



Механика деформируемого твёрдого тела

УДК 539.3

Аналитическое решение задач эластостатики односвязного тела, нагруженного неконсервативными объемными силами. Теоретическое и алгоритмическое обеспечение

*В. Б. Пеньков, Л. В. Левина, О. С. Новикова*Липецкий государственный технический университет,
Россия, 398055, Липецк, ул. Московская, 30.

Аннотация

Изучена возможность построения полнопараметрического аналитического решения задачи о напряженно-деформированном состоянии тела, вызванном воздействием объемных сил. В общем случае Чезаро перемещения в каждой точке тела определяются через объемные силы интегральным выражением с сингулярным ядром. Поэтому при произвольной форме тела его упругое состояние можно построить только численно. Строгое аналитическое решение выписывается в классическом варианте, соответствующем силам потенциального характера. Эти силы являются традиционными объектами механики, но их перечень весьма ограничен.

Современный уровень развития науки и техники в мире требует применения сил произвольного характера, которые могут порождаться как на уровне молекулярного взаимодействия, так и взаимодействием электромагнитных полей внутри тела. Они заведомо консервативными не являются. Кроме этого, применение методов возмущений при решении нелинейных задач эластостатики и задач термоупругости создает на

Научная статья

  Контент публикуется на условиях лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru) (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Образец для цитирования

Пеньков В. Б., Левина Л. В., Новикова О. С. Аналитическое решение задач эластостатики односвязного тела, нагруженного неконсервативными объемными силами. Теоретическое и алгоритмическое обеспечение // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2020. Т. 24, № 1. С. 56–73. doi: [10.14498/vsgtu1711](https://doi.org/10.14498/vsgtu1711).

Сведения об авторах

Виктор Борисович Пеньков  <https://orcid.org/0000-0002-6059-1856>

доктор физико-математических наук; профессор; каф. общей механики;

e-mail: vbpenkov@mail.ru

Любовь Владимировна Левина  <https://orcid.org/0000-0002-7441-835X>

кандидат физико-математических наук; доцент; каф. прикладной математики;

e-mail: satalkina_lyubov@mail.ru

Ольга Сергеевна Новикова  <https://orcid.org/0000-0003-2577-4515>

аспирант; каф. общей механики; e-mail: _o_l_g_a@bk.ru

каждой итерации асимптотического приближения искусственно порожденные объемные силы полиномиального характера либо силы, достаточно точно аппроксимируемые многочленами.

Возможность выписывания строгих или высокоточных частных решений в ходе выполнения итерации оказывает неоченимую услугу расчетчику. Для весьма широкого круга сил, приближаемых полиномами от пространственных координат или, еще уже, для полиномиальных сил сформирован новый метод построения строгого решения задачи о соответствующем упругом состоянии тела, опирающийся на изоморфизм гильбертовых пространств сил такого рода и им соответствующих упругих состояний (наборов перемещений, деформаций, напряжений).

Доказана теорема о существовании изоморфных счетных базисов этих пространств, построены алгоритмы их наполнения. Частное решение задачи об упругом поле от полиномиальных сил строится разложением заданной нагрузки по ортонормированному базису и выписывается достаточно просто в конечном виде, причем в аналитической форме. Поправка от частного решения вносится в граничные условия однородной задачи упругости для тела, после чего строится решение. Его аналитический характер могут обеспечить вычислительные подходы, ориентирующиеся на компьютерные алгебры.

Удобным вариантом такого подхода является метод граничных состояний (МГС), имеющий ряд преимуществ перед широко используемыми численными (конечных элементов, граничных элементов, конечных разностей и др.), и один существенный недостаток: вычислительный комплекс МГС не получил конечного завершения. Коротко изложены достоинства МГС и дано его лаконичное описание.

Использование подхода МГС принципиально позволяет выписывать полнопараметрическую форму решений для тел произвольной геометрической формы. МГС применен для построения решения задачи о линейно-упругом сплюснутом сфероиде, нагруженном самоуравновешенной системой объемных сил. Решение строилось для двух вариантов нагружения, а именно потенциальными либо непотенциальными силами. Аналитический вариант решения приведен только для поля перемещений (остальные характеристики упругого состояния легко выписываются через определяющие соотношения). Определенный интерес представляет графическая иллюстрация полей напряжений, выполненная при фиксированных значениях параметров.

Ключевые слова: объемные силы, массовые силы, непотенциальные силы, неконсервативные силы, энергетические методы, метод Треффца, метод граничных состояний, пространство объемных сил, базис пространства сил, полнота базиса, аналитические решения, полнопараметрические решения, сфероид, сплюснутый сфероид.

Получение: 12 июня 2019 г. / Исправление: 19 ноября 2019 г. /

Принятие: 10 февраля 2020 г. / Публикация онлайн: 19 марта 2020 г.

Постановка и анализ проблемы исследования. Традиционные объемные силы, встречающиеся в исследованиях классической механики деформируемого твердого тела (МДГТ; силы инерции, тяжести, гравитационного взаимодействия и др.), имеют механическую природу и, как правило, являются потенциальными. В этом нетрудно убедиться, листая известные руководства по механике [1–6].

При реализации различных эффективных методов анализа НДС эластостатических тел учет влияния объемных сил остается на втором плане, поскольку ему соответствует частное решение неоднородных разрешающих систем уравнений. В общем случае объемных сил произвольного характера известно интегральное представление поля перемещений, определяемое в сингулярно-интегральной форме Чезаро:

$$u_i(\mathbf{r}_Q) = \int_V U_{ij}(\mathbf{r}_M, \mathbf{r}_Q) X_j(\mathbf{r}_M) dV, \quad (1)$$

$$U_{ij}(\mathbf{r}_M, \mathbf{r}_Q) = \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)r} \left[(3-4\nu)\delta_{ij} + \frac{x_i x_j}{r^2} \right], \quad r^2 = x_k x_k,$$

где $X_j(\mathbf{r}_M)$ — компонента вектора объемных сил в точке воздействия M ; Q — точка наблюдения; $\mathbf{r}_M, \mathbf{r}_Q$ — радиус-векторы точек M и Q ; μ — модуль сдвига; ν — коэффициент Пуассона; δ_{ij} — символ Кронекера.

Ядром этого интеграла служит тензор влияния Кельвина—Сомильяна с компонентами $U_{ij}(M, Q)$ [3]. Представление (1) эффективно используется при применении сугубо численных методов (метод конечных элементов, метод граничных элементов, конечно-разностных и др.), но не является удобной формой при аналитическом анализе, поскольку требует выполнения промежуточных шагов по проведению аппроксимации.

Вычислительные методы продолжают совершенствоваться [7–14] и возникает необходимость в построении иных подходов, поддерживающих или обеспечивающих решение в полнопараметрической аналитической форме (ППР) [15–17].

В случае потенциальных сил построен эффективный аппарат выписывания частного решения уравнения Ламе [2, 3], основывающийся на общем решении П. Ф. Папковича и Г. И. Нейбера [18]

$$u_i = \varphi_i - \frac{1}{4(1-\nu)} (\varphi_k x_k + \varphi_0)_{,i} + u_i^*, \quad i = 0, 1, 2, 3, \quad (2)$$

где φ_i — гармонические функции; x_k — декартовы координаты в области V ; u_i^* — любое частное решение, отвечающее действию объемных сил. Практически вместо общего решения Папковича—Нейбера (2) более эффективно использовать общие решения И. С. Аржаных и М. Г. Слободянского для внутрениости ограниченной области:

$$u_i = 4(1-\nu)\varphi_i + x_j \varphi_{i,j} - x_i \varphi_{j,j} + \chi_{,i} \quad (3)$$

или для внешности ограниченной полости:

$$u_i = 4(1-\nu)\varphi_i - (x_j \varphi_j)_{,i} + \chi_{,i}, \quad (4)$$

где χ — решение уравнения Пуассона

$$\chi_{,ii} = \frac{1-2\nu}{2\mu(1-\nu)} \Pi, \quad (5)$$

Π — потенциал объемных сил. Композицией состояний (3), (4) можно обеспечить представление упругого поля для произвольного ограниченного или неограниченного многополостного тела.

В настоящее время постановка задач с консервативными объемными силами по-прежнему является актуальной и этому уделяется достаточно много внимания. Информация о НДС от объемных сил позволяет восстановить соответствующее механическое состояние на границе тела с последующей корректировкой ГУ при декомпозиции решения [19]. При канонических формах геометрии тела удастся выписать аналитическое решение задачи [20], например, изучать влияние гравитационных сил в среде с незагруженной сферической полостью [21]. Для учета потенциальных сил в математических задачах теории упругости вводится третий комплексный потенциал [22]. Эта же идеология распространена на анизотропные среды [23–25], а также на предмет учета действующих или возникающих сингулярных эффектов в теле [26].

Наряду с физическими свойствами механического характера исследуемая среда может обладать иными: электромеханическими, электромагнитными. Например, направленный поток электрических зарядов, организованный в теле среды, создает во внешнем магнитном поле объемную силу Лоренца. Эта сила может быть организована по произвольному закону в области, занятой телом, и потенциальной считаться не может. Развитие исследований на нано-уровне строения вещества позволило обнаружить новую причину зарождения объемных сил, связанную с потерей межатомных связей при достижении критического состояния в окрестности некоторой точки твердого тела [27]. Важным моментом разработки нового метода является также то, что в случае решения задач механики среды итерационными методами в определяющих итерацию соотношениях порождаются массовые силы фиктивного характера [28]. Декомпозиция задачи требует отслеживания соответствующего напряженно-деформированного состояния. Таким образом, разработка быстрого эффективного метода анализа эластостатического поля внутри тела является задачей актуальной и на современном уровне развития науки и техники необходимой. В случае потенциальных сил им соответствующее упругое поле восстанавливается достаточно просто. В случае неконсервативных сил справедливо интегральное представление общего решения (1), но традиционно его использование «завязано» на численные процедуры, игнорирующее компьютерные алгебры.

Целью работы является теоретическое и алгоритмическое обеспечение возможности быстрого эффективного построения эластостатических полей от широкого класса объемных сил, допускающих полиномиальную аппроксимацию. Достижению цели сопутствует рассмотрение круга задач фундаментального и прикладного характера: 1) обоснование существования базиса пространств состояний для полиномиальных объемных сил; 2) разработка алгоритма назначения базиса гильбертова пространства состояний; 3) тестирование; 4) решение расчетной задачи для тела нетривиальной геометрии; 5) возможность построения полнопараметрического решения (ППР), содержащего все параметры геометрии и нагружения тела.

1. Теорема о полноте базиса полиномиальных объемных сил. Эластостатическое состояние среды, обусловленное объемными силами, должно отвечать всем требованиям, предписанным определяющим соотношениям.

Предполагая поле перемещений в области V ограниченного тела приближаемым системой многочленов от трех переменных, описываемых мономами $w = x^\alpha y^\beta z^\gamma$, $\alpha, \beta, \gamma \in \{0, 1, 2, \dots\}$, вектору перемещений

$$\{u_i\} \in \{\mathbf{u}^I, \mathbf{u}^{II}, \mathbf{u}^{III}\}, \quad \mathbf{u}^I = \{w, 0, 0\}, \quad \mathbf{u}^{II} = \{0, w, 0\}, \quad \mathbf{u}^{III} = \{0, 0, w\}$$

можно поставить в соответствие тензоры деформаций $\hat{\varepsilon} = [\varepsilon_{ij}]$ и напряжений $\hat{\sigma} = [\sigma_{ij}]$ в соответствии с формулой Коши

$$\varepsilon_{ij} = 0.5(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (6)$$

и обобщенным законом Гука в форме Ламе

$$\sigma_{ij} = \lambda \vartheta \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}, \quad \vartheta = \varepsilon_{kk}, \quad (7)$$

где λ, μ — объемный параметр Ламе и модуль сдвига; ϑ — объемная деформация. Уравнение равновесия замыкает систему определяющих соотношений, устанавливая значения объемных сил

$$X_i = -\sigma_{ij,j}, \quad (8)$$

обеспечивающих удовлетворение всех необходимых условий.

Таким образом, вектору

$$\mathbf{X}^I = -w \begin{pmatrix} (\lambda + 2\mu)\alpha(\alpha - 1)x^{-2} + \mu\beta(\beta - 1)y^{-2} + \mu\gamma(\gamma - 1)z^{-2} \\ (\lambda + \mu)\alpha\beta x^{-1}y^{-1} \\ (\lambda + \mu)\alpha\gamma x^{-1}z^{-1} \end{pmatrix} \quad (9)$$

однозначно соответствует внутреннее состояние тела $\xi^I = \{\mathbf{u}^I, \hat{\varepsilon}^I, \hat{\sigma}^I\}$, где

$$\mathbf{u}^I = \begin{pmatrix} w \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\varepsilon}^I = \frac{w}{2} \begin{pmatrix} 2\alpha x^{-1} & \beta y^{-1} & \gamma z^{-1} \\ \beta y^{-1} & 0 & 0 \\ \gamma z^{-1} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (10)$$

$$\hat{\sigma}^I = w \begin{pmatrix} (\lambda + 2\mu)\alpha x^{-1} & \mu\beta y^{-1} & \mu\gamma z^{-1} \\ \mu\beta y^{-1} & \lambda\alpha x^{-1} & 0 \\ \mu\gamma z^{-1} & 0 & \lambda\alpha x^{-1} \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что круговая подстановка индексов с соответствующим перемещением монома w по позициям вектора \mathbf{u} порождает еще два варианта состояний. Очевидно также, что все компоненты внутреннего состояния от объемных сил (8) в соответствии с цепочкой операций (6)–(8) имеют полиномиальное представление. Возникают следующие вопросы:

- 1) является ли полным множество векторов генерируемых таким способом объемных сил $X^{(\alpha\beta\gamma)}$?
- 2) содержит ли оно сепарабельный базис соответствующего пространства?

На эти вопросы удовлетворительно отвечает следующая

ТЕОРЕМА (О СОДЕРЖАНИИ БАЗИСА). *Множество векторов полиномиальных объемных сил, порожденное базисом пространства векторов полиномиальных упругих перемещений, содержит счетный базис Ψ_0 пространства Ψ объемных сил полиномиального характера.*

Конструктивное доказательство является одновременно рациональным алгоритмом формирования базиса.

Базисом равномерно-непрерывных функций от трех переменных x, y, z является счетное множество мономов $x^a y^b z^c$, где a, b, c — целые неотрицательные числа. Упорядоченное множество мономов удобно интерпретировать в форме трехгранной пирамиды мономов (каждому моному соответствует узел) с вершиной 1, ребрами — степенями переменных x, y, z , гранями — попарными произведениями их степеней. Мономы фиксированного порядка $a + b + c = k$ расположены в k -том слое, занимая совокупность узлов треугольника (рис. 1).

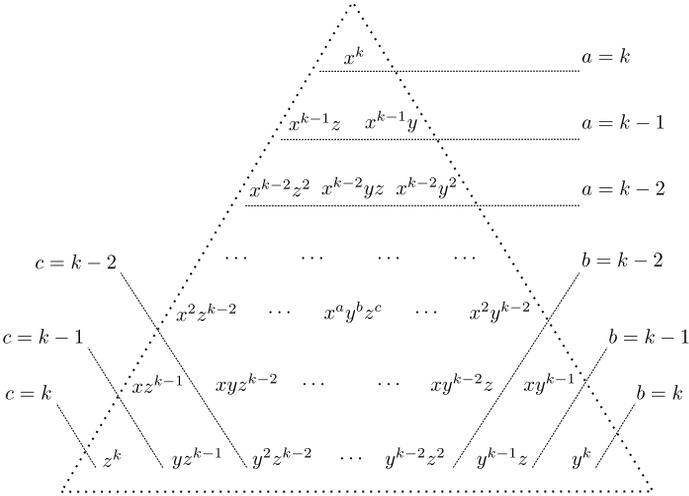


Рис. 1. k -тый слой пирамиды мономов
 [Figure 1. The k -th layer of the monomial pyramids]

Формирование системы базисных элементов, генерируемых выражением (9) или его интерпретацией в форме линейной комбинации

$$\mathbf{X}^{I(k)} = \mathbf{L}(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3, \mathbf{f}_4, \mathbf{f}_5), \tag{11}$$

$$\mathbf{f}_1 = \begin{pmatrix} x^{\alpha-2}y^{\beta}z^{\gamma} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_2 = \begin{pmatrix} x^{\alpha}y^{\beta-2}z^{\gamma} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_3 = \begin{pmatrix} x^{\alpha}y^{\beta}z^{\gamma-2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{f}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ x^{\alpha-1}y^{\beta-1}z^{\gamma} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x^{\alpha-1}y^{\beta}z^{\gamma-1} \end{pmatrix}$$

с известными коэффициентами удается проводить в последовательности, гарантирующей полноту и линейную независимость наполняемого базиса Ψ_0 пространства. Каждому элементу пирамиды мономов соответствуют три элемента базиса Ψ_0 в соответствии с занимаемыми позициями в векторах. Ψ_0 есть объединение счетного числа базисов $\Psi^{(k)}$ конечномерных пространств (размерность $1.5(k+1)(k+2)$), порождаемых слоями $k = 0, 1, 2, \dots$; линейная зависимость элементов множества Ψ_0 может наблюдаться только внутри слоя.

Обеспечивающий алгоритм опирается на следующие положения.

1. Перебор осуществляется по слоям $k = 0, 1, 2, \dots$, соответствующим порядкам мономов. При $k = 0$ изначально пустой базис пополняется тремя векторами, отвечающими вершине пирамиды:

$$\Psi_0^{(0)} = \{\{1, 0, 0\}, \{0, 1, 0\}, \{0, 0, 1\}\}.$$

2. При произвольном k просмотр слоя осуществляется в последовательности, схематично обозначенной на рис. 2 ломаной спиралью.

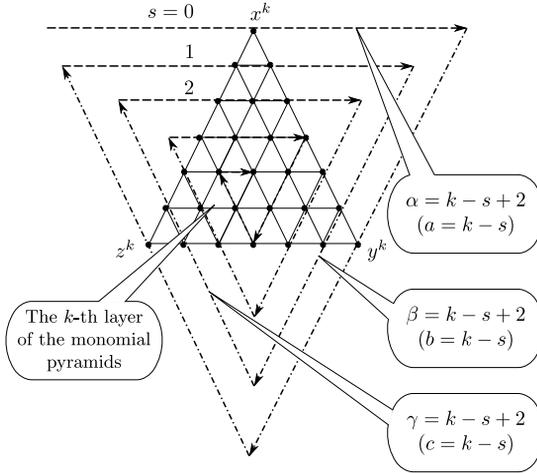


Рис. 2. Схема направленного перебора, обеспечивающего формирование базиса пространства объемных сил

[Figure 2. Diagram of directional enumeration ensuring the formation of the basis of the space forces volume]

Каждая ветвь спирали $s = 0, 1, 2, \dots$ состоит из трех отрезков вариантов перебора показателей монома: 1) $\alpha = k - s + 2$, ($a = \alpha - 2$, $b = \beta$, $c = \gamma$); 2) $\beta = k - s + 2$, ($a = \alpha$, $b = \beta - 2$, $c = \gamma$); 3) $\gamma = k - s + 2$, ($a = \alpha$, $b = \beta$, $c = \gamma - 2$). Через $\mathbf{X}^{I(s)}$ обозначен набор линейно-независимых векторов, получаемых по (11) на ветви s и заполненных только в первой позиции. Всегда по завершении каждой ветви круговая подстановка индексов (переменных x, y, z) с соответствующим изменением позиций в векторе \mathbf{X}^I пополняет базисный отрезок $\Psi_0^{(s)}$ слоя. При $s = 0$ в соответствии с обозначенными отрезками ветви и «отключающими» коэффициентами в (9) последовательно происходит пополнение множества $\mathbf{X}^{I(s)}$ элементами $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3$. В ветви $s = 1$ спирали участвуют такие же по структуре элементы, но в линейной комбинации с \mathbf{f}_4 ,

f_5 , уже построенными ранее круговой подстановкой для предыдущей ветви. Это позволяет представить соответствующие элементы $\mathbf{X}^{I(s)}$ (как и им соответствующие по организации (9), (10) элементы пространства внутренних состояний) в виде, содержащем в позиции 1 вектора «чистые» мономы. Во всех последующих ветвях вплоть до исчерпывания возможностей перебора в слое ситуация такая же: кроме единственного нового элемента в формировании участвуют только уже созданные на предыдущих ветвях, чем обеспечивается линейная независимость. Полнота обеспечивается направленным перебором всех вариантов конечного множества мономов слоя k .

Конструктивизм доказательства теоремы содержит алгоритм, позволяющий эффективно наполнять базис Ψ_0 пространства Ψ . Однако его предназначение служит, в первую очередь, доказательству существования базиса, что и достигнуто: каждой вершине кластерного слоя (рис. 1) соответствует тройка линейно-независимых элементов пространства Ψ .

2. Сортировочный алгоритм. Для формирования базиса пространства X более удобным является иной алгоритм. Его суть коротко можно охарактеризовать следующими положениями.

1. Вершины пирамиды мономов $x^a y^b z^c$ перебираем по слоям. Каждому слою соответствует кластер $k = a + b + c$, отвечающий за порядок монома. Кластер 0 (вершина пирамиды) порождает три элемента базиса H , $\eta = \{\mathbf{u}, \hat{\mathbf{e}}, \hat{\boldsymbol{\sigma}}, \mathbf{X}\} \in H$, построенного в соответствии с определяющими выражениями (6)–(8):

$$\eta^{(1)} = \left\{ \begin{pmatrix} -z^2/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -z/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -z/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\mu z \\ 0 & 0 & 0 \\ -\mu z & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mu \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\};$$

$$\eta^{(2)} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -x^2/2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -x/2 & 0 \\ -x/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -\mu x & 0 \\ -\mu x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \mu \\ 0 \end{pmatrix} \right\};$$

$$\eta^{(3)} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -y^2/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -y/2 \\ 0 & -y/2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mu y \\ 0 & -\mu y & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mu \end{pmatrix} \right\}.$$

Далее слои пирамиды перебираются в порядке возрастания кластеров.

2. Перебор вершин мономов в кластере с номером k можно осуществлять в произвольном порядке. Каждой вершине (моному $x^a y^b z^c$) соответствует точка с условными координатами в плоскости слоя. Например, можно осуществить перебор в последовательности $a = 0 \dots k$; $b = 0 \dots k - a$; $c = k - a - b$ и помещать узлы слоя k в вершины, регулярно заполняющие правильный треугольник $O(0, 0)$, $A(k/2, \sqrt{3}k/2)$, $B(k, 0)$. Назначенная вершина для монома $x^a y^b z^c$ получает координаты точки $M(b + a/2, \sqrt{3}a/2)$ и ее положение от центра $C(k/2, k/\sqrt{3})$ слоя характеризуется вектором $\mathbf{CM} = \mathbf{r}_M - \mathbf{r}_C$, определенным через радиус-векторы начала и конца. Векторы \mathbf{OC} , \mathbf{AC} , \mathbf{BC} также определяются легко.

Сортировка состоит в том, чтобы по проекциям вектора CM на эти направления определить его «склонность» к одной из вершин O, A, B и по этому признаку осуществлять назначение степеней монома, участвующих в формулах (6)–(8). А именно, если максимальное положительное значение проекции CM для каждого из трех направлений OC, AC, BC соответствует какой-либо вершине O, A, B , то для использования выражений достаточно положить

$$\{\alpha, \beta, \gamma\} = \begin{cases} \{a + 2, b, c\}, & \text{«A»}, \\ \{a, b + 2, c\}, & \text{«B»}, \\ \{a, b, c + 2\}, & \text{«O»}. \end{cases}$$

При равной «склонности» к двум вершинам выбор единственен, но безразличен. После назначения очередного базисного элемента два дополнительных осуществляются способом круговой подстановки.

3. Основные положения метода граничных состояний (МГС).

МГС является одним из поздних энергетических методов математической физики. Он имеет общие черты с прямыми методами и специфические отличия от них. Классические методы (Ритца, Бубнова—Галеркина, наименьших квадратов, Канторовича) и их модификации (Треффца в числе прочих) оперируют элементами гильбертовых пространств, функций (векторов-функций), через которые в конечном итоге выражаются характеристики состояний исследуемой среды. Методы Ритца, Бубнова—Галеркина, наименьших квадратов используют при построении решения отрезки базисов пространства решений, позволяющие приводить задачу к системе линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов Фурье разложения решения по базису. Метод Канторовича осуществляет «градиентный спуск» по поверхности квадратичного функционала, подлежащего оптимизации в функциональном гильбертовом пространстве, и сводится к итерационному процессу. Вообще базисные элементы назначаются достаточно произвольно, но из некоторых классов функций, которые должны гарантировать построение приближенного решения. Подход Треффца, назначающий элементы из классов функций, которые удовлетворяют разрешающим уравнениям для среды, обеспечивает построение решения линейных задач при условии построения счетного базиса пространства решений, но иных особенностей, выделяющих новизну метода, не имеет.

МГС изначально оперирует объектами, имеющими отношение к двум изоморфным гильбертовым пространствам внутренних и граничных состояний объекта, занимающего некоторую область $V \subset \mathbb{R}^3$ и имеющего границу ∂V с нормалью $\{n_j\}$. Внутреннее состояние определяется набором $\xi = \{u_i, \varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}\}$. Граничное состояние есть $\gamma = \{u_i|_{\partial V}, p_i\}$, где $u_i|_{\partial V}$ — перемещения на границе тела, p_i — поверхностные усилия на границе тела: $p_i = \sigma_{ij}|_{\partial V} n_j$. Множество внутренних (граничных) состояний образует пространство внутренних Ξ (граничных Γ) состояний. Гильбертовы пространства Ξ, Γ изоморфны:

$$\begin{aligned} \xi^{(1)} + \xi^{(2)} &\leftrightarrow \gamma^{(1)} + \gamma^{(2)}, & \alpha\xi &\leftrightarrow \alpha\gamma, & \alpha &\in \mathbb{R}^1, \\ (\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)})_{\Gamma} &= (\xi^{(1)}, \xi^{(2)})_{\Xi}. \end{aligned}$$

Гильбертов изоморфизм позволяет восстанавливать НДС по граничному состоянию, так как базис пространства Ξ будет однозначно соответствовать

базису пространства Γ .

Наиболее трудоемкий процесс в МГС — построение ортонормированных базисов внутренних и граничных состояний, другими словами, построение «тела» в смысле МГС. Исходный базис внутренних состояний для односвязной конечной области набирается в соответствии с общим решением Аржаных—Слободянского (3), соотношением Коши, обобщенным законом Гука. Благодаря гильбертову изоморфизму восстанавливаются базисы перемещений на границе и усилий на границе. Ортогонализацию базисов выгоднее проводить через пространство граничных состояний Γ .

При постановке исходной задачи с объемными силами требуется создать базис пространства объемных сил. Он может быть определен алгоритмами для потенциальных сил через частное решение уравнения Пуассона (5) или более общим алгоритмом для неконсервативных объемных сил. При этом необходимо корректировать граничные условия с учетом установленной поправки от сил. Например, в первой основной задаче на границе заданы усилия p_i . Скорректированные граничные условия рассчитываются следующим образом:

$$p_i^{\circ}|_{\partial V} = p_i|_{\partial V} - p_i^*|_{\partial V}, \quad p_i^*|_{\partial V} = \sigma_{ij}^*|_{\partial V} n_j, \quad \sigma_{ij}^* = \lambda_0 \vartheta^* \delta_{ij} + 2\mu_0 \varepsilon_{ij}^*,$$

$$\vartheta^* = \varepsilon_{kk}^*, \quad \varepsilon_{ij}^* = 0.5(u_{i,j}^* + u_{j,i}^*).$$

Далее рассчитываются коэффициенты Фурье через квадратуры

$$c_k = \int_{\partial V} p_i^{\circ} u_i^{(k)} dS.$$

Внутреннее состояние без учета объемных сил является линейной комбинацией элементов базиса:

$$u_i^{\circ} = \sum_k c_k u_i^{(k)}, \quad \sigma_{ij}^{\circ} = \sum_k c_k \sigma_{ij}^{(k)}, \quad \varepsilon_{ij}^{\circ} = \sum_k c_k \varepsilon_{ij}^{(k)}.$$

Результирующее внутреннее состояние получаем суммирование полей, помеченных символами «**» и «°».

4. Равновесие сплюснутого сфероида под действием объемных сил. Однородный изотропно-упругий сплюснутый сфероид (габаритные отношения $b \ll a$) $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} \leq 1\}$ со свободной границей $\partial V = \{(r, \varphi) \in \mathbb{R}^2 \mid x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi, |z| = b\sqrt{1 - r^2/a^2}, \varphi \in [-\pi, \pi], r \in [0, a]\}$ находится в равновесии под действием самоуравновешенных объемных сил X . Рассматриваются два варианта сил: а) потенциальные; б) непотенциальные. Требуется оценить НДС тела.

При обезразмеривании принято: параметр геометрии равен b , параметр напряжения — μ ; при проведении расчетов удержано $b : a = 1 : 10$; коэффициент Пуассона $\nu = 1/4$. В варианте а безразмерные объемные силы подчинены закону $X = X_0\{x, y, 0\}$, в «непотенциальном» варианте б — закону $X = X_0\{3xz^2, 3yz^2, 4z^3\}$. В расчетах положено значение безразмерного масштабирующего множителя $X_0 = 1$, поэтому реальное поле отличается от расчетного варианта соответствующим образом.

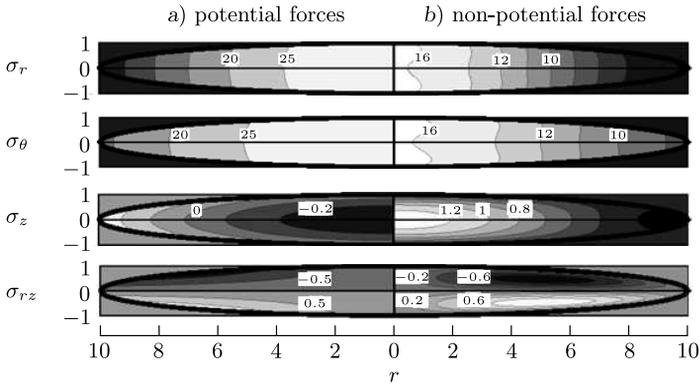


Рис. 3. Напряжения в осевом сечении сфероида в задачах а и б
 [Figure 3. Stresses in the axial section of the spheroid in the problems a and b]

На рис. 3 нулевому уровню напряжений соответствует цветовой фон за пределами области. В силу растягивающего характера объемных сил радиальные σ_r и окружные σ_θ напряжения имеют существенные положительные значения в окрестности оси симметрии и довольно медленно снижаются до нуля по мере приближения к границе тела. Осевые усилия объемных сил в случае а заданы нулевыми, поэтому вертикальные волокна вблизи оси симметрии получают сжатие, а в приближении к ободу, напротив, растяжение. В варианте б осевые объемные силы X_z неоднородные, вызывают растяжение осевых волокон, которое компенсируется до нуля по мере приближения к ободу за счет влияния напряжений σ_r, σ_θ . В варианте а изменение формы тела заметно в приповерхностных слоях (см. рисунок для σ_{rz}). В варианте б, напротив, форма искажена в кольцевых симметричных слоях внутри сфероида.

5. Полнопараметрическое решение. Применение численно-аналитического МГС, опирающегося на компьютерные алгебры, привело к новому этапу в практике представления расчетных результатов. До появления вычислительной техники задачи математической физики решались исключительно в аналитическом виде, хотя и для областей простейшей геометрической формы и при малом количестве параметров, описывающих свойства среды и характер граничных условий. Широкое внедрение вычислительной техники привело к построению мощных средств анализа состояний сред, базирующихся на численных подходах (методы конечных элементов, граничных элементов, конечно-разностные и пр.). Современные вычислительные системы, оперирующие «компьютерными алгебрами», позволяют получить решения изначально в численно-аналитической форме, но также для широкого круга задач (в первую очередь линейных) дают возможность выписывать их в форме, содержащей все параметры задачи (параметры, обусловленные масштабированием в соответствии с П-теоремой [29], упругие параметры [30], параметры ГУ (метод эталонных решений [16, 31]), параметры геометрии [32]. Несколько в стороне оказались параметры, характеризующие разнообразие объемных сил, поэтому данному вопросу ниже уделено определенное внимание.

Пусть объемные силы заданы с точностью до конечного набора парамет-

ров $X_0^{(i)}$, $i \in I$, где I — конечное множество параметров. Тогда

$$\mathbf{X} = \sum_i X_0^{(i)} \mathbf{X}_i.$$

Полагая далее эти параметры безразмерными после применения П-теоремы, строго построим поочередно внутренние состояния для векторов-эталонов \mathbf{X}_i : $\xi^{(i)} = \{\mathbf{u}^{(i)}, \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(i)}, \hat{\boldsymbol{\sigma}}^{(i)}\}$ на основе разработанного выше алгоритма. По-нятно, что результирующие состояния в силу линейности соотношений есть

$$\xi = \sum_i X_0^{(i)} \xi^{(i)}.$$

Таким образом, задача включения параметров объемных сил в полнопараметрическое представление решается эффективно.

В рассматриваемом выше примере для эллипсоида ППР имеет форму (выписаны явные решения для компонент вектора перемещений) в задаче *a*:

$$\begin{aligned} u_x &\approx X_0 x \left(8.734 - 0.034(x^2 + y^2)/R^2 - 0.189z^2/R^2 \right) / \mu, \\ u_y &\approx X_0 y \left(8.734 - 0.034(x^2 + y^2)/R^2 - 0.189z^2/R^2 \right) / \mu, \\ u_z &\approx X_0 z \left(-5.918 + 0.047(x^2 + y^2)/R^2 + 0.074z^2/R^2 \right) / \mu; \end{aligned}$$

в задаче *b*:

$$\begin{aligned} u_x &\approx X_0 x \left(4.691 - 0.037(x^2 + y^2)/R^2 + 0.369z^2/R^2 - \right. \\ &\quad \left. - 0.004(x^2 + y^2)z^2/R^4 - 0.246z^4/R^4 \right) / \mu, \\ u_y &\approx X_0 y \left(4.691 - 0.037(x^2 + y^2)/R^2 + 0.369z^2/R^2 - \right. \\ &\quad \left. - 0.004(x^2 + y^2)z^2/R^4 - 0.246z^4/R^4 \right) / \mu, \\ u_z &\approx X_0 z \left(-2.688 + 0.039(x^2 + y^2)/R^2 - 0.173z^2/R^2 + \right. \\ &\quad \left. + 0.003(x^2 + y^2)z^2/R^4 - 0.001z^4/R^4 \right) / \mu. \end{aligned}$$

Явные выражения для вектора перемещений позволяют сформулировать все внутренние состояния в такой же форме и, при желании, записать соответствующее граничное состояние.

Выводы.

1. Сформулирована и строго доказана теорема о существовании базиса сепарабельного пространства полиномиальных объемных сил.
2. Предложены конкретные алгоритмы наполнения счетного базиса пространства полиномиальных объемных сил.
3. Средствами МГС выполнено решение задачи о сплюснутом сфероиде в двух конкретных случаях относительно характера объемных сил: а) потенциальные, б) непотенциальные.
4. Обеспечено выполнение аналитического решения задачи о НДС тела, находящегося под действием суперпозиции полиномиальных сил, и выписано конкретное решение для сплюснутого сфероида.

Конкурирующие интересы. Конкурирующих интересов не имею.

Авторский вклад и ответственность. Все авторы принимали участие в разработке концепции статьи и в написании рукописи. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и Липецкой области в рамках научных проектов 19–41–480003 p_a, 19–48–480009 p_a.

Библиографический список

1. Truesdell C. *A first course in rational continuum mechanics. Vol. 1: General concepts* / Pure and Applied Mathematics. vol. 71. New York, San Francisco, London: Academic Press, 1977. xxiii+280 pp.
2. Работнов Ю. Н. *Механика деформируемого твердого тела*. М.: Наука, 1988. 712 с.
3. Лурье А. И. *Теория упругости*. М.: Наука, 1970. 940 с.
4. Мухелишвили Н. И. *Некоторые основные задачи математической теории упругости*. М.: Наука, 1966. 707 с.
5. Green A. E., Zerna W. *Theoretical Elasticity*. New York: Dover Publications, 1992. xvi+457 pp.
6. Arfken G. B., Weber H. J. *Mathematical Methods for Physicists*. Amsterdam: Elsevier/Academic Press, 2005. xii+1182 pp.
7. Хайруллин Ф. С., Сахбиев О. М. Метод определения напряженно-деформированного состояния трехмерных конструкций сложной формы // *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*, 2016. № 1. С. 36–42.
8. Стружанов В. В. О решении краевых задач теории упругости методом ортогональных проекций // *Математическое моделирование систем и процессов*, 2004. № 12. С. 89–100.
9. Стружанов В. В. Об одном итерационном методе расчета напряжений в неодносвязных телах // *Вычислительные технологии*, 2006. Т. 11, № 6. С. 118–124.
10. Пеньков В. Б., Саталкина Л. В. *Метод граничных состояний с возмущениями: неоднородные и нелинейные задачи теории упругости и термоупругости*. Saarbrücken: LAP LAMBERT Academic Publ., 2012. 108 с.
11. Пеньков В. Б., Саталкина Л. В., Шульмин А. С. Применение метода граничных состояний для анализа упругой среды с полостями и включениями // *ПММ*, 2014. Т. 78, № 4. С. 542–556.
12. Фирсанов В. В. Математическая модель напряжённо-деформированного состояния балки переменного сечения с учётом “Пограничного слоя” // *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*, 2015. № 6. С. 63–69.
13. Волошин А. Г., Ступина М. В. Система расчета равновесного состояния упругой среды, ослабленной плоской симметричной трещиной // *Инженерный вестник Дона*, 2008. № 2. С. 4–12.
14. Микишанина Е. А., Терентьев А. Г. Об определении напряженного состояния упруго-пористой среды // *Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки*, 2017. Т. 159, № 2. С. 204–215.
15. Иваньшин П. Н. Сплайн-интерполяционное решение задач теории упругости // *Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки*, 2015. Т. 157, № 4. С. 24–41.
16. Левина Л. В., Новикова О. С. Пеньков В. Б. Полнопараметрическое решение задачи теории упругости односвязного ограниченного тела // *Вестник Липецкого государственного технического университета*, 2016. № 2. С. 16–24.
17. Sachdeva C., Padhee S. S. Functionally graded cylinders: Asymptotically exact analytical formulations // *Applied Mathematical Modelling*, 2017. vol. 54. pp. 782–802. doi: [10.1016/j.apm.2017.10.019](https://doi.org/10.1016/j.apm.2017.10.019).

18. Neuber H. Ein neuer Ansatz zur Lösung räumlicher Probleme der Elastizitätstheorie. Der Hohlkegel unter Einzellast als Beispiel // *ZAMM*, 1934. vol. 14, no. 4. pp. 203–212. doi: 10.1002/zamm.19340140404.
19. Агаханов Э. К., Агаханов М. К. О возможности применения эквивалентности воздействий в аналитических решениях задач теории упругости // *Вестник МГСУ*, 2010. Т. 3, № 4. С. 144–148.
20. Матвеенок В. П., Шевелев Н. А. Аналитическое исследование напряженно-деформированного состояния тел вращения, находящихся под действием массовых сил / *Напряженно-деформированное состояние конструкций из упругих и вязкоупругих материалов*. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1977. С. 54–60.
21. Вестяк В. А., Тарлаковский Д. В. Нестационарное осесимметричное деформирование упругого пространства со сферической полостью под действием объемных сил // *Вестник Московского университета. Сер. 1. Математика. Механика*, 2016. Т. 71, № 4. С. 48–54.
22. Шарафутдинов Г. З. Функции комплексного переменного в задачах теории упругости при наличии массовых сил // *ПММ*, 2009. Т. 73, № 1. С. 69–87.
23. Зайцев А. В., Фукалов А. А. Точные аналитические решения задач о равновесии упругих анизотропных тел с центральной и осевой симметрией, находящихся в поле гравитационных сил, и их приложения к задачам геомеханики // *Математическое моделирование в естественных науках*, 2015. Т. 1. С. 141–144.
24. Фукалов А. А. Задачи об упругом равновесии составных толстостенных трансверсально-изотропных сфер, находящихся под действием массовых сил и внутреннего давления, и их приложения // *XI Всерос. съезд по фундамент. пробл. теор. и прикл. мех.* Казань, 2015. С. 3951–3953.
25. Игумнов Л. А., Марков И. П., Пазин В. П. Гранично-элементное решение краевых задач трехмерной анизотропной теории упругости // *Вестник Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского*, 2013. № 1. С. 115–119.
26. Корепанова Т. О., Севодина Н. В. Метод и результаты расчета характера сингулярности напряжений в трехмерных задачах теории упругости // *Вестник Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского*, 2011. № 4. С. 1539–1541.
27. Пикуль В. В. К аномальному деформированию твердых тел // *Физическая мезомеханика*, 2013. Т. 16, № 2. С. 93–100.
28. Schwarz H. A. Über einige Abbildungsaufgaben // *J. Reine Angew. Math.*, 1869. vol. 70. pp. 105–120, <http://eudml.org/doc/148076>.
29. Седов Л. И. *Методы подобия и размерности в механике*. М.: Наука, 1977. 431 с.
30. Penkov V. B., Ivanychiev D. A., Novikova O. S., Levina L. V. An algorithm for full parametric solution of problems on the statics of orthotropic plates by the method of boundary states with perturbations // *J. Phys.: Conf. Ser.*, 2018. vol. 973, 012015. doi: 10.1088/1742-6596/973/1/012015.
31. Новикова О. С., Пеньков В. Б., Левина Л. В. Метод граничных состояний с возмущениями как способ организации полнопараметрического аналитического решения второй основной задачи линейной эластостатики // *Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Сер. Механика предельного состояния*, 2018. № 2. С. 26–37.
32. Левина Л. В., Новикова О. С., Пеньков В. Б., Поликарпов М. В. Оптимизация облегченных элементов крепления при варьировании геометрических параметров // *Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Сер. Механика предельного состояния*, 2017. № 4. С. 45–51.

MSC: 74A10, 74S30

Analytical solution of elastostatic problems of a simply connected body loaded with nonconservative volume forces. Theoretical and algorithmic support

V. B. Penkov, L. V. Levina, O. S. Novikova

Lipetsk State Technical University,
30, Moskovskaya st., 398055, Russian Federation.

Abstract

The possibility of constructing a full-parametric analytical solution of the stress-strain state problem for the body caused by the influence of volumetric forces is studied. In the general case of Cesaro, the displacements at each point of the body are determined through the volume forces by an integral expression with a singular nucleus. Therefore, with an arbitrary shape of the body, its elastic state can be constructed only numerically. A strict analytical solution is written in the classical version, corresponding to the potential forces. These forces are traditional objects of mechanics, but their list is quite limited.

The current level of development of science and technology in the world requires the use of forces of an arbitrary nature, which can be generated both at the level of molecular interaction, and the interaction of electromagnetic fields inside the body. They certainly are not conservative. In addition, the use of perturbation methods in solving nonlinear elastostatic problems and thermoelasticity problems creates, at each iteration of the asymptotic approximation, artificially generated volume forces of a polynomial nature or forces fairly accurately approximated by polynomials.

The ability to write out strict or highly accurate private decisions during the iteration provides an invaluable service to the calculator. New method of constructing a strict solution of the problem about the corresponding elastic state of the body for a very wide range of forces, approximated by polynomials from spatial coordinates or, even for a narrower class- polynomial forces, is formed. It is based on the isomorphism of Hilbert spaces of forces of this kind and their corresponding elastic states (sets of displacements, deformations, stresses).

Research Article

 The content is published under the terms of the [Creative Commons Attribution 4.0 International License](http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Penkov V. B., Levina L. V., Novikova O. S. Analytical solution of elastostatic problems of a simply connected body loaded with nonconservative volume forces. Theoretical and algorithmic support, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2020, vol. 24, no. 1, pp. 56–73. doi: [10.14498/vsgtu1711](https://doi.org/10.14498/vsgtu1711) (In Russian).

Authors' Details:

Viktor B. Penkov  <https://orcid.org/0000-0002-6059-1856>

Dr. Phys. & Math. Sci.; Professor; Dept. of General Mechanics; e-mail: vbpenkov@mail.ru

Lyubov V. Levina  <https://orcid.org/0000-0002-7441-835X>

Cand. Phys. & Math. Sci.; Associate Professor; Dept. of Applied Mathematics; e-mail: satalkina_lyubov@mail.ru

Olga S. Novikova  <https://orcid.org/0000-0003-2577-4515>

Postgraduate Student; Dept. of General Mechanics; e-mail: _o_l_g_a_@bk.ru

The existence theorem of isomorphic countable bases of these spaces is proved, and algorithms for their filling are constructed. The particular solution of the problem about the elastic field from polynomial forces is constructed by decomposition of a given load on an orthonormal basis, written simply in the final form, and in the analytical form. The correction from the particular solution is made to the boundary conditions of the homogeneous elasticity problem for the body, after which its solution is constructed. Computational approaches, oriented to computer algebra, provide analytical form of solution.

A convenient variant of this approach is the method of boundary states (MBS), which has a number of advantages over widely used numerical (finite elements, boundary elements, finite differences, etc.) and one significant drawback: the MBS computational complex has not received a final completion. The advantages of MBS are briefly stated and its laconic description is given. The use of the MBS approach makes it possible to write out a full-parametric form of solutions for bodies of arbitrary geometric shape. MBS is used to construct a solution of the problem of linear-elastic flattened spheroid, loaded with a self-balanced system of volumetric forces. The solution was constructed for two variants of loading, namely potential, non-potential forces. The analytical version of the solution is given only for the displacement field (other characteristics of the elastic state are easily written out through the defining relations). Certain interest is the graphic illustration of stress fields, made at fixed values of parameters.

Keywords: volume forces, mass forces, non-potential forces, nonconservative forces, energy methods, the method of Trefftz, method of boundary states, space of volume forces, basis of the space forces, completeness of the basis, analytical solutions, full-parametric solution, spheroid, flattened spheroid.

Received: 12th June, 2019 / Revised: 19th November, 2019 /

Accepted: 10th February, 2020 / First online: 19th March, 2020

Competing interests. We have no competing interests.

Authors' contributions and responsibilities. Each author has participated in the article concept development and in the manuscript writing. The authors are absolutely responsible for submitting the final manuscript in print. Each author has approved the final version of manuscript.

Funding. The research was supported by the Russian Foundation for Basic Research and the Lipetsk Region (grant nos. 19-41-480003 r_a, 19-48-480009 r_a).

References

1. Truesdell C. *A first course in rational continuum mechanics. Vol. 1: General concepts*, Pure and Applied Mathematics, vol. 71. New York, San Francisco, London, Academic Press, 1977, xxiii+280 pp.
2. Rabotnov Yu. N. *Mekhanika deformiruemogo tverdogo tela* [Mechanics of a deformable rigid body]. Moscow, Nauka, 1988, 712 pp. (In Russian)
3. Lurie A. I. *Theory of Elasticity*, Foundations of Engineering Mechanics. Berlin, Springer-Verlag, 2005, iv+1050 pp. doi: [10.1007/978-3-540-26455-2](https://doi.org/10.1007/978-3-540-26455-2).
4. Muskhelishvili N. I. *Nekotorye osnovnye zadachi matematicheskoi teorii uprugosti* [Some basic problems of the mathematical theory of elasticity]. Moscow, Nauka, 1966, 707 pp. (In Russian)

5. Green A. E., Zerna W. *Theoretical Elasticity*. New York, Dover Publications, 1992, xvi+457 pp.
6. Arfken G. B., Weber H. J. *Mathematical Methods for Physicists*. Amsterdam, Elsevier/Academic Press, 2005, xii+1182 pp.
7. Khayrullin F.S., Sahbiev O. M. A method of determination of stress-strain state of 3d structures of complex form, *Stroitel'naya mekhanika inzhenernykh konstruksii i sooruzhenii*, 2016, no. 1, pp. 36–42 (In Russian).
8. Struzhanov V. V. On the solution of boundary value problems of the theory of elasticity by the method of orthogonal projections, *Matematicheskoe modelirovanie sistem i protsessov*, 2004, no. 12, pp. 89–100 (In Russian).
9. Struzhanov V. V. On one iteration method of stress calculation in non-simply connected-solids, *Computational Technologies*, 2006, vol. 11, no. 6, pp. 118–124 (In Russian).
10. Penkov V. B., Satalkina L. V. *Metod granichnykh sostoyaniy s vozmushcheniyami: neodnorodnyye i nelineynyye zadachi teorii uprugosti i termouprugosti*. Saarbrücken, LAP LAMBERT Academic Publ., 2012, 108 pp. (In Russian)
11. Penkov V. B., Satalkina L. V., Shulmin A. S. The use of the method of boundary states to analyse an elastic medium with cavities and inclusions, *J. Appl. Math. Mech.*, 2014, vol. 78, no. 4, pp. 384–394. doi: [10.1016/j.jappmathmech.2014.12.010](https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2014.12.010).
12. Firsanov V. V. Mathematical model of the stress-strain state of a beam with a variable section with an effect of "Boundary layer", *Stroitel'naya mekhanika inzhenernykh konstruksii i sooruzhenii*, 2015, no. 6, pp. 63–69 (In Russian).
13. Voloshin A. G., Stupina M. V. System for calculating of the equilibrium state of an elastic medium weakened by a plane symmetric crack, *Inzhenernyi vestnik Dona*, 2008, no. 2, pp. 4–12 (In Russian).
14. Mikishanina E. A., Terentev A. G. On determination of the stress state of an elastic-porous medium, *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2017, vol. 159, no. 2, pp. 204–215 (In Russian).
15. Ivanshin P. N. Spline-interpolation solution of elasticity theory problems, *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2015, vol. 157, no. 4, pp. 24–41 (In Russian).
16. Levina L. V., Novikova O. S., Penkov V. B. Full-parameter solution to the problem of the theory of elasticity of a simply connected bounded body, *Vestnik Lipetskogo Gosudarstvennogo Tekhnicheskogo Universiteta*, 2016, no. 2, pp. 16–24 (In Russian).
17. Sachdeva C., Padhee S. S. Functionally graded cylinders: Asymptotically exact analytical formulations, *Applied Mathematical Modelling*, 2017, vol. 54, pp. 782–802. doi: [10.1016/j.apm.2017.10.019](https://doi.org/10.1016/j.apm.2017.10.019).
18. Neuber H. Ein neuer Ansatz zur Lösung räumlicher Probleme der Elastizitätstheorie. Der Hohlkegel unter Einzellast als Beispiel, *ZAMM*, 1934, vol. 14, no. 4, pp. 203–212. doi: [10.1002/zamm.19340140404](https://doi.org/10.1002/zamm.19340140404).
19. Agahanov E. K., Agahanov M. K. About the possibility of the use of the effect equivalence in analytic solutions of the elasticity theory, *Vestnik MGSU*, 2010, vol. 3, no. 4, pp. 144–148 (In Russian).
20. Matveenko V. P., Schevelev N. A. Analytical study of the stress-strain state of rotation bodies under the action of mass forces, In: *Stress-strain State of Structures Made of Elastic and Viscoelastic Materials*. Sverdlovsk, 1977, pp. 54–60 (In Russian).
21. Vestyak V. A., Tarlakovsky D. V. Unsteady axisymmetric deformation of an elastic space with a spherical cavity under the action of bulk forces, *Moscow Univ. Mech. Bull.*, 2016, vol. 71, no. 4, pp. 87–92. doi: [10.3103/S0027133016040038](https://doi.org/10.3103/S0027133016040038).
22. Sharafutdinov G. Z. Functions of a complex variable in problems in the theory of elasticity with mass forces, *J. Appl. Math. Mech.*, 2009, vol. 73, no. 1, pp. 69–87. doi: [10.1016/j.jappmathmech.2009.03.008](https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2009.03.008).
23. Zaytsev A. V., Fukalov A. A. Exact analytical solutions of equilibrium problems for elastic anisotropic bodies with central and axial symmetry, which are in the field of gravitational

- forces, and their applications to the problems of geomechanics, *Matemat. Model. Estestv. Nauk.*, 2015, vol. 1, pp. 141–144 (In Russian).
24. Fukalov A. A. Problems of elastic equilibrium of composite thick-walled transversely isotropic spheres under the action of mass forces and internal pressure, and their applications, *All-Russian Congr. Fundam. Probl. Theoret. Appl. Mech.*, 2015, pp. 3951–3953 (In Russian).
 25. Igumnov L. A., Markov I. P., Pazin V. P. Boundary-element analysis of boundary-value problems of 3d anisotropic elasticity, *Vestnik of Lobachevsky University of Nizhni Novgorod*, 2013, no. 1, pp. 115–119 (In Russian).
 26. Korepanova T. O., Sevodina N. V. A method and results of calculation of the nature of stress singularities in three-dimensional elasticity problems, *Vestnik of Lobachevsky University of Nizhni Novgorod*, 2011, no. 4, pp. 1539–1541 (In Russian).
 27. Pikul V. V. To anomalous deformation of solids, *Physical mesomechanics*, 2013, no. 2, pp. 93–100 (In Russian).
 28. Schwarz H. A. Über einige Abbildungsaufgaben, *J. Reine Angew. Math.*, 1869, vol. 70, pp. 105–120, <http://eudml.org/doc/148076>.
 29. Sedov L. I. *Metody podobiya i razmernosti v mekhanike* [Similarity and Dimensional Methods in Mechanics]. Moscow, Nauka, 1977, 431 pp. (In Russian)
 30. Penkov V. B., Ivanychev D. A., Novikova O. S., Levina L. V. An algorithm for full parametric solution of problems on the statics of orthotropic plates by the method of boundary states with perturbations, *J. Phys.: Conf. Ser.*, 2018, vol. 973, 012015. doi: [10.1088/1742-6596/973/1/012015](https://doi.org/10.1088/1742-6596/973/1/012015).
 31. Novikova O. S., Penkov V. B., Levina L. V. Method of boundary states with the perturbation as a way of organizing full parametric analytical solution solving of the second basic problem of linear elastostatics, *Vestnik Chuvash. Gos. Ped. Univ. im I. Ya. Yakovleva. Ser. Mekh. Pred. Sost.*, 2018, no. 2, pp. 26–37 (In Russian).
 32. Levina L. V., Novikova O. S., Penkov V. B., Polikarpov M. V. Optimization of lightweight fastening elements at a variation of geometrical parameters, *Vestnik Chuvash. Gos. Ped. Univ. im I. Ya. Yakovleva. Ser. Mekh. Pred. Sost.*, 2017, no. 4, pp. 45–51 (In Russian).