



УДК 517.956.6

Обратная задача для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа с характеристической линией изменения

Д. К. Дурдиев

- ¹ Бухарское отделение Института математики
Академии наук Республики Узбекистан,
Узбекистан, 705018, Бухара, ул. М. Икбол, 11.
- ² Бухарский государственный университет,
Узбекистан, 705018, Бухара, ул. М. Икбол, 11.

Аннотация

Изучены прямая и обратная задачи для модельного уравнения смешанного парабола-гиперболического типа. В прямой задаче рассмотрен аналог задачи Трикоми для этого уравнения с характеристической линией изменения типа. Неизвестным обратной задачи является переменный коэффициент при младшем члене параболического уравнения. Для его определения относительно решения, определяемого в параболической части области, задается интегральное условие переопределения. Доказаны локальные теоремы однозначной разрешимости поставленных задач в смысле классического решения.

Ключевые слова: парабола-гиперболическое уравнение, характеристика, функция Грина, обратная задача, принцип сжатых отображений.

Получение: 30 мая 2023 г. / Исправление: 10 ноября 2023 г. /

Принятие: 13 декабря 2023 г. / Публикация онлайн: 25 декабря 2023 г.

Дифференциальные уравнения и математическая физика Научная статья

© Коллектив авторов, 2023

© СамГТУ, 2023 (составление, дизайн, макет)

♻️ Контент публикуется на условиях лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru) (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Образец для цитирования

Дурдиев Д. К. Обратная задача для уравнения смешанного парабола-гиперболического типа с характеристической линией изменения // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2023. Т. 27, № 4. С. 607–620. EDN: AFYBZR. DOI: [10.14498/vsgtu2027](https://doi.org/10.14498/vsgtu2027).

Сведения об авторе

Дурдимурод Каландарович Дурдиев <https://orcid.org/0000-0002-6054-2827>
доктор физико-математических наук, профессор; заведующий отделением¹; профессор,
каф. дифференциальных уравнений²; e-mail: d.durdiev@mathinst.uz

Постановка задачи. Пусть Ω_{lT} — область на плоскости (x, y) , состоящая из объединения двух подобластей, т.е. $\Omega_{lT} = \Omega_{1lT} \cup \Omega_{2l}$, где $\Omega_{1lT} = \{(x, y) : 0 < x < l, 0 < y \leq T\}$, $\Omega_{2l} = \{(x, y) : -y < x \leq y + l, -l/2 < y < 0\}$; l, T — фиксированные положительные числа. В этой области рассмотрим уравнение смешанного парабола-гиперболического типа:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1 - \operatorname{sign} y}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{1 + \operatorname{sign} y}{2} \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{1 + \operatorname{sign} y}{2} q(x) u(x, y) = 0. \quad (1)$$

Для уравнения (1) линия изменения типа $y = 0$ является характеристикой (линией параболического вырождения второго рода [1, стр. 258]).

Прямая задача. В области Ω_{lT} найти решение уравнения (1), удовлетворяющее следующим граничным условиям:

$$u|_{x=0} = \varphi_1(y), \quad u|_{x=l} = \varphi_2(y), \quad y \in [0, T], \quad (2)$$

$$u|_{y=-x} = \psi(x), \quad x \in [0, l/2], \quad (3)$$

где $\varphi_1(y), \varphi_2(y), \psi(x)$ — заданные функции.

Под классическим решением прямой задачи (1)–(3) понимается функция $u(x, y)$ из класса $C(\Omega_{lT}) \cap C^1(\Omega_{lT}) \cap C_{x,y}^{1,2}(\Omega_{1lT}) \cap C^2(\Omega_{2l})$, которая удовлетворяет уравнению (1) и условиям (2), (3).

В обратной задаче требуется определить переменный коэффициент $q(x) \in C[0, l]$ уравнения (1), если относительно решения прямой задачи (1)–(3) задано следующее дополнительное условие:

$$\int_0^T h(y) u(x, y) dy = f(x), \quad x \in [0, l], \quad (4)$$

где $h(y), f(x)$ — заданные достаточно гладкие функции.

Уравнения смешанного парабола-гиперболического типа возникают при математическом моделировании различных процессов из области естествознания, например, при изучении движения газа или малосжимаемой жидкости в канале, окруженном пористой средой — в канале газодинамическое давление жидкости или газа удовлетворяет волновому уравнению, а в пористой среде описывается уравнением диффузии. Математическое исследование напряженности электромагнитного поля в неоднородной среде, состоящей из диэлектрика и проводящей среды, приводит к системе, состоящей из волнового уравнения и уравнения теплопроводности. Многие задачи теплообмена в средах с различным временем релаксации и массообмена в капиллярно-пористых средах также сводятся к задачам для смешанных парабола-гиперболических уравнений. С математическими моделями таких процессов можно ознакомиться в работах [2–5].

Впервые аналог задачи Трикоми для парабола-гиперболического уравнения был исследован в работе [6]. Методы исследования прямых и обратных задач, связанных с поиском решения начально-краевой задачи для уравнений смешанного парабола-гиперболического типа и неизвестной правой части этого уравнения в прямоугольной области, были предложены в монографии [7]

(см. также работы [8–13]). Широкий класс прямых начально-краевых и обратных задач для вырождающихся уравнений смешанного парабола-гиперболического типа исследован в работах [14–17]. В работе [18] такие задачи изучены для уравнений смешанного типа с дробными производными по времени в параболической части уравнения.

Отметим, что обратные задачи для уравнений смешанного типа не так хорошо изучены, как аналогичные задачи для классических уравнений. Обратные задачи определения переменных коэффициентов и правых частей отдельных параболических уравнений второго порядка исследовались в работах [19–21] (см. также монографии [22, 23]). В работах [24–27] рассматривались задачи восстановления сверточного ядра в параболических уравнениях, описывающих явления запаздывания. В монографиях [28–31] (см. также обширную библиографию в них) можно ознакомиться с различными обратными задачами для уравнений гиперболического типа второго порядка.

Настоящая статья продолжает исследования работы [32], в которой изучена однозначная разрешимость обратной задачи определения переменного коэффициента при младшем члене гиперболического уравнения для смешанного парабола-гиперболического уравнения с нехарактеристической линией изменения типа.

Всюду в данной работе относительно заданных функций будем предполагать выполненными следующие условия:

(B1) $\varphi_1(y), \varphi_2(y) \in C^1[0, T]$; $\psi(x) \in C^2[0, l/2]$;

(B2) $\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = \psi(0) = 0$;

(B3) $h(y) \in C^1[0, T]$; $h(0) = h(T) = 0$; $f(x) \in C^2[0, l]$; $\int_0^T h(y)\varphi_1(y)dy = f(0)$,
 $\int_0^T h(y)\varphi_2(y)dy = f(l)$, $f(x) \neq 0$ для всех $x \in [0, l]$.

Исследование прямой задачи. Предположим, что функция $q(x)$ известна.

ТЕОРЕМА 1. Пусть выполнены условия (B1), (B2), $q(x) \in C[0, l]$ и

$$l\|q\|_{C[0, l]} < 1. \quad (5)$$

Тогда в области Ω_{lT} существует единственное решение прямой задачи (1)–(3).

Доказательство. Введем обозначения $\tau(x) := u(x, 0)$, $\nu(x) = \frac{\partial}{\partial y}u(x, 0)$. Тогда в силу однозначной разрешимости задачи Коши для волнового уравнения решение уравнения (1) в области Ω_{2l} может быть выписано по формуле Даламбера:

$$u(x, y) = \frac{1}{2}[\tau(x+y) + \tau(x-y)] - \frac{1}{2} \int_{x+y}^{x-y} \nu(s)ds. \quad (6)$$

С учетом равенства (3) и условий (B2) из последнего соотношения следует, что

$$\tau(x) = 2\psi\left(\frac{x}{2}\right) + \int_0^x \nu(s)ds, \quad x \in [0, l]. \quad (7)$$

Дифференцируя это равенство, имеем

$$\tau'(x) = \psi'\left(\frac{x}{2}\right) + \nu(x), \quad x \in [0, l]. \quad (8)$$

Равенства (6) и (7) можно условно назвать основными соотношениями для $\tau(x)$ и $\nu(x)$, полученными из гиперболической части области.

Известно [1, стр. 197], что функция Грина первой начально-краевой задачи для уравнения $u_{xx} - u_y = 0$, $x \in (0, l)$, $y > 0$ имеет вид

$$G(x, \xi, y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi y}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\exp\left(-\frac{(x - \xi + 2n)^2}{4y}\right) - \exp\left(-\frac{(x + \xi + 2n)^2}{4y}\right) \right].$$

Используя это представление, решение (1) в области $\Omega_{l|T}$ с условиями (2) запишем в виде интегрального уравнения

$$\begin{aligned} u(x, y) = & \int_0^l G(x, \xi, y) \tau(\xi) d\xi + \int_0^y G_\xi(x, 0, y - \eta) \varphi_1(\eta) d\eta - \\ & - \int_0^y G_\xi(x, l, y - \eta) \varphi_2(\eta) d\eta - \int_0^y \int_0^l G(x, \xi, y - \eta) q(\xi) u(\xi, \eta) d\xi d\eta. \end{aligned} \quad (9)$$

Продифференцируем (9) по y , учитывая формулу $\lim_{\eta \rightarrow y} G(x, \xi, y - \eta) = \delta(x - \xi)$, где $\delta(\cdot)$ — дельта-функция Дирака. Полагая в получающемся уравнении $y = 0$, учитывая, что $u_y(x, 0) = \nu(x)$, и используя соотношение

$$\int_0^l G_y(x, \xi, y) \tau(\xi) d\xi = \int_0^l G(x, \xi, y) \tau''(\xi) d\xi,$$

которое может быть получено на основе равенств $G_y(x, \xi, y) = G_{\xi\xi}(x, \xi, y)$, $\tau(0) = \tau(l)$ (следствие соотношений (B1)), интегрированием по частям с использованием свойств функции $G(x, \xi, y)$ [33, стр. 32–52] получим

$$\nu(x) = \tau''(x) - q(x)\tau(x). \quad (10)$$

Сопоставляя (8) и (10), находим обыкновенное дифференциальное уравнение для определения неизвестной $\tau(x)$

$$\tau''(x) - \tau'(x) - q(x)\tau(x) = -\psi'\left(\frac{x}{2}\right), \quad x \in (0, l) \quad (11)$$

с краевыми условиями

$$\tau(0) = 0, \quad \tau(l) = 0. \quad (12)$$

Задача (11), (12) эквивалентна интегральному уравнению

$$\tau(x) = \tau_0(x) + \int_0^l K(x, t) q(t) \tau(t) dt, \quad (13)$$

где

$$\tau_0(x) = - \int_0^l K(x, t) \psi'\left(\frac{t}{2}\right) dt,$$

$$K(x, t) = \frac{1}{e^l - 1} \begin{cases} (e^x - 1)(1 - e^{l-x}), & 0 \leq x \leq t, \\ (e^x - e^l)(1 - e^{-t}), & t \leq x \leq l. \end{cases}$$

Задача (11), (12) имеет единственное решение тогда и только тогда, когда однородное уравнение, соответствующее (11) с однородными граничными условиями (12), имеет только нулевое решение [34, стр. 225–240]. Это эквивалентно тому, что однородное интегральное уравнение, соответствующее (13), имеет только нулевое решение.

ЛЕММА. Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда уравнение (13) с $\tau_0(x) = 0$ имеет только тривиальное решение.

Доказательство. Введем обозначение

$$\Lambda(\tau(x)) := \int_0^l K(x, t)q(t)\tau(t)dt.$$

Тогда уравнение (13) с $\tau_0(x) = 0$ может быть переписано в виде операторного уравнения

$$\tau(x) = \Lambda(\tau(x)). \quad (14)$$

Очевидно, что оператор Λ непрерывен в классе функций $C[0, l]$.

Покажем, что Λ является оператором сжатия в $C[0, l]$. Поскольку

$$\max_{0 \leq x, t \leq l} |K(x, t)| \leq 1,$$

легко видеть, что неравенство

$$\|\Lambda(\tau_1) - \Lambda(\tau_2)\|_{C[0, l]} \leq l \|q\|_{C[0, l]} \|\tau_1 - \tau_2\|_{C[0, l]}$$

выполняется для любых функций $\tau_1(x), \tau_2(x) \in C[0, l]$. Отсюда с учетом (5) следует, что оператор Λ является сжимающим в $C[0, l]$. Следовательно, оператор Λ имеет единственную неподвижную точку в пространстве $C[0, l]$. Так как $\tau(x) = 0$ является решением уравнения (14), оно единственно. Лемма доказана. $\square$

После того как найдем функцию $\tau(x)$, запишем (6) с учетом (8) в виде

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \frac{1}{2}[\tau(x+y) + \tau(x-y)] - \frac{1}{2} \int_{x+y}^{x-y} \left[\tau'(s) - \psi'\left(\frac{s}{2}\right) \right] ds = \\ &= \tau(x+y) + \psi\left(\frac{x-t}{2}\right) - \psi\left(\frac{x+t}{2}\right). \end{aligned}$$

Отсюда ясно, что при выполнении условий (B1) (касательно ψ) имеем $u(x, y) \in C^2(\Omega_{2l})$.

Заметим также, что уравнение (9) на основе условий, наложенных на φ_1, φ_2 в (B1), определяет функцию $u(x, y) \in C_{x,y}^{1,2}(\Omega_{1lT})$, т.е. решение задачи (1), (2) в области Ω_{1lT} .

Таким образом, построенные функции в Ω_{1lT} и Ω_{2l} в совокупности являются классическим решением прямой задачи (1)–(3) в области Ω_{lT} . Теорема 1 доказана. $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. На самом деле, используя принцип максимума, можно доказать единственность решения прямой задачи. При этом условие (5) можно ослабить, заменив его на $q(x) \geq 0$ (см. [7, стр. 15–17]).

Исследование обратной задачи. Пусть выполнены условия (B3). Умножая уравнение (1) в области Ω_{lT} на функцию $h(y)$, интегрируя полученное по отрезку $[0, T]$ и учитывая (4), находим

$$q(x) = \frac{f''(x)}{f(x)} + \frac{1}{f(x)} \int_0^T h'(y)u(x, y)dy, \quad x \in [0, l]. \quad (15)$$

Теперь с помощью этой формулы исключим функцию $q(x)$ из (9), (13) и запишем эти уравнения в операторно-векторном виде:

$$v(x, y) = U[v](x, y), \quad (x, y) \in \bar{\Omega}_{lT}, \quad (16)$$

где

$$v(x, y) = [v_1(x, y), v_2(x)]^* := \left[u(x, y) - \int_0^l G(x, \xi, y)\tau(\xi)d\xi, \tau(x) \right]^*,$$

* — знак транспонирования, а компоненты оператора $U = [U_1, U_2]^*$ определяются равенствами

$$U_1 v(x, y) = v_{01}(x, y) - \int_0^y \int_0^l G(x, \xi, y) \left[\frac{f''(\xi)}{f(\xi)} + \frac{1}{f(\xi)} \int_0^T h'(s)v_1(\xi, s)ds \right] \times \\ \times \left[v_1(\xi, \eta) + \int_0^l G(\xi, s, \eta)v_2(s)ds \right] d\xi d\eta, \quad (17)$$

$$U_2 v(x) = v_{02}(x) + \int_0^l K(x, \xi) \left[\frac{f''(\xi)}{f(\xi)} + \frac{1}{f(\xi)} \int_0^T h'(s)v_1(\xi, s)ds \right] v_2(\xi)d\xi, \quad (18)$$

где в (17) и (18) через v_{01} и v_{02} обозначены свободные от неизвестных члены интегральных уравнений:

$$v_{01}(x, y) := \int_0^y G_\xi(x, 0, y-\eta)\varphi_1(\eta)d\eta - \int_0^y G_\xi(x, l, y-\eta)\varphi_2(\eta)d\eta, \quad v_{02}(x) := \tau_0(x).$$

Основным результатом настоящего раздела является следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2. Пусть выполнены условия (B1), (B2) и (B3). Тогда существуют числа $l^* \in (0, l)$, $T^* \in (0, T)$ такие, что в области $\bar{\Omega}_{l^*T^*}$ уравнение (16) имеет единственное решение $u(x, y) \in C(\bar{\Omega}_{l^*T^*})$, $\tau(x) \in C[0, l^*]$.

Доказательство. Обратимся к уравнению (16). Очевидно, что оператор U переводит функции $v(x, y) \in C(\bar{\Omega}_{lT})$ в функции, также принадлежащие пространству $C(\bar{\Omega}_{lT})$. Определим в $C(\bar{\Omega}_{lT})$ следующую норму:

$$\|v\|_{lT} = \max \left\{ \max_{(x,y) \in \bar{\Omega}_{lT}} |v_1(x, y)|, \max_{x \in [0, l]} |v_2(x)| \right\}.$$

Для сокращения записей введем обозначения

$$f_0 := \min_{x \in [0, l]} |f(x)|, \quad f_1 := \max_{x \in [0, l]} |f''(x)|, \quad h_0 := \max_{x \in [0, T]} |h'(y)|.$$

Покажем теперь, что при достаточно малых l и T оператор U осуществляет сжатое отображение шара

$$S(v_0, r) := \{v : \|v - v_0\|_{lT} \leq r\} \subset C(\bar{\Omega}_{lT})$$

радиуса r (r — известное число) с центром в точке $v_0(x, y) = (v_{01}(x, y), v_{02}(x))$ на себя и является сжатием. Тем самым мы покажем, что уравнение (16) имеет в области $\bar{\Omega}_{lT}$ единственное непрерывное решение, удовлетворяющее неравенству $\|v - v_0\|_{lT} \leq r$.

Очевидно, что для элементов $v \in S(v_0, r)$ имеет место оценка

$$\|v\|_{lT} \leq \|v_0\|_{lT} + r =: R,$$

где

$$\|v_0\|_{lT} = \max \left\{ \max_{(x, y) \in \bar{\Omega}_{lT}} |v_{01}(x, y)|, \max_{x \in [0, l]} |v_{02}(x)| \right\}.$$

Пусть

$$T_1 := \frac{1}{Rh_0} \left(\frac{f_0}{l} - f_1 \right), \quad T_2 := \frac{1}{2Rh_0} [(f_1^2 + 2Rf_0h_0)^{1/2} - f_1], \quad l^* = \frac{f_0}{f_1}.$$

Оценим $\|v_0\|_{lT}$. Для этого получим оценки интегралов, в которых присутствуют функции G , G_ξ в определениях компонент вектор-функции $v_0(x, y)$. Будем использовать равенство

$$\int_0^l G(x, \xi, y) d\xi = 1,$$

вытекающее из определения функции G . Заметим, что G имеет эквивалентное выражение [33, стр. 200–204]:

$$G(x, \xi, y) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \exp \left[- \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 y \right] \sin \frac{n\pi x}{2} \sin \frac{n\pi \xi}{2}.$$

С учетом этого выражения имеем равенство

$$\begin{aligned} G_\xi(x, 0, y - \eta) &= \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \exp \left[- \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 (y - \eta) \right] \frac{n\pi}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} = \\ &= \frac{1}{l} \int_0^l G_\eta(x, \xi, y - \eta) (l - \xi) d\xi, \end{aligned}$$

которое проверяется непосредственно. Воспользовавшись последним равенством, преобразуем следующий интеграл:

$$\begin{aligned} \int_0^y G_\xi(x, 0, y - \eta) \varphi_1(\eta) d\eta &= \frac{1}{l} \int_0^l (l - \xi) \int_0^y G_\eta(x, \xi, y - \eta) \varphi_1(\eta) d\eta d\xi = \\ &= \frac{1}{l} \int_0^l (l - \xi) \left\{ \left[G(x, \xi, y - \eta) \varphi_1(\eta) \right]_0^y - \int_0^y G(x, \xi, y - \eta) \varphi_1'(\eta) d\eta \right\} d\xi = \\ &= \frac{l - x}{l} \varphi_1(y) + \frac{1}{l} \int_0^l (l - \xi) \int_0^y G(x, \xi, y - \eta) \varphi_1'(\eta) d\eta d\xi. \end{aligned}$$

Из этих соотношений для $(x, y) \in C(\bar{\Omega}_{1lT})$ легко вытекает оценка

$$\left| (1 + l) \int_0^y G_\xi(x, 0, y - \eta) \varphi_1(\eta) d\eta \right| \leq \| \varphi_1 \|_{C^1[0, T]}. \quad (19)$$

Подобным образом для $(x, y) \in C(\bar{\Omega}_{1lT})$ может быть получена оценка

$$\left| \int_0^y G_\xi(x, l, y - \eta) \varphi_2(\eta) d\eta \right| \leq (1 + l) \| \varphi_2 \|_{C^1[0, T]}. \quad (20)$$

Тогда из неравенств (19), (20) следует оценка

$$\| v_0 \|_l \leq \max \left\{ 2(1 + l) \max (\| \varphi_1 \|_{C^1[0, T]}, \| \varphi_2 \|_{C^1[0, T]}), \| \psi'(x) \|_{C[0, l/2]} \right\}. \quad (21)$$

Определим условия, при которых возможно применение теоремы о неподвижной точке к оператору U . Пусть $v \in S(v_0, r)$. Тогда из (17), (18) нетрудно заметить, что $Uv \in S(v_0, r)$. Кроме того, для всех $(x, y) \in \bar{\Omega}_{1lT}$ с учетом оценок (19)–(21) получим неравенства

$$\begin{aligned} |U_1 v - v_{01}| &\leq \int_0^y \int_0^l G(x, \xi, y) \left[\frac{|f''(\xi)|}{|f(\xi)|} + \frac{1}{|f(\xi)|} \int_0^T |h'(s)| |v_1(\xi, s)| ds \right] \times \\ &\times \left[|v_1(\xi, \eta)| + \int_0^l G(\xi, s, \eta) |v_2(s)| ds \right] d\xi d\eta \leq \frac{2RT}{f_0} (f_1 + RT h_0); \quad (22) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |U_2 v - v_{02}| &\leq \int_0^l K(x, \xi) \left[\frac{|f''(\xi)|}{|f(\xi)|} + \frac{1}{|f(\xi)|} \int_0^T |h'(s)| |v_1(\xi, s)| ds \right] |v_2(\xi)| d\xi \leq \\ &\leq \frac{1}{f_0} (f_1 + RT h_0) Rl, \quad (23) \end{aligned}$$

из которых следует, что для $T \leq T^*$ и $l \leq l^*$ имеет место $\| v - v_0 \|_{lT} \leq r$, т.е. $Uv \in S(v_0, r)$.

Осталось показать, что оператор U сжимает расстояние между элементами шара $S(v_0, r)$. Для доказательства этого факта возьмем любые два элемента $v^1, v^2 \in S(v_0, r)$ и оценим норму разности между их образами Uv^1, Uv^2 . Обозначим компоненты элементов v^1, v^2 через $v_i^1, v_i^2, i = 1, 2$. При оценке $\| Uv^1 - Uv^2 \|_{lT}$ воспользуемся неравенством

$$|(v_i^1)^2 - (v_i^2)^2| = |v_i^1 + v_i^2| |v_i^1 - v_i^2| \leq 2R \| v^1 - v^2 \|_{lT}, \quad i = 1, 2,$$

которое имеет место для произвольных $v^1, v^2 \in S(v_0, r)$. Используя формулы (17), (18) и оценки (19)–(21), подобно неравенствам (22), (23) найдем

$$\begin{aligned} \max \left\{ \max_{(x,y) \in \Omega_{lT}} |U_1 v^1 - U_1 v^2|, \max_{x \in [0,l]} |U_2 v^1 - U_2 v^2| \right\} &\leq \\ &\leq \frac{1}{f_0} (f_1 + 2RTh_0) \max\{l, 2T\} \|v^1 - v^2\|_{lT}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\|Uv^1 - Uv^2\|_{lT} \leq \frac{T}{T^*} \|v^1 - v^2\|_{lT},$$

и оператор U при $T \in (0, T^*)$ и $l \in (0, l^*)$ осуществляет сжатое отображение шара $S(v_0, r)$ на себя. Тогда, согласно принципу сжимающих отображений, уравнение (16) определяет единственное решение, принадлежащее этому шару. Теорема 2 доказана. $\square$

Введем обозначение $l_1 := f_0 [f_1 + 2h_0(\|v_0\|_{l^*T^*} + r)T^*]^{-1}$.

ТЕОРЕМА 3. При выполнении условий теоремы 2 на отрезке $[0, l_0]$, где $l_0 = \min\{l^*, l_1\}$, существует единственное непрерывное решение обратной задачи (1)–(4).

Для доказательства заметим, что из $v(x, y) \in S(v_0, r)$ с учетом

$$u(x, y) = v_1(x, y) + \int_0^{l^*} G(x, \xi, y) v_2(\xi) d\xi$$

следует оценка $|u(x, y)| \leq 2R = 2(\|v_0\|_{l^*T^*} + r)$. Используя эту оценку, из (15) получим неравенство $\|q\|_{C[0,l]} \leq (l/f_0)[f_1 + 2h_0(\|v_0\|_{l^*T^*} + r)T^*]$. Ввиду (5) из последнего неравенства следует доказательство теоремы 3.

Конкурирующие интересы. Конкурирующих интересов не имею.

Авторская ответственность. Я несу полную ответственность за предоставление окончательной версии рукописи в печать. Окончательная версия рукописи мною одобрена.

Финансирование. Исследование выполнялось без финансирования.

Благодарность. Автор благодарен рецензентам за тщательное прочтение статьи, ценные замечания и предложения.

Библиографический список

1. Бабич В. М., Капилевич М. Б., Михлин С. Г. [и др.] *Линейные уравнения математической физики* / Справочная математическая библиотека. М.: Наука, 1964. 368 с.
2. Азиз Х., Сеттари Э. *Математическое моделирование пластовых систем*. Москва, Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2004. 416 с. EDN: [RYRUBF](#).
3. Уфлянд Я. С. *Интегральные преобразования в задачах теории упругости*. М.: Наука, 1968. 402 с.
4. Пашков А. Г. *Системно-структурный анализ процессов теплообмена и его применение*. М.: Энергоатомиздат, 1983. 280 с.

5. Нахушев А. М. *Уравнения математической биологии*. М.: Высш. шк., 1995. 301 с. EDN: PDBBNB.
6. Золина Л. А. О краевой задаче для модельного уравнения гипербола-параболического типа // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 1966. Т. 6, № 6. С. 991–1001.
7. Сабитов К. Б. *Прямые и обратные задачи для уравнений смешанного парабола-гиперболического типа*. М.: Наука, 2016. 271 с. EDN: QWTYOF.
8. Сабитов К. Б., Сафин Э. М. Обратная задача для уравнения смешанного парабола-гиперболического типа в прямоугольной области // *Изв. вузов. Матем.*, 2010. № 4. С. 55–62. EDN: KYKDWZ.
9. Сабитов К. Б., Сафин Э. М. Обратная задача для уравнения смешанного парабола-гиперболического типа // *Матем. заметки*, 2010. Т. 87, № 6. С. 907–918. EDN: RLREGJ. DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm6577>.
10. Сабитов К. Б. Начально-граничная и обратные задачи для неоднородного уравнения смешанного парабола-гиперболического уравнения // *Матем. заметки*, 2017. Т. 102, № 3. С. 415–435. EDN: ZDNXPZ. DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm11521>.
11. Джамалов С. З. Об одной нелокальной краевой задаче с постоянными коэффициентами для многомерного уравнения смешанного типа // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2017. Т. 21, № 4. С. 597–610. EDN: YUGZUW. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1536>.
12. Сабитов К. Б., Мартемьянова Н. В. Нелокальная обратная задача для уравнения смешанного типа // *Изв. вузов. Матем.*, 2011. № 2. С. 71–85. EDN: MXAIQZ.
13. Юнусова Г. Р. Нелокальные задачи для уравнения смешанного парабола-гиперболического типа // *Вестн. СамГУ. Естественнонаучн. сер.*, 2011. № 8(89). С. 108–117. EDN: POMWCT.
14. Сабитов К. Б., Сидоров С. Н. Обратная задача для вырождающегося парабола-гиперболического уравнения с нелокальным граничным условием // *Изв. вузов. Матем.*, 2015. № 1. С. 46–59. EDN: RARUBX.
15. Сидоров С. Н. Обратные задачи для вырождающегося смешанного парабола-гиперболического уравнения по нахождению сомножителей правых частей, зависящих от времени // *Уфимск. матем. журн.*, 2019. Т. 11, № 1. С. 72–86. EDN: HSNBHX.
16. Сабитов К. Б., Сидоров С. Н. Об одной нелокальной задаче для вырождающегося парабола-гиперболического уравнения // *Диффер. уравн.*, 2014. Т. 50, № 3. С. 356–365. EDN: RWZWFX. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0374064114030091>.
17. Сабитов К. Б., Сидоров С. Н. Начально-граничная задача для неоднородных вырождающихся уравнений смешанного парабола-гиперболического типа / *Дифференциальные уравнения. Математическая физика* / Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз., Т. 137. М.: ВИНТИ РАН, 2017. С. 26–60. EDN: AQKFYP.
18. Durdiev D. K. Inverse source problem for an equation of mixed parabolic-hyperbolic type with the time fractional derivative in a cylindrical domain // *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2022. vol. 26, no. 2. pp. 355–367. EDN: TWHCKX. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1921>.
19. Прилепко А. И., Костин А. В., Соловьев В. В. Обратные задачи нахождения источника и коэффициентов для эллиптических и параболических уравнений в пространствах Гельдера и Соболева // *Сиб. журн. чист. и прикл. матем.*, 2017. Т. 17, № 3. С. 67–85. EDN: RSFCQR. DOI: <https://doi.org/10.17377/PAM.2017.17.7>.
20. Иванчов Н. И. Об обратной задаче одновременного определения коэффициентов теплопроводности и теплоемкости // *Сиб. матем. журн.*, 1994. Т. 35, № 3. С. 612–621.
21. Durdiev D. K., Durdiev D. D. The Fourier spectral method for determining a heat capacity coefficient in a parabolic equation // *Turk. J. Math.*, 2022. vol. 46, no. 8. pp. 3223–3233. DOI: <https://doi.org/10.55730/1300-0098.3329>.
22. Денисов А. М. *Введение в теорию обратных задач*. М.: Моск. ун-т, 1994. 208 с.
23. Prilepko A. I., Orlovsky D. G., Vasin I. A. *Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics* / Pure and Applied Mathematics. vol. 231. New York, NY: Marcel Dekker, 2000. xiii+709 pp. DOI: <https://doi.org/10.1201/9781482292985>.

24. Durdiev D. K., Zhumaev Zh. Zh. Memory kernel reconstruction problems in the integro-differential equation of rigid heat conductor // *Math. Meth. Appl. Sci.*, 2022. vol. 45, no. 14. pp. 8374–8388. EDN: **AWTYYE** DOI: <https://doi.org/10.1002/mma.7133>.
25. Durdiev D. K., Zhumaev Zh. Zh. One-dimensional inverse problems of finding the kernel of integrodifferential heat equation in a bounded domain // *Ukr. Math. J.*, 2022. vol. 73, no. 11. pp. 1723–1740. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11253-022-02026-0>.
26. Durdiev D. K., Zhumaev Zh. Zh., Atoev D. D. Inverse problem on determining two kernels in integro-differential equation of heat flow // *Ufimsk. Mat. Zh.*, 2023. vol. 15, no. 2. pp. 120–135.
27. Дурдиев Д. К., Жумаев Ж. Ж. Задача определения тепловой памяти проводящей среды // *Диффер. уравн.*, 2020. Т. 56, № 6. С. 796–807. EDN: **WPINKQ**. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0374064120060114>.
28. Романов В. Г. *Обратные задачи математической физики*. М.: Наука, 1984. 264 с.
29. Кабанихин С. И. *Обратные и некорректные задачи*. Новосибирск: Сибирское научное изд-во, 2009. 457 с.
30. Hasanoglu A. H., Romanov V. G. *Introduction to Inverse Problems for Differential Equations*. Cham: Springer, 2017. xiii+261 pp. EDN: **PLGFAS**. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-319-62797-7>.
31. Durdiev D. K., Totieva Z. D. *Kernel Determination Problems in Hyperbolic Integro-Differential Equations* / Infosys Science Foundation Series. Singapore: Springer, 2023. xxvi+368 pp. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-981-99-2260-4>.
32. Дурдиев Д. К. Об определении коэффициента уравнения смешанного парабола-гиперболического типа с нехарактеристической линией изменения // *Диффер. уравн.*, 2022. Т. 58, № 12. С. 1633–1644. EDN: **NCCOHF**. DOI: <https://doi.org/10.31857/S0374064122120056>.
33. Тихонов А. Н., Самарский А. А. *Уравнения математической физики*. М.: Наука, 1977. 734 с.
34. Смирнов В. И. *Курс высшей математики*. Т. 4, Часть 2. М.: Наука, 1981. 551 с.

MSC: 35R11

Inverse problem for an equation of mixed parabolic-hyperbolic type with a characteristic line of change

D. K. Durdiev

- ¹ Bukhara Branch of the Institute of Mathematics named after V. I. Romanovskiy at the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan, 11, Muhammad Igbol st., Bukhara, 705018, Uzbekistan.
- ² Bukhara State University, 11, Muhammad Igbol st., Bukhara, 705018, Uzbekistan.

Abstract

This study investigates direct and inverse problems for a model equation of mixed parabolic-hyperbolic type. In the direct problem, an analogue of the Tricomi problem is considered for this equation with a characteristic line of type change. The unknown in the inverse problem is a variable coefficient of the lower-order term in the parabolic equation. To determine it relative to the solution defined in the parabolic part of the domain, an integral overdetermination condition is specified. Local theorems of unique solvability of the posed problems in terms of classical solutions are proven.

Keywords: parabolic-hyperbolic equation, characteristic, Green's function, inverse problem, principle of compressed mappings.

Received: 30th May, 2023 / Revised: 10th November, 2023 /

Accepted: 13th December, 2023 / First online: 25th December, 2023

Competing interests. I have no competing interests.

Author's Responsibilities. I take full responsibility for submitting the final version of the manuscript for publication. I approved the final version of the manuscript.

Funding. The research was conducted without any funding.

Acknowledgments. The author is grateful to the reviewers for their careful reading of the article, valuable comments, and suggestions.

Differential Equations and Mathematical Physics Research Article

© Authors, 2023

© Samara State Technical University, 2023 (Compilation, Design, and Layout)

 The content is published under the terms of the [Creative Commons Attribution 4.0 International License](http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Durdiev D. K. Inverse problem for an equation of mixed parabolic-hyperbolic type with a characteristic line of change, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2023, vol. 27, no. 4, pp. 607–620. EDN: [AFYBZR](#). DOI: [10.14498/vsgtu2027](https://doi.org/10.14498/vsgtu2027) (In Russian).

Author's Details:

Durdimurod K. Durdiev  <https://orcid.org/0000-0002-6054-2827>

Dr. Phys. & Math. Sci., Professor; Head of Branch¹; Professor, Dept. of Differential Equations²; e-mail: d.durdiev@mathinst.uz

References

1. Babich V. M., Kapilevich M. B., Mikhlin S. G., et al. *Lineinye uravneniia matematicheskoi fiziki* [Linear Equations of Mathematical Physics]. Moscow, Nauka, 1964, 368 pp. (In Russian)
2. Aziz Kh., Settari A. *Matematicheskoe modelirovanie plastovykh sistem* [Petroleum Reservoir Simulation]. Moscow, Izhevsk, Regul. Khaotich. Dinam., 2004, 416 pp. (In Russian). EDN: **RYRUBF**
3. Uflyand Ya. S. *Integral'nye preobrazovaniia v zadachakh teorii uprugosti* [Integral Transforms in the Problems of Elasticity Theory]. Moscow, Nauka, 1968, 402 pp. (In Russian)
4. Shashkov A. G. *Sistemno-strukturnyi analiz protsessov teploobmena i ego primeneniie* [System-Structural Analysis of the Heat Transfer Process and its Application]. Moscow, Energoatomizdat, 1983, 280 pp. (In Russian)
5. Nakhushev A. M. *Uravneniia matematicheskoi biologii* [Equations of Mathematical Biology]. Moscow, Vyssh. shk., 1995, 301 pp. (In Russian). EDN: **PDBBNB**
6. Zolina L. A. On a boundary value problem for a model equation of hyperbolic-parabolic type, *U.S.S.R. Comput. Math. Math. Phys.*, 1966, vol. 6, no. 6, pp. 63–78. DOI: [https://doi.org/10.1016/0041-5553\(66\)90162-5](https://doi.org/10.1016/0041-5553(66)90162-5).
7. Sabitov K. B. *Priamyie i obratnye zadachi dlia uravnenii smeshannogo parabolopgerbolicheskogo tipa* [Direct and Inverse Problems for Mixed Parabolic-Hyperbolic Type Equations]. Moscow, Nauka, 2016, 271 pp. (In Russian). EDN: **QWTYOF**
8. Sabitov K. B., Safin E. M. The inverse problem for a mixed-type parabolic-hyperbolic equation in a rectangular domain, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2010, vol. 54, no. 4, pp. 48–54. EDN: **OHMAER**. DOI: <https://doi.org/10.3103/S1066369X10040067>.
9. Sabitov K. B., Safin E. M. The inverse problem for an equation of mixed parabolic-hyperbolic type, *Math. Notes*, 2010, vol. 87, no. 6, pp. 880–889. EDN: **MXHPLB**. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0001434610050287>.
10. Sabitov K. B. Initial boundary and inverse problems for the inhomogeneous equation of a mixed parabolic-hyperbolic equation, *Math. Notes*, 2017, vol. 102, no. 3, pp. 378–395. EDN: **ZDNXPZ**. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0001434617090085>.
11. Djamalov S. Z. The nonlocal boundary value problem with constant coefficients for the multidimensional mixed type equation of the first kind, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2017, vol. 21, no. 4, pp. 597–610 (In Russian). EDN: **YUGZUW**. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1536>.
12. Sabitov K. B., Martem'yanova N. V. A nonlocal inverse problem for a mixed-type equation, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2011, vol. 55, no. 2, pp. 61–74. EDN: **MWMUAR**. DOI: <https://doi.org/10.3103/S1066369X11020083>.
13. Yunusova G. R. Nonlocal problems for the equation of the mixed parabolic-hyperbolic type, *Vestn. Samar. Gos. Univ., Estestvennonauchn. Ser.*, 2011, no. 8(89), pp. 108–117 (In Russian). EDN: **POMWCT**.
14. Sabitov K. B., Sidorov S. N. Inverse problem for degenerate parabolic-hyperbolic equation with nonlocal boundary condition, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2015, vol. 59, no. 1, pp. 39–50. EDN: **UEKPBJ**. DOI: <https://doi.org/10.3103/S1066369X15010041>.
15. Sidorov S. N. Inverse problems for a degenerate mixed parabolic-hyperbolic equation on finding time-depending factors in right hand sides, *Ufa Math. J.*, 2019, vol. 11, no. 1, pp. 75–89. EDN: **AEKCTZ**. DOI: <https://doi.org/10.13108/2019-11-1-75>.
16. Sabitov K. B., Sidorov S. N. On a nonlocal problem for a degenerating parabolic-hyperbolic equation, *Differ. Equ.*, 2014, vol. 50, no. 3, pp. 352–361. EDN: **SKREFP**. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0012266114030094>.
17. Sabitov K. B., Sidorov S. N. Initial-boundary-value problem for inhomogeneous degenerate equations of mixed parabolic-hyperbolic type, *J. Math. Sci. (N. Y.)*, 2019, vol. 236, no. 6, pp. 603–640. EDN: **WUNHGJ**. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10958-018-4136-y>.
18. Durdiev D. K. Inverse source problem for an equation of mixed parabolic-hyperbolic type with the time fractional derivative in a cylindrical domain, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn.*

- Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2022, vol. 26, no. 2, pp. 355–367. EDN: TWHCKX. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1921>.
19. Prilepko A. I., Kostin A. B., Solov'ev V. V. Inverse source and inverse coefficients problems for elliptic and parabolic equations in Hölder and Sobolev spaces, *Sib. J. Pure and Appl. Math.*, 2017, vol. 17, no. 3, pp. 67–85 (In Russian). EDN: RSFCQR. DOI: <https://doi.org/10.17377/PAM.2017.17.7>.
 20. Ivanchov N. I. On the inverse problem of simultaneous determination of thermal conductivity and specific heat capacity, *Sib. Math. J.*, 1994, vol. 35, no. 3, pp. 547–555. EDN: IWBQBE. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF02104818>.
 21. Durdiev D. K., Durdiev D. D. The Fourier spectral method for determining a heat capacity coefficient in a parabolic equation, *Turk. J. Math.*, 2022, vol. 46, no. 8, pp. 3223–3233. DOI: <https://doi.org/10.55730/1300-0098.3329>.
 22. Denisov A. M. *Elements of the Theory of Inverse Problems*, Inverse and Ill-Posed Problems Series, vol. 14. Utrecht, VSP, 1999, iv+272 pp.
 23. Prilepko A. I., Orlovsky D. G., Vasin I. A. *Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics*, Pure and Applied Mathematics, vol. 231. New York, NY, Marcel Dekker, 2000, xiii+709 pp. DOI: <https://doi.org/10.1201/9781482292985>.
 24. Durdiev D. K., Zhumaev Zh. Zh. Memory kernel reconstruction problems in the integro-differential equation of rigid heat conductor, *Math. Meth. Appl. Sci.*, 2022, vol. 45, no. 14, pp. 8374–8388. EDN: AWTYYE DOI: <https://doi.org/10.1002/mma.7133>.
 25. Durdiev D. K., Zhumaev Zh. Zh. One-dimensional inverse problems of finding the kernel of integrodifferential heat equation in a bounded domain, *Ukr. Math. J.*, 2022, vol. 73, no. 11, pp. 1723–1740. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11253-022-02026-0>.
 26. Durdiev D. K., Jumaev J. J., Atoev D. D. Inverse problem on determining two kernels in integro-differential equation of heat flow, *Ufa Math. J.*, 2023, vol. 15, no. 2, pp. 119–134. DOI: <https://doi.org/10.13108/2023-15-2-119>.
 27. Durdiev D. K., Zhumaev Zh. Zh. Problem of determining the thermal memory of a conducting medium, *Differ. Equ.*, 2020, vol. 56, no. 6, pp. 785–796. EDN: QCYFTB. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0012266120060117>.
 28. Romanov V. G. *Obratnye zadachi matematicheskoi fiziki* [Inverse Problems of Mathematical Physics]. Moscow, Nauka, 1984, 264 pp. (In Russian)
 29. Kabanikhin S. I. *Obratnye i nekorrektnye zadachi* [Inverse and Ill-posed Problems]. Novosibirsk, Sibirskoe Nauchnoe Izd., 2009, 457 pp. (In Russian)
 30. Hasanoğlu A. H., Romanov V. G. *Introduction to Inverse Problems for Differential Equations*. Cham, Springer, 2017, xiii+261 pp. EDN: PLGFAS. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-319-62797-7>.
 31. Durdiev D. K., Totieva Z. D. *Kernel Determination Problems in Hyperbolic Integro-Differential Equations*, Infosys Science Foundation Series. Singapore, Springer, 2023, xxvi+368 pp. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-981-99-2260-4>.
 32. Durdiev D. K. Determining the coefficient of a mixed parabolic-hyperbolic equation with noncharacteristic type change line, *Differ. Equ.*, 2022, vol. 58, no. 2, pp. 1618–1629. DOI: <https://doi.org/10.1134/S00122661220120059>.
 33. Tikhonov A. N., Samarskii A. A. *Uravneniia matematicheskoi fiziki* [Equations of Mathematical Physics]. Moscow, Nauka, 1977, 734 pp. (In Russian)
 34. Smirnov V. I. *Kurs vysshei matematiki* [Course of Higher Mathematics], vol. 4, part 2. Moscow, Nauka, 1981, 551 pp. (In Russian)