



УДК 539.3

Упругопластический анализ вращающегося сплошного цилиндра при условии максимальных приведенных напряжений

А. Н. Прокудин

Институт машиноведения и металлургии

Хабаровского федерального исследовательского центра ДВО РАН,
Россия, 681005, Комсомольск-на-Амуре, ул. Металлургов, 1.


Аннотация

Рассматривается упругопластическое деформирование вращающегося сплошного цилиндра. Для постановки задачи используется теория малых деформаций и предположение о плоском деформированном состоянии в цилиндре. Пластические деформации определяются ассоциированным законом пластического течения и условием максимальных приведенных напряжений. Скорость вращения цилиндра монотонно возрастает от нуля до максимального значения, а затем монотонно убывает вплоть до полной остановки цилиндра. Предполагается, что скорость вращения медленно меняется со временем, поэтому угловым ускорением цилиндра можно пренебречь. При указанных предположениях в цилиндре остается одно нетривиальное уравнение равновесия.

Установлено, что в ходе нагрузки появляются четыре области пластического течения, которые соответствуют различным граням и ребрам поверхности текучести. При этом последняя из областей возникает уже после полного перехода цилиндра в состояние пластичности. Когда скорость вращения начинает уменьшаться, весь цилиндр вновь ведет себя, как упругое тело, а при определенной скорости в нем может начаться повторное (или вторичное) пластическое течение, характер которого зависит от максимальной скорости вращения. В общем случае появляются четыре вторичные пластические области. Напряженное состояние в первичных и вторичных пластических областях соответствует противоположным ребрам и граням поверхности текучести. В данной работе максимальная скорость вращения выбрана таким образом, чтобы в момент остановки весь цилиндр переходил в состояние повторного пластического течения. В этом случае возникают только две вторичные пластические области.

Найдены точные аналитические решения для всех стадий деформирования цилиндра. Сформулированы системы алгебраических уравнений для определения констант интегрирования и границ между областями. Полученные результаты проиллюстрированы графиками пере-

Научная статья

 Контент публикуется на условиях лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru) (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Образец для цитирования

Прокудин А. Н. Упругопластический анализ вращающегося сплошного цилиндра при условии максимальных приведенных напряжений // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2020. Т. 24, № 1. С. 74–94. doi: [10.14498/vsgtu1737](https://doi.org/10.14498/vsgtu1737).

Сведения об авторе

Александр Николаевич Прокудин  <https://orcid.org/0000-0002-5156-424X>

кандидат технических наук; ведущий научный сотрудник; e-mail: sunbeam_85@mail.ru

мещений, напряжений и пластических деформаций. Произведено сравнение с известными решениями, найденными с использованием условия Треска.

Ключевые слова: упругопластические деформации, точное решение, вращающийся цилиндр, условие максимальных приведенных напряжений.

Получение: 25 августа 2019 г. / Исправление: 12 декабря 2019 г. /
Принятие: 10 февраля 2020 г. / Публикация онлайн: 2 апреля 2020 г.

Введение. Исследование напряженно-деформированного состояния вращающихся цилиндров и дисков представляет значительный интерес по причине их широкого применения в машиностроении. В научной литературе опубликовано множество работ, посвященных решению данного класса задач в различной кинематической и физической постановке и с разными типами граничных условий. Обычно рассматриваются малые деформации и три варианта кинематики: цилиндр с закрепленными или свободными концами, а также диск различного профиля. В простейшей постановке рассматривается линейно-упругий материал, подчиняющийся закону Гука. Решение такой задачи входит во многие учебники по теории упругости, например [1, 2].

При достижении критической скорости вращения в цилиндре начинает развиваться пластическое течение. Первым задачу о пластическом деформировании вращающегося сплошного цилиндра решил А. Надаи [3]. В его решении учитывались только пластические деформации и использовалось условие несжимаемости. Упругопластические деформации во вращающемся цилиндре впервые изучались в [4], где использовалось условие пластичности Треска и ассоциированный закон пластического течения, а также отдельно рассматривался случай конечных деформаций. Однако, как позднее было показано в [5], расчеты [4] приводят к разрыву перемещений на упругопластической границе. Корректное решение упругопластической задачи для вращающегося цилиндра с закрепленными концами было получено в [6–8]; для цилиндра со свободными концами в [9]. Аналогичная задача для полого цилиндра решена в [10, 11]. Работы [12, 13] посвящены исследованию вращающихся цилиндров из упрочняющегося упругопластического материала. Цилиндры из функционально-градиентных материалов изучались в [14–18].

Большинство работ, посвященных упругопластическому анализу вращающихся цилиндров и дисков, основаны на условиях пластичности Треска или Мизеса. Несомненным достоинством условия Треска является возможность получения замкнутых аналитических решений начально-краевых задач теории пластичности. К недостаткам можно отнести тот факт, что в нем не учитывается влияние промежуточного главного напряжения. В условие Мизеса в явном виде входят все три главных напряжения, однако это условие является нелинейным и, как следствие, решение задач практически всегда сводится к использованию численных методов.

Условие максимальных приведенных напряжений [19–23] наряду с условиями Треска и Мизеса относится к классическим условиям пластичности. В российских публикациях также используется название «условие Ишлинского—Ивлева» [24–26]. В математическую запись этого условия входят все

три главные напряжения и оно, как и условие Треска, является кусочно-линейным. Ранее [27] с помощью этого условия было получено распределение напряжений во вращающемся диске. Из последних работ также можно выделить [24–26, 28, 29]. Целью настоящей публикации является получение точного аналитического решения задачи об упругопластическом деформировании сплошного вращающегося цилиндра в условиях плоского деформированного состояния. Используются теория малых деформаций, условие максимальных приведенных напряжений и ассоциированный закон пластического течения. Полученные результаты дополняют работы [6–8, 12, 13], в которых для решения данной задачи использовались условия Треска и Мизеса.

1. Определяющие соотношения. Рассматривается сплошной цилиндр с закрепленными концами. Цилиндр вращается вокруг собственной оси с угловой скоростью ω , которая медленно меняется со временем, вследствие чего угловым ускорением можно пренебречь. В условиях плоской деформации и осевой симметрии вектор перемещений в цилиндре имеет только одну ненулевую компоненту u_r . Введены цилиндрическая система координат ρ, θ, z и безразмерные величины:

$$\beta = \frac{r}{b}, \quad u = \frac{u_r}{b},$$

где b — радиус цилиндра.

Предполагается, что деформации d_{ij} в цилиндре являются малыми и представляют собой сумму упругих e_{ij} , пластических деформаций p_{ij} и вторичных пластических деформаций s_{ij} :

$$\begin{aligned} d_{\beta\beta} &= e_{\beta\beta} + p_{\beta\beta} + s_{\beta\beta} = \frac{\partial u}{\partial \beta}, \\ d_{\theta\theta} &= e_{\theta\theta} + p_{\theta\theta} + s_{\theta\theta} = \frac{u}{\beta} \\ d_{zz} &= e_{zz} + p_{zz} + s_{zz} = 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Напряжения (в безразмерном виде) связаны с упругими деформациями законом Гука:

$$\begin{aligned} \sigma_{\beta\beta} &= \frac{E}{\sigma_T} \frac{1}{(1+\nu)(1-2\nu)} ((1-\nu)e_{\beta\beta} + \nu e_{\theta\theta} + \nu e_{zz}), \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{E}{\sigma_T} \frac{1}{(1+\nu)(1-2\nu)} (\nu e_{\beta\beta} + (1-\nu)e_{\theta\theta} + \nu e_{zz}), \\ \sigma_{zz} &= \frac{E}{\sigma_T} \frac{1}{(1+\nu)(1-2\nu)} (\nu e_{\beta\beta} + \nu e_{\theta\theta} + (1-\nu)e_{zz}), \end{aligned} \tag{2}$$

здесь E — модуль Юнга, σ_T — предел текучести, ν — коэффициент Пуассона.

Соотношения, обратные к (2), имеют вид

$$\begin{aligned} e_{\beta\beta} &= \frac{\sigma_T}{E} (\sigma_{\beta\beta} - \nu\sigma_{\theta\theta} - \nu\sigma_{zz}), \\ e_{\theta\theta} &= \frac{\sigma_T}{E} (\sigma_{\theta\theta} - \nu\sigma_{\beta\beta} - \nu\sigma_{zz}), \\ e_{zz} &= \frac{\sigma_T}{E} (\sigma_{zz} - \nu\sigma_{\beta\beta} - \nu\sigma_{\theta\theta}). \end{aligned} \tag{3}$$

Единственное нетривиальное уравнение равновесия в цилиндре

$$\frac{\partial \sigma_{\beta\beta}}{\partial \beta} + \frac{\sigma_{\beta\beta} - \sigma_{\theta\theta}}{\beta} = -\Omega\beta, \quad \Omega = \frac{\rho b^2 \omega^2}{\sigma_T}, \quad (4)$$

где ρ — плотность материала.

Условие максимальных приведенных напряжений [23]:

$$\begin{aligned} \sigma_1 - \frac{1}{2}(\sigma_2 + \sigma_3) &= 1, \text{ если } \sigma_2 \leq (\sigma_1 + \sigma_3)/2, \\ \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) - \sigma_3 &= 1, \text{ если } \sigma_2 \geq (\sigma_1 + \sigma_3)/2, \end{aligned} \quad (5)$$

где $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ — главные напряжения, упорядоченные по убыванию. Поверхность текучести, соответствующая условию (5), далее называется призмой Ивлева.

Использование условия (5) вместе с ассоциированным законом пластического течения приводит к пластической несжимаемости, поэтому объемная деформация является чисто уругой:

$$\frac{\partial u}{\partial \beta} + \frac{u}{\beta} = \frac{\sigma_T}{E} (1 - 2\nu) (\sigma_{\beta\beta} + \sigma_{\theta\theta} + \sigma_{zz}). \quad (6)$$

Граничные условия задачи следующие:

$$u(0) = 0, \quad \sigma_{\beta\beta}(1) = 0. \quad (7)$$

Параметр нагружения Ω цилиндра монотонно возрастает от 0 до некоторого Ω_{\max} , а затем также монотонно убывает вплоть до полной остановки цилиндра. В начале нагружения цилиндр деформируется уруго. Затем при $\Omega = \Omega_p$ в центре цилиндра $\beta = 0$ впервые выполняется условие пластичности (5), в результате чего появляется область пластического течения, которая обозначается как I. Дальнейшее увеличение параметра нагружения Ω приводит к постепенному уменьшению области уругого деформирования и при $\Omega = \Omega_{p2}$ на поверхности $\beta = 1$ появляется пластическая область II. Напряженное состояние в областях I и II соответствует разным граням призмы Ивлева. Когда Ω достигает значения Ω_{fp} , уругая область исчезает, весь цилиндр переходит в состояние пластичности, а между областями I и II появляется пластическая область III, напряжения в которой лежат на ребре призмы Ивлева. Далее при $\Omega = \Omega_{fp2}$ напряжения на поверхности $\beta = 1$ переходят на ребро призмы Ивлева, в результате чего возникает пластическая область IV. При последующем увеличении параметра нагружения $\Omega > \Omega_{fp2}$ новые пластические области уже не появляются, но границы между существующими областями меняют свое положение, при этом увеличиваются области III и IV, соответствующие ребрам поверхности текучести (5). Величины $\Omega_p, \Omega_{p2}, \Omega_{fp}, \Omega_{fp2}$ зависят от коэффициента Пуассона ν .

Как только параметр Ω начинает уменьшаться, весь цилиндр вновь ведет себя, как уругое тело, но с накопленными пластическими деформациями, которые в процессе разгрузки уже не меняются. Если максимальное значение параметра нагружения Ω_{\max} было достаточно высоким, то в ходе разгрузки

при $\Omega = \Omega_{\text{сп}}$ в центре цилиндра может начаться повторное (или вторичное) пластическое течение. В общем случае возможно появление четырех вторичных пластических областей V–VIII в том же порядке, в котором появлялись первичные области I–IV. Заметим, что области первичного и вторичного пластического течения соответствуют противоположным граням и ребрам призмы Ивлева. В настоящей работе значение Ω_{max} выбрано таким образом, чтобы в момент остановки $\Omega = 0$ цилиндр полностью переходил в состояние повторного пластического течения. Поэтому в цилиндре возникают только две из возможных четырех вторичных областей. При $\Omega = \Omega_{\text{сп}}$ в центре цилиндра появляется область V, при $\Omega = \Omega_{\text{сп}2}$ на поверхности цилиндра появляется область VI, а в момент остановки $\Omega = 0$ упругая область между вторичными областями V и VI исчезает.

В следующих разделах получено решение для каждой области. Символы D_i, C_i, B_i, A_i обозначают константы интегрирования.

2. Упругая область. Упругое решение для вращающегося цилиндра, в котором отсутствуют предварительные деформации, хорошо известно:

$$\begin{aligned} u &= \frac{D_1}{\beta} + D_2\beta - \frac{\sigma_T}{E} \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{8(1-\nu)} \Omega\beta^3, \\ \sigma_{\beta\beta} &= -\frac{E}{\sigma_T} \frac{D_1}{1+\nu} \frac{1}{\beta^2} + \frac{E}{\sigma_T} \frac{D_2}{(1+\nu)(1-2\nu)} - \frac{3-2\nu}{8(1-\nu)} \Omega\beta^2, \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{E}{\sigma_T} \frac{D_1}{1+\nu} \frac{1}{\beta^2} + \frac{E}{\sigma_T} \frac{D_2}{(1+\nu)(1-2\nu)} - \frac{1+2\nu}{8(1-\nu)} \Omega\beta^2, \\ \sigma_{zz} &= \nu(\sigma_{\beta\beta} + \sigma_{\theta\theta}). \end{aligned} \quad (8)$$

Приведенное решение справедливо только для стадии нагрузки и параметра нагружения $0 \leq \Omega \leq \Omega_{\text{fp}}$. При чисто упругом деформировании ($0 \leq \Omega \leq \Omega_{\text{p}}$) константы D_1, D_2 определяются из граничных условий (7):

$$D_1 = 0, \quad D_2 = \frac{\sigma_T}{E} \frac{(1+\nu)(1-2\nu)(3-2\nu)}{8(1-\nu)} \Omega. \quad (9)$$

Пластическое течение зарождается в центре цилиндра $\beta = 0$, где напряжения удовлетворяют неравенству $\sigma_{\beta\beta} > \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{zz}$, а условие (5) имеет вид

$$\sigma_{\beta\beta}(0) + \sigma_{\theta\theta}(0) - 2\sigma_{zz}(0) = 2. \quad (10)$$

Используя (10) вместе с (8) и (9), найдем критическое значение параметра нагружения Ω_{p} , при котором начнется пластическое течение:

$$\Omega_{\text{p}} = \frac{8(1-\nu)}{(1-2\nu)(3-2\nu)}. \quad (11)$$

Интересно отметить, что Ω_{p} имеет одно и то же значение для условий пластичности Греска [7], Мизеса [13] и (5).

В ходе разгрузки ($\Omega_{\text{max}} \geq \Omega \geq 0$) в упругой области присутствуют первичные пластические деформации $\hat{p}_{ij} = p_{ij}(\Omega_{\text{max}})$, распределение которых

известно и не меняется. Тогда перемещение в упругой области можно найти из решения уравнения равновесия (4) с учетом (1), (2):

$$u = B_1\beta + \frac{B_2}{\beta} - \frac{(1+\nu)(1-2\nu)\sigma_T}{8(1-\nu)}\Omega\beta + \frac{\beta}{2} \int \hat{p}(\beta) d\beta - \frac{1}{2\beta} \int \beta^2 \hat{p}(\beta) d\beta, \quad (12)$$

$$\hat{p}(\beta) = \frac{\partial \hat{p}_{\beta\beta}}{\partial \beta} + \frac{\nu}{1-\nu} \left(\frac{\partial \hat{p}_{\theta\theta}}{\partial \beta} + \frac{\partial \hat{p}_{zz}}{\partial \beta} \right) + \frac{1-2\nu}{\beta(1-\nu)} (\hat{p}_{\beta\beta} - \hat{p}_{\theta\theta}).$$

Константы B_1, B_2 и интегралы в (12) необходимо отдельно вычислять для каждой первичной области I–IV.

3. Область I. В области I пластического течения $\sigma_3 = \sigma_{zz}, \sigma_2 \geq (\sigma_1 + \sigma_3)/2$ и условие (5) принимает вид

$$\sigma_{\beta\beta} + \sigma_{\theta\theta} - 2\sigma_{zz} = 2.$$

Отсюда осевое напряжение

$$\sigma_{zz} = \frac{1}{2}(\sigma_{\beta\beta} + \sigma_{\theta\theta}) - 1. \quad (13)$$

Из ассоциированного закона пластического течения и условия плоской деформации следует, что

$$p_{\beta\beta} = p_{\theta\theta}, \quad p_{zz} = -2p_{\beta\beta}, \quad e_{zz} = -p_{zz}.$$

С помощью последних выражений преобразуем кинематические соотношения (1) и получим

$$d_{\beta\beta} = e_{\beta\beta} + \frac{e_{zz}}{2}, \quad d_{\theta\theta} = e_{\theta\theta} + \frac{e_{zz}}{2}. \quad (14)$$

Далее преобразуем (14) с помощью закона Гука (2) и выражения для осевого напряжения (13). Из полученной системы уравнений можно выразить радиальное и тангенциальное напряжения через полные деформации:

$$\begin{aligned} \sigma_{\beta\beta} &= \frac{1}{3} + \frac{1}{6(1+\nu)(1-2\nu)} \frac{E}{\sigma_T} ((5-4\nu)d_{\beta\beta} - (1-8\nu)d_{\theta\theta}), \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{1}{3} - \frac{1}{6(1+\nu)(1-2\nu)} \frac{E}{\sigma_T} (6(1-8\nu)d_{\beta\beta} - (5-4\nu)d_{\theta\theta}). \end{aligned} \quad (15)$$

Перемещение определяется из уравнения равновесия (4) с учетом соотношений (15):

$$u = \frac{C_1}{\beta} + C_2\beta - \frac{3\sigma_T(1+\nu)(1-2\nu)}{4E(5-4\nu)}\Omega\beta^3. \quad (16)$$

Оставшиеся неизвестные функции можно найти с помощью (13), (15) и (16). Полные деформации определяются из соотношений (1), а их упругие

составляющие — через обратный закон Гука (3). Пластические деформации вычисляются как разница между полными и упругими деформациями.

4. Область II. Здесь $\sigma_1 = \sigma_{\theta\theta}$, $\sigma_2 \leq (\sigma_1 + \sigma_3)/2$, поэтому условие пластичности (5) примет вид

$$2\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{zz} - \sigma_{\beta\beta} = 2.$$

Осевое напряжение

$$\sigma_{zz} = 2\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\beta\beta} - 2.$$

Вследствие ассоциированного закона пластического течения найдем

$$p_{\beta\beta} = p_{zz}, \quad p_{\theta\theta} = -2p_{zz}.$$

Напряжения можно выразить через полные деформации, так же как это было сделано в области I:

$$\begin{aligned} \sigma_{\beta\beta} &= -\frac{1}{3} + \frac{1}{6} \frac{E}{\sigma_T} \frac{1}{1-2\nu} \left(\frac{5-4\nu}{1+\nu} d_{\beta\beta} + 2d_{\theta\theta} \right), \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \frac{E}{\sigma_T} \frac{1}{1-2\nu} (d_{\beta\beta} + d_{\theta\theta}). \end{aligned} \quad (17)$$

Перемещение следует из уравнения равновесия (4) и соотношений (17):

$$u = C_3 \beta^{-\sqrt{\frac{2(1+\nu)}{5-4\nu}}} + C_4 \beta^{\sqrt{\frac{2(1+\nu)}{5-4\nu}}} + 2 \frac{\sigma_T}{E} (1+\nu) \beta - 6 \frac{\sigma_T}{E} \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{43-38\nu} \Omega \beta^3.$$

5. Область III. Напряженное состояние в этой области соответствует ребру призмы Ивлева и условие (5) имеет следующий вид:

$$2\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\beta\beta} - \sigma_{zz} = 2, \quad \sigma_{\theta\theta} + \sigma_{\beta\beta} - 2\sigma_{zz} = 2.$$

Из предыдущих соотношений следует, что

$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\beta\beta} + \frac{2}{3}, \quad \sigma_{zz} = \sigma_{\beta\beta} - \frac{2}{3}. \quad (18)$$

Разрешая уравнение равновесия (4) с учетом (18), получим

$$\sigma_{\beta\beta} = C_6 + \frac{2}{3} \ln \beta - \frac{1}{2} \Omega \beta^2. \quad (19)$$

Далее с помощью (18) и (19) решим уравнение (6) и получим распределение перемещений:

$$u = \frac{C_5}{\beta} + \frac{1}{2} \frac{\sigma_T}{E} (1-2\nu) (3C_6 - 1) \beta + \frac{\sigma_T}{E} (1-2\nu) \beta \ln \beta - \frac{3}{8} \frac{\sigma_T}{E} (1-2\nu) \Omega \beta^3.$$

6. Область IV. Ход решения здесь аналогичен решению для области III. Напряжения соответствуют ребру призмы Ивлева, а условие (5) имеет вид

$$2\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{zz} - \sigma_{\beta\beta} = 2, \quad \sigma_{\theta\theta} + \sigma_{zz} - 2\sigma_{\beta\beta} = 2. \quad (20)$$

Из (20) следует, что

$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\beta\beta} + \frac{4}{3}, \quad \sigma_{zz} = \sigma_{\beta\beta} + \frac{2}{3}. \quad (21)$$

Интегрируя уравнение равновесия (4) с учетом (21), найдем

$$\sigma_{\beta\beta} = C_8 + \frac{4}{3} \ln \beta - \frac{1}{2} \Omega \beta^2. \quad (22)$$

Перемещение определяется из решения уравнения (6) с учетом (22) и (21):

$$u = \frac{C_7}{\beta} + \frac{3}{2} \frac{\sigma_T}{E} (1 - 2\nu) C_8 \beta + 2 \frac{\sigma_T}{E} (1 - 2\nu) \beta \ln \beta - \frac{3}{8} \frac{\sigma_T}{E} (1 - 2\nu) \Omega \beta^3.$$

7. Область V. В первой области повторного пластического течения $\sigma_1 = \sigma_{zz}$, $\sigma_2 \leq (\sigma_1 + \sigma_3)/2$ и условие (5) имеет вид

$$2\sigma_{zz} - \sigma_{\beta\beta} - \sigma_{\theta\theta} = 2. \quad (23)$$

Осевое напряжение

$$\sigma_{zz} = 1 + \frac{1}{2} (\sigma_{\beta\beta} + \sigma_{\theta\theta}). \quad (24)$$

Вследствие ассоциированного закона пластического течения и условия плоской деформации получим

$$s_{\beta\beta} = s_{\theta\theta} = -\frac{1}{2} s_{zz}, \quad s_{zz} = -e_{zz} - \hat{p}_{zz}. \quad (25)$$

Соотношения (1) с учетом (25) примут вид

$$\begin{aligned} d_{\beta\beta} - \hat{p}_{\beta\beta} - \frac{1}{2} \hat{p}_{zz} &= e_{\beta\beta} + \frac{1}{2} e_{zz}, \\ d_{\theta\theta} - \hat{p}_{\theta\theta} - \frac{1}{2} \hat{p}_{zz} &= e_{\theta\theta} + \frac{1}{2} e_{zz}. \end{aligned} \quad (26)$$

Распределение напряжений определяется из (26), (24) и (2):

$$\begin{aligned} \sigma_{\beta\beta} &= -\frac{1}{3} + \frac{1}{6} \frac{E}{\sigma_T} \frac{5 - 4\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} (d_{\beta\beta} - \hat{p}_{\beta\beta}) - \\ &\quad - \frac{1}{6} \frac{E}{\sigma_T} \frac{1 - 8\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} (d_{\theta\theta} - \hat{p}_{\theta\theta}) - \frac{1}{3} \frac{E}{\sigma_T} \frac{1}{1 - 2\nu} \hat{p}_{zz}, \\ \sigma_{\theta\theta} &= -\frac{1}{3} - \frac{1}{6} \frac{E}{\sigma_T} \frac{1 - 8\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} (d_{\beta\beta} - \hat{p}_{\beta\beta}) + \\ &\quad + \frac{1}{6} \frac{E}{\sigma_T} \frac{5 - 4\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} (d_{\theta\theta} - \hat{p}_{\theta\theta}) - \frac{1}{3} \frac{E}{\sigma_T} \frac{1}{1 - 2\nu} \hat{p}_{zz}. \end{aligned} \quad (27)$$

Уравнение равновесия с учетом (27) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} + \frac{1}{\beta} \frac{\partial u}{\partial \beta} - \frac{u}{\beta^2} &= -6 \frac{\sigma_T}{E} \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{5-4\nu} \Omega \beta + \hat{p}(\beta), \\ \hat{p}(\beta) &= \frac{6}{\beta} \frac{1-2\nu}{5-4\nu} (\hat{p}_{\beta\beta} - \hat{p}_{\theta\theta}) + \frac{\partial \hat{p}_{\beta\beta}}{\partial \beta} - \frac{1-8\nu}{5-4\nu} \frac{\partial \hat{p}_{\theta\theta}}{\partial \beta} + \frac{2(1+\nu)}{5-4\nu} \frac{\partial \hat{p}_{zz}}{\partial \beta}. \end{aligned} \quad (28)$$

Перемещение найдем из решения уравнения (28):

$$u = \frac{A_1}{\beta} + A_2 \beta - \frac{3}{4} \frac{\sigma_T}{E} \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{5-4\nu} \Omega \beta^3 + \frac{\beta}{2} \int \hat{p}(\beta) d\beta - \frac{1}{2\beta} \int \beta^2 \hat{p}(\beta) d\beta. \quad (29)$$

Константы A_1 , A_2 и интегралы в (29) вычисляются отдельно для каждого непустого пересечения области V с первичными областями I–IV.

8. Область VI. В данной области $\sigma_3 = \sigma_{\theta\theta}$, $\sigma_2 \geq (\sigma_1 + \sigma_3)/2$, поэтому условие пластичности (5) запишется так:

$$\sigma_{\beta\beta} + \sigma_{zz} - 2\sigma_{\theta\theta} = 2.$$

Осевое напряжение

$$\sigma_{zz} = 2 - \sigma_{\beta\beta} + 2\sigma_{\theta\theta}.$$

Из ассоциированного закона пластического течения следует, что

$$s_{\beta\beta} = s_{zz}, \quad s_{\theta\theta} = -2s_{zz}. \quad (30)$$

Соотношения (1) с учетом (30) принимают вид

$$\begin{aligned} d_{\beta\beta} - \hat{p}_{\beta\beta} + \hat{p}_{zz} &= e_{\beta\beta} - e_{zz}, \\ d_{\theta\theta} - \hat{p}_{\theta\theta} - 2\hat{p}_{zz} &= e_{\theta\theta} + 2e_{zz}. \end{aligned} \quad (31)$$

Распределение напряжений определяется из (31), так же как это было сделано в предыдущем разделе статьи:

$$\begin{aligned} \sigma_{\beta\beta} &= \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \frac{E}{\sigma_T} \frac{5-4\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} (d_{\beta\beta} - \hat{p}_{\beta\beta}) + \\ &\quad + \frac{1}{3} \frac{E}{\sigma_T} \frac{1}{1-2\nu} (d_{\theta\theta} - \hat{p}_{\theta\theta}) + \frac{1}{6} \frac{E}{\sigma_T} \frac{1-8\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \hat{p}_{zz}, \\ \sigma_{\theta\theta} &= -\frac{2}{3} + \frac{1}{3} \frac{E}{\sigma_T} \frac{1}{1-2\nu} (d_{\beta\beta} - \hat{p}_{\beta\beta} + d_{\theta\theta} - \hat{p}_{\theta\theta} - \hat{p}_{zz}). \end{aligned} \quad (32)$$

Уравнение равновесия с учетом (32) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} + \frac{1}{\beta} \frac{\partial u}{\partial \beta} - \frac{2(1+\nu)}{5-4\nu} \frac{u}{\beta^2} &= -6 \frac{\sigma_T}{E} \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{5-4\nu} \left(\Omega \beta + \frac{1}{\beta} \right) + \hat{p}(\beta), \\ \hat{p}(\beta) &= \frac{3}{\beta} \frac{1-2\nu}{5-4\nu} (\hat{p}_{\beta\beta} - \hat{p}_{zz}) + \frac{\partial \hat{p}_{\beta\beta}}{\partial \beta} + \frac{2(1+\nu)}{5-4\nu} \frac{\partial \hat{p}_{\theta\theta}}{\partial \beta} - \frac{1-8\nu}{5-4\nu} \frac{\partial \hat{p}_{zz}}{\partial \beta}. \end{aligned} \quad (33)$$

Перемещение следует из решения уравнения (33):

$$\begin{aligned}
 u &= A_3 u_1 + A_4 u_2 - 2 \frac{\sigma_T}{E} (1 + \nu) \beta - 6 \frac{\sigma_T}{E} \frac{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}{43 - 38\nu} \Omega \beta^3 + J_2(\beta), \\
 u_1 &= \beta^{-\sqrt{\frac{2(1+\nu)}{5-4\nu}}}, \quad u_2 = \beta^{\sqrt{\frac{2(1+\nu)}{5-4\nu}}}, \quad W = \frac{2}{\beta} \sqrt{\frac{2(1+\nu)}{5-4\nu}}, \\
 J_2(\beta) &= u_2 \int \frac{u_1 \hat{p}(\beta)}{W} d\beta - u_1 \int \frac{u_2 \hat{p}(\beta)}{W} d\beta.
 \end{aligned} \tag{34}$$

Константы A_3 , A_4 и интегралы в (34) вычисляются отдельно в каждом непустом пересечении области VI с первичными областями I–IV.

9. Результаты. Используются следующие значения параметров: $\nu = 0.3$, $\sigma_T = 2.5 \cdot 10^8$ Па, $E = 2.1 \cdot 10^{11}$ Па, $\rho = 7900$ кг/м³, $b = 0.1$ м. В соответствии с (11) пластическое течение начнется при $\Omega_p \cong 3.066$. Максимальное значение параметра нагружения определено численно и составляет $\Omega_{\max} \cong 18.534$. Безразмерным величинам Ω_p и Ω_{\max} соответствуют угловые скорости $\omega_p \cong 3115$ с⁻¹ и $\omega_{\max} \cong 7659$ с⁻¹. Упругое решение для $\Omega = \Omega_p$ показано на рис. 1.

Процесс пластического деформирования ($\Omega_p \leq \Omega \leq \Omega_{\max}$) делится на следующие интервалы: $\Omega_p \leq \Omega \leq \Omega_{p2}$, $\Omega_{p2} \leq \Omega \leq \Omega_{fp}$, $\Omega_{fp} \leq \Omega \leq \Omega_{fp2}$, $\Omega_{fp2} \leq \Omega \leq \Omega_{\max}$, в каждом из которых цилиндр состоит из различных областей. Решение на каждом этапе пластического течения содержит неизвестные константы интегрирования C_i , D_i и координаты β_i границ между областями. Для вычисления указанных величин используются граничные условия задачи (7), а также по три условия непрерывности на каждой границе. Как показано в работе [7], подходящий выбор трех условий на границе обеспечивает на ней непрерывность всех функций. Получаемая система алгебраических уравнений является линейной относительно C_i , D_i и нелинейной относительно β_i . На каждом интервале часть уравнений выбирается для точного выражения констант интегрирования через координаты β_i , параметр нагружения Ω , а также физические параметры задачи ν , σ_T , E . Получаемые формулы здесь не приводятся. Далее в оставшиеся уравнения подставляются выражения для C_i , D_i и числовые значения параметров ν , σ_T , E . В результате имеем систему нелинейных уравнений вида $F_i(\beta_1, \dots, \Omega) = 0$, которая решается

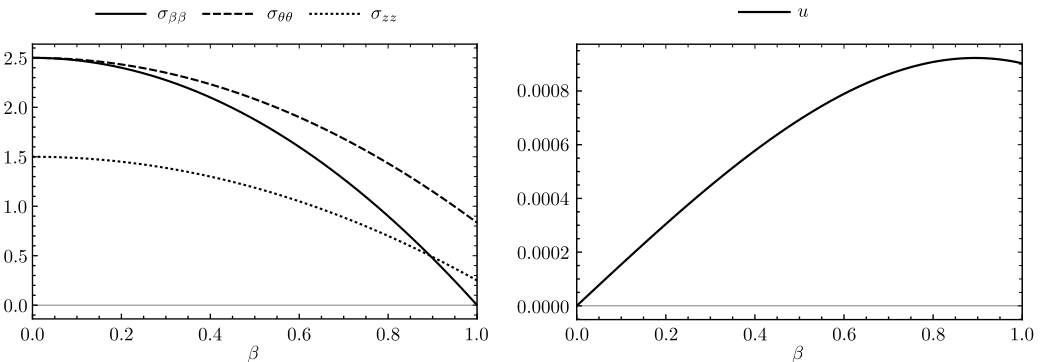


Рис. 1. Упругое решение при $\Omega = \Omega_p$: напряжения (слева), перемещения (справа)
 [Figure 1. Purely elastic solution at $\Omega = \Omega_p$: stresses (left), displacement (right)]

с помощью метода Ньютона для выбранных значений Ω внутри интервала. Вычисление величин Ω_{p2} , Ω_{fp} , Ω_{fp2} требует дополнительных условий.

Рассмотрим подробно каждый интервал. Заметим, что в каждом из них $C_1 = 0$. В диапазоне $\Omega_p \leq \Omega \leq \Omega_{p2}$ в цилиндре присутствуют следующие области:

- пластическая область I ($0 \leq \beta \leq \beta_1$);
- упругая область E ($\beta_1 \leq \beta \leq 1$).

Найденное решение для указанных областей содержит неизвестные константы интегрирования C_1, C_2, D_1, D_2 , а также координату упругопластической границы β_1 . Для определения оставшихся неизвестных составим систему уравнений:

$$\begin{aligned} \beta = \beta_1 : u^I &= u^E, & \sigma_{\beta\beta}^I &= \sigma_{\beta\beta}^E, & \sigma_{\beta\beta}^E + \sigma_{\theta\theta}^E - 2\sigma_{zz}^E &= 2, \\ \beta = 1 : \sigma_{\beta\beta}^E &= 0. \end{aligned}$$

Здесь и далее верхний индекс в названии функции обозначает область.

Для определения Ω_{p2} дополним предыдущую систему условием

$$\beta = 1 : 2\sigma_{\theta\theta}^E - \sigma_{zz}^E = 2.$$

Отсюда найдем $\Omega_{p2} \cong 8.135$. Решение на первой стадии пластического течения представлено на рис. 2 в виде графиков напряжений и пластических деформаций для $\Omega = 7$.

В интервале $\Omega_{p2} \leq \Omega \leq \Omega_{fp}$ цилиндр состоит из следующих областей:

- пластическая область I ($0 \leq \beta \leq \beta_1$);
- упругая область E ($\beta_1 \leq \beta \leq \beta_2$);
- пластическая область II ($\beta_2 \leq \beta \leq 1$).

Решение в данных областях содержит неизвестные константы интегрирования $C_1, C_2, C_3, C_4, D_1, D_2$ и координаты границ β_1, β_2 . Для вычисления остальных неизвестных воспользуемся следующей системой:

$$\begin{aligned} \beta = \beta_1 : u^I &= u^E, & \sigma_{\beta\beta}^I &= \sigma_{\beta\beta}^E, & \sigma_{\beta\beta}^E + \sigma_{\theta\theta}^E - 2\sigma_{zz}^E &= 2, \\ \beta = \beta_2 : u^E &= u^{II}, & \sigma_{\beta\beta}^E &= \sigma_{\beta\beta}^{II}, & 2\sigma_{\theta\theta}^E - \sigma_{zz}^E - \sigma_{\beta\beta}^E &= 2, \\ \beta = 1 : \sigma_{\beta\beta}^{II} &= 0. \end{aligned}$$

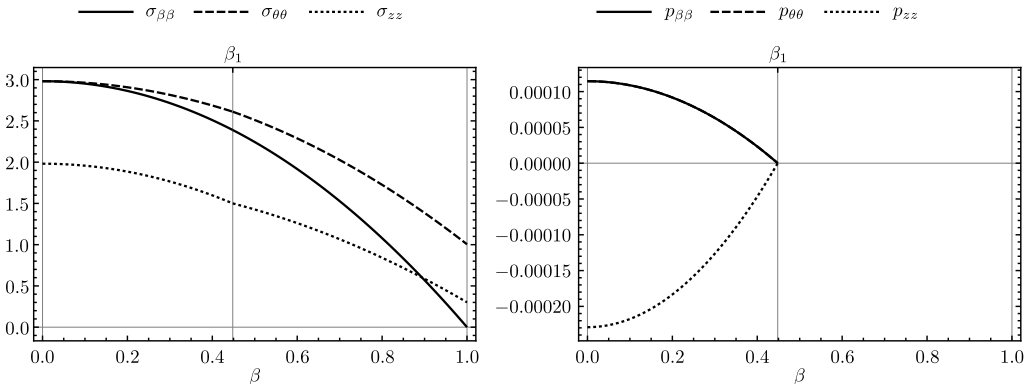


Рис. 2. Решение в момент $\Omega = 7$: напряжения (слева), пластические деформации (справа)
[Figure 2. Solution at $\Omega = 7$: stresses (left), plastic strains (right)]

Для определения Ω_{fp} предыдущую систему необходимо дополнить условием $\beta_1 = \beta_2$. Найдем, что $\Omega_{\text{fp}} \cong 9.267$ ($\omega_{\text{fp}} \cong 5415 \text{ с}^{-1}$). Решение на второй стадии пластического течения представлено на рис. 3 в виде графиков напряжений и пластических деформаций для $\Omega = 9$.

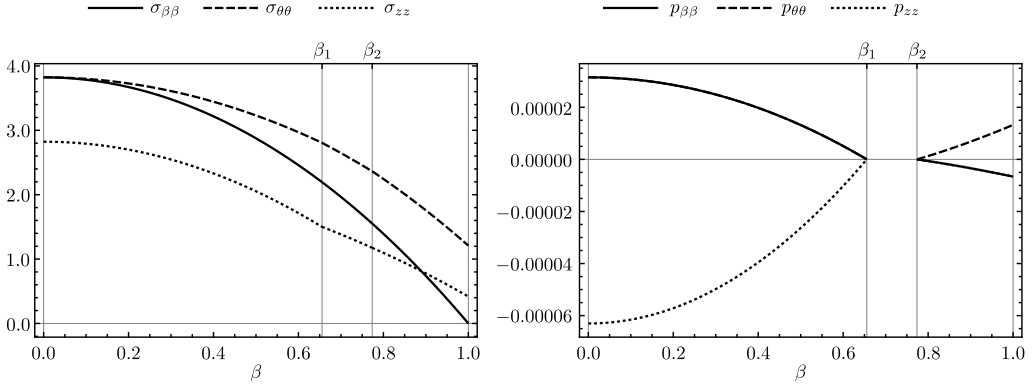


Рис. 3. Решение в момент $\Omega = 9$: напряжения (слева), пластические деформации (справа)
 [Figure 3. Solution at $\Omega = 9$: stresses (left), plastic strains (right)]

В интервале $\Omega_{\text{fp}} \leq \Omega \leq \Omega_{\text{fp2}}$ весь цилиндр находится в пластическом состоянии и делится на следующие области:

- пластическая область I ($0 \leq \beta \leq \beta_1$);
- пластическая область III ($\beta_1 \leq \beta \leq \beta_2$);
- пластическая область II ($\beta_2 \leq \beta \leq 1$).

Константы интегрирования C_2, C_3, C_4, C_5, C_6 , и координаты β_1, β_2 границ между пластическими областями вычисляются с помощью системы

$$\begin{aligned} \beta = \beta_1 : u^{\text{I}} &= u^{\text{III}}, & \sigma_{\beta\beta}^{\text{I}} &= \sigma_{\beta\beta}^{\text{III}}, & \sigma_{\theta\theta}^{\text{I}} &= \sigma_{\theta\theta}^{\text{III}}, \\ \beta = \beta_2 : u^{\text{III}} &= u^{\text{II}}, & \sigma_{\beta\beta}^{\text{III}} &= \sigma_{\beta\beta}^{\text{II}}, & \sigma_{\theta\theta}^{\text{III}} &= \sigma_{\theta\theta}^{\text{II}}, \\ \beta = 1 : \sigma_{\beta\beta}^{\text{II}} &= 0. \end{aligned}$$

Для вычисления Ω_{fp2} предыдущую систему необходимо дополнить условием

$$\beta = 1 : 2\sigma_{zz}^{\text{II}} = \sigma_{\theta\theta}^{\text{II}} + \sigma_{\beta\beta}^{\text{II}}.$$

Отсюда найдем $\Omega_{\text{fp2}} \cong 12.118$. Решение на третьей стадии пластического течения представлено на рис. 4 в виде графиков напряжений и пластических деформаций для $\Omega = 12$.

В последнем интервале $\Omega_{\text{fp2}} \leq \Omega \leq \Omega_{\text{max}}$ цилиндр делится на пластические области в следующем порядке:

- пластическая область I ($0 \leq \beta \leq \beta_1$);
- пластическая область III ($\beta_1 \leq \beta \leq \beta_2$);
- пластическая область II ($\beta_2 \leq \beta \leq \beta_3$);
- пластическая область IV ($\beta_3 \leq \beta \leq 1$).

Константы интегрирования $C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7, C_8$ и координаты $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ границ между пластическими областями вычисляются с помощью сле-

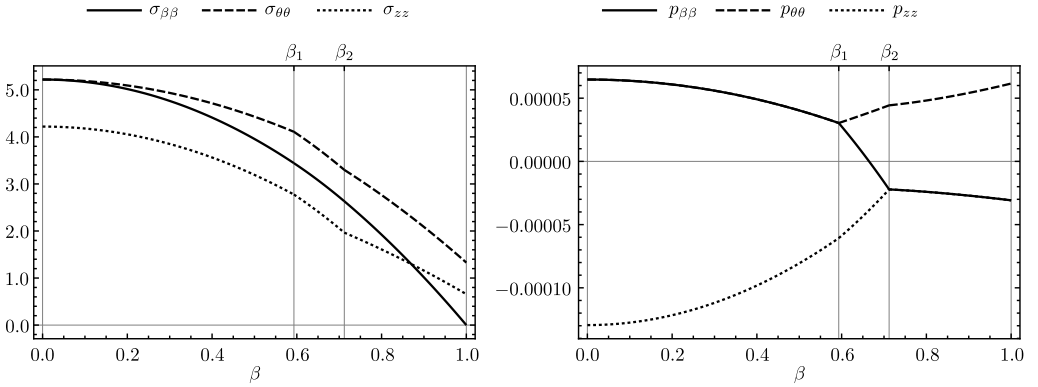


Рис. 4. Решение в момент $\Omega = 12$: напряжения (слева), пластические деформации (справа)
 [Figure 4. Solution at $\Omega = 12$: stresses (left), plastic strains (right)]

дующей системы:

$$\begin{aligned}
 \beta = \beta_1 : u^{\text{I}} &= u^{\text{III}}, & \sigma_{\beta\beta}^{\text{I}} &= \sigma_{\beta\beta}^{\text{III}}, & \sigma_{\theta\theta}^{\text{I}} &= \sigma_{\theta\theta}^{\text{III}}, \\
 \beta = \beta_2 : u^{\text{III}} &= u^{\text{II}}, & \sigma_{\beta\beta}^{\text{III}} &= \sigma_{\beta\beta}^{\text{II}}, & \sigma_{\theta\theta}^{\text{III}} &= \sigma_{\theta\theta}^{\text{II}}, \\
 \beta = \beta_3 : u^{\text{II}} &= u^{\text{IV}}, & \sigma_{\beta\beta}^{\text{II}} &= \sigma_{\beta\beta}^{\text{IV}}, & \sigma_{\theta\theta}^{\text{II}} &= \sigma_{\theta\theta}^{\text{IV}}, \\
 \beta = 1 : \sigma_{\beta\beta}^{\text{IV}} &= 0.
 \end{aligned}$$

На рис. 5 (слева) и 6 (слева) представлено распределение напряжений и пластических деформаций в цилиндре при $\Omega = \Omega_{\max}$. Из рис. 1–5 видно, что в ходе нагрузки наибольшим является тангенциальное напряжение. При этом наименьшим напряжением практически везде за исключением небольшой области вблизи поверхности цилиндра является осевое напряжение. Схожая картина наблюдается для распределения пластических деформаций (рис. 2–4, 6). Далее параметр нагружения Ω уменьшается и в цилиндре начинается разгрузка. Несмотря на то, что цилиндр снова деформируется чисто упруго, решение, представленное в разделе 2, необходимо сращивать на границах $\hat{\beta}_i$ между первичными пластическими областями для определения констант интегрирования B_1 – B_8 . Поскольку значения $\hat{\beta}_i$ уже известны, на каждой границе достаточно лишь двух условий, в качестве которых выберем непрерывность перемещения и радиального напряжения. Получаемая система является линейной, что позволяет выразить константы B_i аналитически через $\hat{\beta}_i$, Ω_{\max} , Ω и ν , σ_{T} , E . Упругая разгрузка продолжится вплоть до $\Omega = \Omega_{\text{sp}}$, при которой на внутренней поверхности цилиндра начнется повторное пластическое течение и появится область V. Значение $\Omega_{\text{sp}} \cong 6.868$ ($\omega_{\text{sp}} \cong 4662 \text{ c}^{-1}$) найдено из условия (23).

Повторное пластическое течение продолжится вплоть до полной остановки цилиндра. При $\Omega = 0$ цилиндр полностью переходит в состояние повторной пластичности. Решение в интервале $\Omega_{\text{sp}} \geq \Omega \geq 0$ содержит неизвестные константы интегрирования A_i , B_i и границы β_4 , β_5 между областями. Для определения неизвестных используются граничные условия, три условия непрерывности на границах между областями вторичного течения и упругой областью. Также может возникнуть необходимость использовать по два условия

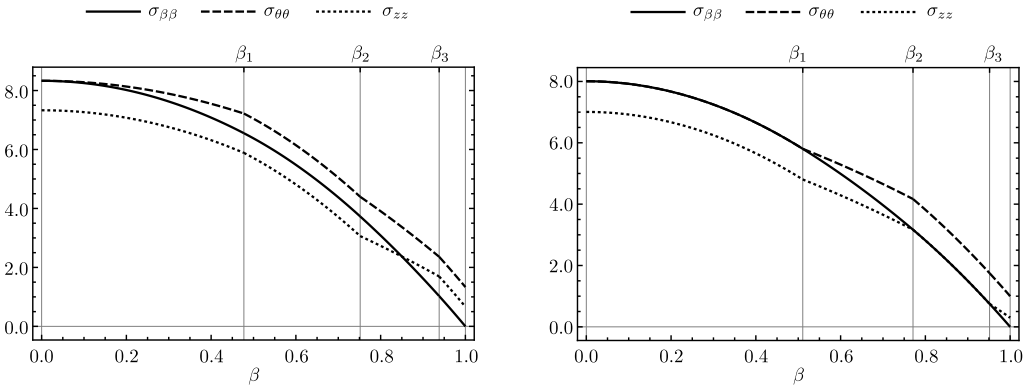


Рис. 5. Напряжения: при $\Omega = \Omega_{\max}$ для условия пластичности Ишлинского—Ивлева (слева); при $\Omega = \Omega_{\max}^T$ для условия пластичности Треска [7] (справа)
 [Figure 5. Stresses: at $\Omega = \Omega_{\max}$ for maximum reduced stress yield criterion (left); at $\Omega = \Omega_{\max}^T$ for Tresca's yield criterion [7] (right)]

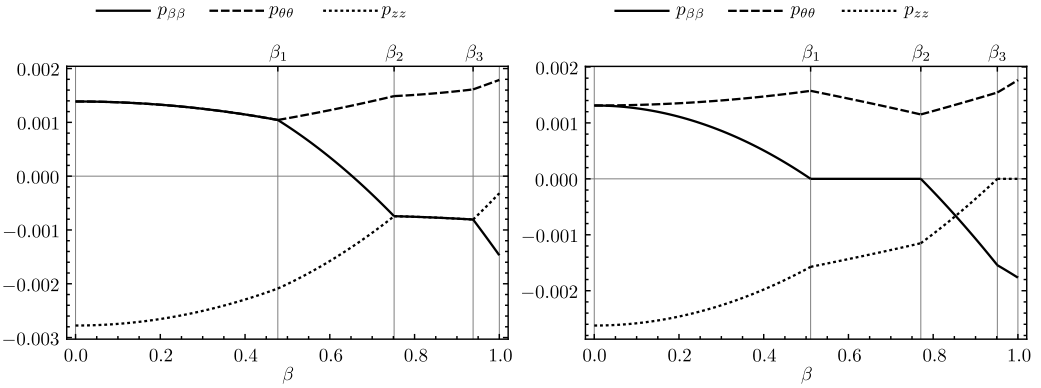


Рис. 6. Пластические деформации: при $\Omega = \Omega_{\max}$ для условия пластичности Ишлинского—Ивлева (слева); при $\Omega = \Omega_{\max}^T$ для условия пластичности Треска [7] (справа)
 [Figure 6. Plastic strains: at $\Omega = \Omega_{\max}$ for maximum reduced stress yield criterion (left); at $\Omega = \Omega_{\max}^T$ for Tresca's yield criterion [7] (rights)]

непрерывности на границах между первичными пластическими областями.

Вторичное пластическое течение разделяется на два интервала: $\Omega_{sp} \geq \Omega \geq \Omega_{sp2}$ и $\Omega_{sp2} \geq \Omega \geq 0$. Численно найдено, что $\Omega_{sp2} \cong 2.264$. Однако внутри интервала могут появляться новые непустые пересечения вторичных и первичных пластических областей, поэтому каждый интервал, в свою очередь, может состоять из нескольких подинтервалов.

Рассмотрим решение в момент остановки цилиндра. В интервале $\Omega_{sp2} \geq \Omega \geq 0$ цилиндр состоит из следующих областей:

- пластическая область V ($0 \leq \beta \leq \beta_4$);
- упругая область E ($\beta_4 \leq \beta \leq \beta_5$);
- пластическая область VI ($\beta_5 \leq \beta \leq 1$).

В момент остановки в цилиндре присутствуют следующие пересечения областей первичного и вторичного течения: V \cap I, V \cap III, VI \cap III, VI \cap II, VI \cap IV. Очевидно, что $A_1^{(1)} = 0$.

Для определения оставшихся констант интегрирования $A_2^{(1)}$, $A_1^{(3)}$, $A_2^{(3)}$, $A_3^{(3)}$, $A_4^{(3)}$, $A_3^{(2)}$, $A_4^{(2)}$, $A_3^{(4)}$, $A_4^{(4)}$, B_1 , B_2 и границ β_4 , β_5 между областями используется следующая система условий:

$$\begin{aligned} \beta = \hat{\beta}_1 : u^{V\cap I} &= u^{V\cap III}, & \sigma_{\beta\beta}^{V\cap I} &= \sigma_{\beta\beta}^{V\cap III}; \\ \beta = \beta_4 : u^{V\cap III} &= u^E, & \sigma_{\beta\beta}^{V\cap III} &= \sigma_{\beta\beta}^E, & 2\sigma_{zz}^E - \sigma_{\beta\beta}^E - \sigma_{\theta\theta}^E &= 2; \\ \beta = \beta_5 : u^E &= u^{VI\cap III}, & \sigma_{\beta\beta}^E &= \sigma_{\beta\beta}^{VI\cap III}, & \sigma_{zz}^E + \sigma_{\beta\beta}^E - 2\sigma_{\theta\theta}^E &= 2; \\ \beta = \hat{\beta}_2 : u^{VI\cap III} &= u^{VI\cap II}, & \sigma_{\beta\beta}^{VI\cap III} &= \sigma_{\beta\beta}^{VI\cap II}; \\ \beta = \hat{\beta}_3 : u^{VI\cap II} &= u^{VI\cap IV}, & \sigma_{\beta\beta}^{VI\cap II} &= \sigma_{\beta\beta}^{VI\cap IV}; \\ \beta = 1 : \sigma_{\beta\beta}^{VI\cap IV} &= 0. \end{aligned}$$

Распределение остаточных напряжений и пластических деформаций приведено на рис. 7 (слева) и 8 (слева). В ходе разгрузки (рис. 5, 7 (слева)) происходит перераспределение напряжений и в цилиндре появляются области

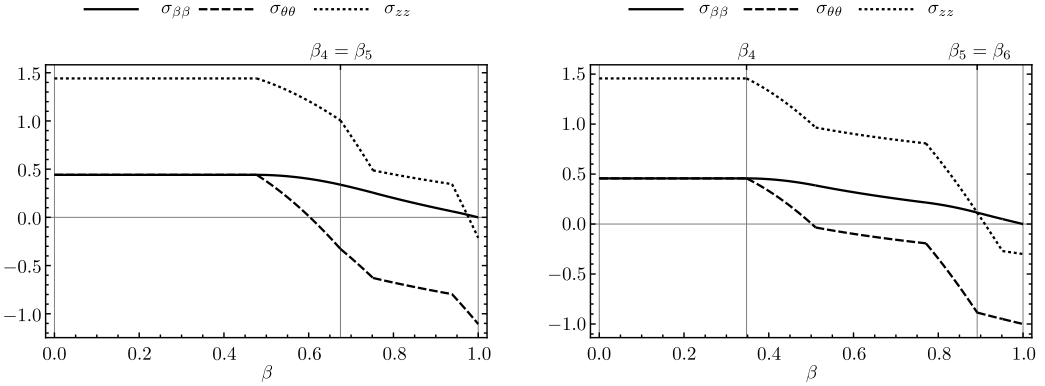


Рис. 7. Напряжения при $\Omega = 0$: для условия пластичности Ишлинского—Ивлева (слева); для условия пластичности Треска [8] (справа)

[Figure 7. Stresses at $\Omega = 0$: for maximum reduced stress yield criterion (left); for Tresca's yield criterion [8] (right)]

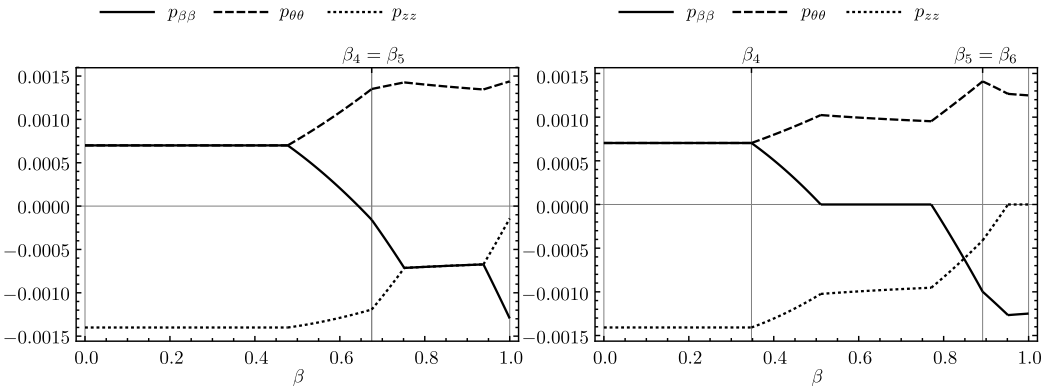


Рис. 8. Пластические деформации при $\Omega = 0$: для условия пластичности Ишлинского—Ивлева (слева); для условия пластичности Треска [8] (справа)

[Figure 8. Plastic strains at $\Omega = 0$ for maximum reduced stress yield criterion (left); for Tresca's yield criterion [8] (right)]

сжимающих напряжений. Наибольшим остаточным напряжением является осевое напряжение, а наименьшим — тангенциальное. После повторного пластического течения качественная картина распределения пластических деформаций практически не меняется, однако их величина уменьшается примерно в два раза. Интересно отметить (рис. 7 (слева)), что после остановки в области $0 \geq \beta \geq 0.5$ наблюдается равенство $\sigma_{\beta\beta} = \sigma_{\theta\theta}$, хотя условие (23) в области V не накладывает такого ограничения на напряжения.

Для сравнения полученных результатов воспользуемся работами [6–8], в которых вращающийся цилиндр исследуется с помощью условия Треска. Установлено, что цилиндр полностью переходит в состояние пластичности при $\Omega = \Omega_{\text{fp}}^T \cong 8.445$ [7]. Максимальное значение параметра нагружения Ω , необходимое для полного повторного течения: $\Omega_{\text{max}}^T \cong 16.892$ [8]. Таким образом, разница в значениях величин Ω_{fp} и Ω_{max} , вычисленных для условий Треска и Ишлинского—Ивлева, не превосходит 10%. Распределение напряжений и пластических деформаций для сравниваемых условий пластичности при максимальном значении параметра нагружения изображено на рис. 5 и 6, а после остановки цилиндра — на рис. 7 и 8. Видим, что качественная картина напряженно-деформированного состояния для критериев Треска и Ишлинского—Ивлева имеет существенные отличия.

Заключение. В представленной работе на основе условия максимальных приведенных напряжений получено точное аналитическое решение упругопластической задачи для вращающегося цилиндра. Сформулированы системы алгебраических уравнений для вычисления констант интегрирования и координат границ между областями. Произведено сравнение с результатами, полученными с использованием условия Треска. Проведенный в работе анализ может использоваться для определения верхней оценки несущей способности вращающегося цилиндра, в то время как условие Треска служит для вычисления нижней оценки. Для дальнейших исследований представляет интерес получение универсальных решений для вращающегося цилиндра с помощью общего кусочно-линейного условия пластичности, а также использование условий пластичности, учитывающих влияние гидростатического давления.

Конкурирующие интересы. Конкурирующих интересов не имею.

Авторская ответственность. Я несу полную ответственность за предоставление окончательной версии рукописи в печать. Окончательная версия рукописи мною одобрена.

Финансирование. Работа выполнена в рамках государственного задания Хабаровского федерального исследовательского центра ДВО РАН; проект № 075–01032–20–00.

Библиографический список

1. Sadd M. H. *Elasticity: Theory, Applications, and Numerics*. Amsterdam, New York: Elsevier, Academic Press, 2014.
2. Timoshenko S. *Theory of Elasticity*. New York: McGraw Hill, 2010.
3. Nadai A. *Theory of Flow and Fracture of Solids*. vol. 1. New York: McGraw Hill, 1950.
4. Hodge P. G., Balaban M. Elastic—plastic analysis of a rotating cylinder // *Int J. Mech. Sci.*, 1962. vol. 4, no. 6. pp. 465–476. doi: [10.1016/S0020-7403\(62\)80008-3](https://doi.org/10.1016/S0020-7403(62)80008-3).
5. Gamer U. On the applicability of Tresca's yield condition to the rotating solid shaft // *Rev. Roum. Sci. Techn.-Méc. Appl.*, 1984. vol. 29, no. 1. pp. 27–30.

6. Gamer U., Sayir M. Elastic-plastic stress distribution in a rotating solid shaft // *Z. angew. Math. Phys.*, 1984. vol. 35, no. 5. pp. 601–617. doi: [10.1007/BF00952107](https://doi.org/10.1007/BF00952107).
7. Gamer U., Mack M., Varga I. Rotating elastic-plastic solid shaft with fixed ends // *Int. J. Eng. Sci.*, 1997. vol. 35, no. 3. pp. 253–267. doi: [10.1016/S0020-7225\(96\)00085-7](https://doi.org/10.1016/S0020-7225(96)00085-7).
8. Lindner T., Mack W. Residual stresses in an elastic-plastic solid shaft with fixed ends after previous rotation // *Z. angew. Math. Mech.*, 1998. vol. 78, no. 2. pp. 75–86. doi: [10.1002/\(SICI\)1521-4001\(199802\)78:2<75::AID-ZAMM75>3.0.CO;2-V](https://doi.org/10.1002/(SICI)1521-4001(199802)78:2<75::AID-ZAMM75>3.0.CO;2-V).
9. Mack W. The rotating elastic-plastic solid shaft with free ends // *Tech. Mech.*, 1991. vol. 12, no. 2. pp. 119–124.
10. Gamer U., Lance R. H. Stress distribution in a rotating elastic-plastic tube // *Acta Mechanica*, 1983. vol. 50. pp. 1–8. doi: [10.1007/BF01170437](https://doi.org/10.1007/BF01170437).
11. Mack W. Rotating elastic-plastic tube with free ends // *Int. J. Solids Str.*, 1991. vol. 27, no. 11. pp. 1461–1476. doi: [10.1016/0020-7683\(91\)90042-E](https://doi.org/10.1016/0020-7683(91)90042-E).
12. Eraslan A. N. On the linearly hardening rotating solid shaft // *Eur. J. Mech.-A/Solids*, 2003. vol. 22, no. 2. pp. 295–307. doi: [10.1016/S0997-7538\(02\)00002-5](https://doi.org/10.1016/S0997-7538(02)00002-5).
13. Eraslan A. N. Von Mises' yield criterion and nonlinearly hardening rotating shafts // *Acta Mechanica*, 2004. vol. 168. pp. 129–144. doi: [10.1007/s00707-004-0088-z](https://doi.org/10.1007/s00707-004-0088-z).
14. Eraslan A. N. and T. Akis On the plane strain and plane stress solutions of functionally graded rotating solid shaft and solid disk problems // *Acta Mechanica*, 2006. vol. 181. pp. 43–63. doi: [10.1007/s00707-005-0276-5](https://doi.org/10.1007/s00707-005-0276-5).
15. Akis T., Eraslan A. N. Exact solution of rotating FGM shaft problem in the elasto-plastic state of stress // *Arch. Appl. Mech.*, 2007. vol. 77. pp. 745–765. doi: [10.1007/s00419-007-0123-3](https://doi.org/10.1007/s00419-007-0123-3).
16. Argeso H., Eraslan A. N. A computational study on functionally graded rotating solid shafts // *Int. J. Comput. Methods Eng. Sci. Mech.*, 2007. vol. 8, no. 6. pp. 391–399. doi: [10.1080/15502280701577842](https://doi.org/10.1080/15502280701577842).
17. Eraslan A. N., Arslan E. Plane strain analytical solutions to rotating partially plastic graded hollow shafts // *Turkish J. Eng. Env. Sci.*, 2007. vol. 31, no. 5. pp. 273–287.
18. Nejad M.Z., Fatehi P. Exact elasto-plastic analysis of rotating thick-walled cylindrical pressure vessels made of functionally graded materials // *Int. J. Eng. Sci.*, 2015. vol. 86. pp. 26–43. doi: [10.1016/j.ijengsci.2014.10.002](https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2014.10.002).
19. Schmidt R. Über den Zusammenhang von Spannungen und Formänderungen im Verfestigungsgebiet // *Ing. Arch.*, 1932. vol. 3. pp. 215–235. doi: [10.1007/BF02079970](https://doi.org/10.1007/BF02079970).
20. Ишлинский А. Ю. Гипотеза прочности формоизменения // *Ученые записки МГУ. Механика*, 1940. № 46. С. 117–124.
21. Hill R. On the inhomogeneous deformation of a plastic lamina in a compression test // *Phil. Mag, Ser. 7*, 1950. vol. 41, no. 319. pp. 733–744. doi: [10.1080/14786445008561006](https://doi.org/10.1080/14786445008561006).
22. Ivlev D. D. On the development of a theory of ideal plasticity // *J. Appl. Math. Mech.*, 1958. vol. 22, no. 6. pp. 1221–1230. doi: [10.1016/0021-8928\(58\)90050-9](https://doi.org/10.1016/0021-8928(58)90050-9).
23. Ишлинский А. Ю., Ивлев Д. Д. *Математическая теория пластичности*. М.: Физматлит, 2003. 704 с.
24. Буренин А. А., Ткачева А. В., Щербатюк Г. А. К расчету неустановившихся температурных напряжений в упругопластических телах // *Вычислительная механика сплошных сред*, 2017. Т. 10, № 3. С. 245–259. doi: [10.7242/1999-6691/2017.10.3.20](https://doi.org/10.7242/1999-6691/2017.10.3.20).
25. Буренин А. А., Ткачева А. В., Щербатюк Г. А. К использованию кусочно-линейных пластических потенциалов в нестационарной теории температурных напряжений // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2018. Т. 22, № 1. С. 23–39. doi: [10.14498/vsgtu1576](https://doi.org/10.14498/vsgtu1576).
26. Буренин А. А., Каинг М., Ткачева А. В. К расчету плоских напряженных состояний в теории неустановившихся температурных напряжений в упругопластических телах // *Дальневост. матем. журн.*, 2018. Т. 18, № 2. С. 131–146.

27. Cai Q., Pang M., Zhang Y.-Q., Liu X. Elastic-plastic stress distribution of rotating annular disc based on twin-shear stress yield criterion // *J. Zhejiang Univ., Eng. Sci.*, 2008. vol. 42, no. 9. pp. 1540–1544. doi: [10.3785/j.issn.1008-973X.2008.09.013](https://doi.org/10.3785/j.issn.1008-973X.2008.09.013).
28. Zhao D.-W., Xie Y.-J., Liu X.-H., Wang G.-D. Three-dimensional analysis of rolling by twin shear stress yield criterion // *J. Iron Steel Res. Int.*, 2006. vol. 13. pp. 21–26. doi: [10.1016/S1006-706X\(06\)60104-0](https://doi.org/10.1016/S1006-706X(06)60104-0).
29. Zhu X., Pang M., Zhang Y. Estimation of burst pressure of pipeline using twin-shear stress yield criterion // *Chinese J. Appl. Mech.*, 2011. vol. 28, no. 2. pp. 135–138.

MSC: 74C05, 74B05, 74G05

Elastic-plastic analysis of rotating solid shaft by maximum reduced stress yield criterion

A. N. Prokudin

Institute of Machinery and Metallurgy,
Khabarovsk Federal Research Center, Far-East Branch of RAS,
1, Metallurgov, Komsomolsk-on-Amur, 681005, Russian Federation.

Abstract


An elasto-plastic rotating solid cylinder under plane strain condition is investigated. The analysis is based on infinitesimal strain theory, maximum reduced stress yield criterion, its associated flow rule and perfectly plastic material behavior. It is assumed that angular velocity is monotonically increasing from 0 to the maximum value and then is monotonically reducing down to 0. In this investigation both loading and unloading phases are considered. It is assumed that angular velocity varies slowly with time, so angular acceleration can be neglected. Under above mentioned assumptions, there is only one non-trivial equilibrium equation in a cylinder.

It is established that with increasing angular velocity four plastic regions appear in a cylinder. The last one forms at angular velocity which exceeds fully-plastic limit. Stresses image points of plastic regions lie on different sides and corners of yield surface. As the angular speed decreases, the whole cylinder behaves elastically again. At particular value of angular velocity secondary plastic flow may starts at the center of cylinder. Replasticization is possible only for sufficiently high maximum angular speed and the entire cylinder may be replasticized. Four secondary plastic regions may appear in the cylinder under unloading. The stresses image points in primary and secondary regions lie on opposite sides and corners of yield surface. In the present analysis it is assumed that the entire cylinder becomes replasticized just at stand-still. In this case only two secondary plastic regions emerge.

Exact solutions for all stages of deformation are obtained. The systems of algebraic equations for determination of integration constants and border radii are formulated. The obtained results are illustrated by the distributions of stresses and plastic strains in the cylinder rotating at different speeds. Presented solutions are compared with known analytical solutions based on Tresca's criterion.

Keywords: elastic-plastic strains, exact solution, rotating shaft, maximum reduced stress yield criterion.



Research Article

 The content is published under the terms of the [Creative Commons Attribution 4.0 International License](http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Prokudin A. N. Elastic-plastic analysis of rotating solid shaft by maximum reduced stress yield criterion, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2020, vol. 24, no. 1, pp. 74–94. doi: [10.14498/vsgtu1737](https://doi.org/10.14498/vsgtu1737) (In Russian).

Author's Details:

Aleksandr N. Prokudin   <https://orcid.org/0000-0002-5156-424X>
Cand. Tech. Sci.; Leader Researcher; e-mail: sunbeam_85@mail.ru

Received: 25th August, 2019 / Revised: 12th December, 2019 /
 Accepted: 10th February, 2020 / First online: 2nd April, 2020

Competing interests. I have no competing interests.

Author's Responsibilities. I take full responsibility for submitting the final manuscript in print. I approved the final version of the manuscript.

Funding. This work was supported by the State Assignment of the Khabarovsk Federal Research Center, Far-Eastern Branch of RAS; project no. 075-01032-20-00.

References

1. Sadd M. H. *Elasticity: Theory, Applications, and Numerics*. Amsterdam, New York, Elsevier, Academic Press, 2014.
2. Timoshenko S. *Theory of Elasticity*. New York, McGraw Hill, 2010.
3. Nadai A. *Theory of Flow and Fracture of Solids*, vol. 1. New York, McGraw Hill, 1950.
4. Hodge P. G., Balaban M. Elastic—plastic analysis of a rotating cylinder, *Int J. Mech. Sci.*, 1962, vol. 4, no. 6, pp. 465–476. doi: [10.1016/S0020-7403\(62\)80008-3](https://doi.org/10.1016/S0020-7403(62)80008-3).
5. Gamer U. On the applicability of Tresca's yield condition to the rotating solid shaft, *Rev. Roum. Sci. Techn.-Méc. Appl.*, 1984, vol. 29, no. 1, pp. 27–30.
6. Gamer U., Sayir M. Elastic-plastic stress distribution in a rotating solid shaft, *Z. angew. Math. Phys.*, 1984, vol. 35, no. 5, pp. 601–617. doi: [10.1007/BF00952107](https://doi.org/10.1007/BF00952107).
7. Gamer U., Mack M., Varga I. Rotating elastic-plastic solid shaft with fixed ends, *Int. J. Eng. Sci.*, 1997, vol. 35, no. 3, pp. 253–267. doi: [10.1016/S0020-7225\(96\)00085-7](https://doi.org/10.1016/S0020-7225(96)00085-7).
8. Lindner T., Mack W. Residual stresses in an elastic-plastic solid shaft with fixed ends after previous rotation, *Z. angew. Math. Mech.*, 1998, vol. 78, no. 2, pp. 75–86. doi: [10.1002/\(SICI\)1521-4001\(199802\)78:2<75::AID-ZAMM75>3.0.CO;2-V](https://doi.org/10.1002/(SICI)1521-4001(199802)78:2<75::AID-ZAMM75>3.0.CO;2-V).
9. Mack W. The rotating elastic-plastic solid shaft with free ends, *Tech. Mech.*, 1991, vol. 12, no. 2, pp. 119–124.
10. Gamer U., Lance R. H. Stress distribution in a rotating elastic-plastic tube, *Acta Mechanica*, 1983, vol. 50, pp. 1–8. doi: [10.1007/BF01170437](https://doi.org/10.1007/BF01170437).
11. Mack W. Rotating elastic-plastic tube with free ends, *Int. J. Solids Str.*, 1991, vol. 27, no. 11, pp. 1461–1476. doi: [10.1016/0020-7683\(91\)90042-E](https://doi.org/10.1016/0020-7683(91)90042-E).
12. Eraslan A. N. On the linearly hardening rotating solid shaft, *Eur. J. Mech.-A/Solids*, 2003, vol. 22, no. 2, pp. 295–307. doi: [10.1016/S0997-7538\(02\)00002-5](https://doi.org/10.1016/S0997-7538(02)00002-5).
13. Eraslan A. N. Von Mises' yield criterion and nonlinearly hardening rotating shafts, *Acta Mechanica*, 2004, vol. 168, pp. 129–144. doi: [10.1007/s00707-004-0088-z](https://doi.org/10.1007/s00707-004-0088-z).
14. Eraslan A. N. and T. Akis On the plane strain and plane stress solutions of functionally graded rotating solid shaft and solid disk problems, *Acta Mechanica*, 2006, vol. 181, pp. 43–63. doi: [10.1007/s00707-005-0276-5](https://doi.org/10.1007/s00707-005-0276-5).
15. Akis T., Eraslan A. N. Exact solution of rotating FGM shaft problem in the elasto-plastic state of stress, *Arch. Appl. Mech.*, 2007, vol. 77, pp. 745–765. doi: [10.1007/s00419-007-0123-3](https://doi.org/10.1007/s00419-007-0123-3).
16. Argeso H., Eraslan A. N. A computational study on functionally graded rotating solid shafts, *Int. J. Comput. Methods Eng. Sci. Mech.*, 2007, vol. 8, no. 6, pp. 391–399. doi: [10.1080/15502280701577842](https://doi.org/10.1080/15502280701577842).
17. Eraslan A. N., Arslan E. Plane strain analytical solutions to rotating partially plastic graded hollow shafts, *Turkish J. Eng. Env. Sci.*, 2007, vol. 31, no. 5, pp. 273–287.
18. Nejad M.Z., Fatehi P. Exact elasto-plastic analysis of rotating thick-walled cylindrical pressure vessels made of functionally graded materials, *Int. J. Eng. Sci.*, 2015, vol. 86, pp. 26–43. doi: [10.1016/j.ijengsci.2014.10.002](https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2014.10.002).
19. Schmidt R. Über den Zusammenhang von Spannungen und Formänderungen im Verfestigungsgebiet, *Ing. Arch.*, 1932, vol. 3, pp. 215–235. doi: [10.1007/BF02079970](https://doi.org/10.1007/BF02079970).

20. Ishlinsky A. Yu. Hypothesis of strength of shape change, *Uchenye zapiski MGU. Mekhanika*, 1940, no. 46, pp. 117–124 (In Russian).
21. Hill R. On the inhomogeneous deformation of a plastic lamina in a compression test, *Phil. Mag, Ser. 7*, 1950, vol. 41, no. 319, pp. 733–744. doi: [10.1080/14786445008561006](https://doi.org/10.1080/14786445008561006).
22. Ivlev D. D. On the development of a theory of ideal plasticity, *J. Appl. Math. Mech.*, 1958, vol. 22, no. 6, pp. 1221–1230. doi: [10.1016/0021-8928\(58\)90050-9](https://doi.org/10.1016/0021-8928(58)90050-9).
23. Ishlinskii A. Yu., Ivlev D. D. *Matematicheskaya teoriya plastichnosti* [Mathematical Theory of Plasticity]. Moscow, Fizmatlit, 2003, 704 pp. (In Russian)
24. Burenin A. A., Tkacheva A. V., Shcherbatyuk G. A. On the calculation of unsteady thermal stresses in elastoplastic solids, *Computational Continuum Mechanics*, 2017, vol. 10, no. 3, pp. 245–259 (In Russian). doi: [10.7242/1999-6691/2017.10.3.20](https://doi.org/10.7242/1999-6691/2017.10.3.20).
25. Burenin A. A., Tkacheva A. V., Shcherbatyuk G. A. The use of piecewise linear plastic potentials in the nonstationary theory of temperature stresses, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2018, vol. 22, no. 1, pp. 23–39 (In Russian). doi: [10.14498/vsgtu1576](https://doi.org/10.14498/vsgtu1576).
26. Burenin A. A., Kaing M., Tkacheva A. V. To the calculation of plane stressed states of the theory of unsteady temperature stresses in elastoplastic bodies, *Dal'nevost. Mat. Zh.*, 2018, vol. 18, no. 2, pp. 131–146 (In Russian).
27. Cai Q., Pang M., Zhang Y.-Q., Liu X. Elastic-plastic stress distribution of rotating annular disc based on twin-shear stress yield criterion, *J. Zhejiang Univ., Eng. Sci.*, 2008, vol. 42, no. 9, pp. 1540–1544. doi: [10.3785/j.issn.1008-973X.2008.09.013](https://doi.org/10.3785/j.issn.1008-973X.2008.09.013).
28. Zhao D.-W., Xie Y.-J., Liu X.-H., Wang G.-D. Three-dimensional analysis of rolling by twin shear stress yield criterion, *J. Iron Steel Res. Int.*, 2006, vol. 13, pp. 21–26. doi: [10.1016/S1006-706X\(06\)60104-0](https://doi.org/10.1016/S1006-706X(06)60104-0).
29. Zhu X., Pang M., Zhang Y. Estimation of burst pressure of pipeline using twin-shear stress yield criterion, *Chinese J. Appl. Mech.*, 2011, vol. 28, no. 2, pp. 135–138.