



Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

УДК 517.958:539.3

Численное моделирование несоосных цилиндрических оболочек, частично заполненных жидкостью

*С. А. Бочкарёв, С. В. Лекомцев, А. Н. Сенин*Институт механики сплошных сред УрО РАН,
Россия, 614013, Пермь, ул. Акад. Королёва, 1.

Аннотация

Работа посвящена численному анализу динамического поведения горизонтально ориентированных несоосных оболочек, кольцевой зазор между которыми полностью или частично заполнен текущей жидкостью. Решение задачи осуществляется в трёхмерной постановке с использованием метода конечных элементов. При моделировании упругих тел предполагается, что их криволинейная поверхность достаточно точно аппроксимируется совокупностью плоских сегментов, деформации в которых определяются с помощью соотношений классической теории пластин. Движение идеальной сжимаемой жидкости описывается волновым уравнением, которое совместно с условием непроницаемости и соответствующими граничными условиями преобразуется с помощью метода Бубнова–Галёркина. Математическая постановка задачи динамики тонкостенных конструкций основана на вариационном принципе возможных перемещений. Оценка устойчивости базируется на вычислении и анализе комплексных собственных значений связанной системы уравнений. Верификация модели произведена для случая неподвижной жидкости путём сопоставления результатов с известными решениями.

Научная статья

 Контент публикуется на условиях лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru) (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Образец для цитирования

Бочкарёв С. А., Лекомцев С. В., Сенин А. Н. Численное моделирование несоосных цилиндрических оболочек, частично заполненных жидкостью // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2020. Т. 24, № 1. С. 95–115. doi:10.14498/vsgtu1746.

Сведения об авторах

Сергей Аркадьевич Бочкарёв  <https://orcid.org/0000-0002-9722-1269>

кандидат физико-математических наук; старший научный сотрудник; отдел комплексных проблем механики деформируемых твердых тел; e-mail: bochkarev@icmm.ru

Сергей Владимирович Лекомцев  <https://orcid.org/0000-0002-8331-2979>

кандидат физико-математических наук; старший научный сотрудник; отдел комплексных проблем механики деформируемых твердых тел; e-mail: lekomtsev@icmm.ru

Александр Николаевич Сенин  <https://orcid.org/0000-0002-7537-0001>

младший научный сотрудник; лаборатория механики функциональных материалов; e-mail: senin.a@icmm.ru

Представлен анализ влияния величины кольцевого зазора и уровня его заполнения жидкостью при различном значении эксцентриситета между осями вращения жёстко закреплённых с обоих краёв оболочек на границы гидроупругой устойчивости. Показано, что для несоосных оболочек уменьшение уровня заполнения приводит к повышению границ устойчивости. Продемонстрирована зависимость критической скорости течения жидкости от отклонения внутренней оболочки от соосного положения.

Ключевые слова: метод конечных элементов, несоосные оболочки, потенциальная сжимаемая жидкость, частичное заполнение, гидроупругая устойчивость.

Получение: 19 сентября 2019 г. / Исправление: 5 ноября 2019 г. /

Принятие: 11 ноября 2019 г. / Публикация онлайн: 4 марта 2020 г.

Введение. Содержащие жидкость или газ коаксиальные цилиндрические оболочки являются частью многих промышленных приложений и используются в различных областях техники. Они уже на протяжении значительного времени выступают в качестве объекта разнообразных теоретических исследований. Обширная библиография, посвящённая анализу коаксиальных оболочек, взаимодействующих как с неподвижной, так и с текущей жидкостью, представлена в монографии [1]. В недавних публикациях авторов [2,3] также упомянуты редко цитируемые, как правило, пионерские работы отечественных исследователей. Ниже приводится обзор статей, в которых рассмотрены различные аспекты динамического поведения взаимодействующих с жидкостью соосных и несоосных конструкций в линейной постановке.

Бесконечно длинные коаксиальные оболочки, содержащие текущую как в кольцевом канале, так и во внутренней оболочке жидкость, исследованы в [4]. В аналитических моделях [5–6] движение оболочек конечной длины описывается с помощью теории тонких оболочек Флюгге. Обобщённые гидродинамические силы определяются в рамках потенциальной теории и вычисляются с помощью преобразования Фурье. Решение задачи осуществляется методом Галёркина. Полученные в [7] экспериментальные данные демонстрируют, что при жёсткой внешней оболочке потеря устойчивости осуществляется на значительно меньших скоростях течения, чем предсказывает аналитическая модель. Предполагается, что причиной таких расхождений являются несовершенства формы конструкции. Приближённая теория для оценки динамического поведения системы коаксиальных оболочек, взаимодействующих с несжимаемой жидкостью, предложена в [8]. Показано, что собственные частоты колебаний в случае неподвижной жидкости и критические скорости потери устойчивости хорошо согласуются с имеющимися численными результатами. Анализ устойчивости коаксиальных оболочек, взаимодействующих с двумя потоками идеальной сжимаемой жидкости при различных комбинациях граничных условий и свойствах материалов оболочек, выполнен в [9–10] с применением метода конечных элементов (МКЭ).

В [11] решение трёхмерных линеаризованных уравнений Навье—Стокса ищется в виде суммы скалярного и векторного потенциалов, а системы коаксиальных оболочек, содержащих жидкость, — в классе бегущих волн. Свободные и вынужденные колебания коаксиальных оболочек с вязкой жидко-

стью в кольцевом зазоре, которая описывается линеаризованными двумерными уравнениями Навье—Стокса, исследуются аналитически в работе [12]. Продемонстрировано, что размер кольцевого зазора и вязкость жидкости оказывают значительное влияние на демпфирование колебаний. Аналогичный подход используется в [13] для текущей жидкости. Здесь анализируются сложности в реализации условия прилипания, задаваемого на стенках свободно опёртых оболочек. Показано, что влияние нестационарных вязкостных сил возрастает с уменьшением ширины кольцевого канала. В [14] для жёстко закреплённых и в [6] для консольных оболочек вводятся в рассмотрение стационарные силы вязкого сопротивления. Показано, что они оказывают существенное влияние на критические скорости течения жидкости. В рамках аналогичной модели в [15] выполнено исследование влияния на устойчивость ряда системных параметров при кольцевом течении жидкости. В [16] представлена модель, учитывающая как стационарные, так и нестационарные силы вязкого сопротивления. Они определяются из решения линеаризованных уравнений Навье—Стокса с использованием численной процедуры, основанной на конечно-разностном методе. Продемонстрировано, что эта модель лучше согласуется с экспериментальными данными [7,17], чем модель, учитывающая только стационарные силы вязкого сопротивления. Исследование колебаний оболочек с неоднородными ограничениями в кольцевом потоке как невязкой, так и вязкой жидкости осуществлено в [18–19]. Для этих целей использован метод Релея—Ритца, в котором в качестве допустимых функций были применены формы колебаний свободно опёртых оболочек в вакууме. В работах [20–22] в ходе численного решения задачи методом конечных элементов обнаружено существенное расхождение с известными численно-аналитическими решениями для тех случаев, когда потеря устойчивости осуществляется на высоких модах колебаний. В статьях [23–24] представлено исследование коаксиальных оболочек, содержащих текущую только в кольцевом канале идеальную [23] или вязкую [24] жидкость, в том числе с учётом влияния температурных эффектов. Анализ амплитудно-частотных характеристик подкреплённых конструкций, взаимодействующих с кольцевым слоем вязкой несжимаемой жидкости, осуществлён в [25].

Отметим, что в перечисленных выше работах рассматриваются оболочки, в которых оси вращения совпадают. При этом жидкая среда полностью заполняет как пространство между двумя оболочками, так и, как правило, объём внутренней оболочки. В этом случае, как и при частичном заполнении вертикально ориентированных оболочек, задача может быть рассмотрена в осесимметричной постановке. Частичное заполнение жидкостью горизонтально расположенных конструкций, как и несовпадение их осей вращения при любой ориентации, нарушает симметричность по окружной координате. Это приводит к необходимости использования более сложных пространственных моделей. В качестве примера можно привести работы [2,3], в которых представлены трёхмерные алгоритмы, предназначенные для анализа собственных колебаний и гидроупругой устойчивости соосных горизонтально ориентированных оболочек, частично заполненных идеальной [3] или вязкой [2] жидкостью.

Библиографический список исследований, в которых рассматриваются несоосные оболочки, существенно ограничен. В [26] анализируется влияние

соосности оболочек на динамическое поведение системы с текущей жидкостью. Показано, что смещение осей оказывает воздействие на колебательный процесс только в случае узкого кольцевого зазора между оболочками. Влияние эксцентриситета на скорости потери устойчивости не оценивалось. Двумерные исследования бесконечных оболочек с неподвижной и текущей жидкостью представлены в [27,28]. В первой из работ отмечается, что с ростом эксцентриситета происходит возрастание присоединённой массы жидкости и, следовательно, снижение собственных частот колебаний. В следующих работах рассматриваются собственные колебания несоосных оболочек, расположенных вертикально. В аналитических исследованиях [29,30] решение волнового уравнения, описывающего поведение жидкости в обеих полостях, осуществляется с помощью функций Бесселя. С этой целью в рассмотрение вводятся смещённые координаты, преобразование к которым выполняется посредством теоремы Бельтрами. Достоверность полученных результатов не проверяется. В работе [31] анализ пьезокерамических оболочек с кольцевым слоем жидкости осуществляется в трёхмерной постановке с использованием МКЭ. Представлено исследование низших собственных частот и форм колебаний при различных вариантах граничных условий на краях оболочек, уровне заполнения жидкостью и смещении внутренней оболочки, в том числе с учётом электроупругих свойств материала.

Из приведённого библиографического обзора можно заключить, что в настоящий момент в должной степени не исследовано влияние несоосности вложенных друг в друга горизонтальных цилиндрических оболочек на критические скорости потока жидкости, текущей между ними. Выполнение такого анализа является целью настоящей работы.

1. Постановка задачи и основные соотношения. Рассматриваются горизонтально ориентированные упругие цилиндрические оболочки длиной L , имеющие толщины $h^{(1)}$ и $h^{(2)}$ и радиусы $R^{(1)}$ и $R^{(2)}$, пространство между которыми на высоту H заполнено текущей со скоростью U идеальной сжимаемой жидкостью (рис. 1). Здесь и далее верхние индексы «(1)» и «(2)» характеризуют внутреннюю и внешнюю оболочки соответственно. На высоту заполнения H накладывается ограничение $R^{(2)} - R^{(1)} \leq H \leq 2R^{(2)}$, гарантирующее смоченность обеих оболочек. Ось вращения внутренней оболочки смещена в поперечном сечении относительно наружной на величину a в направлении угла θ , отсчитываемого от оси вращения внешней оболочки против часовой стрелки в направлении, обратном оси аппликат. Смещение a подчинено условию $|a| < R^{(2)} - R^{(1)}$, обеспечивающему отсутствие контакта между двумя оболочками. Необходимо исследовать влияние отклонения оболочек от соосного расположения на границы гидроупругой устойчивости при различных значениях кольцевого зазора и уровнях его заполнения жидкостью.

Определяющие поведение упругих оболочек соотношения записываются в предположении, что криволинейная поверхность конструкции может быть представлена в виде совокупности плоских сегментов [32]. Деформации в каждом из них вычисляются в рамках классической теории тонких пластин [33] в декартовых координатах $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, связанных с боковой поверхностью тела:

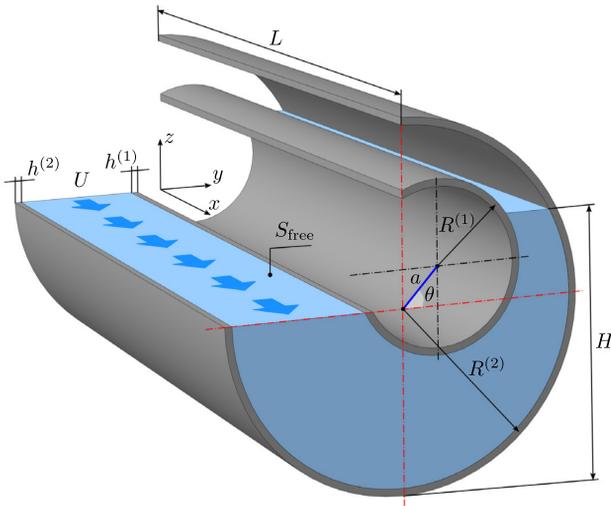


Рис. 1. Сечение некоаксиальных цилиндрических оболочек, кольцевой зазор между которыми частично заполнен текущей жидкостью
 [Figure 1. Section of eccentric cylindrical shells with the annular gap partially filled with a flowing fluid]

$$\bar{\varepsilon}^{(i)} = \{\varepsilon_{\bar{x}\bar{x}}^{(i)}, \varepsilon_{\bar{y}\bar{y}}^{(i)}, \gamma_{\bar{x}\bar{y}}^{(i)}\}^T = \left\{ \frac{\partial u^{(i)}}{\partial \bar{x}}, \frac{\partial v^{(i)}}{\partial \bar{y}}, \frac{\partial u^{(i)}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial v^{(i)}}{\partial \bar{x}} \right\}^T + \bar{z}^{(i)} \left\{ -\frac{\partial^2 w^{(i)}}{\partial \bar{x}^2}, -\frac{\partial^2 w^{(i)}}{\partial \bar{y}^2}, -2\frac{\partial^2 w^{(i)}}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}} \right\}^T. \quad (1)$$

Здесь и далее прямой чертой сверху обозначены величины, записанные в координатах $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, $u^{(i)}, v^{(i)}$ и $w^{(i)}$ — компоненты перемещений срединной поверхности в направлении этих осей, $i = \bar{1}, \bar{2}$.

Физические соотношения, связывающие вектор обобщённых усилий и моментов $\bar{\mathbf{T}}^{(i)}$ и вектор обобщённых деформаций $\bar{\varepsilon}^{(i)}$, записываются следующим образом:

$$\bar{\mathbf{T}}^{(i)} = \{T_{\bar{x}\bar{x}}^{(i)}, T_{\bar{y}\bar{y}}^{(i)}, T_{\bar{x}\bar{y}}^{(i)}, M_{\bar{x}\bar{x}}^{(i)}, M_{\bar{y}\bar{y}}^{(i)}, M_{\bar{x}\bar{y}}^{(i)}\} = \mathbf{D}^{(i)} \bar{\varepsilon}^{(i)}.$$

Для изотропного материала коэффициенты, входящие в матрицу жёсткостей $\mathbf{D}^{(i)}$, определяются известным образом [33].

Математическая формулировка задачи динамики упругих тел основана на вариационном принципе возможных перемещений, который в матричном виде записывается как

$$\int_{S_s^{(i)}} (\delta \bar{\varepsilon}^{(i)})^T \mathbf{D}^{(i)} \bar{\varepsilon}^{(i)} dS + \int_{V_s^{(i)}} (\delta \bar{\mathbf{u}}^{(i)})^T \rho_s^{(i)} \ddot{\bar{\mathbf{u}}}^{(i)} dV - \int_{S_\sigma^{(i)}} (\delta \bar{\mathbf{u}}^{(i)})^T \mathbf{P}^{(i)} dS = 0, \quad (2)$$

где $\rho_s^{(i)}$ — плотность материалов оболочек; $\bar{\mathbf{u}}^{(i)} = \{u^{(i)}, v^{(i)}, w^{(i)}, \theta_{\bar{x}}^{(i)}, \theta_{\bar{y}}^{(i)}, \theta_{\bar{z}}^{(i)}\}^T$ — векторы перемещений и углов поворота внутренней и внешней оболочек; $\mathbf{P}^{(i)} = \{0, 0, p^{(i)}, 0, 0, 0\}^T$ — векторы поверхностных нагрузок оболочек; $p^{(i)}$ — гидродинамическое давление.

Движение идеальной сжимаемой жидкости описывается потенциальной теорией, волновое уравнение которой для потенциала возмущения скорости ϕ

в декартовых координатах (x, y, z) имеет вид [34]

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \frac{2U}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial x} + \frac{U^2}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, \quad (3)$$

где c — скорость звука в жидкой среде. Вообще говоря, сжимаемость жидкости в случае дозвукового течения оказывает крайне незначительное влияние на критические скорости потери устойчивости, как это показано в [35]. Однако реализуемый в работе алгоритм является универсальным и может быть использован для задач аэроупругости.

Предполагается, что свободная поверхность жидкости S_{free} не перемещается, на ней отсутствуют динамическое давление и поверхностное натяжение. Соответствующее граничное условие имеет вид [36]

$$\phi = 0. \quad (4)$$

Потенциал возмущения скорости на входе и выходе из кольцевого канала между оболочками подчиняется следующим граничным условиям:

$$x = 0: \quad \phi = 0, \quad x = L: \quad \partial \phi / \partial x = 0. \quad (5)$$

На смоченных поверхностях $S_{\sigma}^{(i)} = S_f \cap S_s^{(i)}$ задаются условия непроницаемости

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = \pm \left(\frac{\partial w^{(i)}}{\partial t} + U \frac{\partial w^{(i)}}{\partial x} \right), \quad (6)$$

где S_f и $S_s^{(i)}$ — поверхности, ограничивающие объёмы жидкости V_f и оболочек $V_s^{(i)}$. Здесь и далее знак перед формулой зависит от направления нормалей к внешним поверхностям оболочек.

Гидродинамическое давление p , действующее со стороны жидкости на оболочки, вычисляется из уравнения Бернулли

$$p^{(i)} = \pm \rho_f \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + U \frac{\partial \phi}{\partial x} \right),$$

где ρ_f — плотность жидкости.

Уравнение (3) вместе с граничными условиями (4), (5) и (6) преобразуется к слабой форме с помощью метода Бубнова—Галёркина [35]:

$$\begin{aligned} & \int_{V_f} \nabla F_n \nabla \hat{\phi} \, dV + \int_{V_f} F_n \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial t^2} + \frac{2U}{c^2} \frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial t \partial x} + \frac{U^2}{c^2} \frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial x^2} \right) \, dV + \\ & + \int_{S_{\sigma}^{(1)}} F_n \left(\frac{\partial \hat{w}^{(1)}}{\partial t} + U \frac{\partial \hat{w}^{(1)}}{\partial x} \right) \, dS - \\ & - \int_{S_{\sigma}^{(2)}} F_n \left(\frac{\partial \hat{w}^{(2)}}{\partial t} + U \frac{\partial \hat{w}^{(2)}}{\partial x} \right) \, dS = 0, \quad n = \overline{1, m_f}, \quad (7) \end{aligned}$$

где $\hat{\phi}$ и $\hat{w}^{(i)}$ — аппроксимация потенциала возмущения скорости и нормальной компоненты вектора перемещений оболочек; F_n и m_f — базисные функции и их количество.

Численная реализация. Численное решение задачи выполнено методом конечных элементов [32]. Потенциал возмущения скорости $\hat{\phi}$, базисные функции F_n и мембранные перемещения оболочек $(u^{(i)}, v^{(i)})$ аппроксимируются линейными функциями формы, а изгибные перемещения оболочек $w^{(i)}$ — неконформными функциями формы Эрмита. Дискретизация областей жидкости и оболочек осуществляется пространственными призматическими и плоскими четырёхугольными конечными элементами соответственно.

Связанная система уравнений, описывающая взаимодействие упругих оболочек (2) и жидкости (7), формулируется в координатах (x, y, z) и записывается в матричном виде:

$$\mathbf{M}\{\ddot{\mathbf{u}}^{(1)}, \ddot{\mathbf{u}}^{(2)}, \ddot{\phi}\}^\top + \mathbf{C}\{\dot{\mathbf{u}}^{(1)}, \dot{\mathbf{u}}^{(2)}, \dot{\phi}\}^\top + (\mathbf{K} + \mathbf{A})\{\mathbf{u}^{(1)}, \mathbf{u}^{(2)}, \phi\}^\top = 0, \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \text{diag}\{\mathbf{K}_s^{(1)}, \mathbf{K}_s^{(2)}, \mathbf{K}_f\}, \quad \mathbf{M} = \text{diag}\{\mathbf{M}_s^{(1)}, \mathbf{M}_s^{(2)}, \mathbf{M}_f\}, \\ \mathbf{C} &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{C}_{sf}^{(1)} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{C}_{sf}^{(2)} \\ -\mathbf{C}_{fs}^{(1)} & \mathbf{C}_{fs}^{(2)} & \mathbf{C}_f \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{A}_{sf}^{(1)} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_{sf}^{(2)} \\ -\mathbf{A}_{fs}^{(1)} & \mathbf{A}_{fs}^{(2)} & \mathbf{A}_f \end{bmatrix}, \\ \bar{\mathbf{K}}_s^{(i)} &= \int_{S_s^{(i)}} (\mathbf{B}^{(i)})^\top \mathbf{D}^{(i)} \mathbf{B}^{(i)} dS, \quad \bar{\mathbf{M}}_s^{(i)} = \int_{V_s^{(i)}} \rho_s^{(i)} (\mathbf{N}^{(i)})^\top \mathbf{N}^{(i)} dV, \\ \bar{\mathbf{C}}_{sf}^{(i)} &= \int_{S_s^{(i)}} \rho_f (\mathbf{N}_w^{(i)})^\top \mathbf{F} dS, \quad \bar{\mathbf{A}}_{sf}^{(i)} = \int_{S_s^{(i)}} \rho_f U (\mathbf{N}_w^{(i)})^\top \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} dS, \\ \mathbf{K}_f &= \int_{V_f} \left(\frac{\partial \mathbf{F}^\top}{\partial x} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}^\top}{\partial y} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{F}^\top}{\partial z} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial z} \right) dV, \quad \mathbf{M}_f = \int_{V_f} \frac{1}{c^2} \mathbf{F}^\top \mathbf{F} dV, \\ \mathbf{C}_f &= \int_{V_f} \frac{2U}{c^2} \mathbf{F}^\top \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} dV, \quad \mathbf{A}_f = - \int_{V_f} \frac{U^2}{c^2} \frac{\partial \mathbf{F}^\top}{\partial x} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} dV, \\ \bar{\mathbf{C}}_{fs}^{(i)} &= - \int_{S_s^{(i)}} \mathbf{F}^\top \mathbf{N}_w^{(i)} dS, \quad \bar{\mathbf{A}}_{fs}^{(i)} = - \int_{S_s^{(i)}} U \mathbf{F}^\top \frac{\partial \mathbf{N}_w^{(i)}}{\partial x} dS. \end{aligned}$$

Здесь $\mathbf{u}^{(i)}$ и ϕ — обобщённые векторы перемещений и углов поворота внутренней и наружной оболочек и потенциала возмущения скорости; $\mathbf{B}^{(i)}$ — матрица градиентов, связывающая вектор деформаций с вектором узловых перемещений оболочечного конечного элемента; \mathbf{F} , $\mathbf{N}^{(i)}$ и $\mathbf{N}_w^{(i)}$ — функции формы для потенциала возмущения скорости жидкости, обобщённого вектора узловых перемещений оболочек и его нормальной составляющей. В определяющих соотношениях (1) отсутствует уравнение для поворота вокруг оси \bar{z} . Если все элементы, имеющие общий узел, будут компланарны, то жёсткость в этом направлении станет нулевой. В этом случае любое возмущение, способствующее повороту, существенно повлияет на корректность решения. С целью устранения этой проблемы вводится фиктивный момент $M_{\bar{z}}$, который добавляется в матрицу жёсткости конечного элемента оболочки [32]. Матрицы $\bar{\mathbf{K}}_s^{(i)}$ и $\bar{\mathbf{M}}_s^{(i)}$ формируются в координатах $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, связанных с боковой поверхностью конструкции. Преобразование узловых перемещений к глобальным декартовым

координатам (x, y, z) осуществляется для каждого элемента с помощью матрицы направляющих косинусов γ следующим образом: $\mathbf{u}^{(i)} = \mathbf{L}^\top \bar{\mathbf{u}}^{(i)}$, где $\mathbf{L} = \text{diag} \{ \gamma, \gamma, \gamma, \gamma, \gamma, \gamma, \gamma, \gamma \}$. Тогда $\mathbf{K}_s^{(i)} = \mathbf{L}^\top \bar{\mathbf{K}}_s^{(i)} \mathbf{L}$, $\mathbf{M}_s^{(i)} = \mathbf{L}^\top \bar{\mathbf{M}}_s^{(i)} \mathbf{L}$. Аналогично формируются матрицы $\bar{\mathbf{C}}_{sf}^{(i)}$, $\bar{\mathbf{A}}_{sf}^{(i)}$, $\bar{\mathbf{C}}_{fs}^{(i)}$ и $\bar{\mathbf{A}}_{fs}^{(i)}$, возникающие в результате гидроупругого взаимодействия.

С учётом представления возмущённого движения оболочек и жидкости в виде $(\mathbf{u}^{(1)}, \mathbf{u}^{(2)}, \phi) = (\tilde{\mathbf{u}}^{(1)}, \tilde{\mathbf{u}}^{(2)}, \tilde{\phi}) \exp(\lambda t)$ исходная система уравнений (8) сводится к обобщённой задаче на собственные значения, формулируемой как

$$\lambda \begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \lambda \mathbf{x} \\ \mathbf{x} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{K} + \mathbf{A} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \lambda \mathbf{x} \\ \mathbf{x} \end{Bmatrix} = 0, \quad (9)$$

где $\tilde{\mathbf{u}}^{(i)}$ и $\tilde{\phi}$ — векторные функции координат, $\lambda = \delta + i\omega$ — характеристический показатель ($i = \sqrt{-1}$), в котором полагается, что ω — собственная частота колебаний, а δ — величина, отвечающая за демпфирование системы, \mathbf{I} — единичная матрица, $\mathbf{x} = \{ \tilde{\mathbf{u}}^{(1)}, \tilde{\mathbf{u}}^{(2)}, \tilde{\phi} \}^\top$.

Вычисление комплексных собственных значений системы (9) осуществляется посредством алгоритма, основанного на неявно перезапускаемом методе Арнольди [37]. Оценка устойчивости базируется на анализе характеристических чисел λ , получаемых при последовательно возрастающей скорости течения жидкости.

Результаты расчётов. В представленных ниже примерах рассмотрена устойчивость системы горизонтально ориентированных жёстко закреплённых на обоих краях ($u = v = w = \theta_x = \theta_y = \theta_z = 0$) цилиндрических оболочек ($L = 1$ м, $R^{(2)} = 0.1$ м, $h^{(1)} = h^{(2)} = h = 5 \cdot 10^{-4}$ м, модули Юнга $E^{(1)} = E^{(2)} = E = 2 \cdot 10^{11}$ Па, коэффициенты Пуассона $\nu^{(1)} = \nu^{(2)} = \nu = 0.3$, $\rho_s^{(1)} = \rho_s^{(2)} = \rho_s = 7800$ кг/м³), в кольцевом канале между которыми содержится поток идеальной сжимаемой жидкости ($\rho_f = 1000$ кг/м³, $c = 1500$ м/с). Расчёты выполнялись при различных значениях уровня заполнения кольцевого канала и радиуса внутренней оболочки $R^{(1)}$, определяемого из соотношения $k = (R^{(2)} - R^{(1)})/R^{(1)}$. Здесь параметр k характеризует безразмерную величину кольцевого зазора для случая соосного расположения оболочек.

Для представления полученных результатов используются безразмерные уровень заполнения жидкостью η , смещение внутренней оболочки (эксцентриситет) ξ и критические скорости потери устойчивости Λ

$$\eta = H(2R^{(2)})^{-1}, \quad \xi = a(R^{(2)} - R^{(1)})^{-1}, \quad \Lambda = U[\rho_s(1 - \nu^2)/E]^{0.5} \cdot 10^3.$$

В предыдущих работах авторов [2,3] верификация разработанной модели была осуществлена посредством сравнения собственных частот колебаний и критических скоростей течения с известными решениями, полученными для случая неподвижной [2] и текущей жидкости [3], полностью заполняющей кольцевой канал соосной конструкции. Поскольку для несоосных оболочек отсутствуют публикации с доказанной достоверностью приводимых результатов, подтверждение корректности решений в рамках описанного выше

конечно-элементного алгоритма осуществляется путём сравнения с данными, полученными в пакете ANSYS. В последнем при моделировании тонкостенных тел используются элементы SHELL181 (теория Рейсснера—Миндлина), а при моделировании жидкости — FLUID30 (уравнения акустической среды) [38]. Количество используемых элементов в обеих моделях одинаково и равно 4 800 элементам для каждой из оболочек (по 40 и 120 в меридиональном и окружном направлениях) и 96 000 элементам для жидкости (по 40, 120 и 20 в меридиональном, окружном и радиальном направлениях соответственно). В таблице приведены собственные частоты колебаний ω (Гц) для системы с упругой внутренней и абсолютно жёсткой наружной оболочками ($L = 0.3$ м, $R^{(1)} = 0.1$ м, $R^{(2)} = 1.3$ м, $h^{(1)} = 2 \cdot 10^{-3}$ м, $E^{(1)} = 6.9 \cdot 10^{10}$ Па, $\nu^{(1)} = 0.3$, $\rho_s^{(1)} = 2700$ кг/м³), кольцевой зазор между которыми полностью заполнен неподвижной жидкостью ($\rho_f = 1000$ кг/м³, $c = 1483$ м/с). Здесь через j и m обозначено количество полуволн в окружном и меридиональном направлениях. Представленные данные, полученные при различной величине смещения внутренней оболочки ξ , демонстрируют хорошее соответствие (погрешность не превышает 0.9%), а незначительные расхождения могут быть объяснены разными подходами к описанию оболочек.

На рис. 2 представлены графики зависимостей безразмерных скоростей потери устойчивости Λ от безразмерного смещения внутренней оболочки ξ в направлении угла θ , полученные при различных значениях кольцевого зазора k и уровнях его заполнения η .

При полном заполнении кольцевого канала жидкостью и отсутствии массовых сил угол θ , в направлении которого происходит смещение внутренней оболочки, не оказывает влияния на границы устойчивости, тогда как отклонение от соосного положения (увеличение ξ по абсолютному значению) приводит к снижению критических скоростей.

В случае частичного заполнения картина значительно усложняется. При смещении внутренней оболочки вдоль свободной поверхности происходит перераспределение присоединённой массы жидкости. Это приводит к падению критических скоростей независимо от направления смещения и уровня заполнения жидкостью. При $\theta = 90^\circ$ положительные значения эксцентриситета ξ соответствуют подъёму внутренней оболочки из жидкости, а отрицательные — её погружению. В результате изменения площади смачиваемой

Сравнение собственных частот колебаний ω (Гц) при различном эксцентриситете ξ [Comparison of natural vibration frequencies ω (Hz) at different values of eccentricity ξ]

j	m	$\xi = 0.0$		$\xi = 0.2$		$\xi = 0.4$		$\xi = 0.6$		$\xi = 0.8$	
		ANSYS	Calc. val.								
3	1	469.88	469.28	456.45	455.70	429.05	428.37	383.75	383.17	310.61	310.12
4	1	473.91	472.80	478.70	477.75	473.90	473.11	453.44	452.71	417.70	416.96
1	1	532.20	531.99	514.48	514.17	500.67	500.40	495.87	495.25	490.81	490.11
2	1	534.82	534.37	551.66	551.31	567.11	566.74	579.89	579.51	590.27	589.87
5	1	616.48	613.29	614.50	611.32	608.07	604.94	595.45	592.42	571.89	569.07
6	1	890.39	882.54	887.87	880.05	879.38	871.63	861.32	853.73	823.22	815.95
4	2	924.65	921.50	910.39	907.08	870.32	867.15	788.88	786.20	631.70	629.72
5	2	944.73	940.29	947.01	942.77	942.45	938.43	881.21	879.10	766.01	763.95
3	2	1023.8	1021.1	1016.4	1013.7	978.25	976.24	936.57	933.12	893.17	889.79

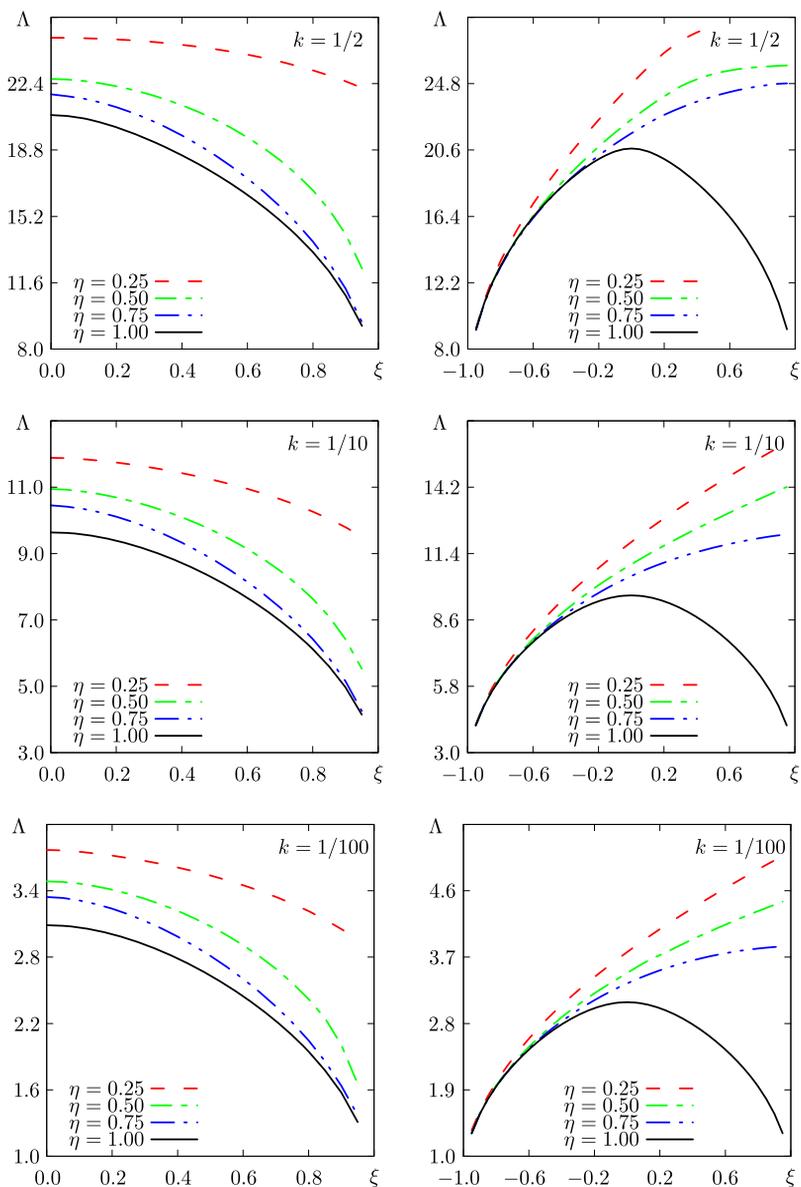


Рис. 2. Зависимость безразмерных критических скоростей Λ от смещения внутренней оболочки ξ в направлениях $\theta = 0^\circ$ (слева) и $\theta = 90^\circ$ (справа) при различных уровнях заполнения η кольцевого канала для $k = 1/2, 1/10$ и $1/100$

[Figure 2. Dependence of dimensionless critical velocities Λ on the eccentricity ξ in the directions $\theta = 0^\circ$ (left) and $\theta = 90^\circ$ (right) at different levels of filling η of the annular channel for $k = 1/2, 1/10$, and $1/100$]

поверхности и перераспределения гидродинамического давления происходит, соответственно, повышение или снижение критических скоростей течения.

Данные, приведённые на рис. 2, также позволяют сделать вывод о том, что размер кольцевого зазора k не оказывает качественного влияния на зависимости критических скоростей Λ от смещения внутренней оболочки. Уменьшение значения k приводит к снижению границ устойчивости, что установлено ранее для соосных цилиндрических оболочек при полном или частичном заполнении кольцевого канала [1,3].

На рис. 3 слева представлены зависимости критических скоростей потери устойчивости Λ от смещения внутренней оболочки ξ при различных уровнях заполнения η и направлении смещения θ . Из представленных результатов видно, что с повышением уровня заполнения происходит снижение влияния угла смещения θ на границу устойчивости до тех пор, пока при полном заполнении он не перестанет оказывать какое-либо влияние.

Минимальное значение скорости Λ всегда достигается при одной и той же величине эксцентриситета ($\xi \approx -1$) вне зависимости от угла θ и уровня заполнения η . Максимальное же значение Λ может достигаться при различных значениях смещения на полуинтервале $\xi \in [0; 1)$ в зависимости от выбора θ и η , что объясняется изменением площади смачиваемой поверхности внутренней оболочки и величины присоединённой массы жидкости, как было отмечено ранее. Высказанные утверждения справедливы при положительных значениях угла θ , а отрицательные величины смещения соответствуют положительным в направлении отрицательных углов $-\theta$. Данные, представленные на рис. 3 слева, позволяют также говорить о возможности существования таких конфигураций, в которых при надлежащем подборе всех параметров обеспечивается более высокий порог гидроупругой устойчивости по сравнению с соосным расположением оболочек.

Зависимости критической скорости Λ от угла θ при различном уровне заполнения η и смещении внутренней оболочки ξ представлены на рис. 3 справа. При уменьшении угла θ имеет место такая область его значений, где критическая скорость Λ практически остаётся неизменной. Размер данной области возрастает с ростом уровня жидкости до тех пор, пока при полном заполнении угол смещения θ не перестанет оказывать влияние (прямая параллельна оси абсцисс) на границы устойчивости. При этом с ростом эксцентриситета ξ критическая скорость Λ меняется в больших пределах, предоставляя более широкие возможности управления динамическим поведением.

На рис. 4, 5 приведены собственные формы колебаний оболочек для $k = 1/10$ при различных вариантах заполнения кольцевого канала, величины и направления смещения внутренней оболочки. При построении мод скорость течения жидкости Λ для каждой конфигурации задавалась близкой к критической скорости потери устойчивости Λ_{cr} . На изображённых сечениях пунктиром показаны оболочки в недеформированном состоянии, а сплошными линиями — в деформированном; уровень заполнения показан серым цветом. В пространственных формах колебаний перемещения отмасштабированы для наглядности представления результатов. Реальные значения, полученные из решения спектральной задачи (9), приведены на цветовой шкале, которая является общей для обеих оболочек. Здесь красным цветом обозначено перемещение в направлении внешней нормали к поверхности оболочки, а синим —

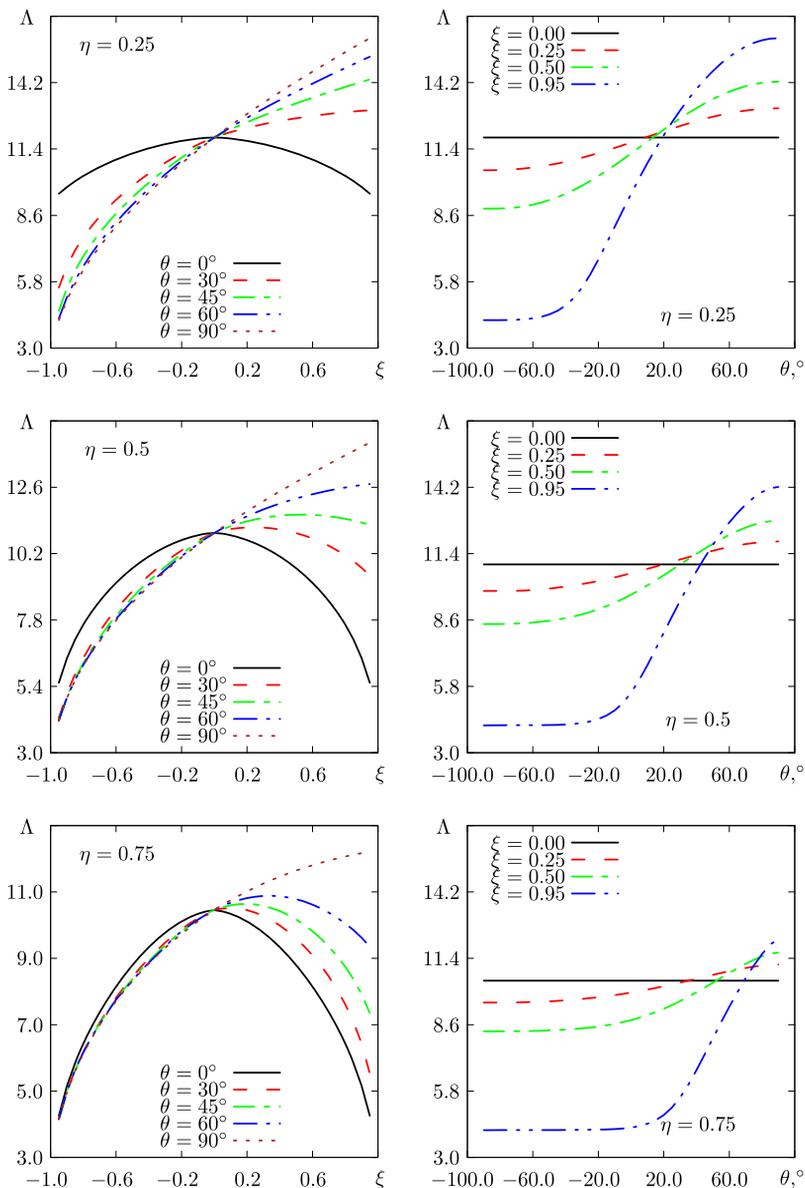


Рис. 3. Зависимость безразмерных критических скоростей Λ для $k = 1/10$ при $\eta = 0.25, 0.5, 0.75$ от смещения внутренней оболочки ξ при различных значениях угла θ (слева) и угла θ при различных значениях смещения ξ (справа)

[Figure 3. Dependence of dimensionless critical velocities Λ on the eccentricity ξ at different values of the angle θ (left) and the angle θ at different values of the eccentricity ξ for $k = 1/10$ at $\eta = 0.25, 0.5, \text{ and } 0.75$]

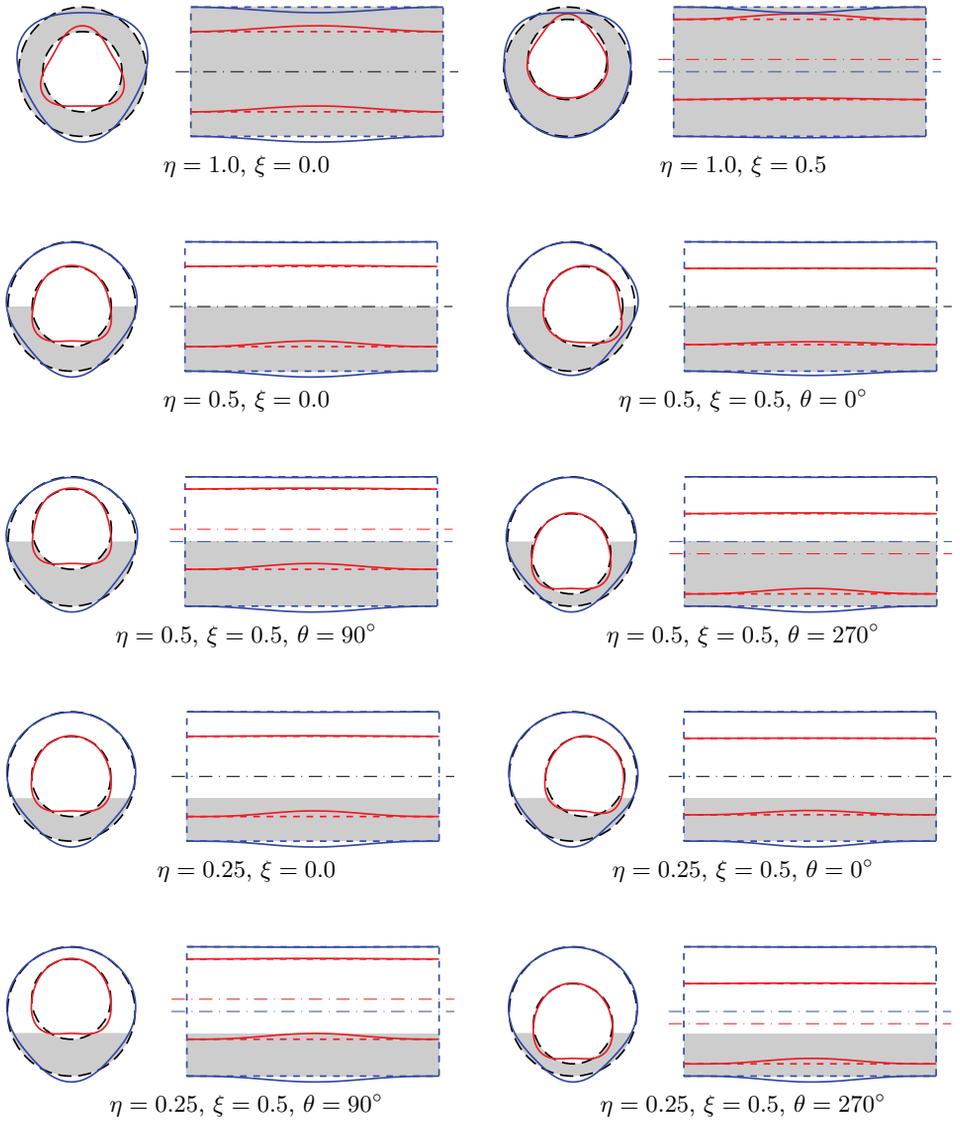


Рис. 4. Собственные формы колебаний взаимодействующих с жидкостью несоосных оболочек в поперечном ($x = L/2$) и продольном ($z = 0$) сечениях для $k = 1/10$ при $\eta = 0.25, 0.5$ и 1.0 , $\Lambda \approx \Lambda_{cr}$ и различных значениях смещения ξ и угла θ

[Figure 4. The transverse ($x = L/2$) and longitudinal ($z = 0$) cross-sections of mode shapes of eccentric cylindrical shells interacting with the fluid for $k = 1/10$ at $\eta = 0.25, 0.5$, and 1.0 , $\Lambda \approx \Lambda_{cr}$ and different values of the eccentricity ξ and the angle θ]

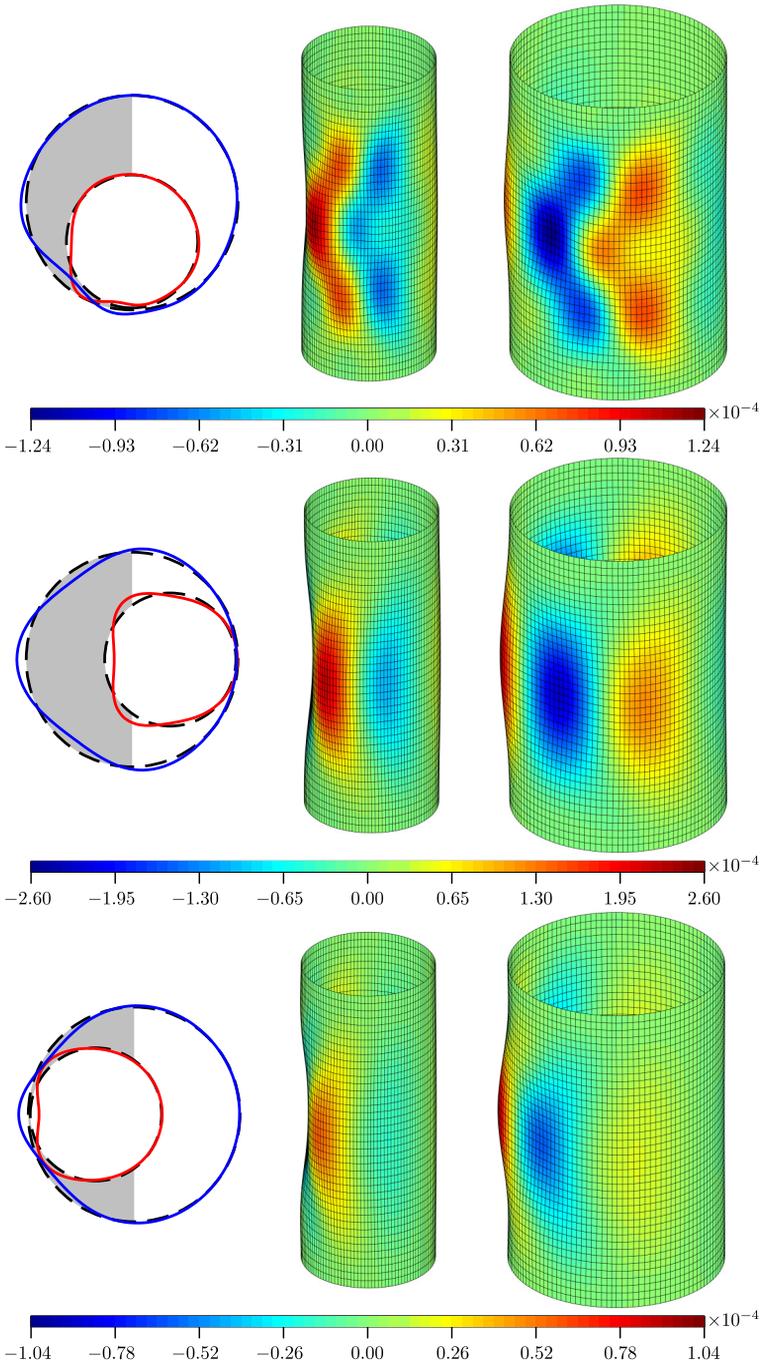


Рис. 5. Собственные формы колебаний взаимодействующих с жидкостью несоосных оболочек (поперечное сечение $x = L/2$, внутренняя и наружная оболочки) при смещении внутренней оболочки на $\xi = 0.95$ в направлениях $\theta = 0^\circ$ (сверху), $\theta = 90^\circ$ (по центру) и $\theta = 270^\circ$ (снизу); $k = 1/10$, $\eta = 0.25$, $\Lambda \approx \Lambda_{cr}$

[Figure 5. Mode shapes of eccentric shells interacting with the fluid (the cross section at $x = L/2$, the inner and outer shells) in the case of the eccentricity $\xi = 0.95$ in the directions $\theta = 0^\circ$ (top), $\theta = 90^\circ$ (center), and $\theta = 270^\circ$ (bottom); $k = 1/10$, $\eta = 0.25$, $\Lambda \approx \Lambda_{cr}$]

в противоположном ей.

В случае полностью заполненных ($\eta = 1.0$) соосных оболочек ($\xi = 0.0$) окружные полуволны имеют одинаковую высоту, размер которой различен для внутренней и наружной оболочек. При наличии эксцентриситета ($\xi \neq 0.0$) высота полуволн в пределах одной оболочки будет разной. Максимальные перемещения возникают на участках боковых поверхностей, соответствующих минимальному расстоянию между оболочками. При изменении уровня жидкости ($\eta < 1.0$) также происходит образование полуволн разной высоты, а максимальные перемещения формируются на тех частях боковых поверхностей оболочек, которые взаимодействуют с жидкостью. В случае частичного заполнения несоосных конструкций наибольший размер полуволн наблюдается на смоченных поверхностях. На основании представленных данных можно заключить, что уровень заполнения кольцевого зазора жидкостью оказывает большее влияние на перемещения оболочек в процессе колебаний, чем эксцентриситет.

Заключение. Представлено численное исследование гидроупругой устойчивости тонкостенных горизонтально ориентированных несоосных цилиндрических оболочек, взаимодействующих с потоком жидкости, текущим в кольцевом канале между ними. Моделирование осуществлено в трёхмерной постановке с использованием метода конечных элементов. Проанализировано влияние отклонения оболочек от соосного положения на критические скорости потери устойчивости при различном уровне заполнения кольцевого канала. Установлено, что, как и для случая соосных оболочек, снижение уровня заполнения приводит к повышению границы гидроупругой устойчивости при прочих равных параметрах системы. Продемонстрировано, что с понижением уровня заполнения кольцевого зазора жидкостью возрастает влияние величины отклонения внутренней оболочки от соосного положения, стабилизирующий или дестабилизирующий характер которого определяется направлением смещения. За счёт подбора комбинации «смещение–угол» для определённых конфигураций можно добиться повышения границ устойчивости по сравнению с соосным положением оболочек. При этом наибольшее изменение критической скорости имеет место при смещении внутренней оболочки в направлении ортогональном свободной поверхности жидкости.

Конкурирующие интересы. Мы заявляем, что у нас нет конфликта интересов в отношении авторства и публикации этой статьи.

Авторский вклад и ответственность. Мы несём полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Каждый из нас одобрил окончательную версию рукописи.

Благодарность. При выполнении численных расчётов был использован суперкомпьютер «Уран» ИММ УрО РАН.

Финансирование. Работа выполнена в рамках государственного задания; номер гос. регистрации темы АААА-А19-119012290100-8.

Библиографический список

1. Païdoussis M. P. *Fluid-structure Interactions: Slender Structures and Axial Flow*. vol. 2. London: Academic Press, 2016. xviii+923 pp.
2. Бочкарёв С. А., Лекомцев С. В., Сенин А. Н. Анализ пространственных колебаний

- коаксиальных цилиндрических оболочек, частично заполненных жидкостью // *Вычислительная механика сплошных сред*, 2018. Т. 11, № 4. С. 448–462. doi: [10.7242/1999-6691/2018.11.4.35](https://doi.org/10.7242/1999-6691/2018.11.4.35).
3. Bochkarev S. A., Lekomtsev S. V., Matveenko V. P., Senin A. N. Hydroelastic stability of partially filled coaxial cylindrical shells // *Acta Mech.*, 2019. vol. 230, no. 11. pp. 3845–3860. doi: [10.1007/s00707-019-02453-4](https://doi.org/10.1007/s00707-019-02453-4).
 4. Kozarov M., Mladenov K. Hydroelastic stability of coaxial cylindrical shells // *Soviet Appl. Mech.*, 1981. vol. 17, no. 5. pp. 449–456. doi: [10.1007/BF00885293](https://doi.org/10.1007/BF00885293).
 5. Païdoussis M. P., Chan S. P., Misra A. K. Dynamics and stability of coaxial cylindrical shells containing flowing fluid // *J. Sound Vib.*, 1984. vol. 97, no. 2. pp. 201–235. doi: [10.1016/0022-460X\(84\)90319-5](https://doi.org/10.1016/0022-460X(84)90319-5).
 6. Païdoussis M. P., Nguyen V. B., Misra A. K. A theoretical study of the stability of cantilevered coaxial cylindrical shells conveying fluid // *J. Fluids Struct.*, 1991. vol. 5, no. 2. pp. 127–164. doi: [10.1016/0889-9746\(91\)90454-W](https://doi.org/10.1016/0889-9746(91)90454-W).
 7. El Chebair A., Païdoussis M. P., Misra A. K. Experimental study of annular-flow-induced instabilities of cylindrical shells // *J. Fluids Struct.*, 1989. vol. 3, no. 4. pp. 349–364. doi: [10.1016/S0889-9746\(89\)80016-7](https://doi.org/10.1016/S0889-9746(89)80016-7).
 8. Horáček J. Approximate theory of annular flow-induced instabilities of cylindrical shells // *J. Fluids Struct.*, 1993. vol. 7, no. 2. pp. 123–135. doi: [10.1006/jfls.1993.1010](https://doi.org/10.1006/jfls.1993.1010).
 9. Бочкарёв С. А., Лекомцев С. В. Исследование влияния граничных условий на устойчивость коаксиальных цилиндрических оболочек, взаимодействующих с текущей жидкостью // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2012. № 3(16). С. 88–101. doi: [10.14498/vsgtu1051](https://doi.org/10.14498/vsgtu1051).
 10. Bochkarev S. A., Lekomtsev S. V., Matveenko V. P. Parametric investigation of the stability of coaxial cylindrical shells containing flowing fluid // *Eur. J. Mech. A Solids*, 2014. vol. 47. pp. 174–181. doi: [10.1016/j.euromechsol.2014.04.003](https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2014.04.003).
 11. Yeh T. T., Chen S. S. Dynamics of a cylindrical shell system coupled by viscous fluid // *J. Acoust. Soc. Am.*, 1977. vol. 62, no. 2. pp. 262–270. doi: [10.1121/1.381523](https://doi.org/10.1121/1.381523).
 12. Yeh T. T., Chen S. S. The effect of fluid viscosity on coupled tube/fluid vibrations // *J. Sound Vib.*, 1978. vol. 59, no. 3. pp. 453–467. doi: [10.1016/S0022-460X\(78\)80010-8](https://doi.org/10.1016/S0022-460X(78)80010-8).
 13. El Chebair A., Misra A. K., Païdoussis M. P. Theoretical study of the effect of unsteady viscous forces on inner- and annular-flow-induced instabilities of cylindrical shells // *J. Sound Vib.*, 1990. vol. 138, no. 3. pp. 457–478. doi: [10.1016/0022-460X\(90\)90599-U](https://doi.org/10.1016/0022-460X(90)90599-U).
 14. Païdoussis M. P., Misra A. K., Chan S. P. Dynamics and stability of coaxial cylindrical shells conveying viscous fluid // *J. Appl. Mech.*, 1985. vol. 52, no. 2. pp. 389–396. doi: [10.1115/1.3169059](https://doi.org/10.1115/1.3169059).
 15. Païdoussis M. P., Misra A. K., Nguyen V. B. Internal- and annular-flow-induced instabilities of a clamped-clamped or cantilevered cylindrical shell in a coaxial conduit: the effects of system parameters // *J. Sound Vib.*, 1992. vol. 159, no. 2. pp. 193–205. doi: [10.1016/0022-460X\(92\)90031-R](https://doi.org/10.1016/0022-460X(92)90031-R).
 16. Nguyen V. B., Païdoussis M. P., Misra A. K. A CFD-based model for the study of the stability of cantilevered coaxial cylindrical shells conveying viscous fluid // *J. Sound Vib.*, 1994. vol. 176, no. 1. pp. 105–125. doi: [10.1006/jsvi.1994.1361](https://doi.org/10.1006/jsvi.1994.1361).
 17. Nguyen V. B., Païdoussis M. P., Misra A. K. An experimental study of the stability of cantilevered coaxial cylindrical shells conveying fluid // *J. Fluids Struct.*, 1993. vol. 7, no. 8. pp. 913–930. doi: [10.1006/jfls.1993.1054](https://doi.org/10.1006/jfls.1993.1054).
 18. Amabili M., Garziera R. Vibrations of circular cylindrical shells with nonuniform constraints, elastic bed and added mass. Part II: Shells containing or immersed in axial flow // *J. Fluids Struct.*, 2002. vol. 16, no. 1. pp. 31–51. doi: [10.1006/jfls.2001.0402](https://doi.org/10.1006/jfls.2001.0402).
 19. Amabili M., Garziera R. Vibrations of circular cylindrical shells with nonuniform constraints, elastic bed and added mass. Part III: Steady viscous effects on shells conveying fluid // *J. Fluids Struct.*, 2002. vol. 16, no. 6. pp. 795–809. doi: [10.1006/jfls.2002.0446](https://doi.org/10.1006/jfls.2002.0446).

20. Бочкарёв С. А., Матвеев В. П. Динамическое поведение упругих коаксиальных цилиндрических оболочек, содержащих движущуюся в них жидкость // *ПММ*, 2010. Т. 74, № 4. С. 655–666.
21. Бочкарёв С. А., Матвеев В. П. Анализ устойчивости нагруженных коаксиальных цилиндрических оболочек с внутренним течением жидкости // *Изв. РАН. МТТ*, 2010. № 6. С. 29–45.
22. Bochkarev S. A., Matveenko V. P. Numerical analysis of coaxial cylindrical shells conveying fluid / *Topical Problems in Solid and Fluid Mechanics*; eds. A. V. Manzhirov, N. K. Gupta, D. A. Indeitsev. Delhi: Elit Publ. House Pvt Ltd., 2011. pp. 160–177.
23. Ning W. B., Wang D. Z., Zhang J. G. Dynamics and stability of a cylindrical shell subjected to annular flow including temperature effects // *Arch. Appl. Mech.*, 2016. vol. 86, no. 4. pp. 643–656. doi: [10.1007/s00419-015-1052-1](https://doi.org/10.1007/s00419-015-1052-1).
24. Ning W. B., Wang D. Z. Dynamic and stability response of a cylindrical shell subjected to viscous annular flow and thermal load // *Int. J. Str. Stab. Dyn.*, 2016. vol. 16, no. 10. pp. 1550072. doi: [10.1142/S0219455415500728](https://doi.org/10.1142/S0219455415500728).
25. Kalinina A., Kondratov D., Kondratova Y., Mogilevich L., Popov V. Investigation of hydroelasticity coaxial geometrically irregular and regular shells under vibration / *Recent Research in Control Engineering and Decision Making: ICIT 2019 / Studies in Systems, Decision and Control*, 199; eds. O. Dolinina, A. Brovko, V. Pechenkin, A. Lvov, V. Zhmud, V. Kreinovich. Cham: Springer, 2019. pp. 125–137. doi: [10.1007/978-3-030-12072-6_12](https://doi.org/10.1007/978-3-030-12072-6_12).
26. Буйвол В. М., Гузь О. М. О колебаниях двух цилиндрических эксцентрично расположенных оболочек в потоке невязкой жидкости // *Докл. АН УССР*, 1966. № 11. С. 1412–1415.
27. Chung H., Chen S.-S. Vibration of a group of circular cylinders in a confined fluid // *J. Appl. Mech.*, 1977. vol. 44, no. 2. pp. 213–217. doi: [10.1115/1.3424026](https://doi.org/10.1115/1.3424026).
28. Wauer J. Finite oscillations of a cylinder in a coaxial duct subjected to annular compressible flow // *Flow Turbul. Combust.*, 1998. vol. 61, no. 1–4. pp. 161–177. doi: [10.1023/A:1026492903092](https://doi.org/10.1023/A:1026492903092).
29. Jeong K.-H. Dynamics of a concentrically or eccentrically submerged circular cylindrical shell in a fluid-filled container // *J. Sound Vib.*, 1999. vol. 224, no. 4. pp. 709–732. doi: [10.1006/jsvi.1999.2209](https://doi.org/10.1006/jsvi.1999.2209).
30. Jeong K.-H., Lee G.-M., Chang M.-H. Free vibration analysis of a cylindrical shell eccentrically coupled with a fluid-filled vessel // *Comput. Struct.*, 2001. vol. 79, no. 16. pp. 1517–1524. doi: [10.1016/S0045-7949\(01\)00031-1](https://doi.org/10.1016/S0045-7949(01)00031-1).
31. Bochkarev S. A., Lekomtsev S. V., Senin A. N. Analysis of spatial vibrations of piezoceramic eccentric cylindrical shells interacting with an annular fluid layer // *Frattura Integ. Strutt.*, 2019. vol. 49. pp. 814–830. doi: [10.3221/IGF-ESIS.49.15](https://doi.org/10.3221/IGF-ESIS.49.15).
32. Zienkiewicz O. C. *The finite element method in engineering science*. New York: McGraw-Hill, 1971. xiv+521 pp.
33. Reddy J. N. *An introduction to nonlinear finite element analysis*. Oxford: Oxford University Press, 2014. xxxi+687 pp.
34. Ильгамов М. А. *Колебания упругих оболочек, содержащих жидкость и газ*. М.: Наука, 1969. 184 с.
35. Бочкарёв С. А., Матвеев В. П. Численное исследование влияния граничных условий на динамику поведения цилиндрической оболочки с протекающей жидкостью // *Изв. РАН. МТТ*, 2008. № 3. С. 189–199.
36. Amabili M. Free vibration of partially filled, horizontal cylindrical shells // *J. Sound Vib.*, 1996. vol. 191, no. 5. pp. 757–780. doi: [10.1006/jsvi.1996.0154](https://doi.org/10.1006/jsvi.1996.0154).
37. Lehoucq R. B., Sorensen D. C. Deflation techniques for an implicitly restarted Arnoldi iteration // *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, 1996. vol. 17, no. 4. pp. 789–821. doi: [10.1137/S0895479895281484](https://doi.org/10.1137/S0895479895281484).
38. *ANSYS mechanical APDL theory reference, Release 18.2*. Canonsburg, Pa: ANSYS, 2017.

MSC: 74K25, 74H15

Numerical modeling of eccentric cylindrical shells partially filled with a fluid

S. A. Bochkarev, S. V. Lekomtsev, A. N. Senin

Institute of Continuous Media Mechanics,
Ural Branch Russian Academy of Sciences,
1, Acad. Korolev str., Perm, 614013, Russian Federation.

Abstract

The paper is devoted to a numerical analysis of the dynamic behavior of horizontally oriented eccentric shells, interacting with a flowing fluid, which completely or partially fills the annular gap between them. The solution to the problem is developed in a three-dimensional formulation using the finite element method. When modeling elastic solids, we proceed from the assumption that their curved surface is accurately approximated by a set of plane segments, in which the strains are determined using the relations of the classical theory of plates. The motion of an ideal compressible fluid is described by the wave equation, which, together with the impermeability condition and the corresponding boundary conditions, is transformed using the Bubnov–Galerkin method. The mathematical formulation of the dynamic problem of thin-walled structures is based on the variational principle of virtual displacements. The assessment of stability is based on the calculation and analysis of complex eigenvalues of a coupled system of equations. The verification of the model is accomplished with reference to a quiescent fluid by comparing the obtained results with the known solutions. The influence of the size of the annular gap and the level of its filling with a fluid on the hydroelastic stability threshold of rigidly clamped shells is analyzed at different values of shells eccentricity. It has been shown that for eccentric shells, a decrease in the level of filling leads to an increase of the stability limits. The dependence of the critical flow velocity on the deviation of the inner shell from concentricity has been established.

Keywords: finite element method, eccentric shells, potential compressible fluid, partial filling, hydroelastic stability.

Research Article

 The content is published under the terms of the [Creative Commons Attribution 4.0 International License](http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Bochkarev S. A., Lekomtsev S. V., Senin A. N. Numerical modeling of eccentric cylindrical shells partially filled with a fluid, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2020, vol. 24, no. 1, pp. 95–115. doi: [10.14498/vsgtu1746](https://doi.org/10.14498/vsgtu1746) (In Russian).

Authors' Details:

Sergey A. Bochkarev  <https://orcid.org/0000-0002-9722-1269>

Cand. Phys. & Math. Sci.; Senior Researcher; Dept. of Complex Problems of Mechanics of Solids; e-mail: bochkarev@icmm.ru

Sergey V. Lekomtsev  <https://orcid.org/0000-0002-8331-2979>

Cand. Phys. & Math. Sci.; Senior Researcher; Dept. of Complex Problems of Mechanics of Solids; e-mail: lekomtsev@icmm.ru

Alexander N. Senin  <https://orcid.org/0000-0002-7537-0001>

Junior Researcher; Laboratory of Mechanics of Functional Materials; e-mail: senin.a@icmm.ru

Received: 19th September, 2019 / Revised: 5th November, 2019 /
 Accepted: 11th November, 2019 / First online: 4th March, 2020

Competing interests. We declare that we have no conflicts of interests with the authorship and publication of this article.

Authors' contributions and responsibilities. Each author has participated in the article concept development and in the manuscript writing. The authors are absolutely responsible for submitting the final manuscript in print. Each author has approved the final version of manuscript.

Acknowledgments. Our work was performed using «Uran» supercomputer of IMM UB RAS.

Funding. The work was performed as part of a state assignment; assignment no. AAAA-A19-119012290100-8.

References

1. Païdoussis M. P. *Fluid-structure Interactions: Slender Structures and Axial Flow*, vol. 2. London, Academic Press, 2016, xviii+923 pp.
2. Bochkarev S. A., Lekomtsev S. V., Senin A. N. Analysis of spatial vibrations of coaxial cylindrical shells partially filled with a fluid, *Comput. Continuum Mech.*, 2018, vol. 11, no. 4, pp. 448–462 (In Russian).
3. Bochkarev S. A., Lekomtsev S. V., Matvenko V. P., Senin A. N. Hydroelastic stability of partially filled coaxial cylindrical shells, *Acta Mech.*, 2019, vol. 230, no. 11, pp. 3845–3860. doi: [10.1007/s00707-019-02453-4](https://doi.org/10.1007/s00707-019-02453-4).
4. Kozarov M., Mladenov K. Hydroelastic stability of coaxial cylindrical shells, *Soviet Appl. Mech.*, 1981, vol. 17, no. 5, pp. 449–456. doi: [10.1007/BF00885293](https://doi.org/10.1007/BF00885293).
5. Païdoussis M. P., Chan S. P., Misra A. K. Dynamics and stability of coaxial cylindrical shells containing flowing fluid, *J. Sound Vib.*, 1984, vol. 97, no. 2, pp. 201–235. doi: [10.1016/0022-460X\(84\)90319-5](https://doi.org/10.1016/0022-460X(84)90319-5).
6. Païdoussis M. P., Nguyen V. B., Misra A. K. A theoretical study of the stability of cantilevered coaxial cylindrical shells conveying fluid, *J. Fluids Struct.*, 1991, vol. 5, no. 2, pp. 127–164. doi: [10.1016/0889-9746\(91\)90454-W](https://doi.org/10.1016/0889-9746(91)90454-W).
7. El Chebair A., Païdoussis M. P., Misra A. K. Experimental study of annular-flow-induced instabilities of cylindrical shells, *J. Fluids Struct.*, 1989, vol. 3, no. 4, pp. 349–364. doi: [10.1016/S0889-9746\(89\)80016-7](https://doi.org/10.1016/S0889-9746(89)80016-7).
8. Horáček J. Approximate theory of annular flow-induced instabilities of cylindrical shells, *J. Fluids Struct.*, 1993, vol. 7, no. 2, pp. 123–135. doi: [10.1006/jfls.1993.1010](https://doi.org/10.1006/jfls.1993.1010).
9. Bochkarev S. A., Lekomtsev S. V. Investigation of boundary conditions influence on stability of coaxial cylindrical shells interacting with flowing fluid, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2012, no. 3(16), pp. 88–101 (In Russian).
10. Bochkarev S. A., Lekomtsev S. V., Matvenko V. P. Parametric investigation of the stability of coaxial cylindrical shells containing flowing fluid, *Eur. J. Mech. A Solids*, 2014, vol. 47, pp. 174–181. doi: [10.1016/j.euromechsol.2014.04.003](https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2014.04.003).
11. Yeh T. T., Chen S. S. Dynamics of a cylindrical shell system coupled by viscous fluid, *J. Acoust. Soc. Am.*, 1977, vol. 62, no. 2, pp. 262–270. doi: [10.1121/1.381523](https://doi.org/10.1121/1.381523).
12. Yeh T. T., Chen S. S. The effect of fluid viscosity on coupled tube/fluid vibrations, *J. Sound Vib.*, 1978, vol. 59, no. 3, pp. 453–467. doi: [10.1016/S0022-460X\(78\)80010-8](https://doi.org/10.1016/S0022-460X(78)80010-8).
13. El Chebair A., Misra A. K., Païdoussis M. P. Theoretical study of the effect of unsteady viscous forces on inner- and annular-flow-induced instabilities of cylindrical shells, *J. Sound Vib.*, 1990, vol. 138, no. 3, pp. 457–478. doi: [10.1016/0022-460X\(90\)90599-U](https://doi.org/10.1016/0022-460X(90)90599-U).

14. Païdoussis M. P., Misra A. K., Chan S. P. Dynamics and stability of coaxial cylindrical shells conveying viscous fluid, *J. Appl. Mech.*, 1985, vol. 52, no. 2, pp. 389–396. doi: [10.1115/1.3169059](https://doi.org/10.1115/1.3169059).
15. Païdoussis M. P., Misra A. K., Nguyen V. B. Internal- and annular-flow-induced instabilities of a clamped-clamped or cantilevered cylindrical shell in a coaxial conduit: the effects of system parameters, *J. Sound Vib.*, 1992, vol. 159, no. 2, pp. 193–205. doi: [10.1016/0022-460X\(92\)90031-R](https://doi.org/10.1016/0022-460X(92)90031-R).
16. Nguyen V. B., Païdoussis M. P., Misra A. K. A CFD-based model for the study of the stability of cantilevered coaxial cylindrical shells conveying viscous fluid, *J. Sound Vib.*, 1994, vol. 176, no. 1, pp. 105–125. doi: [10.1006/jsvi.1994.1361](https://doi.org/10.1006/jsvi.1994.1361).
17. Nguyen V. B., Païdoussis M. P., Misra A. K. An experimental study of the stability of cantilevered coaxial cylindrical shells conveying fluid, *J. Fluids Struct.*, 1993, vol. 7, no. 8, pp. 913–930. doi: [10.1006/jfls.1993.1054](https://doi.org/10.1006/jfls.1993.1054).
18. Amabili M., Garziera R. Vibrations of circular cylindrical shells with nonuniform constraints, elastic bed and added mass. Part II: Shells containing or immersed in axial flow, *J. Fluids Struct.*, 2002, vol. 16, no. 1, pp. 31–51. doi: [10.1006/jfls.2001.0402](https://doi.org/10.1006/jfls.2001.0402).
19. Amabili M., Garziera R. Vibrations of circular cylindrical shells with nonuniform constraints, elastic bed and added mass. Part III: Steady viscous effects on shells conveying fluid, *J. Fluids Struct.*, 2002, vol. 16, no. 6, pp. 795–809. doi: [10.1006/jfls.2002.0446](https://doi.org/10.1006/jfls.2002.0446).
20. Bochkarev S. A., Matveenko V. P. The dynamic behaviour of elastic coaxial cylindrical shells conveying fluid, *J. Appl. Math. Mech.*, 2010, vol. 74, no. 4, pp. 467–474. doi: [10.1016/j.jappmathmech.2010.09.013](https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2010.09.013).
21. Bochkarev S. A., Matveenko V. P. Stability analysis of loaded coaxial cylindrical shells with internal fluid flow, *Mech. Solids*, 2010, vol. 45, no. 6, pp. 789–802. doi: [10.3103/S002565441006004X](https://doi.org/10.3103/S002565441006004X).
22. Bochkarev S. A., Matveenko V. P. Numerical analysis of coaxial cylindrical shells conveying fluid, In: *Topical Problems in Solid and Fluid Mechanics*; eds. A. V. Manzhurov, N. K. Gupta, D. A. Indeitsev. Delhi, Elit Publ. House Pvt Ltd., 2011, pp. 160–177.
23. Ning W. B., Wang D. Z., Zhang J. G. Dynamics and stability of a cylindrical shell subjected to annular flow including temperature effects, *Arch. Appl. Mech.*, 2016, vol. 86, no. 4, pp. 643–656. doi: [10.1007/s00419-015-1052-1](https://doi.org/10.1007/s00419-015-1052-1).
24. Ning W. B., Wang D. Z. Dynamic and stability response of a cylindrical shell subjected to viscous annular flow and thermal load, *Int. J. Str. Stab. Dyn.*, 2016, vol. 16, no. 10, pp. 1550072. doi: [10.1142/S0219455415500728](https://doi.org/10.1142/S0219455415500728).
25. Kalinina A., Kondratov D., Kondratova Y., Mogilevich L., Popov V. Investigation of hydroelasticity coaxial geometrically irregular and regular shells under vibration, In: *Recent Research in Control Engineering and Decision Making*, ICIT 2019, Studies in Systems, Decision and Control, 199; eds. O. Dolinina, A. Brovko, V. Pechenkin, A. Lvov, V. Zhmud, V. Kreinovich. Cham, Springer, 2019, pp. 125–137. doi: [10.1007/978-3-030-12072-6_12](https://doi.org/10.1007/978-3-030-12072-6_12).
26. Buivol B. N., Guz A. N. Oscillations of two cylindrical eccentrically arranged shells in a stream of inviscid liquid, *Dokl. Akad. Nauk Ukr. SSR*, 1966, no. 11, pp. 1412–1415 (In Russian).
27. Chung H., Chen S.-S. Vibration of a group of circular cylinders in a confined fluid, *J. Appl. Mech.*, 1977, vol. 44, no. 2, pp. 213–217. doi: [10.1115/1.3424026](https://doi.org/10.1115/1.3424026).
28. Wauer J. Finite oscillations of a cylinder in a coaxial duct subjected to annular compressible flow, *Flow Turbul. Combust.*, 1998, vol. 61, no. 1–4, pp. 161–177. doi: [10.1023/A:1026492903092](https://doi.org/10.1023/A:1026492903092).
29. Jeong K.-H. Dynamics of a concentrically or eccentrically submerged circular cylindrical shell in a fluid-filled container, *J. Sound Vib.*, 1999, vol. 224, no. 4, pp. 709–732. doi: [10.1006/jsvi.1999.2209](https://doi.org/10.1006/jsvi.1999.2209).
30. Jeong K.-H., Lee G.-M., Chang M.-H. Free vibration analysis of a cylindrical shell eccentrically coupled with a fluid-filled vessel, *Comput. Struct.*, 2001, vol. 79, no. 16, pp. 1517–1524. doi: [10.1016/S0045-7949\(01\)00031-1](https://doi.org/10.1016/S0045-7949(01)00031-1).

31. Bochkarev S. A., Lekomtsev S. V., Senin A. N. Analysis of spatial vibrations of piezoceramic eccentric cylindrical shells interacting with an annular fluid layer, *Frattura Integ. Strutt.*, 2019, vol. 49, pp. 814–830. doi: [10.3221/IGF-ESIS.49.15](https://doi.org/10.3221/IGF-ESIS.49.15).
32. Zienkiewicz O. C. *The finite element method in engineering science*. New York, McGraw-Hill, 1971, xiv+521 pp.
33. Reddy J. N. *An introduction to nonlinear finite element analysis*. Oxford, Oxford University Press, 2014, xxxi+687 pp.
34. Ilgamov M. A. *Kolebaniia uprugikh obolochek, soderzhashchikh zhidkost' i gaz* [Oscillations of elastic shells containing liquid and gas]. Moscow, Nauka, 1969, 184 pp. (In Russian)
35. Bochkarev S. A., Matveenko V. P. Numerical study of the influence of boundary conditions on the dynamic behavior of a cylindrical shell conveying a fluid, *Mech. Solids*, 2010, vol. 43, no. 3, pp. 477–486. doi: [10.3103/S0025654408030187](https://doi.org/10.3103/S0025654408030187).
36. Amabili M. Free vibration of partially filled, horizontal cylindrical shells, *J. Sound Vib.*, 1996, vol. 191, no. 5, pp. 757–780. doi: [10.1006/jsvi.1996.0154](https://doi.org/10.1006/jsvi.1996.0154).
37. Lehoucq R. B., Sorensen D. C. Deflation techniques for an implicitly restarted Arnoldi iteration, *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, 1996, vol. 17, no. 4, pp. 789–821. doi: [10.1137/S0895479895281484](https://doi.org/10.1137/S0895479895281484).
38. *ANSYS mechanical APDL theory reference, Release 18.2*. Canonsburg, Pa, ANSYS, 2017.