Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2023. Т. 27, № 4. С. 621–644
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu2023
EDN: AYWFBD

УДК 517.956

О разрешимости одной начально-граничной задачи для вырождающегося уравнения высокого четного порядка

А. К. Уринов[1,2]**,** ***Д. Д. Орипов***[1]

[1] Ферганский государственный университет,
Узбекистан, 150100, Фергана, ул. Мураббийлар, 19.
[2] Институт математики имени В. И. Романовского АН Республики Узбекистан,
Узбекистан, 100174, Ташкент, ул. Университетская, 46.

Аннотация

Рассмотрено вырождающееся дифференциальное уравнение в частных производных высокого четного порядка в прямоугольнике. Для рассматриваемого уравнения сформулирована одна начально-граничная задача и исследованы единственность, существование и устойчивость её решения. Единственность решения задачи доказана методом интегральных тождеств. Существование решения задачи исследовано методом разделения переменных. Здесь сначала исследована спектральная задача для обыкновенного дифференциального уравнения высокого четного порядка, вытекающая из поставленной задачи при разделении переменных. Построена функция Грина спектральной задачи. С её помощью спектральная задача эквивалентно сведена к интегральному уравнению Фредгольма второго рода с симметричным ядром. Отсюда на основании теории интегральных уравнений заключено, что существует счетное число собственных значений и собственных функций спектральной задачи. Найдены условия, при которых заданная функция разлагается в равномерно сходящийся ряд Фурье по собственным функциям спектральной задачи. С использованием свойств функции Грина и собственных функций спектральной задачи доказана лемма о равномерной сходимости некоторых билинейных рядов. Доказаны также леммы о порядке коэффициентов Фурье заданной функции. Решение изучаемой задачи выписано в виде суммы ряда Фурье по системе собственных функций спектральной задачи. Равномерная сходимость этого ряда и рядов,

Дифференциальные уравнения и математическая физика
Научная статья

Образец для цитирования
Уринов А. К., Орипов Д. Д. О разрешимости одной начально-граничной задачи для вырождающегося уравнения высокого четного порядка // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2023. Т. 27, № 4. С. 621–644. EDN: AYWFBD. DOI: 10.14498/vsgtu2023.

Сведения об авторах

Ахмаджон Кушакович Уринов https://orcid.org/0000-0002-9586-1799
доктор физико-математических наук, профессор; профессор каф. математического анализа и дифференциальных уравнений[1]; ведущий научный сотрудник[2]; e-mail: urinovak@mail.ru

Дастонбек Дилшодбек угли Орипов https://orcid.org/0000-0002-0212-6964
базовый докторант; каф. математического анализа и дифференциальных уравнений[1]; e-mail: dastonbekoripov94@gmail.com

полученных из него почленным дифференцированием, доказана с помощью лемм, перечисленных выше. В конце статьи получены две оценки для решения поставленной задачи, одна из которых — в пространстве квадратично суммируемых функций с весом, а другая — в пространстве непрерывных функций. Из этих неравенств следует устойчивость решения в соответствующих пространствах.

Ключевые слова: вырождающееся дифференциальное уравнение, начально-граничная задача, спектральная задача, существование, единственность и устойчивость решения, метод разделения переменных.

Получение: 14 мая 2023 г. / Исправление: 9 октября 2023 г. / Принятие: 13 декабря 2023 г. / Публикация онлайн: 23 декабря 2023 г.

Введение

Рассматривается вырождающееся уравнение высокого четного порядка вида

$$\frac{\partial^{2n}}{\partial x^{2n}}\left(x^{\alpha}\frac{\partial^{2n}u}{\partial x^{2n}}\right)+u_{tt}+\frac{2\gamma}{t}u_t+bu=f(x,t) \tag{1}$$

в прямоугольнике $\Omega=\{(x,t):0<x<1;0<t<T\}$. Здесь $u(x,t)$ — неизвестная функция; $f(x,t)$ — заданная функция, а α, γ, b, $n\in\mathbb{R}$ — заданные числа, причем $0<\alpha<1$, $0\leqslant\gamma<1/2$, $b\geqslant 0$, $n\in\mathbb{N}$.

Из уравнения (1) при $\gamma=b=\alpha=0$, $n=1$, $f(x,t)\equiv 0$ следует уравнение, описывающее свободное колебание балки, которое имеет многочисленные приложения в строительной механике, авиастроении, машиностроении, судостроении и т.д. [1–5]. В работе [6] для данного частного случая уравнения (1) изучена начальная задача, а в работах [7–13] — различные начально-граничные и обратные задачи. Для уравнений четвертого порядка, описывающих колебания прямоугольной пластинки, в работах [14–15] изучены различные начально-граничные задачи; уравнения колебаний балки в многомерном случае рассматривались в работе [16].

Обратим также внимание на работы [17–22], в которых ставятся и изучаются различные начально-граничные задачи для уравнений в частных производных высокого четного порядка с различными локальными и нелокальными граничными условиями.

Отметим, что в работах, посвященных изучению начально-граничных задач, в качестве объекта исследования в основном взяты невырождающиеся уравнения. Начально-граничные задачи для вырождающихся уравнений в частных производных высокого четного порядка изучены сравнительно мало. В частности, в работах [23–25] для уравнений четвертого порядка с тремя линиями вырождения изучены локальные и нелокальные начально-граничные задачи. В работах [26–27] рассматриваются вырождающиеся дифференциальные уравнения $2k$ порядка и исследованы задачи с граничными условиями вида

$$\left.\frac{\partial^j u}{\partial x^j}\right|_{x=0}=0,\quad \left.\frac{\partial^j u}{\partial x^j}\right|_{x=1}=0,\quad j=\overline{0,k-1},$$

а в работах [28, 29] — с условиями вида

$$\frac{\partial^j u}{\partial x^j}\Big|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial^{k+j} u}{\partial x^{k+j}}\Big|_{x=1} = 0, \quad j = \overline{0, k-1}.$$

В настоящей работе в области Ω для уравнения (1) формулируется и исследуется начально-граничная задача с условиями на $x = 0$ и $x = 1$, связанными со значениями частных производных искомой функции четного порядка по x.

1. Постановка задачи

Задача A_1. Найти функцию $u(x,t)$, обладающую следующими свойствами:

1) $(\partial^j/\partial x^j)u$, $(\partial^j/\partial x^j)[x^\alpha(\partial^{2n}/\partial x^{2n})u] \in C(\overline{\Omega})$, $j = \overline{0, 2n-1}$; $t^{2\gamma}u_t \in C(\overline{\Omega})$; $(\partial^{2n}/\partial x^{2n})[x^\alpha(\partial^{2n}/\partial x^{2n})u] \in C(\Omega)$; $\big(u_{tt} + \frac{2\gamma}{t}u_t\big) \in C(\Omega)$;
2) в области Ω удовлетворяет уравнению (1);
3) на границе области Ω выполняются следующие начальные и граничные условия:

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad x \in [0,1]; \qquad \lim_{t\to 0} t^{2\gamma}u_t = \psi(x), \quad x \in (0,1); \tag{2}$$

$$\begin{gathered} \frac{\partial^{2j}}{\partial x^{2j}}u(x,t)\Big|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial^{2j}}{\partial x^{2j}}\Big(x^\alpha \frac{\partial^{2n}}{\partial x^{2n}}u(x,t)\Big)\Big|_{x=0} = 0, \\ \frac{\partial^{2j}}{\partial x^{2j}}u(x,t)\Big|_{x=1} = 0, \quad \frac{\partial^{2j}}{\partial x^{2j}}\Big(x^\alpha \frac{\partial^{2n}}{\partial x^{2n}}u(x,t)\Big)\Big|_{x=1} = 0, \\ j = \overline{0, n-1}, \quad t \in [0,T], \end{gathered} \tag{3}$$

где $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — заданные функции.

Отметим, что эта задача при $\alpha = \gamma = b = 0$, $n = 1$ была ранее изучена в работах [8, 10] для уравнения балки, а в работе [9] — для нелинейного уравнения балки. В работе [10] изучены обратные задачи с граничными условиями вида (3) при $\alpha = 0$, $n = 1$ для уравнения балки, а в работах [14, 15] — начально-граничные задачи с такими же граничными условиями для уравнения колебания пластины. Задача A_1 при $\alpha = 0$ и другие задачи типа A_1 для уравнения

$$u_{tt} + \frac{2\gamma}{t}u_t + (-1)^m \frac{\partial^{2m}}{\partial x^{2m}}u = f(x,t)$$

изучены в работах [20, 22].

Исследуем существование, единственность и устойчивость решения поставленной задачи A_1.

2. Единственность решения задачи A_1

Теорема 1. *Задача A_1 не может иметь более одного решения.*

Доказательство. Предположим, что существуют два решения $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$ задачи A_1. Их разность обозначим через $u(x,t)$. Тогда функция $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению (1) при $f(x,t) \equiv 0$, а условиям (2) и (3) — при $\varphi(x) \equiv \psi(x) \equiv 0$.

Пусть $\forall T_0 \in (0,T]$, а $\Omega_0 = \{(x,t) : 0 < x < 1, 0 < t < T_0\}$. Очевидно, что $\overline{\Omega}_0 \subset \overline{\Omega}$. Введем следующую функцию:

$$\omega(x,t) = -\int_t^{T_0} \xi^{-2\gamma} u(x,\xi)d\xi, \quad (x,t) \in \overline{\Omega}_0.$$

Эта функция обладает следующими свойствами:

1) $(\partial^j/\partial x^j)\omega$, $(\partial^j/\partial x^j)[x^\alpha(\partial^{2n}/\partial x^{2n})\omega] \in C(\overline{\Omega}_0)$, $j = \overline{0, 2n-1}$; $t^{2\gamma}\omega_t$, $t^{2\gamma}\frac{\partial}{\partial t}(t^{2\gamma}\omega_t) \in C(\overline{\Omega}_0)$;
2) удовлетворяет условиям (3) при $t \in [0, T_0]$.

Рассмотрим уравнение (1) при $f(x,t) \equiv 0$, умножим его на функцию $t^{2\gamma}\omega(x,t)$ и проинтегрируем полученное равенство по области Ω_0:

$$\int_0^1 \int_0^{T_0} t^{2\gamma}\omega(x,t)\Big(\frac{\partial^{2n}}{\partial x^{2n}}\Big[x^\alpha \frac{\partial^{2n}u(x,t)}{\partial x^{2n}}\Big] + \\ + t^{-2\gamma}\frac{\partial}{\partial t}\Big[t^{2\gamma}\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big] + bu(x,t)\Big)dtdx = 0.$$

Перепишем полученное в виде

$$\int_0^{T_0} t^{2\gamma}dt \int_0^1 \omega(x,t)\frac{\partial^{2n}}{\partial x^{2n}}\Big[x^\alpha \frac{\partial^{2n}u(x,t)}{\partial x^{2n}}\Big]dx + \\ + \int_0^1 dx \int_0^{T_0} \omega(x,t)\frac{\partial}{\partial t}\Big[t^{2\gamma}\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big]dt + \int_0^1 dx \int_0^{T_0} bt^{2\gamma}\omega(x,t)u(x,t)dt = 0.$$

Теперь, применяя правило интегрирования по частям к первым двум внутренним интегралам, получим выражение

$$\int_0^{T_0} t^{2\gamma}\Big[\omega(x,t)\frac{\partial^{2n-1}}{\partial x^{2n-1}}\Big(x^\alpha \frac{\partial^{2n}u(x,t)}{\partial x^{2n}}\Big) - \frac{\partial\omega(x,t)}{\partial x}\frac{\partial^{2n-2}}{\partial x^{2n-2}}\Big(x^\alpha \frac{\partial^{2n}u(x,t)}{\partial x^{2n}}\Big) + \\ + \dots - \frac{\partial^{2n-1}\omega(x,t)}{\partial x^{2n-1}}\Big(x^\alpha \frac{\partial^{2n}u(x,t)}{\partial x^{2n}}\Big)\Big]_{x=0}^{x=1}dt + \\ + \int_0^{T_0} t^{2\gamma}dt \int_0^1 x^\alpha \frac{\partial^{2n}\omega(x,t)}{\partial x^{2n}}\frac{\partial^{2n}u(x,t)}{\partial x^{2n}}dx + \\ + \int_0^1 \Big[\omega(x,t)t^{2\gamma}\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0}^{t=T_0} - \int_0^{T_0} \omega_t(x,t)t^{2\gamma}\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}dt\Big]dx + \\ + \int_0^1 dx \int_0^{T_0} bt^{2\gamma}\omega(x,t)u(x,t)dt = 0,$$

из которого в силу свойств функций $\omega(x,t)$ и $u(x,t)$ следует равенство

$$\int_0^{T_0} t^{2\gamma}dt \int_0^1 x^\alpha \frac{\partial^{2n}\omega(x,t)}{\partial x^{2n}}\frac{\partial^{2n}u(x,t)}{\partial x^{2n}}dx - \int_0^1 dx \int_0^{T_0} t^{2\gamma}\frac{\partial\omega(x,t)}{\partial t}\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}dt + \\ + \int_0^1 dx \int_0^{T_0} bt^{2\gamma}\omega(x,t)u(x,t)dt = 0.$$

Отсюда, учитывая равенства

$$u = t^{2\gamma}\frac{\partial \omega}{\partial t}, \quad \frac{\partial^{2n} u}{\partial x^{2n}} = t^{2\gamma}\frac{\partial^{2n+1}\omega}{\partial x^{2n}\partial t},$$

имеем

$$\int_0^1 x^\alpha dx \int_0^{T_0} t^{4\gamma}\frac{\partial^{2n}\omega(x,t)}{\partial x^{2n}}\frac{\partial^{2n+1}\omega(x,t)}{\partial x^{2n}\partial t}dt - \int_0^1 dx \int_0^{T_0} u(x,t)\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}dt + \\ + \int_0^1 dx \int_0^{T_0} bt^{4\gamma}\omega(x,t)\frac{\partial}{\partial t}\omega(x,t)dt = 0.$$

Далее, принимая во внимание равенства

$$u(x,t)\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\big[u(x,t)\big]^2, \quad \frac{\partial^{2n}\omega(x,t)}{\partial x^{2n}}\frac{\partial^{2n+1}\omega(x,t)}{\partial x^{2n}\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\Big[\frac{\partial^{2n}\omega(x,t)}{\partial x^{2n}}\Big]^2,$$

$$\frac{\partial^{2n}}{\partial x^{2n}}\omega(x,T_0) = 0, \quad u(x,0) = 0$$

и применяя правило интегрирования по частям к интегралам по t при $0 < < \gamma < 1/2$, получим

$$\int_0^1 u^2(x,T_0)dx + 4\gamma\int_0^1 dx \int_0^{T_0} t^{4\gamma-1}\Big(x^\alpha\Big[\frac{\partial^{2n}\omega(x,t)}{\partial x^{2n}}\Big]^2 + b\omega^2(x,t)\Big)dt = 0,$$

а при $\gamma = 0$ имеем

$$\int_0^1 u^2(x,T_0)dx + \int_0^1 x^\alpha\Big[\frac{\partial^{2n}\omega(x,t)}{\partial x^{2n}}\Big]^2_{t=0}dx + b\int_0^1 \omega^2(x,0)dx = 0.$$

В силу свойств функций $u(x,t)$, $\omega(x,t)$ и условий $b \geqslant 0$, $0 < \gamma < 1/2$, $0 < \alpha < 1$ все интегралы в левой части последних равенств существуют и неотрицательны. Тогда из них следует, что $u(x,T_0) \equiv 0$, $x \in [0,1]$. Так как $\forall T_0 \in [0,T]$, функция $u(x,t) \equiv 0$, $(x,t) \in \overline{\Omega}$. Тогда $u_1(x,t) \equiv u_2(x,t)$, $(x,t) \in \overline{\Omega}$. Теорема 1 доказана. $\square$

3. Исследование спектральной задачи

При формальном применении метода Фурье к задаче A_1 возникает следующая спектральная задача: найти значения параметра λ, при которых существуют нетривиальные решения уравнения

$$Mv \equiv \big(x^\alpha v^{(2n)}(x)\big)^{(2n)} = \lambda v(x), \quad 0 < x < 1, \tag{4}$$

удовлетворяющие условиям

$$\begin{aligned} &v^{(j)}(x), && \big(x^\alpha v^{(2n)}(x)\big)^{(j)} \in C[0,1], \quad j = \overline{0, 2n-1}; \\ &v^{(2j)}(0) = 0, && \big(x^\alpha v^{(2n)}(x)\big)^{(2j)}\big|_{x=0} = 0, \quad j = \overline{0, n-1}; \\ &v^{(2j)}(1) = 0, && \big(x^\alpha v^{(2n)}(x)\big)^{(2j)}\big|_{x=1} = 0, \quad j = \overline{0, n-1}. \end{aligned} \tag{5}$$

Пусть $v(x)$ и $h(x)$ — функции, удовлетворяющие условиям (5), и $Mv(x)$, $Mh(x) \in L_2(0,1)$. Тогда, применяя правило интегрирования по частям, имеем

$$\int_0^1 h(x)Mv(x)dx = \Big[h(x)\big(x^\alpha v^{(2n)}(x)\big)^{(2n-1)} - h'(x)\big(x^\alpha v^{(2n)}(x)\big)^{(2n-2)} +$$
$$+h''(x)\big(x^\alpha v^{(2n)}(x)\big)^{(2n-3)} - \dots - h^{(2n-1)}(x)\big(x^\alpha v^{(2n)}(x)\big) + \big(x^\alpha h^{(2n)}(x)\big)v^{(2n-1)}(x) -$$
$$- \big(x^\alpha h^{(2n)}(x)\big)' v^{(2n-2)}(x) + \big(x^\alpha h^{(2n)}(x)\big)'' v^{(2n-3)}(x) - \dots$$
$$\dots - \big(x^\alpha h^{(2n)}(x)\big)^{(2n-1)} v(x)\Big]_{x=0}^{x=1} + \int_0^1 v(x)Mh(x)dx.$$

Отсюда в силу свойств функций $v(x)$ и $h(x)$ следует равенство

$$\int_0^1 h(x)Mv(x)dx = \int_0^1 v(x)Mh(x)dx.$$

Следовательно, задача с условиями $Mv = 0$ и (5) самосопряжена.

Пусть $v(x) \not\equiv 0$, $x \in [0,1]$ и удовлетворяет условиям задачи (4), (5). Тогда

$$\lambda \int_0^1 v^2(x)dx = \int_0^1 v(x)\big(x^\alpha v^{(2n)}(x)\big)^{(2n)}dx = \Big[v(x)\big(x^\alpha v^{(2n)}(x)\big)^{(2n-1)} -$$
$$- v'(x)\big(x^\alpha v^{(2n)}(x)\big)^{(2n-2)} + \dots - v^{(2n-1)}(x)\big(x^\alpha v^{(2n)}(x)\big)\Big]_{x=0}^{x=1} +$$
$$+ \int_0^1 x^\alpha \big[v^{(2n)}(x)\big]^2 dx = \int_0^1 x^\alpha \big[v^{(2n)}(x)\big]^2 dx,$$

т.е.

$$\lambda \int_0^1 v^2(x)dx = \int_0^1 x^\alpha \big[v^{(2n)}(x)\big]^2 dx.$$

Отсюда в силу $v(x) \not\equiv 0$ следует, что $\lambda \geqslant 0$. Если $\lambda = 0$, то из последнего равенства следует, что $v^{(2n)}(x) = 0$, $0 < x < 1$. Тогда

$$v(x) = c_1 \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + c_2 \frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} + \dots + c_{2n-1}\frac{x}{1!} + c_{2n}, \quad x \in (0,1),$$

где c_j — произвольные действительные числа. Подчиняя эту функцию условиям $v^{(2j)}(x)\big|_{x=0} = 0$, $v^{(2j)}(x)\big|_{x=1} = 0$, $j = \overline{0, n-1}$, получим $c_j = 0$, $j = \overline{1, 2n}$. Тогда $v(x) \equiv 0$, $0 \leqslant x \leqslant 1$. Следовательно, задача (4), (5) может иметь нетривиальные решения только при $\lambda > 0$.

Для доказательства существования собственных значений задачи (4), (5) применим метод функции Грина. Так как $\lambda = 0$ не является собственным значением, существует единственная функция Грина $G(x,s)$. Построим ее. Она должна обладать следующими свойствами:

1) функции $(\partial^j/\partial x^j)G(x,s)$, $j = \overline{0, 2n-1}$, $(\partial^j/\partial x^j)\big[x^\alpha(\partial^{2n}/\partial x^{2n})G(x,s)\big]$, $j = \overline{0, 2n-2}$ непрерывны для всех x, $s \in [0,1]$;

2) в каждом из интервалов $[0,s)$ и $(s,1]$ существует непрерывная производная $(\partial^{2n-1}/\partial x^{2n-1})\big[x^\alpha(\partial^{2n}/\partial x^{2n})G(x,s)\big]$, а при $x=s$ имеет место скачок 1:

$$(\partial^{2n-1}/\partial x^{2n-1})\big[x^\alpha(\partial^{2n}/\partial x^{2n})G(x,s)\big]_{x=s-0}^{x=s+0}=1;$$

3) в интервалах $(0,s)$ и $(s,1)$ существует производная $(\partial^{2n}/\partial x^{2n})\big[x^\alpha(\partial^{2n}/\partial x^{2n})G(x,s)\big]$ и выполняется равенство $MG(x,s)=0$;
4) при $s\in(0,1)$ и $k=\overline{0,n-1}$ выполняются граничные условия

$$\begin{aligned}&(\partial^{2k}/\partial x^{2k})G(x,s)\big|_{x=0}=0,\\ &(\partial^{2k}/\partial x^{2k})\big(x^\alpha(\partial^{2n}/\partial x^{2n})G(x,s)\big)\big|_{x=0}=0;\end{aligned}\qquad(6)$$

$$\begin{aligned}&(\partial^{2k}/\partial x^{2k})G(x,s)\big|_{x=1}=0,\\ &(\partial^{2k}/\partial x^{2k})\big(x^\alpha(\partial^{2n}/\partial x^{2n})G(x,s)\big)\big|_{x=1}=0.\end{aligned}\qquad(7)$$

Принимая во внимание вид общего решения уравнения $MG(x,s)=0$ в промежутках $(0,s)$ и $(s,1)$, функцию $G(x,s)$ ищем в виде

$$G(x,s)=\begin{cases}\displaystyle\sum_{j=1}^{2n}\frac{a_jx^{4n-\alpha-j}}{(2n-j)!(2n-\alpha-j+1)_{2n}}+\sum_{j=2n+1}^{4n}\frac{a_jx^{4n-j}}{(4n-j)!}, & 0\leqslant x\leqslant s,\\ \displaystyle\sum_{j=1}^{2n}\frac{b_jx^{4n-\alpha-j}}{(2n-j)!(2n-\alpha-j+1)_{2n}}+\sum_{j=2n+1}^{4n}\frac{b_jx^{4n-j}}{(4n-j)!}, & s\leqslant x\leqslant 1,\end{cases}\qquad(8)$$

где a_j и b_j, $j=\overline{1,4n}$ — неизвестные функции переменной s, а $(z)_n=z(z+1)\times\times(z+2)\cdots(z+n-1)$ — символ Похгаммера [30].

Если функция (8) удовлетворяет свойствам 1) и 2) функции Грина, получим следующую систему уравнений относительно (b_j-a_j), $j=1,2,\ldots,4n$:

$$b_1-a_1=1,\quad \sum_{j=1}^{m_1}\frac{s^{m_1-j}}{(m_1-j)!}(b_j-a_j)=0,\quad m_1=\overline{2,2n},$$

$$\sum_{j=1}^{2n}\frac{s^{2n-\alpha+m_2-j}(b_j-a_j)}{(2n-j)!(2n-\alpha-j+1)_{m_2}}+\sum_{j=1}^{m_2}\frac{s^{m_2-j}(b_{2n+j}-a_{2n+j})}{(m_2-j)!}=0,\ m_2=\overline{1,2n}.$$

Эта система имеет единственное решение:

$$b_j-a_j=\frac{(-1)^{j-1}s^{j-1}}{(j-1)!},\quad b_{2n+j}-a_{2n+j}=\frac{(-1)^{j-1}s^{2n+j-1-\alpha}}{(j-1)!(j-\alpha)_{2n}},\quad j=\overline{1,2n}.\qquad(9)$$

Подставляя (8) в условия (6), последовательно получим

$$a_{4n}=a_{4n-2}=\cdots=a_{2n+2}=a_{2n}=\cdots=a_4=a_2=0.\qquad(10)$$

В силу этих равенств из (9) следует, что

$$b_{2j}=-\frac{s^{2j-1}}{(2j-1)!},\quad b_{2n+2j}=-\frac{s^{2n-1-\alpha+2j}}{(2j-1)!(2j-\alpha)_{2n}},\quad j=\overline{1,n}.\qquad(11)$$

Далее, подставляя (8) в условия (7), получим систему уравнений

$$\begin{gathered}
\sum_{j=1}^{m_3}\Big(\frac{b_{2j-1}}{(2m_3+1-2j)!}+\frac{b_{2j}}{(2m_3-2j)!}\Big)=0, \quad m_3=\overline{1,n};\\
\sum_{j=1}^{n}\Big(\frac{b_{2j-1}}{(2n-2j+1)!(2n-\alpha-2j+2)_{2m_4}}+\\
+\frac{b_{2j}}{(2n-2j)!(2n-\alpha-2j+1)_{2m_4}}\Big)+\\
+\sum_{j=1}^{m_4}\Big(\frac{b_{2n+2j-1}}{(2m_4-2j+1)!}+\frac{b_{2n+2j}}{(2m_4-2j)!}\Big)=0, \quad m_4=\overline{1,n}.
\end{gathered} \tag{12}$$

Принимая во внимание, что b_{2j} — известные величины вида (11), из (12) однозначно находим b_{2j-1}, $j=\overline{1,2n}$:

$$\begin{gathered}
b_1=-b_2;\\
b_{2j-1}=-b_{2j}-\sum_{i=1}^{2j-2}\frac{b_i}{(2j-i)!}, \quad j=\overline{2,n};\\
b_{2n+1}=-b_{2n+2}-\sum_{i=1}^{2n}\frac{b_i}{(2n-i)!(2n-\alpha+1-i)_2},\\
b_{2n+2j-1}=-b_{2n+2j}-\sum_{i=1}^{2n}\frac{b_i}{(2n-i)!(2n-\alpha+1-i)_{2j}}-\\
-\sum_{i=1}^{2j-2}\frac{b_{2n+i}}{(2j-i)!}, \quad j=\overline{2,n}.
\end{gathered} \tag{13}$$

Подставляя (13) в (9), находим a_{2j-1}, $j=\overline{1,2n}$:

$$\begin{gathered}
a_1=-b_2-1=s-1;\\
a_{2j-1}=b_{2j-1}-\frac{s^{2j-2}}{(2j-2)!}, \quad j=\overline{2,n};\\
a_{2n+1}=b_{2n+1}-\frac{s^{2n-\alpha}}{(1-\alpha)_{2n}},\\
a_{2n+2j-1}=b_{2n+2j-1}-\frac{s^{2n+2j-2-\alpha}}{(2j-2)!(2j-1-\alpha)_{2n}}, \quad j=\overline{2,n}.
\end{gathered} \tag{14}$$

Подставляя (10), (11), (13), (14) в (8), находим функцию Грина в виде

$$\begin{gathered}
G(x,s)=\frac{x^{4n-\alpha-1}(s-1)}{(2n-1)!(2n-\alpha)_{2n}}+\\
+\sum_{j=2}^{n}\Big(b_{2j-1}-\frac{s^{2j-2}}{(2j-2)!}\Big)\frac{x^{4n-\alpha-2j+1}}{(2n-2j+1)!(2n-\alpha-2j+2)_{2n}}+\\
+\Big(b_{2n+1}-\frac{s^{2n-\alpha}}{(1-\alpha)_{2n}}\Big)\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+
\end{gathered}$$

$$+\sum_{j=2}^{n}\Big(b_{2n+2j-1}-\frac{s^{2n-\alpha+2j-2}}{(2j-2)!(2j-1-\alpha)_{2n}}\Big)\frac{x^{2n-2j+1}}{(2n-2j+1)!}, \quad \text{если } 0\leqslant x\leqslant s,$$

$$G(x,s)=\frac{x^{4n-\alpha-1}s}{(2n-1)!(2n-\alpha)_{2n}}+$$
$$+\sum_{j=2}^{n}b_{2j-1}\frac{x^{4n-\alpha-2j+1}}{(2n-2j+1)!(2n-\alpha-2j+2)_{2n}}+$$
$$+\sum_{j=1}^{n}b_{2j}\frac{x^{4n-\alpha-2j}}{(2n-2j)!(2n-\alpha-2j+1)_{2n}}+b_{2n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+$$
$$+\sum_{j=2}^{n}b_{2n+2j-1}\frac{x^{2n-2j+1}}{(2n-2j+1)!}+\sum_{j=1}^{n}b_{2n+2j}\frac{x^{2n-2j}}{(2n-2j)!}, \quad \text{если } s\leqslant x\leqslant 1, \quad (15)$$

где b_{2j-1}, b_{2j}, $j=\overline{2,n}$; b_{2n+2j}, $j=\overline{1,n}$; b_{2n+1}, $b_{2n+2j-1}$, $j=\overline{2,n}$ — определены равенствами (11) и (13).

Так как задача с условиями $Mv=0$ и (5) самосопряжена, ее функция Грина (15) симметрична относительно аргументов x и s.

С помощью метода, примененного в [31], легко убедиться, что задача (4), (5) эквивалентна следующему интегральному уравнению:

$$v(x)=\lambda\int_0^1 G(x,s)v(s)ds. \quad (16)$$

Так как ядро $G(x,s)$ непрерывно, симметрично, и положительно (т.е. $\lambda>0$), интегральное уравнение (16), следовательно, задача (4), (5) имеет счетное число собственных значений

$$0<\lambda_1<\lambda_2<\lambda_3<\dots<\lambda_k<\dots, \qquad \lambda_k\to\infty,$$

а соответствующие им собственные функции $v_1(x)$, $v_2(x)$, $v_3(x)$, ..., $v_k(x)$, ... образуют ортонормированную систему в пространстве $L_2(0,1)$ [32].

Лемма 1. *Пусть функция $g(x)$ удовлетворяет следующим условиям:*

$$g^{(2j)}(x),\ [x^\alpha g^{(2n)}(x)]^{(2j)}\in C[0,1],\ j=\overline{0,n-1}; \quad Mg(x)\in C(0,1)\cap L_2(0,1);$$
$$g^{(2j)}(0)=0,\ g^{(2j)}(1)=0,\ j=\overline{0,n-1};$$
$$(x^\alpha g^{(2n)}(x))^{(2j)}\big|_{x=0}=0,\ (x^\alpha g^{(2n)}(x))^{(2j)}\big|_{x=1}=0,\ j=\overline{0,n-1}.$$

Тогда ее можно разложить на отрезке $[0,1]$ в абсолютно и равномерно сходящийся ряд по системе собственных функций задачи (4), (5).

Доказательство. Пользуясь правилом интегрирования по частям, свойствами функции Грина $G(x,s)$ и условиями, наложенными на функцию $g(x)$, нетрудно убедиться, что справедливо равенство

$$\int_0^1 G(x,s)Mg(s)ds=\int_0^1 G(x,s)[s^\alpha g^{(2n)}(s)]^{(2n)}ds=g(x).$$

Следовательно, $g(x)$ — функция, представимая через ядро $G(x,s)$. Кроме того, в силу непрерывности функции $G(x,s)$ имеет место оценка

$$\int_0^1 G^2(x,s)ds \leqslant A(x) = a_0 = \mathrm{const} < \infty.$$

Тогда на основании теоремы Гильберта—Шмидта [32] справедливо утверждение леммы 1. $\square$

4. Вспомогательные леммы

В этом пункте под λ_k и $v_k(x)$, $k \in \mathbb{N}$, понимаются собственные значения и собственные функции задачи (4), (5), а под g_k — коэффициенты Фурье функции $g(x)$:

$$g_k = \int_0^1 g(x)v_k(x)dx, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Лемма 2. *Следующие ряды сходятся равномерно на сегменте* $[0,1]$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{[v_k^{(j)}(x)]^2}{\lambda_k}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left([x^\alpha v_k^{(2n)}(x)]^{(j)}\right)^2}{\lambda_k^2}, \quad j=\overline{0,2n-1}. \tag{17}$$

Доказательство. В силу (16) и (4) справедливы равенства

$$v_k^{(j)}(x) = \lambda_k \int_0^1 \frac{\partial^j}{\partial x^j} G(x,s) v_k(s)ds = \\ = \int_0^1 [s^\alpha v_k^{(2n)}(s)]^{(2n)} \frac{\partial^j}{\partial x^j} G(x,s)ds, \quad j=\overline{0,2n-1}.$$

Отсюда, применяя правило интегрирования по частям $2n$ раз, а затем принимая во внимание условия (5), получим

$$v_k^{(j)}(x) = \int_0^1 s^\alpha v_k^{(2n)}(s) \frac{\partial^{2n+j}}{\partial x^j \partial s^{2n}} G(x,s)ds, \quad j=\overline{0,2n-1}.$$

Следовательно, справедливо равенство

$$\frac{v_k^{(j)}(x)}{\sqrt{\lambda_k}} = \int_0^1 \left(s^{\alpha/2}\frac{\partial^{2n+j}}{\partial x^j \partial s^{2n}} G(x,s)\right)\left(\frac{s^{\alpha/2}v_k^{(2n)}(s)}{\sqrt{\lambda_k}}\right)ds, \quad j=\overline{0,2n-1}. \tag{18}$$

В силу условий (4) и (5), имеют место равенства

$$\int_0^1 \frac{s^\alpha v_k^{(2n)}(s) v_l^{(2n)}(s)}{\sqrt{\lambda_k \lambda_l}} ds = \begin{cases} 1, & k=l, \\ 0, & k \neq l. \end{cases}$$

Следовательно, $\left\{s^{\alpha/2}v_k^{(2n)}(s)/\sqrt{\lambda_k}\right\}_{k=1}^{\infty}$ — ортонормальная система. Тогда из выражения (18) следует, что $v_k^{(2j)}(x)/\sqrt{\lambda_k}$ — коэффициенты Фурье функции $s^{\alpha/2}(\partial^{2n+j}/\partial x^j\partial s^{2n})G(x,s)$ по системе $\left\{s^{\alpha/2}v_k^{(2n)}(s)/\sqrt{\lambda_k}\right\}_{k=1}^{\infty}$. Поэтому, согласно неравенству Бесселя [32], имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{[v_k^{(j)}(x)]^2}{\lambda_k}\leqslant\int_0^1 s^{\alpha}\Big[\frac{\partial^{2n+j}}{\partial x^j\partial s^{2n}}G(x,s)\Big]^2ds,\quad j=\overline{0,2n-1}. \tag{19}$$

Интеграл в правой части можно переписать в виде

$$\int_0^1 s^{\alpha}\Big[\frac{\partial^{2n+j}}{\partial x^j\partial s^{2n}}G(x,s)\Big]^2ds=\int_0^1 s^{-\alpha}\Big[\frac{\partial^j}{\partial x^j}\Big(s^{\alpha}\frac{\partial^{2n}}{\partial s^{2n}}G(x,s)\Big)\Big]^2ds,\quad j=\overline{0,2n-1}.$$

Так как

$$s^{\alpha}\frac{\partial^{2n}G(x,s)}{\partial s^{2n}},\quad \frac{\partial^j G(x,s)}{\partial x^j}\in C(\overline{\Omega}),\quad j=\overline{0,2n-1},$$

функция в квадратной скобке в последнем интеграле непрерывна на $\overline{\Omega}$. Тогда в силу $0<\alpha<1$ интеграл в (19) равномерно ограничен при $j=\overline{0,2n-1}$, откуда следует, что первые ряды в (17) сходятся равномерно.

Аналогично доказывается сходимость и остальных рядов. $\square$

Лемма 3. *Если выполнены условия*

$$g^{(j)}(x)\in C[0,1],\quad j=\overline{0,2n-1};$$
$$x^{\alpha/2}g^{(2n)}(x)\in C(0,1)\cap L_2(0,1);$$
$$g^{(2j)}(0)=0,\ g^{(2j)}(1)=0,\quad j=\overline{0,n-1},$$

то справедливо неравенство

$$\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k g_k^2\leqslant\int_0^1 x^{\alpha}\big[g^{(2n)}(x)\big]^2dx, \tag{20}$$

в частности, ряд в левой части сходится.

Доказательство. В силу (4) справедливо равенство

$$\lambda_k^{1/2}g_k=\lambda_k^{1/2}\int_0^1 g(x)v_k(x)dx=\lambda_k^{-1/2}\int_0^1 g(x)\big[x^{\alpha}v_k^{(2n)}(x)\big]^{(2n)}dx.$$

Из этого равенства, применяя правило интегрирования по частям $2n$ раз и учитывая свойства функций $g(x)$ и $v_k(x)$, получим

$$\lambda_k^{1/2}g_k=\int_0^1\big[x^{\alpha/2}g^{(2n)}(x)\big]\big[\lambda_k^{-1/2}x^{\alpha/2}v_k^{(2n)}(x)\big]dx.$$

Это означает, что числа $\lambda_k^{1/2}g_k$ — коэффициенты Фурье функции $x^{\alpha/2}g^{(2n)}(x)$ по ортонормированной системе функций $\left\{x^{\alpha/2}v^{(2n)}(x)/\sqrt{\lambda_k}\right\}_{k=1}^{\infty}$. Тогда, согласно неравенству Бесселя [32], справедливо неравенство (20). $\square$

Лемма 4. *Если выполнены условия*

$$g^{(j)}(x),\ [x^\alpha g^{(2n)}(x)]^{(j)} \in C[0,1],\ j=\overline{0,2n-1};$$
$$Mg(x)\in C(0,1)\cap L_2(0,1);$$
$$g^{(2j)}(0)=0,\ [x^\alpha g^{(2n)}(x)]^{(2j)}|_{x=0}=0,$$
$$g^{(2j)}(1)=0,\ [x^\alpha g^{(2n)}(x)]^{(2j)}|_{x=1}=0,\ j=\overline{0,n-1},$$

то справедливо неравенство

$$\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^2 g_k^2 \leqslant \int_0^1 [Mg(x)]^2dx, \tag{21}$$

в частности, ряд в левой части сходится.

Доказательство. В силу (4) справедливо равенство

$$\lambda_k g_k=\lambda_k\int_0^1 g(x)v_k(x)dx=\int_0^1 g(x)[x^\alpha v_k^{(2n)}(x)]^{(2n)}dx.$$

Применяя правило интегрирования по частям $4n$ раз и учитывая свойства функций $g(x)$ и $v_k(x)$, получим

$$\lambda_k g_k=\int_0^1 [x^\alpha g^{(2n)}(x)]^{(2n)}v_k(x)dx=\int_0^1 [Mg(x)]v_k(x)dx.$$

Отсюда следует, что числа $\lambda_k g_k$ — коэффициенты Фурье функции $Mg(x)$ по ортонормированной системе функций $\{v_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$. Тогда, согласно неравенству Бесселя [32], справедливо неравенство (21). □

Лемма 5. *Если выполнены условия*

$$g^{(j)}(x),\ [x^\alpha g^{(2n)}(x)]^{(j)},\ [Mg(x)]^{(j)} \in C[0,1],\ \ j=\overline{0,2n-1};$$
$$x^{\alpha/2}[Mg(x)]^{(2n)}\in C(0,1)\cap L_2(0,1);$$
$$g^{(2j)}(0)=0,\ [Mg(x)]^{(2j)}|_{x=0}=0,$$
$$g^{(2j)}(1)=0,\ [Mg(x)]^{(2j)}|_{x=1}=0,\ j=\overline{0,n-1},$$

то справедливо неравенство

$$\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^3 g_k^2 \leqslant \int_0^1 x^\alpha\big([Mg(x)]^{(2n)}\big)^2dx, \tag{22}$$

в частности, ряд в левой части сходится.

Доказательство. Функция $Mg(x)$ удовлетворяет условиям леммы 3. Как показано выше, $\lambda_k g_k$ — коэффициенты Фурье функции $Mg(x)$ по системе $\{v_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$. Тогда, согласно лемме 3, справедливо неравенство (22). □

5. Существование и устойчивость решения

Решение задачи A_1 ищем в виде

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) v_k(x), \tag{23}$$

где $u_k(t)$ — неизвестные функции, которые подлежат определению; $v_k(x)$ — собственные функции задачи (4), (5).

Подставим (23) в уравнение (1) и условия (2), а затем умножим полученные равенства на $v_m(x)$. После этого, интегрируя полученные равенства по x на интервале $(0,1)$ и принимая во внимание ортонормированность системы функций $\{v_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$, относительно неизвестных функций $u_k(t)$ получим следующую задачу:

$$u_k''(t) + \frac{2\gamma}{t} u_k'(t) + (\lambda_k + b) u_k(t) = f_k(t), \quad t \in (0,T), \quad k \in \mathbb{N}; \tag{24}$$

$$u_k(0) = \varphi_k, \quad \lim_{t\to 0} t^{2\gamma} u_k'(t) = \psi_k, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{25}$$

где

$$\varphi_k = \int_0^1 \varphi(x) v_k(x) dx, \quad \psi_k = \int_0^1 \psi(x) v_k(x) dx,$$
$$f_k(t) = \int_0^1 f(x,t) v_k(x) dx, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Задача (24), (25) имеет единственное решение:

$$\begin{gathered} u_k(t) = a_k t^{1/2-\gamma} J_{1/2-\gamma}(t\sqrt{\lambda_k + b}) + b_k t^{1/2-\gamma} J_{\gamma-1/2}(t\sqrt{\lambda_k+b}) + \\ + \frac{\pi}{2\cos\gamma\pi} \int_0^t \big[J_{1/2-\gamma}(t\sqrt{\lambda_k+b}) J_{\gamma-1/2}(\tau\sqrt{\lambda_k+b}) - \\ - J_{\gamma-1/2}(t\sqrt{\lambda_k+b}) J_{1/2-\gamma}(\tau\sqrt{\lambda_k+b}) \big] \left(\frac{t}{\tau}\right)^{1/2-\gamma} \tau f_k(\tau) d\tau, \quad k \in \mathbb{N}, \end{gathered} \tag{26}$$

где

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{2} (\sqrt{\lambda_k + b}/2)^{\gamma-1/2} \Gamma(1/2 - \gamma) \psi_k, \\ b_k &= \frac{1}{2} (\sqrt{\lambda_k + b}/2)^{1/2-\gamma} \Gamma(1/2 + \gamma) \varphi_k, \end{aligned} \tag{27}$$

$J_v(x)$ — функция Бесселя первого рода [33], $\Gamma(z)$ — гамма-функция [30].

Лемма 6. *Для функций $u_k(t)$, $k \in \mathbb{N}$, определяемых равенствами (26), при всех $t \in [0,T]$ справедливы неравенства*

$$|u_k(t)| \leqslant |\varphi_k| + \frac{T^{1-2\gamma}}{1-2\gamma} |\psi_k| + \frac{2T^{3/2}}{1-2\gamma} \|f_k(t)\|_{L_2(0,T)}, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{28}$$

$$|t^{2\gamma}u_t'(t)| \leqslant C_1|\psi_k| + \frac{(\lambda_k+b)T^{1+2\gamma}}{1+2\gamma}|\varphi_k| + \\ + C_2(\lambda_k+b)T^{2\gamma+1/2}\|f_k(t)\|_{L_2(0,T)}, \quad k\in\mathbb{N},$$

$$\left|u_k''(t)+\frac{2\gamma}{t}u_k'(t)\right| \leqslant (\lambda_k+b)|u_k(t)|+|f_k(t)|, \quad k\in\mathbb{N},$$

где C_1 и C_2 — некоторые действительные положительные числа.

Доказательство. Переписывая функции (26) с помощью функции Бесселя—Клиффорда $\overline{J}_\omega(z)=\Gamma(\omega+1)(z/2)^{-\omega}J_\omega(z)$ и учитывая, что $|\overline{J}_\omega(z)|\leqslant 1$ при $\omega>-1/2$, а также $0\leqslant\tau\leqslant t\leqslant T$, получим оценку

$$|u_k(t)| \leqslant |a_k|\frac{t^{1-2\gamma}(\sqrt{\lambda_k+b}/2)^{1/2-\gamma}}{\Gamma(3/2-\gamma)} + \\ + |b_k|\frac{(\sqrt{\lambda_k+b}/2)^{\gamma-1/2}}{\Gamma(1/2+\gamma)} + \frac{2T}{1-2\gamma}\int_0^t |f_k(\tau)|d\tau.$$

Отсюда, принимая во внимание равенства (27) и применяя неравенство Коши—Буняковского к интегралу, приходим к неравенству (28).

Остальные неравенства доказываются аналогично. □

Теорема 2. *Пусть $\gamma\in(0,1/2)$ и функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ удовлетворяют условиям леммы 5, а функция $f(x,t)$ удовлетворяет условиям леммы 5 по аргументу x равномерно по t. Тогда ряд (23), коэффициенты которого определены равенствами (26), (27), определяет решение задачи A_1.*

Доказательство. Докажем равномерную сходимость в $\overline{\Omega}$ ряда (23) и следующих рядов, формально полученных из (23):

$$\frac{\partial^j u}{\partial x^j}=\sum_{k=1}^{\infty}u_k(t)v_k^{(j)}(x),\ \frac{\partial^j}{\partial x^j}\left(x^\alpha\frac{\partial^{2n}u}{\partial^{2n}}\right)=\sum_{k=1}^{\infty}u_k(t)\left(x^\alpha v_k^{(2n)}(x)\right)^{(j)},\ j=\overline{0,2n-1};$$

$$t^{2\gamma}\frac{\partial u}{\partial t}=\sum_{k=1}^{\infty}t^{2\gamma}u_k'(t)v_k(x),$$

и равномерную сходимость в любом компакте $D\subset\Omega$ следующих рядов:

$$\frac{\partial^{2n}}{\partial x^{2n}}\left(x^\alpha\frac{\partial^{2n}u}{\partial^{2n}}\right)=\sum_{k=1}^{\infty}u_k(t)\left(x^\alpha v_k^{(2n)}(x)\right)^{(2n)}, \tag{29}$$

$$u_{tt}+\frac{2\gamma}{t}u_t=\sum_{k=1}^{\infty}\left[u_k''(t)+\frac{2\gamma}{t}u_k'(t)\right]v_k(x).$$

Рассмотрим ряд (29). В силу (4) в любом компакте $D\subset\Omega$ ряд из правой части (29) записывается в виде

$$\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k u_k(t)v_k(t). \tag{30}$$

Для доказательства равномерной сходимости ряда (30), согласно (28) достаточно доказать абсолютную и равномерную сходимость рядов

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \varphi_k v_k(x), \quad \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \psi_k v_k(x), \quad \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \sqrt{\int_0^T f_k^2(\tau)d\tau}\, v_k(x). \tag{31}$$

К каждому из этих рядов применим неравенство Коши—Буняковского:

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \varphi_k v_k(x)\right| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \left|\sqrt{\lambda_k^3}\varphi_k \frac{v_k(x)}{\sqrt{\lambda_k}}\right| \leqslant \left[\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^3 \varphi_k^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{v_k^2(x)}{\lambda_k}\right]^{1/2},$$

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \psi_k v_k(x)\right| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \left|\sqrt{\lambda_k^3}\psi_k \frac{v_k(x)}{\sqrt{\lambda_k}}\right| \leqslant \left[\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^3 \psi_k^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{v_k^2(x)}{\lambda_k}\right]^{1/2},$$

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \sqrt{\int_0^T f_k^2(\tau)d\tau}\, v_k(x)\right| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \left|\sqrt{\lambda_k^3 \int_0^T f_k^2(\tau)d\tau}\frac{v_k(x)}{\sqrt{\lambda_k}}\right| \leqslant$$
$$\leqslant \left[\int_0^T \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^3 f_k^2(\tau)d\tau \sum_{k=1}^{\infty} \frac{v_k^2(x)}{\lambda_k}\right]^{1/2}.$$

Ряды, стоящие в правых частях этих неравенств, в силу условия теоремы 2 согласно леммам 2 и 5 равномерно сходятся. Тогда ряды, стоящие в левых частях, т.е. ряды (31), сходятся абсолютно и равномерно в $\overline{\Omega}$. Следовательно, ряд (30) сходится абсолютно и равномерно в $\overline{\Omega}$. Поэтому ряд в (29) сходится абсолютно и равномерно в любом компакте $D \subset \Omega$.

Равномерная сходимость ряда (23) следует из сходимости ряда (30).

Аналогично доказывается равномерная сходимость и остальных рядов. Теорема 2 доказана. □

При $\gamma = 0$ в силу $J_{1/2}(x) = \sqrt{2/(\pi x)}\,\sin x$, $J_{-1/2}(x) = \sqrt{2/(\pi x)}\,\cos x$ функции (26) записываются в виде

$$u_k(t) = \varphi_k \cos(t\sqrt{\lambda_k + b}) + \frac{\psi_k}{\sqrt{\lambda_k + b}} \sin(t\sqrt{\lambda_k + b}) +$$
$$+ \frac{1}{\sqrt{\lambda_k + b}} \int_0^t f_k(\tau) \sin\big[(t-\tau)\sqrt{\lambda_k + b}\big]d\tau, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{32}$$

откуда следует оценка

$$|u_k(t)| \leqslant |\varphi_k| + \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}|\psi_k| + \sqrt{T/\lambda_k}\|f_k(t)\|_{L_2(0,T)}. \tag{33}$$

В этом случае справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть $\gamma = 0$ и функция $\varphi(x)$ удовлетворяет условиям леммы 5, функция $\psi(x)$ удовлетворяет условиям леммы 4, а функция $f(x,t)$ удовлетворяет условиям леммы 4 по аргументу x равномерно по t. Тогда* *ряд (23), коэффициенты которого определены равенствами (32), определяет решение задачи A_1.*

Доказательство. Здесь при рассмотрении ряда (29) [(30)] в силу (32) и (33) вместо (31) получим ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k\varphi_k v_k(x),\quad \sum_{k=1}^{\infty}\sqrt{\lambda_k}\psi_k v_k(x),\quad \sum_{k=1}^{\infty}\sqrt{\lambda_k\int_0^T f_k^2(\tau)d\tau}\, v_k(x). \tag{34}$$

Абсолютная и равномерная сходимость первого из рядов (34) доказана выше. Рассмотрим второй и третий ряды. Применяя неравенство Коши—Буняковского к каждому из этих рядов, имеем

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty}\sqrt{\lambda_k}\psi_k v_k(x)\right| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty}\left|\lambda_k\psi_k\frac{v_k(x)}{\sqrt{\lambda_k}}\right| \leqslant \left[\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^2\psi_k^2\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{v_k^2(x)}{\lambda_k}\right]^{1/2},$$

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty}\sqrt{\lambda_k}\int_0^t f_k(\tau)\sin\left[(t-\tau)\sqrt{\lambda_k+b}\right]d\tau\cdot v_k(x)\right| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{k=1}^{\infty}\left|\sqrt{\lambda_k^2\int_0^T f_k^2(\tau)d\tau}\cdot\frac{v_k(x)}{\sqrt{\lambda_k}}\right| \leqslant \left[T\int_0^1\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^2 f_k^2(\tau)d\tau\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{v_k^2(x)}{\lambda_k}\right]^{1/2}.$$

В силу условия теоремы 3 на основании лемм 2 и 4 ряды в правой части последних неравенств сходятся равномерно на $[0,1]$. Следовательно, ряды, стоящие в левых частях, сходятся равномерно в $\overline{\Omega}$. Дальнейшие рассуждения аналогичны случаю $0<\gamma<1/2$. □

Теорема 4. *Пусть функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и $f(x,t)$ удовлетворяют условиям теоремы 2 или 3. Тогда для решения задачи A_1 справедливы оценки*

$$\|u(x,t)\|_{L_2(0,1)}^2 \leqslant K_0\left[\|\varphi(x)\|_{L_2(0,1)}^2+\|\psi(x)\|_{L_2(0,1)}^2+\|f(x,t)\|_{L_2(\Omega)}^2\right], \tag{35}$$

$$\|u(x,t)\|_{C(\overline{\Omega})} \leqslant$$
$$\leqslant K_1\left[\left\|\varphi^{(2n)}(x)\right\|_{L_{2,r}(0,1)}+\left\|\psi^{(2n)}(x)\right\|_{L_{2,r}(0,1)}+\left\|\frac{\partial^{2n}}{\partial x^{2n}}f(x,t)\right\|_{L_{2,r}(\Omega)}\right], \tag{36}$$

где

$$\|\varphi(x)\|_{L_{2,r}(0,1)} = \left[\int_0^1 x^\alpha[\varphi(x)]^2dx\right]^{1/2},$$
$$\|g(x,t)\|_{L_{2,r}(\Omega)} = \left[\int_0^T\int_0^1 x^\alpha g^2(x,t)dxdt\right]^{1/2};$$

$r(x)=x^\alpha$; K_0 и K_1 — некоторые действительные положительные числа.

Доказательство. Учитывая ортонормальность системы $\{v_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ и неравенства (28), (33), из (23) получим

$$\|u(x,t)\|^2_{L_2(0,1)} = \sum_{k=1}^{\infty} u_k^2(t) \leqslant K_2 \sum_{k=1}^{\infty} \big[|\varphi_k| + |\psi_k| + \|f_k(t)\|_{L_2(0,T)}\big]^2 \leqslant$$
$$\leqslant 3K_2 \sum_{k=1}^{\infty} \big[\varphi_k^2 + \psi_k^2 + \|f_k(t)\|^2_{L_2(0,T)}\big],$$

где $K_2 = \text{const} > 0$.

Отсюда, учитывая неравенство Бесселя, получим

$$\|u(x,t)\|^2_{L_2(0,1)} \leqslant 3K_2 \bigg(\|\varphi(x)\|^2_{L_2(0,1)} + \|\psi(x)\|^2_{L_2(0,1)} + \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k(t)\|^2_{L_2(0,T)} \bigg). \quad (37)$$

Принимая во внимание представление $f(x,t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(t) v_k(x)$ и ортонормированность системы функций $\{v_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$, имеем

$$\|f(x,t)\|^2_{L_2(\Omega)} = \bigg(\sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) v_k(x), \ \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) v_n(x) \bigg)_{L_2(\Omega)} =$$
$$= \int_0^T \sum_{k=1}^{\infty} [f_k(t)]^2 dt = \sum_{n=1}^{\infty} \|f_k(t)\|^2_{L_2(0,T)}.$$

Если учесть это равенство, то неравенство (35) сразу следует из (37).

Из (23) на основании (28) и (33) при любых $\overline{\Omega}$ имеем

$$|u(x,t)| = \bigg| \sum_{k=1}^{\infty} v_k(x) u_k(t) \bigg| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |v_k(x)|\,|u_k(t)| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|v_k(x)|}{\sqrt{\lambda_k}} \big(\sqrt{\lambda_k} |\varphi_k| + K_3 \sqrt{\lambda_k} |\psi_k| + K_4 \sqrt{\lambda_k} \|f_k(t)\|_{L_2(0,T)} \big),$$

где K_3 и K_4 — некоторые действительные положительные числа.

Отсюда, применяя неравенство Коши—Буняковского, получим

$$|u(x,t)| \leqslant \bigg(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{v_k^2(x)}{\lambda_k} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \varphi_k^2 \bigg)^{1/2} + K_3 \bigg(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{v_k^2(x)}{\lambda_k} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \psi_k^2 \bigg)^{1/2} +$$
$$+ K_4 \bigg(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{v_k^2(x)}{\lambda_k} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \|f_k(t)\|^2_{L_2(0,T)} \bigg)^{1/2}. \quad (38)$$

Принимая во внимание утверждение лемм 2 и 3, из (38) находим

$$\|u(x,t)\|_{C(\overline{\Omega})} = \sup_{\overline{\Omega}} |u(x,t)| \leqslant K_5 \bigg(\int_0^1 x^{\alpha} [\varphi^{(2n)}(x)]^2 dx \bigg)^{1/2} +$$
$$+ K_3 K_5 \bigg(\int_0^1 x^{\alpha} [\psi^{(2n)}(x)]^2 dx \bigg)^{1/2} + K_4 K_5 \bigg(\int_0^T \int_0^1 x^{\alpha} \Big[\frac{\partial^{2n}}{\partial x^{2n}} f(x,t) \Big]^2 dx dt \bigg)^{1/2},$$

где

$$K_5 = \left(\sup_{[0,1]} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{v_k^2(x)}{\lambda_k} \right)^{1/2}.$$

Если учесть введенные обозначения, то из последнего сразу следует неравенство (36). Теорема 4 полностью доказана. □

Заключение. В данной работе рассмотрена начально-граничная задача для дифференциального уравнения в частных производных высокого четного порядка в прямоугольной области. Методом разделения переменных найдено решение задачи в виде ряда, который сходится абсолютно и равномерно в замыкании области рассмотрения уравнения. Доказаны единственность решения задачи и непрерывная зависимость его от заданных функций.

Конкурирующие интересы. Мы не имеем конкурирующих интересов.

Авторский вклад и ответственность. Все авторы принимали участие в разработке концепции статьи и в написании рукописи. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Исследование выполнялось без финансирования.

Библиографический список

1. Тихонов А. Н., Самарский А. А. *Уравнения математической физики.* М.: Наука, 1966. 724 с.
2. Тимошенко С. П. *Колебания в инженерном деле.* М.: Физматлит, 1967. 444 с.
3. Коренев Б. Г. *Вопросы расчета балок и плит на упругом основании.* М.: Стройиздат, 1954. 156 с.
4. Филиппов А. П. *Колебания деформируемых систем.* М.: Машиностроение, 1970. 734 с.
5. Крылов А. Н. *Вибрация судов.* Л.; М., 1936.
6. Сабитов К. Б. Начальная задача для уравнения колебаний балок // *Диффер. уравн.*, 2017. Т. 53, № 5. С. 665–671. EDN: YSXNEH. DOI: https://doi.org/10.1134/S0374064117050090.
7. Сабитов К. Б. Колебания балки с заделанными концами // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2015. Т. 19, № 2. С. 311–324. EDN: UGXNZR. DOI: https://doi.org/10.14498/vsgtu1406.
8. Сабитов К. Б. К теории начально-граничных задач для уравнения стержней и балок // *Диффер. уравн.*, 2017. Т. 53, № 1. С. 89–100. EDN: XRBXOV. DOI: https://doi.org/10.1134/S0374064117010083.
9. Сабитов К. Б., Акимов А. А. Начально-граничная задача для нелинейного уравнения колебаний балки // *Диффер. уравн.*, 2020. Т. 56, № 5. С. 632–645. EDN: FUQBLD. DOI: https://doi.org/10.1134/S0374064120050076.
10. Сабитов К. Б. Обратные задачи для уравнения колебаний балки по определению правой части и начальных условий // *Диффер. уравн.*, 2020. Т. 56, № 6. С. 773–785. EDN: ZUQBSX. DOI: https://doi.org/10.1134/S0374064120060096.
11. Сабитов К. Б., Фадеева О. В. Начально-граничная задача для уравнения вынужденных колебаний консольной балки // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2021. Т. 25, № 1. С. 51–66. EDN: SXRWIP. DOI: https://doi.org/10.14498/vsgtu1845.
12. Urinov A. K., Azizov M. S. A boundary problem for the loaded partial differential equations of fourth order // *Lobachevskii J. Math.*, 2021. vol. 42, no. 3. pp. 621–631. EDN: GZFFEC. DOI: https://doi.org/10.1134/S1995080221030197.

13. Urinov A. K., Azizov M. S. Boundary value problems for a fourth order partial differential equation with an unknown right-hand part // *Lobachevskii J. Math.*, 2021. vol. 42, no. 3. pp. 632–640. EDN: JDWUYD. DOI: https://doi.org/10.1134/S1995080221030203.
14. Сабитов К. Б. Начально-граничные задачи для уравнения колебаний прямоугольной пластины // *Изв. вузов. Матем.*, 2021. Т. 65, № 10. С. 60–70. EDN: RZSSHV. DOI: https://doi.org/10.26907/0021-3446-2021-10-60-70.
15. Сабитов К. Б. Колебания пластины с граничными условиями «шарнир–заделка» // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2022. Т. 26, № 4. С. 650–671. EDN: CXCQCU. DOI: https://doi.org/10.14498/vsgtu1950.
16. Касимов Ш. Г., Мадрахимов У. С. Начально-граничная задача для уравнения колебаний балки в многомерном случае // *Диффер. уравн.*, 2019. Т. 55, № 10. С. 1379–1391. EDN: VSFLTA. DOI: https://doi.org/10.1134/S0374064119100091.
17. Amanov D. J., Yuldasheva A. V. Solvability and spectral properties of boundary value problems for equations of even order // *Malays. J. Math. Sci.*, 2009. vol. 3, no. 2. pp. 227–248. EDN: XMCRSH.
18. Amanov D., Ashyralyev A. Well-posedness of boundary value problems for partial differential equations of even order // *AIP Conf. Proc.*, 2012. vol. 1470, no. 1. pp. 3–7. DOI: https://doi.org/10.1063/1.4747625.
19. Иргашев Б. Ю. Об одной задаче с условиями сопряжения для уравнения четного порядка с дробной производной в смысле Капуто // *Матем. заметки*, 2022. Т. 112, № 2. С. 218–226. EDN: WUKYZP. DOI: https://doi.org/10.4213/mzm13184.
20. Уринов А. К., Азизов М. С. Начально-граничная задача для уравнения в частных производных высшего четного порядка с оператором Бесселя // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2022. Т. 26, № 2. С. 273–292. EDN: LKMGUE. DOI: https://doi.org/10.14498/vsgtu1893.
21. Уринов А. К., Азизов М. С. О разрешимости нелокальных начально-граничных задач для одного дифференциального уравнения в частных производных высокого четного порядка // *Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки*, 2022. Т. 32, № 2. С. 240–255. EDN: HNVGQS. DOI: https://doi.org/10.35634/vm220206.
22. Азизов М. С. Об одной начально-граничной задаче для уравнения в частных производных высшего четного порядка с оператором Бесселя // *Бюллетень Института математики*, 2022. Т. 5, № 1. С. 14–24.
23. Уринов А. К., Усмонов Д. А. Начально-граничная задача для вырождающегося гиперболического уравнения второго рода с тремя линиями вырождения // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2022. Т. 26, № 4. С. 672–693. EDN: DIOYZF. DOI: https://doi.org/10.14498/vsgtu1962.
24. Urinov A. K., Usmonov D. A. Initial boundary value problems for a fourth order equation with three lines of degeneracy // *Uzbek Math. J.*, 2023. vol. 67, no. 1. pp. 129–136. DOI: https://doi.org/10.29229/uzmj.2023-1-17.
25. Уринов А. К., Усмонов Д. А. Нелокальная начально-граничная задача для вырождающиегося уравнения четвертого порядка с дробной производной Герасимова–Капуто // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*, 2023. Т. 42, № 1. С. 123–139. EDN: INZPHJ. DOI: https://doi.org/10.26117/2079-6641-2023-42-1-123-139.
26. Байкузиев К. Б., Каланов Б. С. О разрешимости смешанной задачи для уравнения высшего порядка, вырождающегося на границе области / *Краевые задачи для дифференциальных уравнений*. Т. 2. Ташкент: Фан, 1972. С. 40–54.
27. Иргашев Б. Ю. Краевая задача с условиями сопряжения для вырождающегося уравнения с дробной производной Капуто // *Изв. вузов. Матем.*, 2022. № 4. С. 27–36. EDN: DLFDSA. DOI: https://doi.org/10.26907/0021-3446-2022-4-27-36.
28. Уринов А. К., Азизов М. С. О разрешимости начально-граничной задачи для уравнения высокого чётного порядка, вырождающегося на границе области // *Сиб. журн. индустр. матем.*, 2023. Т. 26, № 2. С. 155–170. DOI: https://doi.org/10.33048/SIBJIM.2023.26.213.

29. Уринов А. К., Азизов М. С. Об одной начально-граничной задаче для вырождающегося дифференциального уравнения в частных производных высокого четного порядка / *Неклассические уравнения математической физики и их приложения*: Международная научная конференция (Ташкент, 6–8 октября 2022 г.). Ташкент: НУУз, 2022. С. 186–187.
30. Erdélyi A. Magnus W., Oberhettinger F., Tricomi F. G. *Higher transcendental functions.* vol. II / Bateman Manuscript Project. New York, Toronto, London: McGraw-Hill Book Co., 1953. xvii+396 pp.
31. Наймарк М. А. *Линейные дифференциальные операторы.* М.: Наука, 1969. 528 с.
32. Михлин С. Г. *Лекции по линейным интегральным уравнениям.* М.: Физматгиз, 1959. 232 с.
33. Watson G. N. *A treatise on the theory of Bessel functions* / Cambridge Mathematical Library. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1995. vi+804 pp.

Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2023, vol. 27, no. 4, pp. 621–644
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu2023

MSC: 35G15

On the solvability of an initial boundary problem for a high even order degenerate equation

***A. K. Urinov*[1,2], *D. D. Oripov*[1]**

[1] Fergana State University,
19, Murabbiylar st., Fergana, 150100, Uzbekistan.
[2] Institute of Mathematics named after V. I. Romanovsky
of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan,
46, Universitetskaya st., Tashkent, 100174, Uzbekistan.

Abstract

A degenerate partial differential equation of high even order is considered in the rectangle. For the considered equation, an initial-boundary problem has been formulated and the uniqueness, existence, and stability of the solution to this problem has been investigated. The uniqueness of the solution to the problem has been proved by the method of integral identities. The existence of a solution to the problem was investigated by methods of separation of variables. Here, we first studied the spectral problem for an ordinary differential equation of high even order, which follows from the considered problem in the separation of variables. The Green's function of the spectral problem was constructed. Using this, the spectral problem was equivalently reduced to an integral Fredholm equation of the second kind with a symmetric kernel. Hence, on the basis of the theory of integral equations, it is concluded that there are a countable number of eigenvalues and eigenfunctions of the spectral problem. The conditions were found under which a given function is expanded into a uniformly convergent Fourier series in terms of eigenfunctions of the spectral problem. Using the properties of the Green's function and the eigenfunctions of the spectral problem, we proved a lemma on the uniform convergence of some bilinear series. Lemmas on the order of the Fourier coefficients of a given function were also proved. The solution to the problem under study has been written as the sum of a Fourier series with respect to the system of eigenfunctions of the spectral problem. The uniform

Differential Equations and Mathematical Physics
Research Article

Please cite this article in press as:
U r i n o v A. K., O r i p o v D. D. On the solvability of an initial boundary problem for a high even order degenerate equation, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2023, vol. 27, no. 4, pp. 621–644. EDN: AYWFBD. DOI: 10.14498/vsgtu2023 (In Russian).

Authors' Details:

Akhmadjon K. Urinov https://orcid.org/0000-0002-9586-1799
Dr. Phys. & Math. Sci.; Professor; Dept. of Mathematical Analysis and Differential Equations[1]; Leading Researcher[2]; e-mail: urinovak@mail.ru

Dastonbek D. Oripov https://orcid.org/0000-0002-0212-6964
Basic Doctoral Student; Dept. of Mathematical Analysis and Differential Equations[1]; e-mail: dastonbekoripov94@gmail.com

convergence of this series and the series obtained from it by term-by-term differentiation were proved using the lemmas listed above. At the end of the article, two estimates are obtained for solution of the formulated problem, one of which is in the space of square summable functions with weight, and the other is in the space of continuous functions. These inequalities imply the stability of the solution in the corresponding spaces.

Keywords: degenerate differential equation, initial-boundary problem, spectral problem, existence, uniqueness and stability of a solution, method of separation of variables.

Received: 14th May, 2023 / Revised: 9th October, 2023 /
Accepted: 13th December, 2023 / First online: 23rd December, 2023

Competing interests. We have no competing interests.

Authors' contributions and responsibilities. Each author has participated in the development of the concept of the article and in the writing of the manuscript. The authors are absolutely responsible for submitting the final manuscript in print. Each author has approved the final version of the manuscript.

Funding. The research has not received funding.

References

1. Tikhonov A. N., Samarskii A. A. *Uravneniia matematicheskoi fiziki* [Equations of Mathematical Physics]. Moscow, Nauka, 1966, 724 pp. (In Russian)
2. Timoshenko S. P. *Vibration Problems in Engineering*. Chichester, Wiley, 1974, 538 pp.
3. Korenev B. G. *Voprosy rascheta balok i plit na uprugom osnovanii* [Analysis of Beams and Plates on Elastic Foundation]. Moscow, Stroiizdat, 1954, 156 pp. (In Russian)
4. Filippov A. P. *Kolebaniia deformiruemykh sistem* [Oscillations of Deformable Systems]. Moscow, Mashinostroenie, 1970, 734 pp. (In Russian)
5. Krylov A. N. *Vibratsiia sudov* [Vibration of Ships]. Leningrad, Moscow, 1936 (In Russian).
6. Sabitov K. B. Cauchy problem for the beam vibration equation, *Differ. Equat.*, 2017, vol. 53, no. 5, pp. 658–664. EDN: XNIRNN. DOI: https://doi.org/10.1134/S0012266117050093.
7. Sabitov K. B. Fluctuations of a beam with clamped ends, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2015, vol. 19, no. 2, pp. 311–324 (In Russian). EDN: UGXNZR. DOI: https://doi.org/10.14498/vsgtu1406.
8. Sabitov K. B. A remark on the theory of initial-boundary value problems for the equation of rods and beams, *Differ Equat.*, 2017, vol. 53, no. 1, pp. 86–98. EDN: YVJCOJ. DOI: https://doi.org/10.1134/S0012266117010086.
9. Sabitov K. B., Akimov A. A. Initial-boundary value problem for a nonlinear beam vibration equation, *Differ. Equat.*, 2020, vol. 56, no. 5, pp. 621–634. EDN: VFFDXC. DOI: https://doi.org/10.1134/S0012266120050079.
10. Sabitov K. B. Inverse problems of determining the right-hand side and the initial conditions for the beam vibration equation, *Differ. Equat.*, 2020, vol. 56, no. 6, pp. 761–774. EDN: ULGVTX. DOI: https://doi.org/10.1134/S0012266120060099.
11. Sabitov K. B., Fadeeva O. V. Initial-boundary value problem for the equation of forced vibrations of a cantilever beam, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2021, vol. 25, no. 1, pp. 51–66 (In Russian). EDN: SXRWIP. DOI: https://doi.org/10.14498/vsgtu1845.
12. Urinov A. K., Azizov M. S. A boundary problem for the loaded partial differential equations of fourth order, *Lobachevskii J. Math.*, 2021, vol. 42, no. 3, pp. 621–631. EDN: GZFFEC. DOI: https://doi.org/10.1134/S1995080221030197.

13. Urinov A. K., Azizov M. S. Boundary value problems for a fourth order partial differential equation with an unknown right-hand part, *Lobachevskii J. Math.*, 2021, vol. 42, no. 3, pp. 632–640. EDN: JDWUYD. DOI: https://doi.org/10.1134/S1995080221030203.
14. Sabitov K. B. Initial-boundary value problems for equation of oscillation of a rectangular plate, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2021, vol. 65, no. 10, pp. 52–62. EDN: FCMYHQ. DOI: https://doi.org/10.3103/S1066369X21100054.
15. Sabitov K. B. Vibrations of plate with boundary "hinged attachment" conditions, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2022, vol. 26, no. 4, pp. 650–671 (In Russian). EDN: CXCQCU. DOI: https://doi.org/10.14498/vsgtu1950.
16. Kasimov S. G., Madrakhimov U. S. Initial-boundary value problem for the beam vibration equation in the multidimensional case, *Differ. Equat.*, 2019, vol. 55, no. 10, pp. 1336–1348. EDN: ZNTNRD. DOI: https://doi.org/10.1134/S0012266119100094.
17. Amanov D. J., Yuldasheva A. V. Solvability and spectral properties of boundary value problems for equations of even order, *Malays. J. Math. Sci.*, 2009, vol. 3, no. 2, pp. 227–248. EDN: XMCRSH.
18. Amanov D., Ashyralyev A. Well-posedness of boundary value problems for partial differential equations of even order, *AIP Conf. Proc.*, 2012, vol. 1470, no. 1, pp. 3–7. DOI: https://doi.org/10.1063/1.4747625.
19. Irgashev B. Yu. On a problem with conjugation conditions for an equation of even order involving a Caputo fractional derivative, *Math. Notes*, 2022, vol. 112, no. 2, pp. 215–222. EDN: YMKTPZ. DOI: https://doi.org/10.1134/S0001434622070252.
20. Urinov A. K., Azizov M. S. An initial boundary value problem for a partial differential equation of higher even order with a Bessel operator, *[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.]*, 2022, vol. 26, no. 2, pp. 273–292 (In Russian). EDN: LKMGUE. DOI: https://doi.org/10.14498/vsgtu1893.
21. Urinov A. K., Azizov M. S. On the solvability of nonlocal initial-boundary value problems for a partial differential equation of high even order, *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2022, vol. 32, no. 2, pp. 240–255 (In Russian). EDN: HNVGQS. DOI: https://doi.org/10.35634/vm220206.
22. Azizov M. S. About an initial-boundary value problem for a partial differential equation of higher even order with the Bessel operator, *Bull. Inst. Math.*, 2022, vol. 5, no. 1, pp. 14–24 (In Russian).
23. Urinov A. K., Usmonov D. A. An initial-boundary problem for a hyperbolic equation with three lines of degenerating of the second kind, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2022, vol. 26, no. 4, pp. 672–693 (In Russian). EDN: DIOYZF. DOI: https://doi.org/10.14498/vsgtu1962.
24. Urinov A. K., Usmonov D. A. Initial boundary value problems for a fourth order equation with three lines of degeneracy, *Uzbek Math. J.*, 2023, vol. 67, no. 1, pp. 129–136. DOI: https://doi.org/10.29229/uzmj.2023-1-17.
25. Non-local initial-boundary value problem for a degenerate fourth-order equation with a fractional Gerasimov–Caputo derivative, *Vestnik KRAUNC. Fiz.-Mat. Nauki*, 2023, vol. 42, no. 1, pp. 123–139 (In Russian). EDN: INZPHJ. DOI: https://doi.org/10.26117/2079-6641-2023-42-1-123-139.
26. Baikuziev K. B., Kalanov B. S. On the solvability of a mixed problem for a higher-order equation that degenerates on the boundary of a domain, In: *Boundary Value Problems for Differential Equations*, vol. 2. Tashkent, Fan, 1972, pp. 40–54 (In Russian).
27. Irgashev B. Yu. A boundary value problem with conjugation conditions for a degenerate the equations with the Caputo fractional derivative, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2022, vol. 66, no. 4, pp. 24–31 (In Russian). DOI: https://doi.org/10.3103/S1066369X2204003X.
28. Urinov A. K., Azizov M. S. About an initial boundary problem for a degenerate higher even order partial differential equation, *Sib. Zh. Ind. Mat.*, 2023, vol. 26, no. 2, pp. 155–170 (In Russian). DOI: https://doi.org/10.33048/SIBJIM.2023.26.213.

29. Urinov A. K., Azizov M. S. On an initial boundary value problem for a degenerate partial differential equation of high even order, In: *Nonclassical Equations of Mathematical Physics and their Applications*, International Scientific Conference (Tashkent, 6–8 October 2022). Tashkent, National Univ. of Uzbekistan, 2022, pp. 186–187.
30. Erdélyi A. Magnus W., Oberhettinger F., Tricomi F. G. *Higher transcendental functions*, vol. II, Bateman Manuscript Project. New York, Toronto, London, McGraw-Hill Book Co., 1953, xvii+396 pp.
31. Naimark M. A. *Lineinye differentsial'nye operatory* [Linear Differential Operators]. Moscow, Nauka, 1969, 528 pp. (In Russian)
32. Mikhlin S. G. *Lektsii po lineinym integral'nym uravneniiam* [Lectures on Linear Integral Equations]. Moscow, Fizmatgiz, 1959, 232 pp. (In Russian)
33. Watson G. N. *A treatise on the theory of Bessel functions*, Cambridge Mathematical Library. Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1995, vi+804 pp.