Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2020. Т. 24, № 1. С. 137–162
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1732

УДК 517.927.4:519.624

Численное интегрирование матричным методом и оценка порядка аппроксимации разностных краевых задач для неоднородных линейных обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка с переменными коэффициентами

В. Н. Маклаков, М. А. Ильичева

Самарский государственный технический университет,
Россия, 443100, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

Аннотация

Использование многочлена Тейлора второй степени при аппроксимации производных конечными разностями приводит ко второму порядку аппроксимации традиционного метода сеток при численном интегрировании краевых задач для неоднородных линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами. В работе при исследовании краевых задач для неоднородных линейных обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка с переменными коэффициентами рассмотрен предложенный ранее метод численного интегрирования, использующий средства матричного исчисления, в котором аппроксимация производных конечными разностями не использовалась. Согласно указанному методу, при составлении системы разностных уравнений может быть выбрана произвольная степень многочлена Тейлора в разложении искомого решения задачи в ряд Тейлора.

В работе возможные граничные условия дифференциальной краевой задачи записаны как в виде производных степеней от нуля до трех, так и в виде линейных комбинаций этих степеней. Краевая задача названа симметричной, если количества граничных условий в левой и правой границах совпадают и равны двум; в противном случае задача названа несимметричной. Для дифференциальной краевой задачи составлена ее аппроксимирующая разностная краевая задача в виде двух подсистем: в первую подсистему вошли уравнения, при построении которых не были использованы граничные условия краевой задачи; во вторую подсистему вошли четыре уравнения, при построении которых были использованы граничные условия задачи.

Научная статья

Образец для цитирования
Маклаков В. Н., Ильичева М. А. Численное интегрирование матричным методом и оценка порядка аппроксимации разностных краевых задач для неоднородных линейных обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка с переменными коэффициентами // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2020. Т. 24, № 1. С. 137–162. doi: 10.14498/vsgtu1732.

Сведения об авторах

Владимир Николаевич Маклаков https://orcid.org/0000-0003-1644-7424
кандидат физико-математических наук, доцент; доцент каф. высшей математики и прикладной информатики; e-mail: makvo63@yandex.ru

Мария Александровна Ильичева https://orcid.org/0000-0001-6437-9142
аспирант; каф. прикладной математики и информатики; e-mail: ilicheva-1993@mail.ru

Теоретически выявлены закономерности между порядком аппроксимации разностной краевой задачи и степенью используемого многочлена Тейлора. Установлено следующее:

а) порядок аппроксимации первой и второй подсистем пропорционален степени используемого многочлена Тейлора;
б) порядок аппроксимации первой подсистемы меньше степени многочлена Тейлора на две единицы при ее четном значении и меньше на три единицы при ее нечетном значении;
в) порядок аппроксимации второй подсистемы меньше степени многочлена Тейлора на три единицы независимо как от четности или нечетности этой степени, так и от степени старшей производной в граничных условиях краевой задачи.

Вычислен порядок аппроксимации разностной краевой задачи со всеми возможными комбинациями граничных условий. Теоретические выводы подтверждены численными экспериментами.

Ключевые слова: обыкновенные дифференциальные уравнения, краевые задачи, порядок аппроксимации, численные методы, многочлены Тейлора.

Получение: 31 июля 2019 г. / Исправление: 19 ноября 2019 г. /
Принятие: 10 февраля 2020 г. / Публикация онлайн: 2 марта 2020 г.

Введение. Предложенный в работе [1] метод, использующий средства матричного исчисления и численного интегрирования краевых задач для неоднородных линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка (ОДУ2) с переменными коэффициентами позволяет удерживать произвольное число членов разложения в ряд Тейлора искомого решения задачи, отказавшись при этом от аппроксимации производных конечными разностями. Известно, что использование конечных разностей приводит ко второму порядку аппроксимации (ПА) при численном интегрировании как краевых задач для ОДУ2 [2–7], так и ряда краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных [5–11]. Последнее обусловлено тем, что при аппроксимации производных удерживается всего три члена в разложении в ряд Тейлора искомого решения задачи или, что то же самое, был использован многочлен Тейлора второй степени.

1. Обозначения, терминология, некоторые предварительные результаты и постановка задачи. Далее будем придерживаться принятых в [5] обозначений:

а) D — область интегрирования, ограниченная отрезком $[a,b]$, D_h — узлы сетки, определяемые значениями $t_i = t_0 + ih$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $t_0 = a$, $t_n = b$, $h = \big(b - a\big)/n$, $n+1$ — число узлов сетки;
б) $x(t)$ — непрерывная функция, являющаяся точным решением краевой задачи для ОДУ4;
в) $[x]_h$ — сеточная функция, совпадающая с точным решением в узлах сетки D_h;
г) $x^{(h)}$ — искомая сеточная функция.

Для краткости примем для любой функции обозначение $\varphi(t_i) = \varphi_i$, где t_i — узел сетки D_h.

В дальнейшем опустим индекс h в наименованиях сеточных функций $[x]_h$, $x^{(h)}$ и будем оговаривать особо случаи, в которых будет использоваться непрерывная функция $x(t)$, являющаяся точным решением, при сохранении обозначений $x(t_i) = x_i$ для нее в узлах сетки.

Примем следующую терминологию.

1. Перечислим виды граничных условий (ГУ) в левой границе $t_0 = a$ сетки D_h, которые будут использоваться ниже в краевых задачах для ОДУ4 (9):
$$x(a) = \widetilde{x}_0, \tag{1}$$
$$x'(a) = \widetilde{x}'_0, \tag{2}$$
$$x''(a) = \widetilde{x}''_0, \tag{3}$$
$$x'''(a) = \widetilde{x}'''_0, \tag{4}$$
$$\alpha_0 x(a) + \beta_0 x'(a) + \gamma_0 x''(a) + \lambda_0 x'''(a) = \widetilde{z}_0, \tag{5}$$
где $\widetilde{x}_0$, $\widetilde{x}'_0$, $\widetilde{x}''_0$, $\widetilde{x}'''_0$, $\widetilde{z}_0$, α_0, β_0, γ_0, λ_0 — заданные числа; числа α_0, β_0, γ_0, λ_0 не обращаются в нуль одновременно. Условия (1)–(4) назовем граничными условиями той или иной степени в соответствии с используемой степенью производной в них; условие (5) назовем смешанным ГУ. Аналогично могут быть перечислены ГУ в правой границе $t_n = b$ сетки D_h.
2. Дифференциальную краевую задачу (ДКЗ) для ОДУ4 назовем симметричной, если количество ГУ (1)–(5) в левой и правой границах области интегрирования D совпадает и равно двум; в противном случае задачу назовем несимметричной.
3. Дифференциальную краевую задачу для ОДУ4 назовем смешанной, если она содержит одно или несколько ГУ (5). Смешанная ДКЗ может оказаться как симметричной, так и несимметричной. Например, задача
$$\begin{cases} u(t)x^{(4)}(t) + s(t)x'''(t) + r(t)x''(t) + \\ \qquad + p(t)x'(t) + q(t)x(t) = f(t), \quad t \in [a,b], \\ \alpha_0 x(a) + \beta_0 x'(a) + \gamma_0 x''(a) + \lambda_0 x'''(a) = \widetilde{z}_0, \\ x'(b) = \widetilde{x}'_n, \quad x''(b) = \widetilde{x}''_n, \quad x'''(b) = \widetilde{x}'''_n \end{cases} \tag{6}$$
является смешанной несимметричной ДКЗ.

Согласно [5], разностная краевая задача (РКЗ), аппроксимирующая дифференциальную задачу, может быть записана в компактной символической форме как
$$L_h^k x = f_h^k, \tag{7}$$
где k есть степень используемого многочлена Тейлора в разложении искомого решения задачи в ряд Тейлора. Подробный вид равенства (7) будет дан ниже.

Сеточная функция x_i, $i = 0, 1, \ldots, n$, являющаяся решением некоторой РКЗ, записанной в форме (7), при подстановке в уравнения этой РКЗ обратит их в верные равенства. В [5] показано, что подстановка в уравнения задачи (7) значений сеточной функции $[x_i]$, отличающихся от x_i, приведет к некоторому отличию от верных равенств. Эти отличия и характеризует невязка δf_h^k. Иными словами, подстановка $[x]$ в задачу (7) приведет к равенству
$$L_h^k[x] = f_h^k + \delta f_h^k. \tag{8}$$

Согласно [5, 7], РКЗ (8) аппроксимирует дифференциальную краевую задачу на точном решении $x(t)$, если норма $\left\|\delta f_h^k\right\| \to 0$ при $h \to 0$. Если при этом имеет место неравенство $\|\delta f_h^k\| \leqslant Ch^m$, $C > 0$, $m > 0$ — некоторые постоянные, не зависящие от h, то говорят, что имеет место аппроксимация порядка m относительно величины h.

В соответствии с [5] норму невязки задачи (8) можно записать как

$$\|\delta f_h^k\| = \max\bigl(|\delta f_{h0}^k|,\ |\delta f_{h1}^k|,\ |\delta f_{h2}^k|,\ \ldots,\ |\delta f_{hn}^k|\bigr),$$

где второй нижний индекс означает принадлежность компоненты к номеру уравнения задачи (8) при начале нумерации с нуля.

Поставим целью исследование возможности численного интегрирования матричным методом краевых задач с различными ГУ для неоднородных линейных ОДУ4 с переменными коэффициентами

$$u(t)x^{(4)}(t) + s(t)x'''(t) + r(t)x''(t) + p(t)x'(t) + q(t)x(t) = f(t), \tag{9}$$

где $u(t)$, $s(t)$, $r(t)$, $p(t)$, $q(t)$, $f(t)$ — заданные функции, дифференцируемые нужное число раз, $x(t)$ — искомая функция, являющаяся точным решением задачи; с последующим вычислением ПА в зависимости от степени k используемого многочлена Тейлора.

2. Численное интегрирование краевых задач для ОДУ4. Для ДКЗ (6) составим ее аппроксимирующую РКЗ.

В соответствии с матричным методом численного интегрирования составим систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) для пятиточечного шаблона t_{i-2}, t_{i-1}, t_i, t_{i+1}, t_{i+2}, $i = 2, 3, \ldots, n-2$, в которую при фиксированном $k \geqslant 4$ внесем:

а) четыре многочлена Тейлора степени k, полученных из четырех разложений в ряд Тейлора искомого точного решения $x(t)$ в окрестностях слева и справа от некоторого внутреннего узла (центрального узла шаблона) t_i, $i = 2, 3, \ldots, n-2$, сетки D_h;

б) уравнения

$$\bigl(q_i x_i + p_i x_i' + r_i x_i'' + s_i x_i''' + u_i x_i^{(4)}\bigr)^{(r)} = f_i^{(r)}, \quad r = 0, 1, \ldots, k-4,$$

полученные дифференцированием r раз обеих частей ОДУ4 (9) и записанные в узле t_i.

В итоге получим замкнутую СЛАУ

$$\begin{cases} x_i - 2hx_i' + 4\dfrac{h^2}{2!}x_i'' - 8\dfrac{h^3}{3!}x_i''' + 16\dfrac{h^4}{4!}x_i^{(4)} + \cdots + (-2)^k\dfrac{h^k}{k!}x_i^{(k)} = x_{i-2}, \\ x_i - hx_i' + \dfrac{h^2}{2!}x_i'' - \dfrac{h^3}{3!}x_i''' + \dfrac{h^4}{4!}x_i^{(4)} + \cdots + (-1)^k\dfrac{h^k}{k!}x_i^{(k)} = x_{i-1}, \\ x_i + hx_i' + \dfrac{h^2}{2!}x_i'' + \dfrac{h^3}{3!}x_i''' + \dfrac{h^4}{4!}x_i^{(4)} + \cdots + \dfrac{h^k}{k!}x_i^{(k)} = x_{i+1}, \\ x_i + 2hx_i' + 4\dfrac{h^2}{2!}x_i'' + 8\dfrac{h^3}{3!}x_i''' + 16\dfrac{h^4}{4!}x_i^{(4)} + \cdots + 2^k\dfrac{h^k}{k!}x_i^{(k)} = x_{i+2}, \\ q_i x_i + p_i x_i' + r_i x_i'' + s_i x_i''' + u_i x_i^{(4)} = f_i, \\ q_i' x_i + \bigl(p_i' + q_i\bigr)x_i' + \bigl(r_i' + p_i\bigr)x_i'' + \bigl(s_i' + r_i\bigr)x_i''' + \bigl(u_i' + s_i\bigr)x_i^{(4)} + u_i x_i^{(5)} = f_i', \\ \ldots \\ q_i^{(k-4)} x_i + \cdots + u_i x_i^{(k)} = f_i^{(k-4)}. \end{cases} \tag{10}$$

В матричной форме система уравнений (10) имеет вид $A^{ki}W^{ki} = G^{ki}$ в обозначениях

$$A^{ki} = \begin{bmatrix} 1 & -2h & 4\frac{h^2}{2!} & -8\frac{h^3}{3!} & 16\frac{h^4}{4!} & \dots & (-2)^k\frac{h^k}{k!} \\ 1 & -h & \frac{h^2}{2!} & -\frac{h^3}{3!} & \frac{h^4}{4!} & \dots & (-1)^k\frac{h^k}{k!} \\ 1 & h & \frac{h^2}{2!} & \frac{h^3}{3!} & \frac{h^4}{4!} & \dots & \frac{h^k}{k!} \\ 1 & 2h & 4\frac{h^2}{2!} & 8\frac{h^3}{3!} & 16\frac{h^4}{4!} & \dots & 2^k\frac{h^k}{k!} \\ q_i & p_i & r_i & s_i & u_i & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ q_i^{(k-4)} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & u_i \end{bmatrix}, \tag{11}$$

$$W^{ki} = \begin{bmatrix} x_i & x_i' & x_i'' & x_i''' & x_i^{(4)} & \dots x_i^{(k)} \end{bmatrix}^\top, \tag{12}$$

$$G^{ki} = \begin{bmatrix} x_{i-2} & x_{i-1} & x_{i+1} & x_{i+2} & f_i & f_i' & f_i'' & \dots & f_i^{(k-4)} \end{bmatrix}^\top, \tag{13}$$

где $\top$ — символ транспонирования. Здесь и ниже первый верхний индекс k означает степень используемого многочлена Тейлора, если речь не идет о показателях алгебраических степеней, степенях производных, символов обратных матриц и транспонирования; второй из пары верхних индексов i в наименованиях матриц и их элементов, если таковой присутствует, означает номер центрального узла пятиточечного шаблона, в котором записана матрица. Матрицы A^{ki}, как и ранее в [12–14], будем называть локальными матрицами.

Предполагая существование обратной матрицы $B^{ki} = (A^{ki})^{-1}$ от локальной матрицы A^{ki}, найдем

$$W^{ki} = B^{ki}G^{ki} \tag{14}$$

или в координатной форме

$$x_i = b_{11}^{ki}x_{i-2} + b_{12}^{ki}x_{i-1} + b_{13}^{ki}x_{i+1} + b_{14}^{ki}x_{i+2} + b_{15}^{ki}f_i + \sum_{m=6}^{k+1} b_{1m}^{ki}f_i^{(m-5)}, \tag{15}$$

$$x_i' = b_{21}^{ki}x_{i-2} + b_{22}^{ki}x_{i-1} + b_{23}^{ki}x_{i+1} + b_{24}^{ki}x_{i+2} + b_{25}^{ki}f_i + \sum_{m=6}^{k+1} b_{2m}^{ki}f_i^{(m-5)}, \tag{16}$$

$$x_i'' = b_{31}^{ki}x_{i-2} + b_{32}^{ki}x_{i-1} + b_{33}^{ki}x_{i+1} + b_{34}^{ki}x_{i+2} + b_{35}^{ki}f_i + \sum_{m=6}^{k+1} b_{3m}^{ki}f_i^{(m-5)}, \tag{17}$$

$$\dots$$

$$x_i^{(k)} = b_{(k+1)1}^{ki}x_{i-2} + b_{(k+1)2}^{ki}x_{i-1} + b_{(k+1)3}^{ki}x_{i+1} + \\ + b_{(k+1)4}^{ki}x_{i+2} + b_{(k+1)5}^{ki}f_i + \sum_{m=6}^{k+1} b_{(k+1)m}^{ki}f_i^{(m-5)}, \tag{18}$$

где b_{lm}^{ki}, $l = 1, 2, \dots, k+1$, $m = 1, 2, \dots, k+1$ — элементы матрицы B^{ki} в узле t_i. При $k = 4$ последние суммы в соотношениях (15)–(18) отсутствуют.

Из равенств (15), являющихся разностными уравнениями четвертого порядка [5] для пятиточечного шаблона t_{i-2}, t_{i-1}, t_i, t_{i+1}, t_{i+2}, $i = 2, 3, \ldots, n-2$, составим СЛАУ

$$L_h^k x = \begin{cases} -\dfrac{b_{11}^{ki}}{b_{15}^{ki}} x_{i-2} - \dfrac{b_{12}^{ki}}{b_{15}^{ki}} x_{i-1} + \dfrac{x_i}{b_{15}^{ki}} - \dfrac{b_{13}^{ki}}{b_{15}^{ki}} x_{i+1} - \dfrac{b_{14}^{ki}}{b_{15}^{ki}} x_{i+2} = \\ \qquad = f_i + \displaystyle\sum_{m=6}^{k+1} \dfrac{b_{1m}^{ki}}{b_{15}^{ki}} f_i^{(m-5)}, \quad i = 2, 3, \ldots, n-2. \end{cases} \tag{19}$$

Обратную матрицу от локальной матрицы и ее элементы в случае, когда при построении разностного уравнения не было использовано никакого ГУ, будем ниже обозначать как B^{ki} и b_{lm}^{ki} соответственно.

Система (19) содержит $n-4$ уравнения с n неизвестными x_i, $i = 0, 1, \ldots, n$, т.е. необходимо составить дополнительно еще четыре уравнения. Однако заметим, что еще не были использованы четыре ГУ задачи (6).

Исследуем смешанное ГУ (5). Имеем следующие многочлены при фиксированном $k \geqslant 4$:

$$x_2 - 2hx_2' + 4\frac{h^2}{2!}x_2'' - 8\frac{h^3}{3!}x_2''' + \cdots + (-2)^k \frac{h^k}{k!} x_2^{(k)} = x_0, \tag{20}$$

$$x_2' - 2hx_2'' + 4\frac{h^2}{2!}x_2''' - 8\frac{h^3}{3!}x_2^{(4)} + \cdots + (-2)^{k-1} \frac{h^{k-1}}{(k-1)!} x_2^{(k)} = x_0', \tag{21}$$

$$x_2'' - 2hx_2''' + 4\frac{h^2}{2!}x_2^{(4)} - 8\frac{h^3}{3!}x_2^{(5)} + \cdots + (-2)^{k-2} \frac{h^{k-2}}{(k-2)!} x_2^{(k)} = x_0'', \tag{22}$$

$$x_2''' - 2hx_2^{(4)} + 4\frac{h^2}{2!}x_2^{(5)} - 8\frac{h^3}{3!}x_2^{(6)} + \cdots + (-2)^{k-3} \frac{h^{k-3}}{(k-3)!} x_2^{(k)} = x_0'''. \tag{23}$$

Обе части равенства (20) умножим на α_0, равенства (21) — на β_0, равенства (22) — на γ_0, равенства (23) — на λ_0 и сложим, в итоге получим

$$\begin{aligned} &\alpha_0 x_2 + (-2\alpha_0 h + \beta_0)\, x_2' + \left(4\frac{\alpha_0 h^2}{2!} - 2\beta_0 h + \gamma_0\right) x_2'' + \\ &\qquad + \left(-8\frac{\alpha_0 h^3}{3!} + 4\frac{\beta_0 h^2}{2!} - 2\gamma_0 h + \lambda_0\right) x_2''' + \cdots + \\ &\qquad\quad + (-2)^{k-3}\left(-8\frac{\alpha_0 h^k}{k!} + 4\frac{\beta_0 h^{k-1}}{(k-1)!} - 2\frac{\gamma_0 h^{k-2}}{(k-2)!} + \frac{\lambda_0 h^{k-3}}{(k-3)!}\right) x_2^{(k)} = \widetilde{z}_0 \end{aligned}$$

или

$$A_0[x_2] + A_1[x_2'] + A_2[x_2''] + A_3[x_2'''] + \cdots + A_k[x_2^{(k)}] = \widetilde{z}_0, \tag{24}$$

где

$$A_0 = \alpha_0, \quad A_1 = -2\alpha_0 h + \beta_0, \quad A_2 = 4\frac{\alpha_0 h^2}{2!} - 2\beta_0 h + \gamma_0,$$

$$A_m = (-2)^{m-3}\left(-8\frac{\alpha_0 h^m}{m!} + 4\frac{\beta_0 h^{m-1}}{(m-1)!} - 2\frac{\gamma_0 h^{m-2}}{(m-2)!} + \frac{\lambda_0 h^{m-3}}{(m-3)!}\right), \; m = 3, 4, \ldots, k.$$

Сохраним приведенные выше выкладки при составлении СЛАУ (19), а для учета смешанного ГУ (5) при построении первого дополнительного разностного уравнения в СЛАУ (10) при $i = 2$ вместо первого приближенного равенства используем многочлен (24); в этом случае вместо (11)–(13) получим

$$A^{k2} = \begin{bmatrix} A_0 & A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & \dots & A_k \\ 1 & -h & \frac{h^2}{2!} & -\frac{h^3}{3!} & \frac{h^4}{4!} & \dots & (-1)^k \frac{h^k}{k!} \\ 1 & h & \frac{h^2}{2!} & \frac{h^3}{3!} & \frac{h^4}{4!} & \dots & \frac{h^k}{k!} \\ 1 & 2h & 4\frac{h^2}{2!} & 8\frac{h^3}{3!} & 16\frac{h^4}{4!} & \dots & 2^k\frac{h^k}{k!} \\ q_2 & p_2 & r_2 & s_2 & u_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ q_2^{(k-4)} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & u_2 \end{bmatrix}, \tag{25}$$

$$W^{k2} = \begin{bmatrix} x_2 & x_2' & x_2'' & x_2''' & x_2^{(4)} & \dots & x_2^{(k)} \end{bmatrix}^{\top},$$

$$G^{k2} = \begin{bmatrix} \widetilde{z}_0 & x_1 & x_3 & x_4 & f_2 & f_2' & f_2'' & \dots & f_2^{(k-4)} \end{bmatrix}^{\top}.$$

Предполагая существование обратной матрицы $Q^{k2} = (A^{k2})^{-1}$, вместо (14) найдем

$$W^{k2} = Q^{k2} G^{k2}. \tag{26}$$

Первая строка матричного равенства (26) после преобразований примет вид соотношения

$$-\frac{q_{12}^{k2}}{q_{15}^{k2}} x_1 + \frac{x_2}{q_{15}^{k2}} - \frac{q_{13}^{k2}}{q_{15}^{k2}} x_3 - \frac{q_{14}^{k2}}{q_{15}^{k2}} x_4 = f_2 + \sum_{m=6}^{k+1} \frac{q_{1m}^{k2}}{q_{15}^{k2}} f_2^{(m-5)} + \frac{q_{11}^{k2}}{q_{15}^{k2}} \widetilde{z}_0,$$

которое примем в качестве первого дополнительного разностного уравнения, при построении которого использовано смешанное ГУ (5). Напомним, что при $k = 4$ сумма в правой части последнего соотношения отсутствует и при этом задача фактически сводится к классическому методу сеток.

При построении трех оставшихся дополнительных уравнений, учитывающих три оставшихся ГУ задачи (6), воспользуемся описанной выше процедурой, в которой в СЛАУ (10) при $i = n - 2$ вместо четвертого приближенного равенства используем последовательно один из трех следующих многочленов:

$$x'_{n-2} + 2hx''_{n-2} + 4\frac{h^2}{2!}x'''_{n-2} + 8\frac{h^3}{3!}x^{(4)}_{n-2} + \dots + 2^{k-1}\frac{h^{k-1}}{(k-1)!}x^{(k)}_{n-2} = \widetilde{x}'_n, \tag{27}$$

$$x''_{n-2} + 2hx'''_{n-2} + 4\frac{h^2}{2!}x^{(4)}_{n-2} + 8\frac{h^3}{3!}x^{(5)}_{n-2} + \dots + 2^{k-2}\frac{h^{k-2}}{(k-2)!}x^{(k)}_{n-2} = \widetilde{x}''_n,$$

$$x'''_{n-2} + 2hx^{(4)}_{n-2} + 4\frac{h^2}{2!}x^{(5)}_{n-2} + 8\frac{h^3}{3!}x^{(6)}_{n-2} + \dots + 2^{k-3}\frac{h^{k-3}}{(k-3)!}x^{(k)}_{n-2} = \widetilde{x}'''_n.$$

Объединим четыре дополнительных уравнения в систему

$$\begin{cases} -\dfrac{q_{12}^{k2}}{q_{15}^{k2}}x_1 + \dfrac{x_2}{q_{15}^{k2}} - \dfrac{q_{13}^{k2}}{q_{15}^{k2}}x_3 - \dfrac{q_{14}^{k2}}{q_{15}^{k2}}x_4 = f_2 + \sum\limits_{m=6}^{k+1} \dfrac{q_{1m}^{k2}}{q_{15}^{k2}} f_2^{(m-5)} + \dfrac{q_{11}^{k2}}{q_{15}^{k2}}\widetilde{z}_0, \\ -\dfrac{c_{11}^{k(n-2)}}{c_{15}^{k(n-2)}}x_{n-4} - \dfrac{c_{12}^{k(n-2)}}{c_{15}^{k(n-2)}}x_{n-3} + \dfrac{x_{n-2}}{c_{15}^{k(n-2)}} - \dfrac{c_{13}^{k(n-2)}}{c_{15}^{k(n-2)}}x_{n-1} = \\ \qquad\qquad = f_{n-2} + \sum\limits_{m=6}^{k+1} \dfrac{c_{1m}^{k(n-2)}}{c_{15}^{k(n-2)}} f_{n-2}^{(m-5)} + \dfrac{c_{14}^{k(n-2)}}{c_{15}^{k(n-2)}}\widetilde{x}'_n, \\ -\dfrac{d_{11}^{k(n-2)}}{d_{15}^{k(n-2)}}x_{n-4} - \dfrac{d_{12}^{k(n-2)}}{d_{15}^{k(n-2)}}x_{n-3} + \dfrac{x_{n-2}}{d_{15}^{k(n-2)}} - \dfrac{d_{13}^{k(n-2)}}{d_{15}^{k(n-2)}}x_{n-1} = \\ \qquad\qquad = f_{n-2} + \sum\limits_{m=6}^{k+1} \dfrac{d_{1m}^{k(n-2)}}{d_{15}^{k(n-2)}} f_{n-2}^{(m-5)} + \dfrac{d_{14}^{k(n-2)}}{d_{15}^{k(n-2)}}\widetilde{x}''_n, \\ -\dfrac{e_{11}^{k(n-2)}}{e_{15}^{k(n-2)}}x_{n-4} - \dfrac{e_{12}^{k(n-2)}}{e_{15}^{k(n-2)}}x_{n-3} + \dfrac{x_{n-2}}{e_{15}^{k(n-2)}} - \dfrac{e_{13}^{k(n-2)}}{e_{15}^{k(n-2)}}x_{n-1} = \\ \qquad\qquad = f_{n-2} + \sum\limits_{m=6}^{k+1} \dfrac{e_{1m}^{k(n-2)}}{e_{15}^{k(n-2)}} f_{n-2}^{(m-5)} + \dfrac{e_{14}^{k(n-2)}}{e_{15}^{k(n-2)}}\widetilde{x}'''_n. \end{cases} \tag{28}$$

Здесь и ниже матрицы и коэффициенты разностного уравнения, при построении которого не были использованы ГУ, что уже было выше отмечено, или было использовано ГУ в форме значений искомой непрерывной функции $x(t)$ в границе сетки D_h, обозначены как B^{ki} и b_{ml}^{ki} соответственно; было использовано ГУ в форме значений производной первой степени — как C^{ki} и c_{ml}^{ki} соответственно; было использовано ГУ в форме значений производной второй степени — как D^{ki} и d_{ml}^{ki} соответственно; было использовано ГУ в форме значений производной третьей степени — как E^{ki} и e_{ml}^{ki} соответственно; было использовано смешанное ГУ — как Q^{ki} и q_{ml}^{ki} соответственно. Указанные обозначения введены для внесения ясности в силу того, что во всех уравнениях в СЛАУ (28) центральным узлом шаблона является либо узел t_2, либо узел t_{n-2}. Последнее приводит к совпадению номеров пар индексов в наименованиях ряда коэффициентов в уравнениях системы (28). Вследствие этого зафиксировать отличия одного уравнения от другого оказалось возможным лишь различными наименованиями входящих в них коэффициентов.

Совокупность СЛАУ (19), (28) есть РКЗ, аппроксимирующая ДКЗ (6), решение которой позволит найти искомые значения сеточной функции x_i, $i = 0, 1, \dots, n$.

Как только числа x_i, $i = 0, 1, \dots, n$, станут известными, в центральных узлах t_i, $i = 2, 3, \dots, n-2$, пятиточечных шаблонов по формулам (16)–(18) вычислим производные искомой функции $x(t)$ вплоть до степени k. Недостающие значения первой производной x'_0, x'_1, x'_{n-1}, x'_n, если они отсутствуют в условии ДКЗ, найдем по формулам (21), (27) и с использованием разложений

$$x'_1 = x'_2 - hx''_2 + \frac{h^2}{2!}x'''_2 - \frac{h^3}{3!}x_2^{(4)} + \dots + (-1)^{k-1}\frac{h^{k-1}}{(k-1)!}x_2^{(k)}, \tag{29}$$

$$x'_{n-1} = x'_{n-2} + hx''_{n-2} + \frac{h^2}{2!}x'''_{n-2} + \frac{h^3}{3!}x_{n-2}^{(4)} + \dots + \frac{h^{k-1}}{(k-1)!}x_{n-2}^{(k)}. \tag{30}$$

По формулам, аналогичным (21), (27), (29), (30), можно найти недостающие значения производных $x_0^{(m)}$, $x_1^{(m)}$, $x_{n-1}^{(m)}$, $x_n^{(m)}$, $m = 2, 3, \ldots, k$.

3. Вычисление порядка аппроксимации разностных краевых задач для ОДУ4. При вычислении ПА, с которым разностная краевая задача аппроксимирует дифференциальную, в [5] обоснована целесообразность разбиения РКЗ на подзадачи (подсистемы); поэтому в отдельные подзадачи будем выделять СЛАУ, в уравнения которой не входят постоянные значения из ГУ, и СЛАУ, в уравнения которой входят все постоянные значения из ГУ, а затем отдельно будем вычислять ПА этих двух подзадач. Отметим, что выше разбиение на эти две подзадачи уже осуществлено в форме СЛАУ (19) и (28).

Первую подзадачу (19) запишем в компактной символической форме в обозначениях [5]:

$$L_{h,M}^k x = f_{h,M}^k, \tag{31}$$

вторую подзадачу (28) — в виде

$$l_{h,M}^k x = g_{h,M}^k, \tag{32}$$

где второй нижний индекс M означает, что рассматривается смешанная ДКЗ.

Ниже под обозначениями $L_{h,M}^k x = f_{h,M}^k$ или $L_h^k x = f_h^k$ будем понимать первую подзадачу.

Наряду с обозначением $L_{h,M}^k x = f_{h,M}^k$ эту же подзадачу для краткости будем ниже обозначать и как $L_{h,M}^k$, возможно, без второго нижнего индекса в случае, когда будет рассматриваться несмешанная ДКЗ.

Рассмотрим первую и вторую подзадачи (31) и (32). Подстановка $[x]$ в подзадачи (31) и (32) приведет к

$$L_{h,M}^k [x] = f_{h,M}^k + \delta f_{h,M}^k \tag{33}$$

и

$$l_{h,M}^k [x] = g_{h,M}^k + \delta g_{h,M}^k. \tag{34}$$

Вычислим ПА разностных подзадач (33) и (34).

Для подзадачи (33) в соответствии с [5] в качестве оценки величины невязки примем норму

$$\|\delta f_{h,M}^k\| = \max\bigl(|\delta f_{h2}^k|, |\delta f_{h3}^k|, \ldots, |\delta f_{h(n-2)}^k|\bigr), \tag{35}$$

где компонента, второй нижний индекс которой совпадает с номером центрального узла шаблона, характеризует меру отличий, появление которой обусловлено уравнением подзадачи (33) с номером на единицу меньше этого второго нижнего индекса, и норму для подзадачи (34)

$$\|\delta g_{h,M}^k\| = \max\bigl(|\delta g_{h1}^k|, |\delta g_{h2}^k|, |\delta g_{h3}^k|, |\delta g_{h4}^k|\bigr), \tag{36}$$

где второй нижний индекс означает принадлежность компоненты к номеру уравнения подзадачи (34) при начале нумерации с единицы.

Норму всей РКЗ (33), (34) в соответствии с [5] запишем как

$$\|\delta f_M^k\| = \max\bigl(\|\delta f_{h,M}^k\|, \|\delta g_{h,M}^k\|\bigr). \tag{37}$$

Исследуем подзадачу (33). При фиксированном $k \geqslant 4$ при построении всех разностных уравнений сохраним все приведенные выше выкладки для задачи (19) с тем лишь отличием, что в СЛАУ (10) вместо четырех первых приближенных равенств используем следующие точные равенства:

$$
\begin{gathered}
[x_i] - 2h[x_i'] + 4\frac{h^2}{2!}[x_i''] - 8\frac{h^3}{3!}[x_i'''] + \dots + (-2)^k\frac{h^k}{k!}[x_i^{(k)}] = [x_{i-2}] - R_{i-2}^k,\\
[x_i] - h[x_i'] + \frac{h^2}{2!}[x_i''] - \frac{h^3}{3!}[x_i'''] + \dots + (-1)^k\frac{h^k}{k!}[x_i^{(k)}] = [x_{i-1}] - R_{i-1}^k,\\
[x_i] + h[x_i'] + \frac{h^2}{2!}[x_i''] + \frac{h^3}{3!}[x_i'''] + \dots + \frac{h^k}{k!}[x_i^{(k)}] = [x_{i+1}] - R_{i+1}^k,\\
[x_i] + 2h[x_i'] + 4\frac{h^2}{2!}[x_i''] + 8\frac{h^3}{3!}[x_i'''] + \dots + 2^k\frac{h^k}{k!}[x_i^{(k)}] = [x_{i+2}] - R_{i+2}^k,
\end{gathered}
$$

где R_{i-2}^k, R_{i-1}^k, R_{i+1}^k, $R_{i+2}^k = \frac{(2h)^{k+1}}{(k+1)!}x^{(k+1)}(\xi) = O(h^{k+1})$, $\xi \in (t_i, t_{i+2})$ — дополнительные члены разложений в ряд Тейлора в форме Лагранжа [15].

Локальная матрица (11) сохранит свой вид; вместо (12)–(14) получим

$$
[W^{ki}] = \Big[[x_i] \quad [x_i'] \quad [x_i''] \quad [x_i'''] \quad [x_i^{(4)}] \quad \dots \quad [x_i^{(k)}]\Big]^\top,
$$

$$
[G^{ki}] = \begin{bmatrix} [x_{i-2}] - R_{i-2}^k \\ [x_{i-1}] - R_{i-1}^k \\ [x_{i+1}] - R_{i+1}^k \\ [x_{i+2}] - R_{i+2}^k \\ f_i \\ f_i' \\ f_i'' \\ \dots \\ f_i^{(k-4)} \end{bmatrix},
$$

$$
[W^{ki}] = B^{ki}[G^{ki}]. \tag{38}
$$

Выпишем первую строку матричного равенства (38), являющуюся разностным уравнением:

$$
\begin{multlined}
b_{11}^{ki}\big([x_{i-2}]-R_{i-2}^k\big) + b_{12}^{ki}\big([x_{i-1}]-R_{i-1}^k\big) + b_{13}^{ki}\big([x_{i+1}]-R_{i+1}^k\big) + \\
+ b_{14}^{ki}\big([x_{i+2}]-R_{i+2}^k\big) + b_{15}^{ki}f_2 + \sum_{m=6}^{k+1} b_{1m}^{ki}f_2^{(m-5)} = [x_2]
\end{multlined}
$$

или

$$
\begin{multlined}
-\frac{b_{11}^{ki}}{b_{15}^{ki}}[x_{i-2}] - \frac{b_{12}^{ki}}{b_{15}^{ki}}[x_{i-1}] + \frac{[x_i]}{b_{15}^{ki}} - \frac{b_{13}^{ki}}{b_{15}^{ki}}[x_{i+1}] - \frac{b_{14}^{ki}}{b_{15}^{ki}}[x_{i+2}] = \\
= f_2 + \sum_{m=6}^{k+1}\frac{b_{1m}^{ki}}{b_{15}^{ki}}f_2^{(m-5)} - \frac{b_{11}^{ki}R_{i-2}^k + b_{12}^{ki}R_{i-1}^k + b_{13}^{ki}R_{i+1}^k + b_{14}^{ki}R_{i+2}^k}{b_{15}^{ki}}. \quad (39)
\end{multlined}
$$

Сравнивая уравнения (19) и (39), заключаем, что последняя дробь в (39) есть, в соответствии с (33), величина невязки δf_{hi}^k. Это позволяет записать систему невязок задачи так:

$$\delta f_{h,M}^k = \begin{cases} \delta f_{hi}^k, \\ i = 2, 3, \dots, n-2 \end{cases} = \begin{cases} -\frac{b_{11}^{ki} R_{i-2}^k + b_{12}^{ki} R_{i-1}^k + b_{13}^{ki} R_{i+1}^k + b_{14}^{ki} R_{i+2}^k}{b_{15}^{ki}}, \\ i = 2, 3, \dots, n-2. \end{cases} \tag{40}$$

Здесь δf_{hi}^k есть величина невязки, появляющаяся в уравнении с номером $i-1$ в подзадаче (33).

Вычислим норму невязки $\|\delta f_{h,M}^k\|$ подзадачи (33). При вычислении алгебраических дополнений транспонированных локальных матриц $(A^{ki})^\top$ в нижние индексы их обозначений будем вносить для ясности наименования используемых обратных матриц от локальных матриц A^{ki}.

Рассмотрим алгебраическое дополнение $M_{11,B}^{ki}$ элемента a_{11}^{ki} матрицы $(A^{ki})^\top$; здесь A^{ki} определяется соотношением (11). Используя известные свойства определителя [16], имеем

$$M_{11,B}^{ki} = \begin{vmatrix} -h & h & 2h & p_i & \dots & \widetilde{p}_i & \widetilde{\widetilde{p}}_i \\ \frac{h^2}{2!} & \frac{h^2}{2!} & 4\frac{h^2}{2!} & r_i & \dots & \widetilde{r}_i & \widetilde{\widetilde{r}}_i \\ -\frac{h^3}{3!} & \frac{h^3}{3!} & 8\frac{h^3}{3!} & s_i & \dots & \widetilde{s}_i & \widetilde{\widetilde{s}}_i \\ \frac{h^4}{4!} & \frac{h^4}{4!} & 16\frac{h^4}{4!} & u_i & \dots & \widetilde{u}_i & \widetilde{\widetilde{u}}_i \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (-1)^{k-1}\frac{h^{k-1}}{(k-1)!} & \frac{h^{k-1}}{(k-1)!} & 2^{k-1}\frac{h^{k-1}}{(k-1)!} & 0 & \dots & u_i & w_i \\ (-1)^k\frac{h^k}{k!} & \frac{h^k}{k!} & 2^k\frac{h^k}{(k)!} & 0 & \dots & 0 & u_i \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{h^k}{k!}\begin{vmatrix} h & 2h & p_i & \dots & \widetilde{p}_i & \widetilde{\widetilde{p}}_i \\ \frac{h^2}{2!} & 4\frac{h^2}{2!} & r_i & \dots & \widetilde{r}_i & \widetilde{\widetilde{r}}_i \\ \frac{h^3}{3!} & 8\frac{h^3}{3!} & s_i & \dots & \widetilde{s}_i & \widetilde{\widetilde{s}}_i \\ \frac{h^4}{4!} & 16\frac{h^4}{4!} & u_i & \dots & \widetilde{u}_i & \widetilde{\widetilde{u}}_i \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{h^{k-1}}{(k-1)!} & 2^{k-1}\frac{h^{k-1}}{(k-1)!} & 0 & \dots & u_i & w_i \end{vmatrix} +$$

$$+ (-1)^k\frac{h^k}{k!}\begin{vmatrix} -h & 2h & p_i & \dots & \widetilde{p}_i & \widetilde{\widetilde{p}}_i \\ \frac{h^2}{2!} & 4\frac{h^2}{2!} & r_i & \dots & \widetilde{r}_i & \widetilde{\widetilde{r}}_i \\ -\frac{h^3}{3!} & 8\frac{h^3}{3!} & s_i & \dots & \widetilde{s}_i & \widetilde{\widetilde{s}}_i \\ \frac{h^4}{4!} & 16\frac{h^4}{4!} & u_i & \dots & \widetilde{u}_i & \widetilde{\widetilde{u}}_i \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (-1)^k\frac{h^{k-1}}{(k-1)!} & 2^{k-1}\frac{h^{k-1}}{(k-1)!} & 0 & \dots & u_i & w_i \end{vmatrix} +$$

$$+ (-2)^{k+1}\frac{h^k}{k!}\begin{vmatrix} -h & h & p_i & \dots & \widetilde{p}_i & \widetilde{\widetilde{p}}_i \\ \frac{h^2}{2!} & \frac{h^2}{2!} & r_i & \dots & \widetilde{r}_i & \widetilde{\widetilde{r}}_i \\ -\frac{h^3}{3!} & \frac{h^3}{3!} & s_i & \dots & \widetilde{s}_i & \widetilde{\widetilde{s}}_i \\ \frac{h^4}{4!} & \frac{h^4}{4!} & u_i & \dots & \widetilde{u}_i & \widetilde{\widetilde{u}}_i \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (-1)^k\frac{h^{k-1}}{(k-1)!} & \frac{h^{k-1}}{(k-1)!} & 0 & \dots & u_i & w_i \end{vmatrix} +$$

$$+\,u_i\begin{vmatrix} -h & h & 2h & p_i & \dots & \widetilde{p}_i \\ \frac{h^2}{2!} & \frac{h^2}{2!} & 4\frac{h^2}{2!} & r_i & \dots & \widetilde{r}_i \\ -\frac{h^3}{3!} & \frac{h^3}{3!} & 8\frac{h^3}{3!} & s_i & \dots & \widetilde{s}_i \\ \frac{h^4}{4!} & \frac{h^4}{4!} & 16\frac{h^4}{4!} & u_i & \dots & \widetilde{u}_i \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (-1)^{k-1}\frac{h^{k-1}}{(k-1)!} & \frac{h^{k-1}}{(k-1)!} & 2^{k-1}\frac{h^{k-1}}{(k-1)!} & 0 & \dots & u_i \end{vmatrix} \approx$$

$$\approx h^k\{h^3+\dots+h^{k-1}h^{k-2}\}+u_iM_{11}^{(k-1)i}\approx\sum_{m=k+3}^{3k-3}a_mh^m+u_iM_{11}^{(k-1)i};$$

здесь и ниже в фигурных скобках приведены лишь суммы степеней, а сомножители, не зависящие от h, опущены; a_m — коэффициенты, не зависящие от h; $\widetilde{p}_i$, $\widetilde{r}_i$, $\widetilde{s}_i$, $\widetilde{u}_i$, $\widetilde{\widetilde{p}}_i$, $\widetilde{\widetilde{r}}_i$, $\widetilde{\widetilde{s}}_i$, $\widetilde{\widetilde{u}}_i$, w_i — некоторые функции от q_i, p_i, r_i, s_i, u_i и их производных. Другими словами,

$$M_{11,B}^{ki}\approx\sum_{m=k+3}^{3k-3}a_mh^m+u_iM_{11,B}^{(k-1)i}. \tag{41}$$

Имеем

$$M_{11,B}^{(k-1)i}=\begin{vmatrix} -h & h & 2h & p_i & \dots & \widetilde{p}_i \\ \frac{h^2}{2!} & \frac{h^2}{2!} & 4\frac{h^2}{2!} & r_i & \dots & \widetilde{r}_i \\ -\frac{h^3}{3!} & \frac{h^3}{3!} & 8\frac{h^3}{3!} & s_i & \dots & \widetilde{s}_i \\ \frac{h^4}{4!} & \frac{h^4}{4!} & 16\frac{h^4}{4!} & u_i & \dots & \widetilde{u}_i \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (-1)^{k-1}\frac{h^{k-1}}{(k-1)!} & \frac{h^{k-1}}{(k-1)!} & 2^{k-1}\frac{h^{k-1}}{(k-1)!} & 0 & \dots & u_i \end{vmatrix} \approx$$

$$\approx\{h^6+\dots+h^{k-1}h^{k-2}h^{k-3}\}\approx\sum_{m=6}^{3k-6}b_mh^m, \tag{42}$$

где b_m — коэффициенты, не зависящие от h. Сравнивая (41) и (42), заключаем, что при $k\geqslant 5$ (при $k=4$ первая полученная ниже формула теряет смысл) в соотношении (41) младшая степень первого слагаемого в первой сумме превосходит младшую степень второго слагаемого как минимум на две единицы, следовательно, можно положить

$$M_{11,B}^{ki}\approx u_iM_{11,B}^{(k-1)i}. \tag{43}$$

Несколько повторных использований последней формулы приводит к

$$M_{11,B}^{ki}\approx u_i^{k-4}M_{11,B}^{4i}. \tag{44}$$

Аналогичным образом могут быть получены приближенные равенства

$$M_{1j,B}^{ki}\approx u_i^{k-4}M_{1j,B}^{4i},\quad j=2,3,4,5. \tag{45}$$

Отсутствие в настоящей работе полного вывода формул (45) обусловлено лишь громоздкостью выкладок. При исследовании краевых задач для ОДУ2 вывод формул, аналогичных (44), (45), дан в [12].

На основании оценок (44), (45) и очевидных равенств

$$\frac{b_{1j}^{ki}}{b_{15}^{ki}} = \frac{M_{1j,B}^{ki}}{M_{15,B}^{ki}}, \quad j = 1,2,3,4,$$

имеем

$$\frac{b_{1j}^{ki}}{b_{15}^{ki}} \approx \frac{M_{1j,B}^{4i}}{M_{15,B}^{4i}}, \quad j = 1,2,3,4. \tag{46}$$

Вычислим оценки $M_{1j,B}^{4i}$, $j = 1, 2, \ldots, 5$. Пренебрегая старшими степенями, имеем

$$M_{11,B}^{4i} = \begin{vmatrix} -h & h & 2h & p_i \\ \frac{h^2}{2!} & \frac{h^2}{2!} & \frac{4h^2}{2!} & r_i \\ -\frac{h^3}{3!} & \frac{h^3}{3!} & \frac{8h^3}{3!} & s_i \\ \frac{h^4}{4!} & \frac{h^4}{4!} & \frac{16h^4}{4!} & u_i \end{vmatrix} = -6h^6\Big(\frac{u_i}{3!} - \frac{2s_ih}{4!} + \frac{2r_ih^2}{3!4!} + \frac{2p_ih^3}{3!4!}\Big) \approx$$

$$\approx -\frac{6h^6}{3!}\Big(u_i - \frac{2s_ih}{4}\Big) = -h^6\Big(u_i - \frac{s_ih}{2}\Big), \tag{47}$$

$$M_{14,B}^{4i} \approx -\frac{6h^6}{3!}\Big(u_i + \frac{2s_ih}{4}\Big) = -h^6\Big(u_i + \frac{s_ih}{2}\Big), \tag{48}$$

$$M_{12,B}^{4i} = -24h^6\Big(-\frac{u_i}{3!} + \frac{s_ih}{4!} + \frac{8r_ih^2}{3!4!} - \frac{4p_ih^3}{3!4!}\Big) \approx h^6\big(4u_i - s_ih\big), \tag{49}$$

$$M_{13,B}^{4i} \approx -24h^6\Big(-\frac{u_i}{3!} - \frac{s_ih}{4!}\Big) = h^6\big(4u_i + s_ih\big), \tag{50}$$

$$M_{15,B}^{4i} = h^{10}. \tag{51}$$

Отметим закономерность в парах формул (47), (48) и (49), (50): знаки первых слагаемых совпадают, вторых — противоположны.

Для рядов Тейлора

$$x_{i-1} = x_i - hx_i' + \frac{h^2}{2!}x_i'' - \frac{h^3}{3!}x_i''' + \cdots =$$
$$= \sum_{m=0}^{k}(-1)^m\frac{h^m}{m!}x_i^{(m)} + \sum_{m=k+1}^{\infty}(-1)^m\frac{h^m}{m!}x_i^{(m)} = P_{i-1}^k + R_{i-1}^k,$$

$$x_{i+1} = x_i + hx_i' + \frac{h^2}{2!}x_i'' + \frac{h^3}{3!}x_i''' + \cdots =$$
$$= \sum_{m=0}^{k}\frac{h^m}{m!}x_i^{(m)} + \sum_{m=k+1}^{\infty}\frac{h^m}{m!}x_i^{(m)} = P_{i+1}^k + R_{i+1}^k,$$

где P_{i-1}^k, P_{i+1}^k — многочлены Тейлора степени k, R_{i-1}^k, R_{i+1}^k — дополнительные члены, в [12] показана справедливость следующих формул:

$$R_{i+1}^k - R_{i-1}^k = O(h^{k+2}), \quad R_{i+1}^k + R_{i-1}^k = O(h^{k+1}) \tag{52}$$

для нечетного k и

$$R_{i+1}^k - R_{i-1}^k = O(h^{k+1}), \quad R_{i+1}^k + R_{i-1}^k = O(h^{k+2}) \tag{53}$$

для четного k.

Аналогично тому, как было сделано в [12], можно показать справедливость следующих формул:

$$R_{i+2}^k - R_{i-2}^k = O(h^{k+2}), \quad R_{i+2}^k + R_{i-2}^k = O(h^{k+1}) \tag{54}$$

для нечетного k и

$$R_{i+2}^k - R_{i-2}^k = O(h^{k+1}), \quad R_{i+2}^k + R_{i-2}^k = O(h^{k+2}) \tag{55}$$

для четного k.

С учетом соотношений (46)–(51), из (40) при $i = 2, 3, \ldots, n-2$ имеем

$$\begin{aligned}\delta f_{hi}^k = -\frac{b_{11}^{ki} R_{i-2}^k + b_{12}^{ki} R_{i-1}^k + b_{13}^{ki} R_{i+1}^k + b_{14}^{ki} R_{i+2}^k}{b_{15}^{ki}} \approx \\ \approx \frac{h^6\left[\left(u_i - \frac{s_i h}{2}\right) R_{i-2}^k + \left(u_i + \frac{s_i h}{2}\right) R_{i+2}^k - (4u_i - s_i h)\, R_{i-1}^k - (4u_i + s_i h)\, R_{i+1}^k\right]}{h^{10}} = \\ = \frac{2u_i (R_{i-2}^k + R_{i+2}^k) - s_i h (R_{i-2}^k - R_{i+2}^k)}{2h^4} - \\ - \frac{8u_i (R_{i-1}^k + R_{i+1}^k) - 2s_i h (R_{i-1}^k - R_{i+1}^k)}{2h^4}.\end{aligned} \tag{56}$$

Подстановка оценок (52), (54) в (56) дает

$$\begin{aligned}\delta f_{hi}^k \approx \frac{2u_i O(h^{k+1}) - s_i h O(h^{k+2}) - 8u_i O(h^{k+1}) + 2s_i h O(h^{k+2})}{2h^4} \approx \\ \approx O(h^{k-3}) + O(h^{k-1}) + O(h^{k-3}) + O(h^{k-1}) = O(h^{k-3})\end{aligned}$$

или

$$\delta f_{hi}^k \approx O\big(h^{k-3}\big), \tag{57}$$

откуда в соответствии с (35)

$$\|\delta f_{h,M}^k\| = O(h^{k-3}) \tag{58}$$

для нечетного k.

Подстановка оценок (53), (55) в (56) дает

$$\begin{aligned}\delta f_{hi}^k \approx \frac{2u_i O(h^{k+2}) - s_i h O(h^{k+1}) - 8u_i O(h^{k+2}) + 2s_i h O(h^{k+1})}{2h^4} \approx \\ \approx O(h^{k-2}) + O(h^{k-2}) + O(h^{k-2}) + O(h^{k-2}) = O(h^{k-2})\end{aligned}$$

или

$$\delta f_{hi}^k \approx O(h^{k-2}), \tag{59}$$

откуда

$$\|\delta f_{h,M}^k\| = O(h^{k-2}) \tag{60}$$

для четного k.

Из оценок (58), (60) следует, что при $m \geqslant 2$, m — натуральное число, задачи $L_{h,M}^{2m}$ и $L_{h,M}^{2m+1}$ имеют одинаковый ПА. Аналогичная ситуация имела место и при исследовании краевых задач для ОДУ2 [12] и для систем ОДУ2 [13] при $m \geqslant 1$ и не имела места для краевых задач для ОДУ3 [14] при использовании пятиточечного шаблона, где ситуация оказалась противоположной: одинаковый ПА имели задачи L_h^{2m-1} и L_h^{2m} при $m \geqslant 3$; при использовании четырехточечного шаблона в задаче для ОДУ3 закономерности, связанные с зависимостью ПА от четности или нечетности k, отсутствовали.

Исследуем подзадачу (34). Используем описанную выше процедуру, выполненную при построении первого уравнения системы (28) с заменой приближенных равенств (20)–(23) на следующие точные:

$$[x_2] - 2h[x_2'] + 4\frac{h^2}{2!}[x_2''] - 8\frac{h^3}{3!}[x_2'''] + \cdots + (-2)^k\frac{h^k}{k!}[x_2^{(k)}] = [x_0] - R_0^k,$$

$$[x_2'] - 2h[x_2''] + 4\frac{h^2}{2!}[x_2'''] + \cdots + (-2)^{k-1}\frac{h^{k-1}}{(k-1)!}[x_2^{(k)}] = [x_0'] - R_0^{k-1},$$

$$[x_2''] - 2h[x_2'''] + 4\frac{h^2}{2!}[x_2^{(4)}] + \cdots + (-2)^{k-2}\frac{h^{k-2}}{(k-2)!}[x_2^{(k)}] = [x_0''] - R_0^{k-2},$$

$$[x_2'''] - 2h[x_2^{(4)}] + 4\frac{h^2}{2!}[x_2^{(5)}] + \cdots + (-2)^{k-3}\frac{h^{k-3}}{(k-3)!}[x_2^{(k)}] = [x_0'''] - R_0^{k-3}.$$

В частности, вместо (24) получим

$$A_0[x_2] + A_1[x_2'] + A_2[x_2''] + A_3[x_2'''] + \cdots + A_k[x_2^{(k)}] = \\ = \widetilde{z}_0 - \alpha_0 R_0^k - \beta_0 R_0^{k-1} - \gamma_0 R_0^{k-2} - \lambda_0 R_0^{k-3}. \tag{61}$$

В итоге локальная матрица A^{k2} сохранит свой вид (25), что приводит к матричному равенству

$$[W^{k2}] = Q^{k2}[G^{k2}] \tag{62}$$

в обозначениях

$$[W^{k2}] = \Big[[x_2] \quad [x_2'] \quad [x_2''] \quad [x_2'''] \quad [x_2^{(4)}] \quad \ldots \quad [x_2^{(k)}]\Big]^\top,$$

$$Q^{k2} = \left(A^{k2}\right)^{-1},$$

$$[G^{k2}] = \begin{bmatrix} \widetilde{z}_0 - \alpha_0 R_0^k - \beta_0 R_0^{k-1} - \gamma_0 R_0^{k-2} - \lambda_0 R_0^{k-3} \\ [x_1] - R_1^k \\ [x_3] - R_3^k \\ [x_4] - R_4^k \\ f_2 \\ f_2' \\ f_2'' \\ \ldots \\ f_2^{(k-4)} \end{bmatrix}.$$

Выпишем первую строку матричного равенства (62), являющуюся разностным уравнением, при построении которого было использовано смешанное ГУ (5):

$$q_{11}^{k2}\big(\widetilde{z}_0 - \alpha_0 R_0^k - \beta_0 R_0^{k-1} - \gamma_0 R_0^{k-2} - \lambda_0 R_0^{k-3}\big) + q_{12}^{k2}\big([x_1] - R_1^k\big) + \\ + q_{13}^{k2}\big([x_3] - R_3^k\big) + q_{14}^{k2}\big([x_4] - R_4^k\big) + q_{15}^{k2} f_2 + \sum_{m=6}^{k+1} q_{1m}^{k2} f_2^{(m-5)} = [x_2]$$

или

$$-\frac{q_{12}^{k2}}{q_{15}^{k2}}[x_1] + \frac{[x_2]}{q_{15}^{k2}} - \frac{q_{13}^{k2}}{q_{15}^{k2}}[x_3] - \frac{q_{14}^{k2}}{q_{15}^{k2}}[x_4] = f_2 + \sum_{m=6}^{k+1} \frac{q_{1m}^{k2}}{q_{15}^{k2}} f_2^{(m-5)} + \frac{q_{11}^{k2}}{q_{15}^{k2}}\widetilde{z}_0 - \\ - \frac{q_{11}^{k2}(\alpha_0 R_0^k + \beta_0 R_0^{k-1} + \gamma_0 R_0^{k-2} + \lambda_0 R_0^{k-3}) + q_{12}^{k2} R_1^k + q_{13}^{k2} R_3^k + q_{14}^{k2} R_4^k}{q_{15}^{k2}}, \quad (63)$$

где последняя дробь есть величина невязки δg_{hq}^k, в наименовании которой второй нижний индекс указывает на использование элементов матрицы Q^{42} при построении разностного уравнения (63).

Вычислим норму невязки $\|\delta g_{h,M}^k\|$ подзадачи (34). Для матрицы Q^{k2}, как это было сделано выше для матрицы B^{ki}, можно показать справедливость оценок

$$\frac{q_{1j}^{k2}}{q_{15}^{k2}} \approx \frac{M_{1j,Q}^{42}}{M_{15,Q}^{42}}, \quad j = 1, 2, 3, 4.$$

Вычислим алгебраические дополнения $M_{1j,Q}^{42}$, $j = 1, 2, \ldots, 5$. Отметим, что вычисление точных значений алгебраических дополнений $M_{1j,Q}^{42}$ не является особо трудоемкой процедурой; тем не менее нет строгой необходимости в нахождении точных значений в силу того, что для вычисления ПА (здесь речь не идет о выполнении численных экспериментов) необходимы лишь главные части этих алгебраических дополнений в их разложениях по степеням h; поэтому лишь для сокращения объема выкладок допустим пренебрежение старшими степенями, прежде всего в разложениях по степеням h коэффициентов A_1, A_2, A_3, A_4, при нахождении алгебраических дополнений элементов первого столбца локальной матрицы A^{42} (см. (24), (25)).

Анализ матриц (11), (25) указывает на независимость значения $M_{11,Q}^{42}$ от чисел α_0, β_0, γ_0, λ_0, тогда как оставшиеся оценки алгебраических дополнений зависят от значений этих чисел [16]; действительно, пренебрегая старшими степенями, имеем

$$M_{11,Q}^{42} = -6h^6\Big(\frac{u_i}{3!} - \frac{2s_i h}{4!} + \frac{2r_i h^2}{3!4!} + \frac{2p_i h^3}{3!4!}\Big) \approx -h^6\Big(u_2 - \frac{s_2 h}{2}\Big) \approx -u_2 h^6, \quad (64)$$

$$M_{12,Q}^{42} = -A_1\Big(\frac{u_2 h^5}{3} - \frac{s_2 h^6}{4} + \frac{r_2 h^7}{18}\Big) + A_2\Big(u_2 h^4 - \frac{7 s_2 h^5}{12} + \frac{p_2 h^7}{18}\Big) - \\ - A_3\Big(u_2 h^3 - \frac{7 r_2 h^5}{12} + \frac{p_2 h^6}{4}\Big) + A_4\Big(s_2 h^3 - r_2 h^4 + \frac{p_2 h^5}{3}\Big) \approx$$

$$\approx h^3\Big(s_2A_4 - u_2A_3 + u_2A_2h - \frac{u_2A_1h^2}{3}\Big), \quad (65)$$

$$M^{42}_{13,Q} \approx h^3\left(3s_2A_4 - 3u_2A_3 + u_2A_2h + u_2A_1h^2\right), \quad (66)$$

$$M^{42}_{14,Q} \approx h^3\Big(-s_2A_4 + u_2A_3 + \frac{s_2A_2h^2}{12} - \frac{u_2A_1h^2}{6}\Big), \quad (67)$$

$$M^{42}_{15,Q} = h^6\Big(A_4 - \frac{A_3h}{2} - \frac{A_2h^2}{12} + \frac{A_1h^3}{12}\Big). \quad (68)$$

Невязку δg^k_{hq} разобьем на две составляющие:

$$\delta g^k_{hq_1} = -\frac{q^{k2}_{11}(\alpha_0R^k_0 + \beta_0R^{k-1}_0 + \gamma_0R^{k-2}_0 + \lambda_0R^{k-3}_0)}{q^{k2}_{15}}, \quad (69)$$

$$\delta g^k_{hq_2} = -\frac{q^{k2}_{12}R^k_1 + q^{k2}_{13}R^k_3 + q^{k2}_{14}R^k_4}{q^{k2}_{15}} \quad (70)$$

и исследуем их отдельно.

Число комбинаций одновременно ненулевых коэффициентов α_0, β_0, γ_0, λ_0 смешанного ГУ определяется, очевидно, как $C^1_4 + C^2_4 + C^3_4 + C^4_4 = 15$, где C^m_n — число сочетаний из n по m. Главные части A_1, A_2, A_3, A_4 коэффициентов левой части равенства (61) в зависимости от значений α_0, β_0, γ_0, λ_0 приведены в табл. 1. Здесь единица означает присутствие соответствующего коэффициента в смешанном ГУ, нуль — его отсутствие. Отметим, что четыре последние строки в табл. 1 соответствуют ГУ той или иной степени в форме одного слагаемого (1)–(4). В главных частях постоянные сомножители, не зависящие от h, опущены.

Таблица 1

Главные части коэффициентов левой части равенства (61)
[The main parts of coefficients of the left side equality (61)]

№	α_0	β_0	γ_0	λ_0	A_1	A_2	A_3	A_4
1	1	1	0	0	β_0	β_0h	β_0h^2	β_0h^3
2	1	0	1	0	α_0h	γ_0	γ_0h	γ_0h^2
3	1	0	0	1	α_0h	α_0h^2	λ_0	λ_0h
4	0	1	1	0	β_0	γ_0	γ_0h	γ_0h^2
5	0	1	0	1	β_0	β_0h	λ_0	λ_0h
6	0	0	1	1	λ_0h^2	γ_0	λ_0	λ_0h
7	1	1	1	0	β_0	γ_0	γ_0h	γ_0h^2
8	1	1	0	1	β_0	β_0h	λ_0	λ_0h
9	1	0	1	1	α_0h	γ_0	λ_0	λ_0h
10	0	1	1	1	β_0	γ_0	λ_0	λ_0h
11	1	1	1	1	β_0	γ_0	λ_0	λ_0h
12	1	0	0	0	α_0h	α_0h^2	α_0h^3	α_0h^4
13	0	1	0	0	β_0	β_0h	β_0h^2	β_0h^3
14	0	0	1	0	γ_0h^3	γ_0	γ_0h	γ_0h^2
15	0	0	0	1	λ_0h^2	λ_0h^2	λ_0	λ_0h

Если опустить не зависящие от h постоянные сомножители и пренебречь старшими степенями, то соотношения (64)–(68) и данные табл. 1 позволяют записать следующие предварительные оценки:

$$M_{11,Q}^{42} \approx h^6, \tag{71}$$

$$M_{12,Q}^{42} + M_{13,Q}^{42} + M_{14,Q}^{42} \approx A_3 h^3, \tag{72}$$

$$M_{15,Q}^{42} \approx A_4 h^6, \tag{73}$$

$$\frac{A_3}{A_4} = h^{-1}, \tag{74}$$

на основании которых и очевидных равенств

$$\frac{q_{1j}^{42}}{q_{15}^{42}} = \frac{M_{1j,Q}^{42}}{M_{15,Q}^{42}}, \quad j = 1, 2, 3, 4,$$

из (69) получим

$$\begin{aligned} \delta g_{hq_1}^k = -\frac{q_{11}^{k2}(\alpha_0 R_0^k + \beta_0 R_0^{k-1} + \gamma_0 R_0^{k-2} + \lambda_0 R_0^{k-3})}{q_{15}^{k2}} \approx \\ \approx -\frac{M_{11,Q}^{42}(\alpha_0 R_0^k + \beta_0 R_0^{k-1} + \gamma_0 R_0^{k-2} + \lambda_0 R_0^{k-3})}{M_{15,Q}^{42}} \approx \\ \approx -\frac{h^6(\alpha_0 h^3 + \beta_0 h^2 + \gamma_0 h + \lambda_0) O(h^{k-2})}{A_4 h^6} = \\ = -\frac{(\alpha_0 h^3 + \beta_0 h^2 + \gamma_0 h + \lambda_0) O(h^{k-2})}{A_4}, \end{aligned} \tag{75}$$

а из (70) —

$$\begin{aligned} \delta g_{hq_2}^k = -\frac{q_{12}^{k2} R_1^k + q_{13}^{k2} R_3^k + q_{14}^{k2} R_4^k}{q_{15}^{k2}} \approx \\ \approx -\frac{(M_{12,Q}^{42} + M_{13,Q}^{42} + M_{14,Q}^{42}) O(h^{k+1})}{M_{15,Q}^{42}} \approx \\ \approx -\frac{A_3 h^3 O(h^{k+1})}{A_4 h^6} = -\frac{h^{-1} O(h^{k+1})}{h^3} = O(h^{k-3}). \end{aligned} \tag{76}$$

Оценка (75) для каждого набора α_0, β_0, γ_0, λ_0 требует дальнейшего уточнения результата с использованием данных табл. 1, тогда как оценка (76) дает окончательный результат.

Пусть $\lambda_0 \neq 0$. В этом случае, что следует из табл. 1, $A_4 = \lambda_0 h$. Тогда, пренебрегая старшими степенями, из (75) получим оценку

$$\delta g_{hq_1}^k \approx -\frac{(\alpha_0 h^3 + \beta_0 h^2 + \gamma_0 h + \lambda_0) O(h^{k-2})}{A_4} \approx -\frac{\lambda_0 O(h^{k-2})}{\lambda_0 h} = O(h^{k-3}),$$

справедливую для всех строк табл. 1 с номерами 3, 5, 6, 8–11, 15.

Пусть $\gamma_0 \neq 0$, $\lambda_0 = 0$. В этом случае, что следует из табл. 1, $A_4 = \gamma_0 h^2$. Тогда, пренебрегая старшими степенями, из (75) получим оценку

$$\delta g_{hq_1}^k \approx -\frac{(\alpha_0 h^3 + \beta_0 h^2 + \gamma_0 h + \lambda_0) O(h^{k-2})}{A_4} \approx -\frac{\gamma_0 h O(h^{k-2})}{\gamma_0 h^2} = O(h^{k-3}),$$

справедливую для всех строк табл. 1 с номерами 2, 4, 7, 14.

Пусть $\beta_0 \neq 0$, $\gamma_0 = 0$, $\lambda_0 = 0$. В этом случае, что следует из таблицы 1, $A_4 = \beta_0 h^3$. Тогда, пренебрегая старшими степенями, из (75) получим оценку

$$\delta g^k_{hq_1} \approx -\frac{(\alpha_0 h^3 + \beta_0 h^2 + \gamma_0 h + \lambda_0) O(h^{k-2})}{A_4} \approx -\frac{\beta_0 h^2 O(h^{k-2})}{\beta_0 h^3} = O(h^{k-3}),$$

справедливую для всех строк табл. 1 с номерами 1, 13.

Полученные выше оценки невязок $\delta g^k_{hq_1}$ для строк 13, 14 и 15 табл. 1 указывают на независимость ПА от степени старшей производной в ГУ, записанных в форме одного слагаемого.

Особое внимание уделим оставшейся строке 12 табл. 1 ($\alpha_0 = 1$, $\beta_0 = 0$, $\gamma_0 = 0$, $\lambda_0 = 0$), соответствующей ГУ $x(a) = \widetilde{x}_0$. В этом случае

$$Q^{42} \equiv B^{42}, \tag{77}$$

а невязка примет вид

$$\delta g^k_{hq} = \delta g^k_{hq1} + \delta g^k_{hq2} = -\frac{b^{k2}_{11} R^k_0 + b^{k2}_{12} R^k_1 + b^{k2}_{13} R^k_3 + b^{k2}_{14} R^k_4}{b^{k2}_{15}}. \tag{78}$$

Тождество (77) приводит к $M^{42}_{1j,Q} = M^{42}_{1j,B}$, $j = 1, 2, 3, 4$, что позволяет воспользоваться оценками (47)–(50), наличие закономерности в которых в парах формул (47), (48) и (49), (50) (а именно: знаки первых слагаемых совпадают, вторых — противоположны) и использование соотношений (52)–(55) приводит к зависимости значения невязки (78) от четности или нечетности k, т.е. здесь правомерны оценки вида (57) для нечетного k и (59) для четного k. Для любой другой строки табл. 1 не следует ожидать повторения аналогичной ситуации в силу того, что невязка δg^k_{hq} будет содержать как минимум один дополнительный член степени меньше k, поэтому надежда на использование соотношений (52)–(55) отсутствует.

Следовательно, для смешанного ГУ, в котором $\alpha_0 = 1$, $\beta_0 = 0$, $\gamma_0 = 0$, $\lambda_0 = 0$, имеем следующие оценки:

$$\delta g^k_{hq} \approx O(h^{k-2}) \tag{79}$$

для четного k;

$$\delta g^k_{hq} \approx O(h^{k-3})$$

для нечетного k и во всех остальных случаях при любых сочетаниях α_0, β_0, γ_0, λ_0 независимо от четности k.

Заметим, что вывод формул для вычисления алгебраических дополнений $M^{42}_{1j,Q}$, $j = 1, 2, \ldots, 5$, в узле t_{n-2}, что соответствует правой границе сетки D_h, приведет к формулам (64)–(68), в которых будут заменены на $n-2$ индексы в функциях u, s, r, p, значения которых, как показано выше, отсутствуют в оценках (71)–(74) и поэтому не использованы в (75), (76) при вычислении ПА; последнее означает, что на значение невязки не оказывает влияние граница области интегрирования, в которой ГУ записано.

Несмотря на то, что при четном k имеет место оценка (79), норма невязки второй подзадачи в соответствии с (36) независимо от четности или нечетности k окажется всегда равной

$$\|\delta g^k_{h,M}\| = O(h^{k-3}) \tag{80}$$

за счет оставшихся ГУ задачи (6) или, что то же самое, за счет второго, третьего и четвертого уравнений второй подзадачи (28), записанных, с учетом замечания, в узле t_2.

Норму всей РКЗ (33), (34), используя (58), (60), (80), в соответствии с (37) запишем как

$$\|\delta f_M^k\| = \max\bigl(\|\delta f_{h,M}^k\|, \quad \|\delta g_{h,M}^k\|\bigr) \leqslant Ch^{k-3}, \tag{81}$$

где C — не зависящий от h коэффициент, откуда следует ПА всей РКЗ (33), (34), равный $k-3$.

Отметим, что оценка (81) справедлива для любой краевой задачи, как симметричной, так и несимметричной, для ОДУ4 при использовании матричного метода в силу того, что среди ГУ задачи обязательно найдутся как минимум два ГУ в форме производной той или иной степени больше нуля или в форме смешанного ГУ, в котором хотя бы два коэффициента из чисел α_0, β_0, γ_0, λ_0 отличны от нуля.

При вычислении ПА были использованы главные части величин A_i, $i = 1, 2, 3, 4$, тогда как при выполнении далее численных экспериментов будут использоваться точные значения A_i, $i = 0, 1, \ldots, k$.

5. Оценка погрешностей. При выполнении численных экспериментов использованы следующие нормы:

– в качестве суммарной оценки относительной погрешности

$$D_x^k = \frac{\sqrt{\sum_{i=0}^{n}\bigl(x_i - [x_i]\bigr)^2}}{\sum_{i=0}^{n}\bigl|[x_i]\bigr|} \cdot 100\%, \tag{82}$$

  которую можно трактовать как некий аналог коэффициента вариации в статистике, характеризующего меру разброса в процентах [17];

– в качестве оценки абсолютной погрешности [5, 6]

$$E_x^k = \max\bigl|x_i - [x_i]\bigr|, \quad i = 0, 1, \ldots, n. \tag{83}$$

При апробации численного метода и оценке его погрешности использовано ОДУ4

$$\bigl(e^t + 2t\bigr)x^{(4)} + \bigl(e^t + 2\bigr)x''' + 6e^t x'' + 4e^t x' + e^t x = t^{-5}, \tag{84}$$

которое вместе со своим общим решением

$$\bigl(e^t + 2t\bigr)x = \frac{1}{24t} + C_1 + C_2 t + C_3 t^2 + C_4 t^3$$

взято из [18].

При выполнении расчетов использованы следующие наборы ГУ, $t \in [2, 6]$:

$$\begin{cases} x(2) = 2.285, & x'''(2) = -0.480, \\ x(6) = 0.746, & x''(6) = 0.159; \end{cases} \tag{85}$$

$$\begin{cases} x(2) = 2.285, & x'''(2) = -0.480, \\ x'(6) = -0.403, & x''(6) = 0.159; \end{cases} \tag{86}$$

$$\begin{cases} x'(2) = 0.135, & x'''(2) = -0.480, \\ x'(6) = -0.403, & x'''(6) = -2.18 \cdot 10^{-4}; \end{cases} \tag{87}$$

$$\begin{cases} x(2) = 2.285, \quad x'(2) = 0.135, \quad x'''(2) = -0.480, \\ x'''(6) = -2.18 \cdot 10^{-4}; \end{cases} \tag{88}$$

$$\begin{cases} x(2) = 2.285, \quad x'(2) = 0.135, \quad x'''(2) = -0.480, \\ x(6) + 2x'(6) + 3x''(6) + 4x'''(6) = 0.415. \end{cases} \tag{89}$$

Было принято $n = 20$, $h = 0.20$. Результаты численных экспериментов для решений $x(t)$ и первых производных $x'(t)$ приведены в табл. 2, в которой нормы $D^k_{x'}$, $E^k_{x'}$, характеризующие оценки относительных и абсолютных погрешностей, вычислены по формулам (82), (83) для производных $x'(t)$.

В рассмотренных задачах по данным анализа табл. 2 с увеличением степени k используемого многочлена Тейлора относительная и абсолютная погрешности:

а) уменьшаются, как это имело место при исследовании краевых задач для ОДУ2 [1, 12], систем ОДУ2 [13] и ОДУ3 [14];
б) уменьшаются довольно «плавно», что свидетельствует о независимости ПА от четности или нечетности k.

Отметим, что при $k = 4$ имеем классический метод сеток.

Выводы. Сформулируем основные выводы по работе.

1. Для дифференциальной краевой задачи составлена аппроксимирующая ее разностная краевая задача в виде двух подсистем: в первую подсистему вошли уравнения, при построении которых не были использованы граничные условия (ГУ) краевой задачи; во вторую подсистему вошли четыре уравнения, при построении которых были использованы ГУ задачи.
2. Теоретически выявлены закономерности между порядком аппроксимации (ПА) и степенью используемого многочлена Тейлора. Установлено следующее:
   а) ПА первой и второй подсистем пропорционален степени используемого многочлена Тейлора;
   б) ПА первой подсистемы меньше степени многочлена Тейлора на две единицы при ее четном значении и меньше на три единицы при ее нечетном значении;
   в) ПА второй подсистемы меньше степени многочлена Тейлора на три единицы независимо как от четности или нечетности этой степени, так и от степени старшей производной в ГУ краевой задачи.
3. Вычислен ПА разностной краевой задачи со всеми возможными комбинациями ГУ, включая смешанные граничные условия.

Конкурирующие интересы. Мы не имеем конкурирующих интересов.

Авторский вклад и ответственность. Все авторы принимали участие в разработке концепции статьи и в написании рукописи. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Это исследование не получило специального финансирования.

Таблица 2

Значения погрешностей для рассматриваемых краевых задач
[The error values for the considered boundary value problems (BVP)]

k	4	5	6	7	8	9	10	11
The BVP (84), (85)								
D_x^k, %	$1.06\cdot10^{-1}$	$6.03\cdot10^{-3}$	$1.48\cdot10^{-3}$	$1.54\cdot10^{-4}$	$3.93\cdot10^{-5}$	$8.62\cdot10^{-6}$	$1.46\cdot10^{-6}$	$3.55\cdot10^{-7}$
E_x^k	$1.33\cdot10^{-2}$	$7.65\cdot10^{-4}$	$1.89\cdot10^{-4}$	$2.49\cdot10^{-5}$	$5.64\cdot10^{-6}$	$1.23\cdot10^{-6}$	$2.15\cdot10^{-7}$	$5.18\cdot10^{-8}$
$D_{x'}^k$, %	$3.59\cdot10^{-1}$	$3.09\cdot10^{-2}$	$4.50\cdot10^{-3}$	$7.89\cdot10^{-4}$	$1.38\cdot10^{-4}$	$3.10\cdot10^{-5}$	$5.43\cdot10^{-6}$	$1.30\cdot10^{-6}$
$E_{x'}^k$	$1.62\cdot10^{-2}$	$9.03\cdot10^{-4}$	$2.02\cdot10^{-4}$	$2.89\cdot10^{-5}$	$4.96\cdot10^{-6}$	$1.16\cdot10^{-6}$	$1.89\cdot10^{-7}$	$4.58\cdot10^{-8}$
The BVP (84), (86)								
D_x^k, %	$8.95\cdot10^{-2}$	$2.53\cdot10^{-2}$	$1.14\cdot10^{-3}$	$2.20\cdot10^{-4}$	$4.69\cdot10^{-5}$	$1.01\cdot10^{-5}$	$1.80\cdot10^{-6}$	$4.32\cdot10^{-7}$
E_x^k	$1.14\cdot10^{-2}$	$3.38\cdot10^{-3}$	$1.57\cdot10^{-4}$	$3.03\cdot10^{-5}$	$6.12\cdot10^{-6}$	$1.33\cdot10^{-6}$	$2.38\cdot10^{-7}$	$5.69\cdot10^{-8}$
$D_{x'}^k$, %	$3.44\cdot10^{-1}$	$4.90\cdot10^{-2}$	$4.54\cdot10^{-3}$	$6.49\cdot10^{-4}$	$1.34\cdot10^{-4}$	$3.05\cdot10^{-5}$	$5.14\cdot10^{-6}$	$1.25\cdot10^{-6}$
$E_{x'}^k$	$1.41\cdot10^{-2}$	$2.47\cdot10^{-3}$	$1.60\cdot10^{-4}$	$2.39\cdot10^{-5}$	$5.76\cdot10^{-6}$	$1.34\cdot10^{-6}$	$2.20\cdot10^{-7}$	$5.40\cdot10^{-8}$
The BVP (84), (87)								
D_x^k, %	$3.22\cdot10^{-1}$	$2.70\cdot10^{-2}$	$5.89\cdot10^{-3}$	$1.97\cdot10^{-3}$	$5.20\cdot10^{-5}$	$1.69\cdot10^{-5}$	$5.62\cdot10^{-6}$	$8.60\cdot10^{-7}$
E_x^k	$4.59\cdot10^{-2}$	$3.10\cdot10^{-3}$	$7.80\cdot10^{-4}$	$3.14\cdot10^{-4}$	$6.22\cdot10^{-6}$	$2.72\cdot10^{-6}$	$9.34\cdot10^{-7}$	$1.43\cdot10^{-7}$
$D_{x'}^k$, %	1.10	$7.54\cdot10^{-2}$	$1.90\cdot10^{-2}$	$6.21\cdot10^{-3}$	$1.91\cdot10^{-4}$	$5.07\cdot10^{-5}$	$1.72\cdot10^{-5}$	$2.65\cdot10^{-6}$
$E_{x'}^k$	$2.80\cdot10^{-2}$	$2.08\cdot10^{-3}$	$5.05\cdot10^{-4}$	$1.79\cdot10^{-4}$	$6.94\cdot10^{-6}$	$1.89\cdot10^{-6}$	$5.61\cdot10^{-7}$	$9.77\cdot10^{-8}$
The BVP (84), (88)								
D_x^k, %	$3.84\cdot10^{-1}$	$3.51\cdot10^{-2}$	$5.97\cdot10^{-3}$	$2.05\cdot10^{-3}$	$4.38\cdot10^{-5}$	$1.43\cdot10^{-5}$	$5.47\cdot10^{-6}$	$7.82\cdot10^{-7}$
E_x^k	$3.85\cdot10^{-2}$	$3.58\cdot10^{-3}$	$6.32\cdot10^{-4}$	$1.95\cdot10^{-4}$	$5.07\cdot10^{-6}$	$1.62\cdot10^{-6}$	$5.43\cdot10^{-7}$	$8.52\cdot10^{-8}$
$D_{x'}^k$, %	$7.20\cdot10^{-1}$	$6.61\cdot10^{-2}$	$1.21\cdot10^{-2}$	$4.21\cdot10^{-3}$	$2.25\cdot10^{-4}$	$5.00\cdot10^{-5}$	$1.36\cdot10^{-5}$	$2.48\cdot10^{-6}$
$E_{x'}^k$	$2.01\cdot10^{-2}$	$1.85\cdot10^{-3}$	$3.43\cdot10^{-4}$	$1.37\cdot10^{-4}$	$6.57\cdot10^{-6}$	$1.64\cdot10^{-6}$	$4.70\cdot10^{-7}$	$8.44\cdot10^{-8}$
The BVP (84), (89)								
D_x^k, %	$3.81\cdot10^{-1}$	$1.88\cdot10^{-2}$	$6.26\cdot10^{-3}$	$1.75\cdot10^{-3}$	$4.57\cdot10^{-5}$	$1.07\cdot10^{-5}$	$4.30\cdot10^{-6}$	$5.97\cdot10^{-7}$
E_x^k	$3.82\cdot10^{-2}$	$2.13\cdot10^{-3}$	$6.61\cdot10^{-4}$	$1.67\cdot10^{-4}$	$5.58\cdot10^{-6}$	$1.30\cdot10^{-6}$	$4.45\cdot10^{-7}$	$6.95\cdot10^{-8}$
$D_{x'}^k$, %	$7.14\cdot10^{-1}$	$3.69\cdot10^{-2}$	$1.26\cdot10^{-2}$	$3.68\cdot10^{-3}$	$2.27\cdot10^{-4}$	$4.64\cdot10^{-5}$	$1.20\cdot10^{-5}$	$2.28\cdot10^{-6}$
$E_{x'}^k$	$1.99\cdot10^{-2}$	$1.12\cdot10^{-3}$	$3.58\cdot10^{-4}$	$1.21\cdot10^{-4}$	$6.02\cdot10^{-6}$	$1.42\cdot10^{-6}$	$4.15\cdot10^{-7}$	$7.42\cdot10^{-8}$

Библиографический список

1. Радченко В. П., Усов А. А. Модификация сеточных методов решения линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами на основе тейлоровских разложений // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2008. № 2(17). С. 60–65. doi: 10.14498/vsgtu646.
2. Keller H. B. Accurate difference methods for nonlinear two-point boundary value problems // *SIAM J. Numer. Anal.*, 1974. vol. 11, no. 2. pp. 305–320. doi: 10.1137/0711028.
3. Lentini M., Pereyra V. A variable order finite difference method for nonlinear multipoint boundary value problems // *Math. Comp.*, 1974. vol. 28, no. 128. pp. 981–1003. doi: 10.1090/s0025-5718-1974-0386281-4.
4. Keller H. B. Numerical solution of boundary value problems for ordinary differential equations: Survey and some resent results on difference methods / *Numerical Solutions of Boundary Value Problems for Ordinary Differential Equations*: Part I: Survey Lectures; ed. A. K. Aziz. New York: Academic Press, 1975. pp. 27–88. doi: 10.1016/b978-0-12-068660-5.50007-7.
5. Годунов С. К., Рябенький В. С. *Разностные схемы. Введение в теорию.* М.: Наука, 1977. 439 с.
6. Формалеев В. Ф., Ревизников Д. Л. *Численные методы.* М.: Физматлит, 2004. 400 с.
7. Самарский А. А. *Теория разностных схем.* М.: Наука, 1977. 656 с.
8. Самарский А. А., Гулин А. В. *Численные методы.* М.: Наука, 1973. 432 с.
9. Самарский А. А., Гулин А. В. *Устойчивость разностных схем.* М.: Наука, 1973. 416 с.
10. Boutayeb A., Chetouani A. Global Extrapolations Of Numerical Methods For Solving A Parabolic Problem With Non Local Boundary Conditions // *Intern. J. Comp. Math.*, 2003. vol. 80, no. 6. pp. 789–797. doi: 10.1080/0020716021000039209.
11. Boutayeb A., Chetouani A. A numerical comparison of different methods applied to the solution of problems with non local boundary conditions // *Appl. Math. Sci.*, 2007. vol. 1, no. 44. pp. 2173–2185, http://www.m-hikari.com/ams/ams-password-2007/ams-password41-44-2007/boutayebAMS41-44-2007.pdf.
12. Маклаков В. Н. Оценка порядка аппроксимации матричного метода численного интегрирования краевых задач для линейных неоднородных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2014. № 3(36). С. 143–160. doi: 10.14498/vsgtu1364.
13. Маклаков В. Н. Оценка порядка аппроксимации матричного метода численного интегрирования краевых задач для систем линейных неоднородных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами. Сообщение 2. Краевые задачи с граничными условиями второго и третьего рода // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2017. Т. 21, № 1. С. 55–79. doi: 10.14498/vsgtu1528.
14. Маклаков В. Н., Стельмах Я. Г. Численное интегрирование матричным методом краевых задач для линейных неоднородных обыкновенных дифференциальных уравнений третьего порядка с переменными коэффициентами // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2018. Т. 22, № 1. С. 153–183. doi: 10.14498/vsgtu1565.
15. Фихтенгольц Г. М. *Курс дифференциального и интегрального исчисления.* Т. 1. М.: Наука, 1970. 608 с.
16. Курош А. Г. *Курс высшей алгебры.* М.: Наука, 1971. 431 с.
17. Закс Л. *Статистическое оценивание.* М.: Статистика, 1976. 598 с.
18. Камке Э. *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям.* М.: Наука, 1976. 576 с.

Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2020, vol. 24, no. 1, pp. 137–162
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1732

MSC: 34B99

Numerical integration by the matrix method and evaluation of the approximation order of difference boundary value problems for non-homogeneous linear ordinary differential equations of the fourth order with variable coefficients

V. N. Maklakov, M. A. Ilicheva

Samara State Technical University,
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russian Federation.

Abstract

The use of the second degree Taylor polynomial in approximation of derivatives by finite difference method leads to the second order approximation of the traditional grid method for numerical integration of boundary value problems for non-homogeneous linear ordinary differential equations of the second order with variable coefficients. The study considers a previously proposed method of numerical integration using matrix calculus which didn't include the approximation of derivatives by finite difference method for boundary value problems of non-homogeneous fourth-order linear ordinary differential equations with variable coefficients. According to this method, when creating a system of difference equations, an arbitrary degree of the Taylor polynomial can be chosen in the expansion of the sought-for solution of the problem into a Taylor series.

In this paper, the possible boundary conditions of a differential boundary value problem are written both in the form of derived degrees from zero to three, and in the form of linear combinations of these degrees. The boundary problem is called symmetric if the numbers of the boundary conditions in the left and right boundaries coincide and are equal to two, otherwise it is asymmetric.

For a differential boundary value problem, an approximate difference boundary value problem in the form of two subsystems has been built. The first subsystem includes equations for which the boundary conditions of the boundary value problem were not used; the second one includes four equations in the construction of which the boundary conditions of the problem were used.

Theoretically, the patterns between the order of approximation and the degree of the Taylor polynomial were identified. The results are as follows:

Research Article

Please cite this article in press as:
Maklakov V. N., Ilicheva M. A. Numerical integration by the matrix method and evaluation of the approximation order of difference boundary value problems for non-homogeneous linear ordinary differential equations of the fourth order with variable coefficients, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2020, vol. 24, no. 1, pp. 137–162. doi: 10.14498/vsgtu1732 (In Russian).

Authors' Details:

Vladimir N. Maklakov https://orcid.org/0000-0003-1644-7424
Cand. Phys. & Math. Sci.; Associate Professor; Dept. of Higher Mathematics and Applied Computer Science; e-mail: makvo63@yandex.ru

Mariya A. Ilicheva https://orcid.org/0000-0001-6437-9142
Postgraduate Student; Dept. of Applied Mathematics and Computer Science;
e-mail: ilicheva-1993@mail.ru

a) the approximation order of the first and second subsystems is proportional to the degree of the Taylor polynomial used;
b) the approximation order of the first subsystem is two units less than the degree Taylor polynomial with its even value and three units less with its odd value;
c) the approximation order of the second subsystem is three units less than the degree Taylor polynomial regardless of both even-parity or odd-parity of this degree, and the degree of the highest derivative in the boundary conditions of the boundary value problem.

The approximation order of the difference boundary value problem with all possible combinations of boundary conditions is calculated.

The theoretical conclusions are confirmed by numerical experiments.

Keywords: ordinary differential equations, boundary value problems, approximation order, numerical methods, Taylor series.

Received: 31st July, 2019 / Revised: 19th November, 2019 /
Accepted: 10th February, 2020 / First online: 2nd March, 2020

Competing interests. We have no competing interests.

Authors' contributions and responsibilities. Each author has participated in the article concept development and in the manuscript writing. The authors are absolutely responsible for submitting the final manuscript in print. Each author has approved the final version of manuscript.

Funding. This research did not funded by a specific project grant.

References

1. Radchenko V. P., Usov A. A. Modified grid method for solving linear differential equation equipped with variable coefficients based on Taylor series, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2008, no. 2(17), pp. 60–65 (In Russian). doi: 10.14498/vsgtu646.
2. Keller H. B. Accurate difference methods for nonlinear two-point boundary value problems, *SIAM J. Numer. Anal.*, 1974, vol. 11, no. 2, pp. 305–320. doi: 10.1137/0711028.
3. Lentini M., Pereyra V. A variable order finite difference method for nonlinear multipoint boundary value problems, *Math. Comp.*, 1974, vol. 28, no. 128, pp. 981–1003. doi: 10.1090/s0025-5718-1974-0386281-4.
4. Keller H. B. Numerical solution of boundary value problems for ordinary differential equations: Survey and some resent results on difference methods, In: *Numerical Solutions of Boundary Value Problems for Ordinary Differential Equations*, Part I: Survey Lectures; ed. A. K. Aziz. New York, Academic Press, 1975, pp. 27–88. doi: 10.1016/b978-0-12-068660-5.50007-7.
5. Godunov S. K., Ryabenki V. S. *Theory of Difference Schemes: An Introduction.* New York, Wiley, 1964, xii+289 pp.
6. Formaleev V. F., Reviznikov D. L. *Chislennye metody* [Numerical Methods]. Moscow, Fizmatlit, 2004, 400 pp. (In Russian)
7. Samarskii A. A. *Teoriia raznostnykh skhem* [The Theory of Difference Schemes]. Moscow, Nauka, 1977, 656 pp. (In Russian)
8. Samarskii A. A., Gulin A. V. *Chislennye metody* [Numerical methods]. Moscow, Nauka, 1973 (In Russian).
9. Samarskii A. A., Gulin A. V. *Ustoichivost' raznostnykh skhem* [The stability of difference schemes]. Moscow, Nauka, 1973, 416 pp. (In Russian)

10. Boutayeb A., Chetouani A. Global Extrapolations Of Numerical Methods For Solving A Parabolic Problem With Non Local Boundary Conditions, *Intern. J. Comp. Math.*, 2003, vol. 80, no. 6, pp. 789–797. doi: 10.1080/0020716021000039209.
11. Boutayeb A., Chetouani A. A numerical comparison of different methods applied to the solution of problems with non local boundary conditions, *Appl. Math. Sci.*, 2007, vol. 1, no. 44, pp. 2173–2185, http://www.m-hikari.com/ams/ams-password-2007/ams-password41-44-2007/boutayebAMS41-44-2007.pdf.
12. Maklakov V. N. Estimation of the order of the matrix method approximation of numerical integration of boundary-value problems for inhomogeneous linear ordinary differential equations of the second order, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], no. 3(36), pp. 143–160 (In Russian). doi: 10.14498/vsgtu1364.
13. Maklakov V. N. The evaluation of the order of approximation of the matrix method for numerical integration of the boundary value problems for systems of linear non-homogeneous ordinary differential equations of the second order with variable coefficients. Message 2. Boundary value problems with boundary conditions of the second and third kind, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2017, vol. 21, no. 1, pp. 55–79 (In Russian). doi: 10.14498/vsgtu1528.
14. Maklakov V. N., Stelmakh Ya. G. Numerical integration by the matrix method of boundary value problems for linear inhomogeneous ordinary differential equations of the third order with variable coefficients, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2018, vol. 22, no. 1, pp. 153–183 (In Russian). doi: 10.14498/vsgtu1565.
15. Fichtenholz G. M. *Differential- und Integralrechnung.* I [Differential and integral calculus. I], Hochschulbücher für Mathematik [University Books for Mathematics], vol. 61. Berlin, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1986, xiv+572 pp. (In German)
16. Kurosh A. *Higher algebra.* Moscow, Mir Publ., 1972, 428 pp.
17. Zaks L. *Statisticheskoe otsenivanie* [Statistical estimation]. Moscow, Statistika, 1976, 598 pp. (In Russian)
18. Kamke E. *Spravochnik po obyknovennym differentsial'nym uravneniiam* [Manual of ordinary differential equations]. Moscow, Nauka, 1976, 576 pp. (In Russian)