_1, x_2, \dots, x_{\alpha-1}, x_{\alpha+1}, \dots, x_p)$; $\gamma_{h,\alpha}$ — множество граничных по направлению x_α узлов.

К уравнению (7) присоединим граничные и начальные условия

$$\begin{cases} y^{j+\alpha/p} = \mu_{-\alpha}, & x_\alpha = 0, \\ y^{j+\alpha/p} = \mu_{+\alpha}, & x_\alpha = l, \end{cases} \quad (8)$$

$$y(x, 0) = u_0(x). \quad (9)$$

3. Погрешность аппроксимации локально-одномерной схемы. Характеристикой точности решения локально-одномерной схемы является разность $z^{j+\alpha/p} = y^{j+\alpha/p} - u^{j+\alpha/p}$, где $u^{j+\alpha/p}$ — решение исходной задачи (1)–(3). Подставляя $y^{j+\alpha/p} = z^{j+\alpha/p} + u^{j+\alpha/p}$ в схему (7)–(9), получим задачу для погрешности $z^{j+\alpha/p}$:

$$\frac{z^{j+\alpha/p} - z^{j+(\alpha-1)/p}}{\tau} = \tilde{\Lambda}_\alpha z^{j+\alpha/p} + \psi_\alpha^{j+\alpha/p}, \quad (10)$$

$$z^{j+\alpha/p} = 0 \text{ при } x \in \gamma_{h,\alpha}, \quad z(x, 0) = 0,$$

$$\text{где } \psi_\alpha^{j+\alpha/p} = \tilde{\Lambda}_\alpha u^{j+\alpha/p} + \varphi_\alpha^{j+\alpha/p} - \frac{u^{j+\alpha/p} - u^{j+\alpha-1/p}}{\tau}.$$

Обозначив через $\dot{\psi}_\alpha = \left(L_\alpha u + f_\alpha - \frac{1}{p} \frac{\partial u}{\partial t} \right)^{j+1/2}$ и замечая, что $\sum_{\alpha=1}^p \dot{\psi}_\alpha = 0$,

если $\sum_{\alpha=1}^p f_\alpha = f$, представим погрешность в виде суммы $\psi_\alpha^{j+\alpha/p} = \dot{\psi}_\alpha + \psi_\alpha^*$:

$$\begin{aligned} \psi_\alpha^{j+\alpha/p} &= \tilde{\Lambda}_\alpha u^{j+\alpha/p} + \varphi_\alpha^{j+\alpha/p} - \frac{u^{j+\alpha/p} - u^{j+(\alpha-1)/p}}{\tau} + \dot{\psi}_\alpha - \dot{\psi}_\alpha = \\ &= (\tilde{\Lambda}_\alpha u^{j+\alpha/p} - L_\alpha u^{j+1/2}) + (\varphi_\alpha^{j+\alpha/p} - f_\alpha^{j+1/2}) - \end{aligned}$$

$$- \left(\frac{u^{j+\alpha/p} - u^{j+(\alpha-1)/p}}{\tau} - \frac{1}{p} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^{j+1/2} \right) + \dot{\psi}_\alpha = \dot{\psi}_\alpha + \psi_\alpha^*.$$

Очевидно, что $\psi_\alpha^* = O(h^2 + \tau)$, $\dot{\psi}_\alpha = O(1)$, $\sum_{\alpha=1}^p \psi_\alpha^{j+\alpha/p} = \sum_{\alpha=1}^p \dot{\psi}_\alpha + \sum_{\alpha=1}^p \psi_\alpha^* = O(h^2 + \tau)$.

4. Устойчивость локально-одномерной схемы. Априорную оценку решения схемы (7)–(9) найдем методом энергетических неравенств, для этого введем скалярные произведения и нормы в следующем виде:

$$\frac{1}{p} y_{\bar{t}}^{(\alpha)} = \frac{y^{j+\alpha/p} - y^{j+(\alpha-1)/p}}{\tau}, \quad (u, v)_\alpha = \sum_{i_\alpha=1}^{N-1} u_{i_\alpha} v_{i_\alpha} h, \quad \|y^{(\alpha)}\|_{L_2(\alpha)}^2 = \sum_{i_\alpha=1}^{N-1} y_{i_\alpha}^2 h,$$

$$(u, v) = \sum_{x \in \omega_h} uvH, \quad H = h^p, \quad \|y^{(\alpha)}\|_{L_2(\omega_h)}^2 = \sum_{i_\beta \neq i_\alpha} \|y^{(\alpha)}\|_{L_2(\alpha)}^2 H/h,$$

$$[u, v]_\alpha = \sum_{i_\alpha=0}^N u_{i_\alpha} v_{i_\alpha} \bar{h}, \quad \|[y^{(\alpha)}]\|_{L_2(\alpha)}^2 = \sum_{i_\alpha=0}^N y_{i_\alpha}^2 \bar{h},$$

$$[u, v] = \sum_{x \in \bar{\omega}_h} uv\bar{H}, \quad \bar{H} = \bar{h}^p, \quad \|[y^{(\alpha)}]\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 = \sum_{i_\beta \neq i_\alpha} \|[y^{(\alpha)}]\|_{L_2(\alpha)}^2 \bar{H}/\bar{h}.$$

Умножим теперь уравнение (7) на $y^{(\alpha)}h$, где $y^{(\alpha)} = y^{j+\alpha/p}$, и просуммируем по s_α от η_α до ξ_α :

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} \sum_{s_\alpha=\eta_\alpha}^{\xi_\alpha} y_{\bar{t}, s_\alpha}^{(\alpha)} y_{s_\alpha}^{(\alpha)} h &= \sum_{s_\alpha=\eta_\alpha}^{\xi_\alpha} \tilde{\Lambda}_\alpha y_{s_\alpha}^{(\alpha)} y_{s_\alpha}^{(\alpha)} h + \\ &+ \sum_{s_\alpha=\eta_\alpha}^{\xi_\alpha} \varphi_{(\alpha), s_\alpha} y_{s_\alpha}^{(\alpha)} h, \quad 0 \leq \eta_\alpha \leq \xi_\alpha \leq N. \end{aligned} \quad (11)$$

Преобразуем каждое слагаемое тождества (11):

$$\frac{1}{p} \sum_{s_\alpha=\eta_\alpha}^{\xi_\alpha} y_{\bar{t}, s_\alpha}^{(\alpha)} y_{s_\alpha}^{(\alpha)} h = \frac{1}{2p} \left(\sum_{s_\alpha=\eta_\alpha}^{\xi_\alpha} (y_{s_\alpha}^{(\alpha)})^2 h \right)_{\bar{t}} + \frac{\tau}{2p} \left(\sum_{s_\alpha=\eta_\alpha}^{\xi_\alpha} (y_{\bar{t}, s_\alpha}^{(\alpha)})^2 h \right), \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \sum_{s_\alpha=\eta_\alpha}^{\xi_\alpha} \tilde{\Lambda}_\alpha y_{s_\alpha}^{(\alpha)} y_{s_\alpha}^{(\alpha)} h &= \varkappa_\alpha a_\alpha \sum_{s_\alpha=\eta_\alpha}^{\xi_\alpha} y_{\bar{x}_\alpha x_\alpha, s_\alpha} y_{s_\alpha}^{(\alpha)} h + b_\alpha^+ a_\alpha \sum_{s_\alpha=\eta_\alpha}^{\xi_\alpha} y_{x_\alpha, s_\alpha} y_{s_\alpha}^{(\alpha)} h + \\ &+ b_\alpha^- a_\alpha \sum_{s_\alpha=\eta_\alpha}^{\xi_\alpha} y_{\bar{x}_\alpha, s_\alpha} y_{s_\alpha}^{(\alpha)} h - \sum_{s_\alpha=\eta_\alpha}^{\xi_\alpha} d_\alpha (y_{s_\alpha}^{(\alpha)})^2 h - \sum_{s_\alpha=\eta_\alpha}^{\xi_\alpha} \left(y_{s_\alpha}^{(\alpha)} \sum_{i_\alpha=0}^N \delta_{\alpha, i_\alpha} y_{i_\alpha}^{j+\alpha/p} \bar{h} \right) h = \\ &= -\varkappa_\alpha a_\alpha \sum_{s_\alpha=\eta_\alpha}^{\xi_\alpha+1} (y_{\bar{x}_\alpha, s_\alpha})^2 h + \varkappa_\alpha a_\alpha (y_{\bar{x}_\alpha, \xi_\alpha+1} y_{\xi_\alpha+1}^{(\alpha)} - y_{\bar{x}_\alpha, \eta_\alpha} y_{\eta_\alpha-1}^{(\alpha)}) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + b_{\alpha}^{+} a_{\alpha} \sum_{s_{\alpha}=\eta_{\alpha}}^{\xi_{\alpha}} y_{x_{\alpha},s_{\alpha}}^{(\alpha)} y_{s_{\alpha}}^{(\alpha)} h + b_{\alpha}^{-} a_{\alpha} \sum_{s_{\alpha}=\eta_{\alpha}}^{\xi_{\alpha}} y_{\bar{x}_{\alpha},s_{\alpha}}^{(\alpha)} y_{s_{\alpha}}^{(\alpha)} h - \sum_{s_{\alpha}=\eta_{\alpha}}^{\xi_{\alpha}} d_{\alpha,s_{\alpha}} (y_{s_{\alpha}}^{(\alpha)})^2 h - \\
 & - \sum_{s_{\alpha}=\eta_{\alpha}}^{\xi_{\alpha}} \left(y_{s_{\alpha}}^{(\alpha)} \sum_{i_{\alpha}=0}^N \delta_{\alpha,i_{\alpha}} y_{i_{\alpha}}^{j+\alpha/p} \bar{h} \right) h, \quad (13)
 \end{aligned}$$

$$\sum_{s_{\alpha}=\eta_{\alpha}}^{\xi_{\alpha}} \varphi_{(\alpha),s_{\alpha}} y_{s_{\alpha}}^{(\alpha)} h \leq \frac{1}{2} \sum_{s_{\alpha}=\eta_{\alpha}}^{\xi_{\alpha}} \varphi_{(\alpha),s_{\alpha}}^2 h + \frac{1}{2} \sum_{s_{\alpha}=\eta_{\alpha}}^{\xi_{\alpha}} (y_{s_{\alpha}}^{(\alpha)})^2 h. \quad (14)$$

Преобразуем отдельно выражение $y_{\bar{x}_{\alpha},\xi_{\alpha}+1}^{(\alpha)} y_{\xi_{\alpha}+1}^{(\alpha)} - y_{\bar{x}_{\alpha},\eta_{\alpha}}^{(\alpha)} y_{\eta_{\alpha}-1}^{(\alpha)}$, тогда с учетом $(y^2)_{\bar{x}_{\alpha}} = 2y_{\bar{x}_{\alpha}} y^{(\alpha)} - h y_{\bar{x}_{\alpha}}^2$ получим

$$\begin{aligned}
 & y_{\bar{x}_{\alpha},\xi_{\alpha}+1}^{(\alpha)} y_{\xi_{\alpha}+1}^{(\alpha)} - y_{\bar{x}_{\alpha},\eta_{\alpha}}^{(\alpha)} y_{\eta_{\alpha}-1}^{(\alpha)} = \\
 & = \frac{1}{2} \left((y^2)_{\bar{x}_{\alpha},\xi_{\alpha}+1} + y_{\bar{x}_{\alpha},\xi_{\alpha}+1}^2 h - (y^2)_{\bar{x}_{\alpha},\eta_{\alpha}} + y_{\bar{x}_{\alpha},\eta_{\alpha}}^2 h \right). \quad (15)
 \end{aligned}$$

Учитывая преобразования (12)–(15), из (11) находим

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2p} \left(\sum_{s_{\alpha}=\eta_{\alpha}}^{\xi_{\alpha}} (y_{s_{\alpha}}^{(\alpha)})^2 h \right)_{\bar{t}} + \frac{\tau}{2p} \left(\sum_{s_{\alpha}=\eta_{\alpha}}^{\xi_{\alpha}} (y_{\bar{t},s_{\alpha}}^{(\alpha)})^2 h \right) + \frac{\varkappa_{\alpha} a_{\alpha}}{2} \sum_{s_{\alpha}=\eta_{\alpha}+1}^{\xi_{\alpha}} (y_{\bar{x}_{\alpha},s_{\alpha}})^2 h \leq \\
 & \leq \frac{\varkappa_{\alpha} a_{\alpha}}{2} (y^2)_{\bar{x}_{\alpha},\xi_{\alpha}+1} - \frac{\varkappa_{\alpha} a_{\alpha}}{2} (y^2)_{\bar{x}_{\alpha},\eta_{\alpha}} + b_{\alpha}^{+} a_{\alpha} \sum_{s_{\alpha}=\eta_{\alpha}}^{\xi_{\alpha}} y_{x_{\alpha},s_{\alpha}}^{(\alpha)} y_{s_{\alpha}}^{(\alpha)} h + \\
 & + b_{\alpha}^{-} a_{\alpha} \sum_{s_{\alpha}=\eta_{\alpha}}^{\xi_{\alpha}} y_{\bar{x}_{\alpha},s_{\alpha}}^{(\alpha)} y_{s_{\alpha}}^{(\alpha)} h - \sum_{s_{\alpha}=\eta_{\alpha}}^{\xi_{\alpha}} d_{\alpha,s_{\alpha}} (y_{s_{\alpha}}^{(\alpha)})^2 h - \\
 & - \sum_{s_{\alpha}=\eta_{\alpha}}^{\xi_{\alpha}} \left(y_{s_{\alpha}}^{(\alpha)} \sum_{i_{\alpha}=0}^N \delta_{\alpha,i_{\alpha}} y_{i_{\alpha}}^{j+\alpha/p} \bar{h} \right) h + \frac{1}{2} \sum_{s_{\alpha}=\eta_{\alpha}}^{\xi_{\alpha}} \varphi_{(\alpha),s_{\alpha}}^2 h + \frac{1}{2} \sum_{s_{\alpha}=\eta_{\alpha}}^{\xi_{\alpha}} (y_{s_{\alpha}}^{(\alpha)})^2 h. \quad (16)
 \end{aligned}$$

Умножим теперь (16) на h и просуммируем по ξ_{α} от η_{α} до N , затем полученное неравенство умножим на h и просуммируем по η_{α} от 0 до N . Тогда получим

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2p} \left(\sum_{\eta_{\alpha}=0}^N h \sum_{\xi_{\alpha}=\eta_{\alpha}}^N h \sum_{s_{\alpha}=\eta_{\alpha}}^{\xi_{\alpha}} (y_{s_{\alpha}}^{(\alpha)})^2 h \right)_{\bar{t}} + \frac{\varkappa_{\alpha} a_{\alpha}}{2} \sum_{\eta_{\alpha}=0}^N h \sum_{\xi_{\alpha}=\eta_{\alpha}}^N h \sum_{s_{\alpha}=\eta_{\alpha}+1}^{\xi_{\alpha}} (y_{\bar{x}_{\alpha},s_{\alpha}})^2 h \leq \\
 & \leq \frac{\varkappa_{\alpha} a_{\alpha}}{2} \sum_{\eta_{\alpha}=0}^N h \sum_{\xi_{\alpha}=\eta_{\alpha}}^N (y^2)_{\bar{x}_{\alpha},\xi_{\alpha}+1} h - \frac{\varkappa_{\alpha} a_{\alpha}}{2} \sum_{\eta_{\alpha}=0}^N h \sum_{\xi_{\alpha}=\eta_{\alpha}}^N (y^2)_{\bar{x}_{\alpha},\eta_{\alpha}} h + \\
 & + b_{\alpha}^{+} a_{\alpha} \sum_{\eta_{\alpha}=0}^N h \sum_{\xi_{\alpha}=\eta_{\alpha}}^N h \sum_{s_{\alpha}=\eta_{\alpha}}^{\xi_{\alpha}} y_{x_{\alpha},s_{\alpha}}^{(\alpha)} y_{s_{\alpha}}^{(\alpha)} h + b_{\alpha}^{-} a_{\alpha} \sum_{\eta_{\alpha}=1}^N h \sum_{\xi_{\alpha}=\eta_{\alpha}}^N h \sum_{s_{\alpha}=\eta_{\alpha}}^{\xi_{\alpha}} y_{\bar{x}_{\alpha},s_{\alpha}}^{(\alpha)} y_{s_{\alpha}}^{(\alpha)} h -
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \sum_{\eta_\alpha=0}^N h \sum_{\xi_\alpha=\eta_\alpha}^N h \sum_{s_\alpha=\eta_\alpha}^{\xi_\alpha} \left(y_{s_\alpha}^{(\alpha)} \sum_{i_\alpha=0}^N \delta_{\alpha, i_\alpha} y_{i_\alpha}^{j+\alpha/p} \hbar \right) h + \frac{1}{2} \sum_{\eta_\alpha=0}^N h \sum_{\xi_\alpha=\eta_\alpha}^N h \sum_{s_\alpha=\eta_\alpha}^{\xi_\alpha} \varphi_{(\alpha), s_\alpha}^2 h + \\
 & + M_1 \sum_{\eta_\alpha=0}^N h \sum_{\xi_\alpha=\eta_\alpha}^N h \sum_{s_\alpha=\eta_\alpha}^{\xi_\alpha} (y_{s_\alpha}^{(\alpha)})^2 h. \quad (17)
 \end{aligned}$$

Преобразуем сумму $\sum_{\eta_\alpha=0}^N h \sum_{\xi_\alpha=\eta_\alpha}^N h \sum_{s_\alpha=\eta_\alpha}^{\xi_\alpha} \varphi_{(\alpha), s_\alpha}^2 h$ следующим образом:

$$\begin{aligned}
 \sum_{\eta_\alpha=0}^N h \sum_{\xi_\alpha=\eta_\alpha}^N h \sum_{s_\alpha=\eta_\alpha}^{\xi_\alpha} \varphi_{(\alpha), s_\alpha}^2 h &= \sum_{\eta_\alpha=0}^N h \sum_{s_\alpha=\eta_\alpha}^N \varphi_{(\alpha), s_\alpha}^2 h \sum_{\xi_\alpha=s_\alpha}^N h = \\
 &= \sum_{\eta_\alpha=0}^N h \sum_{s_\alpha=\eta_\alpha}^N (l - x_\alpha) \varphi_{(\alpha), s_\alpha}^2 h = \sum_{s_\alpha=0}^N (l - x_\alpha) \varphi_{(\alpha), s_\alpha}^2 h \sum_{\eta_\alpha=0}^{s_\alpha} h = \\
 &= \sum_{s_\alpha=0}^N x_\alpha (l - x_\alpha) \varphi_{(\alpha), s_\alpha}^2 h = \sum_{s_\alpha=1}^{N-1} x_\alpha (l - x_\alpha) \varphi_{(\alpha), s_\alpha}^2 h.
 \end{aligned}$$

Учитывая последнее, из (17) находим

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2p} \left(\sum_{s_\alpha=1}^{N-1} x_\alpha (l - x_\alpha) (y_{s_\alpha}^{(\alpha)})^2 h \right)_{\bar{t}} + \frac{\varkappa_\alpha a_\alpha}{2} \sum_{s_\alpha=1}^{N-1} x_\alpha (l - x_\alpha) (y_{\bar{x}_\alpha, s_\alpha})^2 h \leq \\
 & \leq \frac{\varkappa_\alpha a_\alpha}{2} \sum_{s_\alpha=0}^{N-1} x_\alpha (y^2)_{\bar{x}_\alpha, s_\alpha+1} h - \frac{\varkappa_\alpha a_\alpha}{2} \sum_{s_\alpha=1}^N (l - x_\alpha) (y^2)_{\bar{x}_\alpha, s_\alpha} h + \\
 & + b_\alpha^+ a_\alpha \sum_{s_\alpha=1}^{N-1} x_\alpha (l - x_\alpha) y_{\bar{x}_\alpha, s_\alpha}^{(\alpha)} y_{s_\alpha}^{(\alpha)} h + b_\alpha^- a_\alpha \sum_{s_\alpha=1}^{N-1} x_\alpha (l - x_\alpha) y_{\bar{x}_\alpha, s_\alpha}^{(\alpha)} y_{s_\alpha}^{(\alpha)} h - \\
 & - \sum_{s_\alpha=1}^{N-1} x_\alpha (l - x_\alpha) \left(y_{s_\alpha}^{(\alpha)} \sum_{i_\alpha=0}^N \delta_{\alpha, i_\alpha} y_{i_\alpha}^{j+\alpha/p} \hbar \right) h + \frac{1}{2} \sum_{s_\alpha=1}^{N-1} x_\alpha (l - x_\alpha) \varphi_{(\alpha), s_\alpha}^2 h + \\
 & + M_1 \sum_{s_\alpha=1}^{N-1} x_\alpha (l - x_\alpha) (y_{s_\alpha}^{(\alpha)})^2 h. \quad (18)
 \end{aligned}$$

Преобразуем первое и второе слагаемые правой части (18):

$$\begin{aligned}
 & \frac{\varkappa_\alpha a_\alpha}{2} \sum_{s_\alpha=0}^{N-1} x_\alpha (y^2)_{\bar{x}_\alpha, s_\alpha+1} h - \frac{\varkappa_\alpha a_\alpha}{2} \sum_{s_\alpha=1}^N (l - x_\alpha) (y^2)_{\bar{x}_\alpha, s_\alpha} h = \\
 & = \frac{\varkappa_\alpha a_\alpha}{2} \sum_{s_\alpha=0}^{N-1} x_\alpha (y^2)_{\bar{x}_\alpha, s_\alpha+1} h + \frac{\varkappa_\alpha a_\alpha}{2} \sum_{s_\alpha=1}^N x_\alpha (y^2)_{\bar{x}_\alpha, s_\alpha} h -
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{\varkappa_\alpha a_\alpha l}{2} \sum_{s_\alpha=1}^N (y^2)_{\bar{x}_\alpha, s_\alpha} h = \\
 & = \frac{\varkappa_\alpha a_\alpha}{2} \sum_{s_\alpha=1}^N (2x_\alpha - h)(y^2)_{\bar{x}_\alpha, s_\alpha} h - \frac{\varkappa_\alpha a_\alpha l}{2} \sum_{s_\alpha=1}^N (y^2)_{\bar{x}_\alpha, s_\alpha} h = \\
 & = - \frac{\varkappa_\alpha a_\alpha}{2} \sum_{s_\alpha=0}^{N-1} (2x_\alpha + h)_{\bar{x}_\alpha, s_\alpha} (y_{s_\alpha}^2) h + \frac{\varkappa_\alpha a_\alpha}{2} \sum_{s_\alpha=1}^N ((2x_\alpha + h)y^2)_{\bar{x}_\alpha, s_\alpha} h - \\
 & \quad - \frac{\varkappa_\alpha a_\alpha l}{2} \sum_{s_\alpha=1}^N (y^2)_{\bar{x}_\alpha, s_\alpha} h \leq \\
 & \leq \frac{\varkappa_\alpha a_\alpha}{2} \sum_{s_\alpha=1}^N ((2x_\alpha + h - l)y^2)_{\bar{x}_\alpha, s_\alpha} h - \varkappa_\alpha a_\alpha \sum_{s_\alpha=0}^N (y_{s_\alpha}^2) h \leq \\
 & \leq -\varkappa_\alpha a_\alpha \sum_{s_\alpha=0}^N (y_{s_\alpha}^2) h + \varkappa_\alpha a_\alpha l (y_N^2 + y_0^2). \quad (19)
 \end{aligned}$$

С учетом граничных условий (2) и (19) из (18) получим

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2p} \left(\sum_{s_\alpha=1}^{N-1} x_\alpha (l - x_\alpha) (y_{s_\alpha}^{(\alpha)})^2 h \right)_{\bar{t}} + \frac{\varkappa_\alpha a_\alpha}{2} \sum_{s_\alpha=1}^{N-1} x_\alpha (l - x_\alpha) (y_{\bar{x}_\alpha, s_\alpha})^2 h + \\
 & \quad + \varkappa_\alpha a_\alpha \sum_{s_\alpha=0}^N (y_{s_\alpha}^2) h \leq \\
 & \leq b_\alpha^+ a_\alpha \sum_{s_\alpha=1}^{N-1} x_\alpha (l - x_\alpha) y_{x_\alpha, s_\alpha}^{(\alpha)} y_{s_\alpha}^{(\alpha)} h + b_\alpha^- a_\alpha \sum_{s_\alpha=1}^{N-1} x_\alpha (l - x_\alpha) y_{\bar{x}_\alpha, s_\alpha}^{(\alpha)} y_{s_\alpha}^{(\alpha)} h - \\
 & - \sum_{s_\alpha=1}^{N-1} x_\alpha (l - x_\alpha) \left(y_{s_\alpha}^{(\alpha)} \sum_{i_\alpha=0}^N \delta_{\alpha, i_\alpha} y_{i_\alpha}^{j+\alpha/p} h \right) h + M_1 \sum_{s_\alpha=1}^{N-1} x_\alpha (l - x_\alpha) (y_{s_\alpha}^{(\alpha)})^2 h + \\
 & \quad + M_2 \left(\sum_{s_\alpha=1}^{N-1} \varphi_{(\alpha), s_\alpha}^2 h + \mu_{-\alpha}^2 + \mu_{+\alpha}^2 \right). \quad (20)
 \end{aligned}$$

Оценим слагаемые правой части (20) с помощью неравенства Коши с ε , тогда получим

$$\begin{aligned}
 & b_\alpha^+ a_\alpha \sum_{s_\alpha=1}^{N-1} x_\alpha (l - x_\alpha) y_{x_\alpha, s_\alpha}^{(\alpha)} y_{s_\alpha}^{(\alpha)} h + b_\alpha^- a_\alpha \sum_{s_\alpha=1}^{N-1} x_\alpha (l - x_\alpha) y_{\bar{x}_\alpha, s_\alpha}^{(\alpha)} y_{s_\alpha}^{(\alpha)} h \leq \\
 & \leq M_3 \left(\varepsilon \|\rho_\alpha y_{\bar{x}_\alpha, s_\alpha}\|_{L_2(\alpha)}^2 + \frac{1}{4\varepsilon} \|\rho_\alpha y^{(\alpha)}\|_{L_2(\alpha)}^2 \right), \quad (21)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \sum_{s_\alpha=1}^{N-1} x_\alpha(l-x_\alpha) \left(y_{s_\alpha}^{(\alpha)} \sum_{i_\alpha=0}^N \delta_{\alpha, i_\alpha} y_{i_\alpha}^{(\alpha)} \hbar \right) h \leq \\
 & \leq \frac{1}{4\varepsilon_1} \sum_{s_\alpha=1}^{N-1} x_\alpha(l-x_\alpha) (y_{s_\alpha}^{(\alpha)})^2 h + \varepsilon_1 \sum_{s_\alpha=1}^{N-1} x_\alpha(l-x_\alpha) \left(\sum_{i_\alpha=0}^N \delta_{\alpha, i_\alpha} y_{i_\alpha}^{(\alpha)} \hbar \right)^2 h \leq \\
 & \leq \frac{1}{4\varepsilon_1} \sum_{s_\alpha=1}^{N-1} x_\alpha(l-x_\alpha) (y_{s_\alpha}^{(\alpha)})^2 h + \varepsilon_1 M_3 \sum_{s_\alpha=1}^{N-1} \left(x_\alpha(l-x_\alpha) \sum_{i_\alpha=0}^N (y_{i_\alpha}^{(\alpha)})^2 \hbar \right) h \leq \\
 & \leq \frac{1}{4\varepsilon_1} \sum_{s_\alpha=1}^{N-1} x_\alpha(l-x_\alpha) (y_{s_\alpha}^{(\alpha)})^2 h + \varepsilon_1 M_4 \sum_{s_\alpha=0}^N y_{s_\alpha}^2 h \leq \\
 & \leq \frac{1}{4\varepsilon_1} \|\rho y^{(\alpha)}\|_{L_2(\alpha)}^2 + \varepsilon_1 M_4 \| [y^{(\alpha)}] \|_{L_2(\alpha)}^2, \quad (22)
 \end{aligned}$$

где $\rho_\alpha = \sqrt{x_\alpha(l-x_\alpha)}$, $\rho_1 = \rho_2 = \dots = \rho_p$.
Учитывая (21), (22), из (20) находим

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2p} (\|\rho_\alpha y^{(\alpha)}\|_{L_2(\alpha)}^2)_{\bar{t}} + M_5 \|\rho_\alpha y_{\bar{x}_\alpha}\|_{L_2(\alpha)}^2 + \| [y^{(\alpha)}] \|_{L_2(\alpha)}^2 \leq \\
 & \leq \varepsilon M_6 \|\rho_\alpha y_{\bar{x}_\alpha}\|_{L_2(\alpha)}^2 + \varepsilon_1 M_4 \| [y^{(\alpha)}] \|_{L_2(\alpha)}^2 + \\
 & + M_7(\varepsilon) \|\rho_\alpha y^{(\alpha)}\|_{L_2(\alpha)}^2 + M_2 (\|\varphi(\alpha)\|_{L_2(\alpha)}^2 + \mu_{-\alpha}^2 + \mu_{+\alpha}^2),
 \end{aligned}$$

где $\|\cdot\|_{L_2(\alpha)}$ означает, что норма берется по переменной x_α при фиксированных значениях остальных переменных.

Выбирая $\varepsilon = M_5/(2M_6)$, $\varepsilon_1 = 1/(2M_4)$, из последнего получим

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{p} (\|\rho_\alpha y^{(\alpha)}\|_{L_2(\alpha)}^2)_{\bar{t}} + \|\rho_\alpha y_{\bar{x}_\alpha}\|_{L_2(\alpha)}^2 + \| [y^{(\alpha)}] \|_{L_2(\alpha)}^2 \leq \\
 & \leq M_8 \|\rho_\alpha y^{(\alpha)}\|_{L_2(\alpha)}^2 + M_9 (\|\varphi(\alpha)\|_{L_2(\alpha)}^2 + \mu_{-\alpha}^2 + \mu_{+\alpha}^2). \quad (23)
 \end{aligned}$$

Подставляя после суммирования по $i_\beta \neq i_\alpha$, $\beta = 1, 2, \dots, p$ полученные оценки в тождество (23), получим неравенство

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{p} (\|\rho_\alpha y^{(\alpha)}\|_{L_2(\omega_h)}^2)_{\bar{t}} + \|\rho_\alpha y_{\bar{x}_\alpha}\|_{L_2(\omega_h)}^2 + \| [y^{(\alpha)}] \|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 \leq M_8 \|\rho_\alpha y^{(\alpha)}\|_{L_2(\omega_h)}^2 + \\
 & + M_9 \left(\|\varphi^{j+\alpha/p}\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 + \sum_{i_\beta \neq i_\alpha} (\mu_{-\alpha}^2(t_j) + \mu_{+\alpha}^2(t_j)) \bar{H}/\hbar \right). \quad (24)
 \end{aligned}$$

Просуммируем (24) сначала по $\alpha = 1, 2, \dots, p$:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{p} \left(\sum_{\alpha=1}^p \|\rho_\alpha y^{(\alpha)}\|_{L_2(\omega_h)}^2 \right)_{\bar{t}} + \sum_{\alpha=1}^p (\|\rho_\alpha y_{\bar{x}_\alpha}^{j+\alpha/p}\|_{L_2(\omega_h)}^2 + \| [y^{j+\alpha/p}] \|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2) \leq \\
 & \leq M_8 \sum_{\alpha=1}^p \|\rho_\alpha y^{j+\alpha/p}\|_{L_2(\omega_h)}^2 +
 \end{aligned}$$

$$+ M_9 \sum_{\alpha=1}^p \left(\|\varphi^{j+\alpha/p}\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 + \sum_{i_{\beta} \neq i_{\alpha}} (\mu_{-\alpha}^2(t_j) + \mu_{+\alpha}^2(t_j)) \bar{H}/\bar{h} \right),$$

а затем, умножая обе части на τ и суммируя по j' от 0 до j , получаем

$$\begin{aligned} & \|\rho_p y^{j+1}\|_{L_2(\omega_h)}^2 + \sum_{j'=0}^j \tau \sum_{\alpha=1}^p (\|\rho_{\alpha} y_{\bar{x}_{\alpha}}^{j'+\alpha/p}\|_{L_2(\omega_h)}^2 + \|y^{j'+\alpha/p}\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2) \leq \\ & \leq M_{10} \sum_{j'=0}^j \tau \sum_{\alpha=1}^p \|\rho_{\alpha} y^{j'+\alpha/p}\|_{L_2(\omega_h)}^2 + M_{11} \left(\|y^0\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 + \right. \\ & \left. + \sum_{j'=0}^j \tau \sum_{\alpha=1}^p \left(\|\varphi^{j'+\alpha/p}\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 + \sum_{i_{\beta} \neq i_{\alpha}} (\mu_{-\alpha}^2(t_{j'}) + \mu_{+\alpha}^2(t_{j'})) \bar{H}/\bar{h} \right) \right). \quad (25) \end{aligned}$$

Из (25) имеем

$$\|\rho_p y^{j+1}\|_{L_2(\omega_h)}^2 \leq M_{10} \sum_{j'=0}^j \tau \sum_{\alpha=1}^p \|\rho_{\alpha} y^{j'+\alpha/p}\|_{L_2(\omega_h)}^2 + M_{11} F^j, \quad (26)$$

где

$$F^j = \sum_{j'=0}^j \tau \sum_{\alpha=1}^p \left(\|\varphi^{j'+\alpha/p}\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 + \sum_{i_{\beta} \neq i_{\alpha}} (\mu_{-\alpha}^2 + \mu_{+\alpha}^2) \bar{H}/\bar{h} \right) + \|y^0\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2.$$

Покажем, что имеет место неравенство

$$\max_{1 \leq \alpha \leq p} \|\rho_{\alpha} y^{j+\alpha/p}\|_{L_2(\omega_h)}^2 \leq \nu_1 \sum_{j'=0}^{j-1} \tau \max_{1 \leq \alpha \leq p} \|\rho_{\alpha} y^{j'+\alpha/p}\|_{L_2(\omega_h)}^2 + \nu_2 F^j,$$

где ν_1, ν_2 — известные положительные постоянные.

Перепишем неравенство (24) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \|\rho_{\alpha} y^{j+\alpha/p}\|_{L_2(\omega_h)}^2 & \leq \|\rho_{\alpha} y^{j+(\alpha-1)/p}\|_{L_2(\omega_h)}^2 + \tau M_8 \|\rho_{\alpha} y^{j+\alpha/p}\|_{L_2(\omega_h)}^2 + \\ & + \tau M_9 \left(\|\varphi^{j+\alpha/p}\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 + \sum_{i_{\beta} \neq i_{\alpha}} (\mu_{-\alpha}^2 + \mu_{+\alpha}^2) \bar{H}/\bar{h} \right). \quad (27) \end{aligned}$$

Просуммируем (27) по α' от 1 до α , тогда получим

$$\begin{aligned} & \sum_{\alpha'=1}^{\alpha} \|\rho_{\alpha'} y^{j+\alpha'/p}\|_{L_2(\omega_h)}^2 \leq \\ & \leq \sum_{\alpha'=1}^{\alpha} \|\rho_{\alpha'} y^{j+(\alpha'-1)/p}\|_{L_2(\omega_h)}^2 + \tau M_8 \sum_{\alpha'=1}^{\alpha} \|\rho_{\alpha'} y^{j+\alpha'/p}\|_{L_2(\omega_h)}^2 + \end{aligned}$$

$$+ \tau M_9 \sum_{\alpha'=1}^{\alpha} \left(\|\varphi^{j+\alpha'/p}\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 + \sum_{i_{\beta} \neq i_{\alpha'}} (\mu_{-\alpha'}^2 + \mu_{+\alpha'}^2) \bar{H}/\hbar \right).$$

Из последнего получаем

$$\begin{aligned} \|\rho_{\alpha} y^{j+\alpha/p}\|_{L_2(\omega_h)}^2 &\leq \|\rho_1 y^j\|_{L_2(\omega_h)}^2 + \tau M_8 \sum_{\alpha=1}^p \|\rho_{\alpha} y^{j+\alpha/p}\|_{L_2(\omega_h)}^2 + \\ &+ \tau M_9 \sum_{\alpha=1}^p \left(\|\varphi^{j+\alpha/p}\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 + \sum_{i_{\beta} \neq i_{\alpha}} (\mu_{-\alpha}^2 + \mu_{+\alpha}^2) \bar{H}/\hbar \right). \end{aligned} \quad (28)$$

Не нарушая общности, можно считать, что

$$\max_{1 \leq \alpha' \leq p} \|\rho_{\alpha'} y^{j+\alpha'/p}\|_{L_2(\omega_h)}^2 = \|\rho_{\alpha} y^{j+\alpha/p}\|_{L_2(\omega_h)}^2,$$

в противном случае (27) будем суммировать до такого α , при котором $\|\rho_{\alpha} y^{j+\alpha/p}\|_{L_2(\omega_h)}^2$ достигает максимального значения при фиксированном j . Тогда (28) перепишем в виде

$$\begin{aligned} \max_{1 \leq \alpha \leq p} \|\rho_{\alpha} y^{j+\alpha/p}\|_{L_2(\omega_h)}^2 &\leq \|\rho_1 y^j\|_{L_2(\omega_h)}^2 + p\tau M_8 \max_{1 \leq \alpha \leq p} \|\rho_{\alpha} y^{j+\alpha/p}\|_{L_2(\omega_h)}^2 + \\ &+ \tau M_9 \sum_{\alpha=1}^p \left(\|\varphi^{j+\alpha/p}\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 + \sum_{i_{\beta} \neq i_{\alpha}} (\mu_{-\alpha}^2 + \mu_{+\alpha}^2) \bar{H}/\hbar \right). \end{aligned} \quad (29)$$

Так как из (26) следует, что

$$\|\rho_1 y^j\|_{L_2(\omega_h)}^2 = \|\rho_p y^j\|_{L_2(\omega_h)}^2 \leq M_{10} \sum_{j'=0}^{j-1} \tau \max_{1 \leq \alpha \leq p} \|\rho_{\alpha} y^{j'+\alpha/p}\|_{L_2(\omega_h)}^2 + M_{11} F^j,$$

из (29) имеем

$$\begin{aligned} (1 - p\tau M_8) \max_{1 \leq \alpha \leq p} \|\rho_{\alpha} y^{j+\alpha/p}\|_{L_2(\omega_h)}^2 &\leq \\ &\leq M_{10} \sum_{j'=0}^{j-1} \tau \max_{1 \leq \alpha \leq p} \|\rho_{\alpha} y^{j'+\alpha/p}\|_{L_2(\omega_h)}^2 + M_{12} F^j. \end{aligned} \quad (30)$$

Выбирая $\tau \leq \tau_0 = 1/(2pM_8)$, из (30) находим

$$\max_{1 \leq \alpha \leq p} \|\rho_{\alpha} y^{j+\alpha/p}\|_{L_2(\omega_h)}^2 \leq \nu_1 \sum_{j'=0}^{j-1} \tau \max_{1 \leq \alpha \leq p} \|\rho_{\alpha} y^{j'+\alpha/p}\|_{L_2(\omega_h)}^2 + \nu_2 F^j. \quad (31)$$

Введя обозначение $g_{j+1} = \max_{1 \leq \alpha \leq p} \|\rho_{\alpha} y^{j+\alpha/p}\|_{L_2(\omega_h)}^2$, соотношение (31) можно переписать в виде

$$g_{j+1} \leq \nu_1 \sum_{k=0}^j \tau g_k + \nu_2 F^j, \quad (32)$$

где ν_1, ν_2 — известные положительные постоянные.

Применяя к (32) Лемму 4 [17, стр. 171], из (25) получаем априорную оценку:

$$\begin{aligned} & \|\rho_p y^{j+1}\|_{L_2(\omega_h)}^2 + \sum_{j'=0}^j \tau \sum_{\alpha=1}^p (\|\rho_\alpha y_{\bar{x}_\alpha}^{j'+\alpha/p}\|_{L_2(\omega_h)}^2 + \|y^{j'+\alpha/p}\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2) \leq \\ & \leq M \left(\sum_{j'=0}^j \tau \sum_{\alpha=1}^p \|[\varphi^{j'+\alpha/p}]\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 + \right. \\ & \left. + \sum_{j'=0}^j \tau \sum_{\alpha=1}^p \sum_{i_\beta \neq i_\alpha} (\mu_{-\alpha}^2(0, x', t_{j'}) + \mu_{+\alpha}^2(l, x', t_{j'})) \bar{H}/\bar{h} + \|y^0\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 \right), \quad (33) \end{aligned}$$

где $M = \text{const} > 0$ не зависит от h и τ .

Итак, справедлива следующая

ТЕОРЕМА 1. Пусть выполнены условия (4), тогда локально-одномерная схема (7)–(9) устойчива по правой части и начальным данным, так что для решения схемы (7)–(9) при $\tau \leq \tau_0$ справедлива оценка (33).

5. Сходимость локально-одномерной схемы. По аналогии с [16, стр. 528] представим решение задачи (10) в виде суммы $z_{(\alpha)} = v_{(\alpha)} + \eta_{(\alpha)}$, $z_{(\alpha)} = z^{j+\alpha/p}$; функция $\eta_{(\alpha)}$ определяется условиями

$$\frac{\eta_{(\alpha)} - \eta_{(\alpha-1)}}{\tau} = \dot{\psi}_\alpha, \quad x \in \omega_h + \gamma_h, \quad \alpha = 1, 2, \dots, p, \quad (34)$$

$$\eta(x, 0) = 0,$$

где

$$\dot{\psi}_\alpha = \begin{cases} \dot{\psi}_\alpha, & x_\alpha \in \omega_h, \\ \dot{\psi}_{-\alpha}, & x_\alpha = 0, \\ \dot{\psi}_{+\alpha}, & x_\alpha = l. \end{cases}$$

Из (34) следует, что $\eta^{j+1} = \eta_{(p)} = \eta^j + \tau(\dot{\psi}_1 + \dot{\psi}_2 + \dots + \dot{\psi}_p) = \eta^j = \dots = \eta^0 = 0$, $j = 0, 1, \dots, j_0$, так как $\eta^0 = 0$.

Тогда для η^α имеем

$$\eta^\alpha = \tau(\dot{\psi}_1 + \dot{\psi}_2 + \dots + \dot{\psi}_\alpha) = -\tau(\dot{\psi}_{\alpha+1} + \dots + \dot{\psi}_p) = O(\tau).$$

Функция $v_{(\alpha)}$ определяется условиями

$$\frac{v_{(\alpha)} - v_{(\alpha-1)}}{\tau} = \tilde{\Lambda}_\alpha v_{(\alpha)} + \tilde{\psi}_\alpha, \quad x \in \omega_h, \quad \alpha = 1, 2, \dots, p, \quad (35)$$

$$v_{(\alpha)} = -\eta_\alpha, \quad x_\alpha \in \gamma_{h,\alpha}, \quad v(x, 0) = 0,$$

где $\tilde{\psi}_\alpha = \psi_\alpha^* + \tilde{\Lambda}_\alpha \eta_{(\alpha)}$.

Если существуют непрерывные в замкнутой области \bar{Q}_T производные $\frac{\partial^4 u}{\partial x_\alpha^2 \partial x_\beta^2}$, $\alpha \neq \beta$, то $\tilde{\Lambda}_\alpha \eta_{(\alpha)} = -\tau \tilde{\Lambda}_\alpha (\psi_{\alpha+1} + \dots + \psi_p) = O(\tau)$.

Решение задачи (35) оценим с помощью теоремы 1:

$$\begin{aligned} & \|\rho_p v^{j+1}\|_{L_2(\omega_h)}^2 + \sum_{j'=0}^j \tau \sum_{\alpha=1}^p (\|\rho_\alpha v_{\bar{x}_\alpha}^{j'+\alpha/p}\|_{L_2(\omega_h)}^2 + \|[v^{j'+\alpha/p}]\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2) \leq \\ & \leq M \sum_{j'=0}^j \tau \sum_{\alpha=1}^p \left(\|[\tilde{\psi}^{j'+\alpha/p}]\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 + \sum_{i_\beta \neq i_\alpha} (\eta_{-\alpha}^2(0, x', t_{j'}) + \eta_{+\alpha}^2(l, x', t_{j'})) \bar{H}/\bar{h} \right). \end{aligned} \quad (36)$$

Так как $\eta^{j+1} = 0$, $\eta_{(\alpha)}$, $\eta_{\bar{x}_\alpha}^{j+\alpha/p} = O(\tau)$ и

$$\begin{aligned} \|[z^{j+1}]\|_1^2 &= \|\rho_p z^{j+1}\|_{L_2(\omega_h)}^2 + \\ &+ \sum_{j'=0}^j \tau \sum_{\alpha=1}^p (\|\rho_\alpha z_{\bar{x}_\alpha}^{j'+\alpha/p}\|_{L_2(\omega_h)}^2 + \|[z^{j'+\alpha/p}]\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2) = \\ &= \|\rho_p v^{j+1} + \rho_p \eta^{j+1}\|_{L_2(\omega_h)}^2 + \\ &+ \sum_{j'=0}^j \tau \sum_{\alpha=1}^p (\|\rho_\alpha v_{\bar{x}_\alpha}^{j'+\alpha/p} + \rho_\alpha \eta_{\bar{x}_\alpha}^{j'+\alpha/p}\|_{L_2(\omega_h)}^2 + \|[v^{j'+\alpha/p} + \eta^{j'+\alpha/p}]\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2) \leq \\ &\leq \|\rho_p v^{j+1}\|_{L_2(\omega_h)}^2 + 2 \sum_{j'=0}^j \tau \sum_{\alpha=1}^p (\|\rho_\alpha v_{\bar{x}_\alpha}^{j'+\alpha/p}\|_{L_2(\omega_h)}^2 + \\ &+ \|\rho_\alpha \eta_{\bar{x}_\alpha}^{j'+\alpha/p}\|_{L_2(\omega_h)}^2 + \|[v^{j'+\alpha/p}]\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 + \|[\eta^{j'+\frac{\alpha}{p}}]\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2) \leq \\ &\leq 2 \left(\|[v^{j+1}]\|_1^2 + \sum_{j'=0}^j \tau \sum_{\alpha=1}^p (\|\eta_{\bar{x}_\alpha}^{j'+\alpha/p}\|_{L_2(\omega_h)}^2 + \|[\eta^{j'+\alpha/p}]\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2) \right). \end{aligned}$$

Тогда из оценки (36) следует теорема

ТЕОРЕМА 2. Пусть задача (1)–(3) имеет единственное непрерывное в \bar{Q}_T решение $u(x, t)$ и существуют непрерывные в \bar{Q}_T производные

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \frac{\partial^4 u}{\partial x_\alpha^2 \partial x_\beta^2}, \frac{\partial^3 u}{\partial x_\alpha^2 \partial t}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_\alpha^2}, \quad \alpha = 1, 2, \dots, p, \quad \alpha \neq \beta,$$

и выполнены условия гладкости и ограниченности (4), тогда локально-одномерная схема (7)–(9) сходится к решению дифференциальной задачи (1)–(3) со скоростью $O(h^2 + \tau)$, так что при достаточно малом τ имеет место оценка

$$\|[y^{j+1} - u^{j+1}]\|_1 \leq M(h^2 + \tau), \quad 0 < \tau \leq \tau_0,$$

где

$$\| [z^{j+1}] \|_1 = \left(\| \rho_p z^{j+1} \|_{L_2(\omega_h)}^2 + \sum_{j=0}^j \tau \sum_{\alpha=1}^p (\| \rho_\alpha z^{j'+\alpha/p} \|_{L_2(\omega_h)}^2 + \| [z^{j'+\alpha/p}] \|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2) \right)^{1/2}.$$

6. Алгоритм численного решения задачи (1)–(3). Перепишем задачу (1)–(3) при $0 \leq x_\alpha \leq l$, $\alpha = 2$, $p = 2$; тогда получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} = & \frac{\partial}{\partial x_1} \left(k_1(t) \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(k_2(t) \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) + r_1(t) \frac{\partial u}{\partial x_1} + r_2(t) \frac{\partial u}{\partial x_2} - \\ & - q_1(x_1, x_2, t)u - q_2(x_1, x_2, t)u - \int_0^l H_1(x_1, x_2, t)u dx_1 - \\ & - \int_0^l H_2(x_1, x_2, t)u dx_2 + f(x_1, x_2, t), \end{aligned} \quad (37)$$

$$\begin{cases} u(0, x_2, t) = \mu_{11}(x_2, t), & u(l, x_2, t) = \mu_{12}(x_2, t), \\ u(x_1, 0, t) = \mu_{21}(x_1, t), & u(x_1, l, t) = \mu_{22}(x_1, t), \end{cases} \quad (38)$$

$$u(x_1, x_2, 0) = u_0(x_1, x_2). \quad (39)$$

Для решения задачи (37)–(39) рассмотрим сетку $x_\alpha^{(i_\alpha)} = i_\alpha h$, $\alpha = 1, 2$, $t_j = j\tau$, где $i_\alpha = 0, 1, \dots, N$, $h = l/N$, $j = 0, 1, \dots, j_0$, $\tau = T/j_0$. Введем дробный шаг $t_{j+1/2} = t_j + \tau/2$ и обозначим сеточную функцию

$$y_{i_1, i_2}^{j+s/2} = y^{j+s/2} = y(i_1 h, i_2 h, (j+s/2)\tau), \quad s = 0, 1, j = 0, 1, 2, \dots, j_0.$$

Запишем локально-одномерную схему

$$\begin{cases} \frac{y^{j+1/2} - y^j}{\tau} = \tilde{\Lambda}_1 y^{j+1/2} + \varphi_1, \\ \frac{y^{j+1} - y^{j+1/2}}{\tau} = \tilde{\Lambda}_2 y^{j+1} + \varphi_2, \end{cases} \quad (40)$$

$$\begin{cases} y_{0, i_2}^{j+1/2} = \mu_{11}(i_2 h, t_{j+1/2}), & y_{N, i_2}^{j+1/2} = \mu_{12}(i_2 h, t_{j+1/2}), \\ y_{i_1, 0}^{j+1} = \mu_{21}(i_1 h, t_{j+1}), & y_{i_1, N}^{j+1} = \mu_{22}(i_1 h, t_{j+1}), \end{cases} \quad (41)$$

$$y_{i_1, i_2}^0 = u_0(i_1 h, i_2, h), \quad (42)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Lambda}_\alpha y^{j+\alpha/2} = & \varkappa_\alpha a_\alpha y_{\bar{x}_\alpha x_\alpha}^{j+\alpha/2} + b_\alpha^+ a_\alpha y_{x_\alpha}^{j+\alpha/2} + b_\alpha^- a_\alpha y_{\bar{x}_\alpha}^{j+\alpha/2} - \\ & - d_\alpha y^{j+\alpha/2} - \sum_{i_\alpha=0}^N \delta_{\alpha, i_\alpha} y_{i_\alpha}^{j+(\alpha-1)/2} \bar{h}, \end{aligned}$$

$\varphi_\alpha = \frac{1}{2} f(x_1, x_2, t_{j+\alpha/2})$ или $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = f(x_1, x_2, t_{j+1})$, $\alpha = 1, 2$.

Приведем расчетные формулы для решения задачи (40)–(42).

На первом этапе находим решение $y_{i_1, i_2}^{j+1/2}$. Для этого при каждом значении $i_2 = \overline{1, N-1}$ решается следующая задача:

$$A_1(i_1, i_2) y_{i_1-1, i_2}^{j+1/2} - C_1(i_1, i_2) y_{i_1, i_2}^{j+1/2} + B_1(i_1, i_2) y_{i_1+1, i_2}^{j+1/2} = -F_1^{j+1/2}(i_1, i_2), \quad 0 < i_1 < N; \quad (43)$$

$$y_{0, i_2}^{j+1/2} = \mu_{11}(i_2 h, t_{j+1/2}), \quad y_{N, i_2}^{j+1/2} = \mu_{12}(i_2 h, t_{j+1/2}),$$

где

$$A_1(i_1, i_2) = \frac{\alpha_1 a_1}{h^2} - \frac{b_1^- a_1}{h}, \quad B_1(i_1, i_2) = \frac{\alpha_1 a_1}{h^2} + \frac{b_1^+ a_1}{h},$$

$$C_1(i_1, i_2) = A_1(i_1, i_2) + B_1(i_1, i_2) + \frac{1}{\tau} + \frac{1}{p}(d_1)_{i_1, i_2},$$

$$F_1^{j+1/2}(i_1, i_2) = \frac{1}{\tau} y_{i_1, i_2}^j + \varphi_1(i_1, i_2) - \sum_{i_1=0}^N \delta_{1, i_1} y_{i_1}^j \bar{h}.$$

На втором этапе находим решение y_{i_1, i_2}^{j+1} . Для этого, как и в первом случае, при каждом значении $i_1 = \overline{1, N-1}$ решается задача

$$A_2(i_1, i_2) y_{i_1, i_2-1}^{j+1} - C_2(i_1, i_2) y_{i_1, i_2}^{j+1} + B_2(i_1, i_2) y_{i_1, i_2+1}^{j+1} = -F_2^{j+1}(i_1, i_2), \quad 0 < i_2 < N; \quad (44)$$

$$y_{i_1, 0}^{j+1} = \mu_{21}(i_1 h, t_{j+1}), \quad y_{i_1, N}^{j+1} = \mu_{22}(i_1 h, t_{j+1}),$$

$$A_2(i_1, i_2) = \frac{\alpha_2 a_2}{h^2} - \frac{b_2^- a_2}{h}, \quad B_2(i_1, i_2) = \frac{\alpha_2 a_2}{h^2} + \frac{b_2^+ a_2}{h},$$

$$C_2(i_1, i_2) = A_2(i_1, i_2) + B_2(i_1, i_2) + \frac{1}{\tau} + \frac{1}{p}(d_2)_{i_1, i_2},$$

$$F_2^{j+1}(i_1, i_2) = \frac{1}{\tau} y_{i_1, i_2}^{j+1/2} + \varphi_2(i_1, i_2) - \sum_{i_2=0}^N \delta_{2, i_2} y_{i_2}^{j+1/2} \bar{h}.$$

Каждая из задач (43), (44) решается методом прогонки [17].

7. Тестовая задача и численные результаты. Коэффициенты уравнения и граничных условий исходной дифференциальной задачи (1)–(3) подбираются таким образом, чтобы точным решением при $p = 2$ была функция $u(x, t) = t^3(x_1^4 + x_2^4)$.

Ниже в табл. 1, 2 при уменьшении размера сетки приведены максимальное значение погрешности ($z = y - u$) и вычислительный порядок сходимости (ВПС) в нормах $\|\cdot\|_{L_2(w_{h\tau})}$ и $\|\cdot\|_{C(w_{h\tau})}$, где $\|y\|_{C(w_{h\tau})} = \max_{(x_i, t_j) \in w_{h\tau}} |y|$, когда $\bar{h} = h_1 = h_2 = \sqrt{\tau}$. Погрешность уменьшается в соответствии с порядком аппроксимации $O(h^2 + (\sqrt{\tau})^2)$.

Вычислительный порядок сходимости определяется по следующей формуле:

$$\text{ВПС} = \log_{\bar{h}_1/\bar{h}_2} \frac{\|z_1\|}{\|z_2\|} = \log_2 \frac{\|z_1\|}{\|z_2\|},$$

где z_i — это погрешность, соответствующая \bar{h}_i , $i = 1, 2$.

Таблица 1

Изменение погрешности в норме $\|\cdot\|_{L_2(\bar{w}_{h\tau})}$ при уменьшении размера сетки на $t = 1$, когда $\bar{h} = h_1 = h_2 = \sqrt{\tau}$ [The maximum error value ($z = y - u$) and the computational order of convergence (CO) in the norm $\|\cdot\|_{L_2(\bar{w}_{h\tau})}$ when the grid size is reduced by $t = 1$, if $\bar{h} = h_1 = h_2 = \sqrt{\tau}$]

\bar{h}	$\max_{0 < j < m} \ z^j\ _{L_2(\bar{w}_{h\tau})}$	CO in $\ \cdot\ _{L_2(\bar{w}_{h\tau})}$
1/20	0.054709570	
1/40	0.016029049	1.7711
1/80	0.004208141	1.9294
1/160	0.001067429	1.9790
1/320	0.000267991	1.9939

Таблица 2

Изменение погрешности в норме $\|\cdot\|_{C(\bar{w}_{h\tau})}$ при уменьшении размера сетки на $t = 1$, когда $\bar{h} = h_1 = h_2 = \sqrt{\tau}$ [The maximum error value ($z = y - u$) and the computational order of convergence (CO) in the norm $\|\cdot\|_{C(\bar{w}_{h\tau})}$ when the grid size is reduced by $t = 1$, if $\bar{h} = h_1 = h_2 = \sqrt{\tau}$]

\bar{h}	$\ z\ _{C(\bar{w}_{h\tau})}$	CO in $\ \cdot\ _{C(\bar{w}_{h\tau})}$
1/20	0.160732965	
1/40	0.046564855	1.7874
1/80	0.011943380	1.9630
1/160	0.003001901	1.9923
1/320	0.000751465	1.9981

Заключение. В работе рассматривается краевая задача для многомерного интегро-дифференциального уравнения конвекции-диффузии с неоднородными граничными условиями первого рода. Для приближенного решения поставленной задачи предложена локально-одномерная схема А. А. Самарского с порядком аппроксимации $O(h^2 + \tau)$. Исследование единственности и устойчивости решения проводится с помощью метода энергетических неравенств. Получены априорные оценки решения локально-одномерной разностной схемы, откуда следуют единственность решения, непрерывная и равномерная зависимость решения от входных данных, а также сходимость решения схемы к решению исходной дифференциальной задачи со скоростью, равной порядку аппроксимации разностной схемы. Для двумерной задачи построен алгоритм численного решения, проведены численные расчеты тестовых примеров, иллюстрирующие полученные в работе теоретические результаты.

Конкурирующие интересы. Конкурирующих интересов не имею.

Авторская ответственность. Я несу полную ответственность за предоставление окончательной версии рукописи в печать. Окончательная версия рукописи мною одобрена.

Финансирование. Исследование выполнялось без финансирования.

Библиографический список

1. Самарский А. А., Вабищевич П. Н. *Численные методы решения задач конвекции-диффузии*. М.: Эдиториал УРСС, 2015. 246 с. EDN: QJVBYN.
2. Douglas J., Rachford H. H. On the numerical solution of heat conduction problems in two

- and three space variables // *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1956. vol. 82, no. 2. pp. 421–439. DOI: <https://doi.org/10.2307/1993056>.
3. Peaceman D. W., Rachford H. H. The numerical solution of parabolic and elliptic differential equations // *J. Soc. Indust. Appl. Math.*, 1955. vol. 3, no. 1. pp. 28–41. DOI: <https://doi.org/10.1137/0103003>.
 4. Яненко Н. Н. *Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики*. Наука. Сибирск. отд-ние: Новосибирск, 1967. 196 с.
 5. Самарский А. А. Об одном экономичном разностном методе решения многомерного параболического уравнения в произвольной области // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 1962. Т. 2, № 5. С. 787–811.
 6. Самарский А. А. Локально-одномерные разностные схемы на неравномерных сетках // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 1963. Т. 3, № 3. С. 431–466.
 7. Марчук Г. И. *Методы расщепления*. М.: Наука, 1988. 264 с.
 8. Дьяконов Е. Г. Разностные схемы с расщепляющимся оператором для нестационарных уравнений // *Докл. АН СССР*, 1962. Т. 144, № 1. С. 29–32.
 9. Фрязинов И. В. О разностной аппроксимации граничных условий для третьей краевой задачи // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 1964. Т. 4, № 6. С. 1106–1112.
 10. Фрязинов И. В. Экономичные схемы повышенного порядка точности для решения многомерного уравнения параболического типа // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 1969. Т. 9, № 6. С. 1316–1326.
 11. Фрязинов И. В. Экономичные схемы для уравнения теплопроводности с краевым условием III рода // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 1972. Т. 12, № 3. С. 612–626.
 12. Нахушева Ф. М., Водахова В. А., Кудаева Ф. Х., Абаева З. В. Локально-одномерная разностная схема для уравнения диффузии дробного порядка с сосредоточенной теплоемкостью // *Современные проблемы науки и образования*, 2015. № 2, 763. EDN: UHXHYD.
 13. Бештокова З. В., Шхануков–Лафишев М. Х. Локально-одномерная разностная схема третьей краевой задачи для параболического уравнения общего вида с нелокальным источником // *Диффер. уравн.*, 2018. Т. 54, № 7. С. 891–901. EDN: XSAPYD. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0374064118070051>.
 14. Бештокова З. В. Локально-одномерная разностная схема для решения одной нелокальной краевой задачи для параболического уравнения в многомерной области // *Диффер. уравн.*, 2020. Т. 56, № 3. С. 366–379. EDN: CFONBU. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0374064120030085>.
 15. Бештокова З. В. Численный метод решения начально-краевой задачи для многомерного нагруженного параболического уравнения общего вида с условиями третьего рода // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2022. Т. 26, № 1. С. 7–35. EDN: BIBCLS. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1908>.
 16. Самарский А. А. *Теория разностных схем*. М.: Наука, 1983. 616 с.
 17. Самарский А. А., Гулин А. В. *Устойчивость разностных схем*. М.: Наука, 1973. 415 с.

MSC: 45K05, 65N12

Stability and convergence of the locally one-dimensional scheme A. A. Samarskii, approximating the multidimensional integro-differential equation of convection-diffusion with inhomogeneous boundary conditions of the first kind

Z. V. Beshtokova

Institute of Applied Mathematics and Automation,
Kabardino-Balkarian Scientific Center of RAS,
89a, Shortanov str., Nalchik, 360000, Russian Federation.

Abstract

The first initial-boundary value problem for a multidimensional (in space variables) integro-differential equation of convection-diffusion is studied. For an approximate solution of the problem a locally one-dimensional scheme by A. A. Samarskii with order of approximation $O(h^2 + \tau)$ is proposed. The study of the uniqueness and stability of the solution is carried out using the method of energy inequalities. A priori estimates for the solution of a locally one-dimensional difference scheme are obtained, which imply the uniqueness of the solution, the continuous and uniform dependence of the solution on the input data, and the convergence of the solution of the scheme to the solution of the original differential problem at a rate equal to the order of approximation of the difference scheme. For a two-dimensional problem, a numerical solution algorithm is constructed, numerical calculations of test cases are carried out, illustrating the theoretical results obtained in the study.

Keywords: convection-diffusion equation, first initial boundary value problem, nonlocal source, multidimensional problem, difference schemes, a priori estimate, stability and convergence.

Received: 26th April, 2023 / Revised: 23rd August, 2023 /

Accepted: 19th September, 2023 / First online: 28th September, 2023

Competing interests. I have no competing interests.


Author's Responsibilities. I take full responsibility for submitting the final version of the manuscript for printing. The final version of the manuscript has been approved by me.

Funding. The study was carried out without funding.

Differential Equations and Mathematical Physics Research Article

© Authors, 2023

© Samara State Technical University, 2023 (Compilation, Design, and Layout)

 The content is published under the terms of the [Creative Commons Attribution 4.0 International License](http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Beshtokova Z. V. Stability and convergence of the locally one-dimensional scheme A. A. Samarskii, approximating the multidimensional integro-differential equation of convection-diffusion with inhomogeneous boundary conditions of the first kind, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2023, vol. 27, no. 3, pp. 407–426. EDN: **XXIUYM**. DOI: [10.14498/vsgtu2014](https://doi.org/10.14498/vsgtu2014) (In Russian).

Author's Details:

Zaryana V. Beshtokova  <https://orcid.org/0000-0001-8020-4406>

Junior Researcher; Dept. of Computational Methods; e-mail: zarabaeva@yandex.ru

References

1. Samarskii A. A., Vabishchevich P. N. *Chislennyye metody resheniia zadach konveksii-diffuzii* [Numerical Methods for Solving Convection-Diffusion Problems]. Moscow, Editorial URSS, 2015, 246 pp. (In Russian). EDN: [QJVBYN](#).
2. Douglas J., Rachford H. H. On the numerical solution of heat conduction problems in two and three space variables, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1956, vol. 82, no. 2, pp. 421–439. DOI: <https://doi.org/10.2307/1993056>.
3. Peaceman D. W., Rachford H. H. The numerical solution of parabolic and elliptic differential equations, *J. Soc. Indust. Appl. Math.*, 1955, vol. 3, no. 1, pp. 28–41. DOI: <https://doi.org/10.1137/0103003>.
4. Yanenko N. N. *Metod drobnykh shagov resheniia mnogomernykh zadach matematicheskoi fiziki* [The Method of Fractional Steps for Solving Multidimensional Problems in Mathematical Physics]. Nauka. Sibirsk. Otdel., Novosibirsk, 1967, 196 pp. (In Russian)
5. Samarskii A. A. On an economical difference method for the solution of a multidimensional parabolic equation in an arbitrary region, *USSR Comput. Math. Math. Phys.*, 1963, vol. 2, no. 5, pp. 894–926. EDN: [KXSSEZ](#). DOI: [https://doi.org/10.1016/0041-5553\(63\)90504-4](https://doi.org/10.1016/0041-5553(63)90504-4).
6. Samarskii A. A. Local one dimensional difference schemes on non-uniform nets, *USSR Comput. Math. Math. Phys.*, 1963, vol. 3, no. 3, pp. 572–619. DOI: [https://doi.org/10.1016/0041-5553\(63\)90290-8](https://doi.org/10.1016/0041-5553(63)90290-8).
7. Marchuk G. I. *Metody rasshchepleniia* [Decomposition Methods]. Moscow, Nauka, 1988, 264 pp. (In Russian)
8. D'yakonov E. G. Difference schemes with a splitting operator for nonstationary equations, *Dokl. Sov. Math.*, 1962, vol. 3, no. 1, pp. 645–648.
9. Fryazinov I. V. Difference approximation of the boundary conditions for the third boundary value problem, *USSR Comput. Math. Math. Phys.*, 1964, vol. 4, no. 6, pp. 180–188. DOI: [https://doi.org/10.1016/0041-5553\(64\)90090-4](https://doi.org/10.1016/0041-5553(64)90090-4).
10. Fryazinov I. V. Economic schemes for increasing the order of accuracy when solving multidimensional parabolic equations, *USSR Comput. Math. Math. Phys.*, 1969, vol. 9, no. 6, pp. 104–117. DOI: [https://doi.org/10.1016/0041-5553\(69\)90128-1](https://doi.org/10.1016/0041-5553(69)90128-1).
11. Fryazinov I. V. Economic schemes for the equation of heat conduction with a boundary condition of the third kind, *USSR Comput. Math. Math. Phys.*, 1972, vol. 12, no. 3, pp. 53–70. DOI: [https://doi.org/10.1016/0041-5553\(72\)90034-1](https://doi.org/10.1016/0041-5553(72)90034-1).
12. Nakhushева F. M., Vodakhova V. A., Kudaeva F. Kh., Abaeva Z. V. Locally-one-dimensional difference scheme for the fractional-order diffusion equation with lumped heat capacity, *Modern Problems of Science and Education*, 2015, no. 2, 763 (In Russian). EDN: [UHXHYD](#).
13. Beshtokova Z. V., Shkhanukov–Lafishev M. Kh. Locally one-dimensional difference scheme for the third boundary value problem for a parabolic equation of the general form with a nonlocal source, *Differ. Equat.*, 2018, vol. 54, no. 7, pp. 870–880. EDN: [VBIHFF](#). DOI: <https://doi.org/10.1134/S0012266118070042>.
14. Beshtokova Z. V. Locally one-dimensional difference scheme for a nonlocal boundary value problem for a parabolic equation in a multidimensional domain, *Differ. Equat.*, 2020, vol. 56, no. 3, pp. 354–368. EDN: [GHNGTY](#). DOI: <https://doi.org/10.1134/S0012266120030088>.
15. Beshtokova Z. V. Numerical method for solving an initial-boundary value problem for a multidimensional loaded parabolic equation of a general form with conditions of the third kind, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2022, vol. 26, no. 1, pp. 7–35 (In Russian). EDN: [BIBCLS](#). DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1908>.
16. Samarskii A. A. *Teoriia raznostnykh skhem* [Theory of Difference Schemes]. Moscow, Nauka, 1983, 616 pp. (In Russian)
17. Samarskii A. A., Gulin A. B. *Ustoichivost' raznostnykh skhem* [Stability of Difference Schemes]. Moscow, Nauka, 1973, 415 pp. (In Russian)