Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2020. Т. 24, № 1. С. 174–186
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1727

# Краткие сообщения

УДК 517.928.4

## О расширении области для аналитического приближенного решения одного класса нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка в комплексной области

***В. Н. Орлов*[1], *Т. Ю. Леонтьева*[2]**

[1] Национальный исследовательский
Московский государственный строительный университет,
Россия, 129337, Москва, Ярославское шоссе, 26.
[2] ГАПОУ ЧР «Межрегиональный центр компетенций —
Чебоксарский электромеханический колледж» Министерства образования
и молодежной политики Чувашской Республики,
Россия, 428000, Чебоксары, пр. Ленина, 9.

**Аннотация**

Ранее авторами было проведено исследование одного класса нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка в окрестности подвижной особой точки. Доказаны: существование подвижной особой точки, теорема существования и единственности решения в окрестности подвижной особой точки. Построено аналитическое приближенное решение в окрестности подвижной особой точки. Исследовано влияние возмущения подвижной особой точки на приближенное решение. Результаты, полученные для вещественной области, были обобщены на комплексную область $|z| < |\tilde{z}^*| \leqslant |z^*|$, где $z^*$ — точное значение подвижной особой точки, $\tilde{z}^*$ — приближенное значение подвижной особой точки. В данной работе проведено исследование аналитического приближенного решения от влияния возмущения подвижной особой точки в области $|z| > |\tilde{z}^*| \geqslant |z^*|$ с учетом изменения направления движения по лучу в направлении к началу координат комплексной плоскости. Эти исследования необходимы в силу характера подвижной особой точки (четная дробная степень критического полюса). Полученные результаты сопровождены численным экспериментом и завершают исследование аналитического приближенного решения рассматриваемого класса

**Краткое сообщение**



**Образец для цитирования**
Орлов В. Н., Леонтьева Т. Ю. О расширении области для аналитического приближенного решения одного класса нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка в комплексной области // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2020. Т. 24, № 1. С. 174–186. doi: 10.14498/vsgtu1727.

**Сведения об авторах**

*Виктор Николаевич Орлов* https://orcid.org/0000-0001-7606-5490
доктор физико-математических наук; доцент; каф. прикладной математики;
e-mail: orlovvn@mgsu.ru

*Татьяна Юрьевна Леонтьева* https://orcid.org/0000-0002-4008-7468
преподаватель; отделение первого курса; e-mail: betty2784@mail.ru

нелинейных дифференциальных уравнений в окрестности подвижной особой точки в зависимости от направления движения вдоль луча в комплексной области.

**Ключевые слова:** подвижная особая точка, нелинейное дифференциальное уравнение, аналитическое приближенное решение, окрестность подвижной особой точки, комплексная область, апостериорная оценка.

Получение: 26 июля 2019 г. / Исправление: 7 февраля 2020 г. /
Принятие: 10 февраля 2020 г. / Публикация онлайн: 10 марта 2020 г.

**1. Применямый метод и принятые допущения.** Хорошо известны простейшие нелинейные дифференциальные уравнения Риккати, Абеля, Пенлеве, имеющие широкое применение в разных областях [1–5]. Частный случай нелинейного дифференциального уравнения второго порядка является основой математической модели консольных конструкций [6, 7]. Особенностью перечисленных уравнений является наличие подвижных особых точек, классифицированных Фуксом [8]. Теоретическое обоснование метода аналитического приближенного решения перечисленных дифференциальных уравнений Риккати, Абеля, Пенлеве даны в работах [9–11]. Предложенный в перечисленных работах приближенный метод успешно применяется и для других нелинейных дифференциальных уравнений [12, 13].

**2. Результаты.** Рассматривается класс нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка с полиномиальной правой частью пятой степени:

$$y''(z) = b_0(z)y^5(z) + b_1(z)y^4(z) + b_2(z)y^3(z) + b_3(z)y^2(z) + b_4(z)y(z) + b_5(z),$$

где $b_i$ — аналитические функции в рассматриваемой области, $i = 0, 1, \dots, 5$. Замена переменной

$$y(z) = \frac{u(z)}{\sqrt[4]{b_0}} - \frac{b_1(z)}{5b_0},$$

где $b_0 = \mathrm{const} \neq 0$, приводит исследуемое уравнение к нормальной форме:

$$u''(z) = u^5(z) + r(z),$$

где

$$r(x) = -\frac{b_1^5}{5^5\sqrt[4]{b_0^{15}}} + \sqrt[4]{b_0}\, b_5(z) + \frac{b_1''(z)}{5\sqrt[4]{b_0^3}}, \quad b_2(z) = \frac{2b_1^2(z)}{5b_0},$$

$$b_3(z) = \frac{2b_1^3(z)}{5^2 b_0^2}, \quad b_4(z) = \frac{b_1^4(z)}{5^3 b_0^3}.$$

Для задачи Коши

$$y''(z) = y^5(z) + r(z), \tag{1}$$

$$y(z_0) = y_0, \quad y'(z_0) = y_1 \tag{2}$$

в случае точного значения подвижной особой точки [14] была доказана теорема существования, получено приближенное решение в окрестности подвижной особой точки $z^*$ в виде

$$y(z) = (z^* - z)^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z^* - z)^{\frac{n}{2}}, \quad C_0 \neq 0,$$

а также была получена структура приближенного решения

$$y_N(z) = (z^* - z)^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{N} C_n (z^* - z)^{\frac{n}{2}}, \quad C_0 \neq 0, \tag{3}$$

при этом $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = 0$, а $C_6 = \alpha$, где $\alpha$ — параметр, играющий роль стыковки двух видов решений на границе некоторой окрестности подвижной особой точки $\tilde{z}^*$ — конечной суммы регулярного ряда и ряда (3). Этот параметр неявным образом связан с начальным условием (2) задачи Коши (1), (2).

Так как существующие методы нахождения подвижной особой точки позволяют находить последнюю лишь приближенно, то возмущение подвижной особой точки отражается на аналитическом приближенном решении (3), в результате чего имеем

$$\tilde{y}_N(z) = (\tilde{z}^* - z)^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{N} \tilde{C}_n (\tilde{z}^* - z)^{\frac{n}{2}}, \quad \tilde{C}_0 \neq 0, \tag{4}$$

где $\tilde{C}_n$ — возмущенные значения коэффициентов. Было проведено исследование аналитического приближенного решения (4) в области $|z| < |\tilde{z}^*| \leqslant |z^*|$, когда в комплексной плоскости движение по лучу, исходящему из начала координат, проходит в направлении от начала координат. При движении по лучу в направлении к началу координат получаем область $|z| > |\tilde{z}^*| \geqslant |z^*|$. Выражения (3) и (4) соответственно будут иметь вид

$$y_N(z) = (z - z^*)^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{N} C_n (z - z^*)^{\frac{n}{2}}, \quad C_0 \neq 0,$$

и

$$\tilde{y}_N(z) = (z - \tilde{z}^*)^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{N} \tilde{C}_n (z - \tilde{z}^*)^{\frac{n}{2}}, \quad \tilde{C}_0 \neq 0. \tag{5}$$

В этой ситуации полученные результаты будут справедливы и в вещественной области как в частном случае.

Теорема. *Пусть $z^*$ — подвижная особая точка $y(z)$ задачи* (1), (2) *и выполняются следующие условия*:

1) $r(z) \in C^1$ *в области* $K = \{z : |z - \tilde{z}^*| < \rho_1\}$, $\rho_1 = \mathrm{const} > 0$;
2) $\exists M_i : |r^{(n)}(\tilde{z}^*)|/n! \leqslant M_i$, $M_i = \mathrm{const}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$;
3) $|z^*| \leqslant |\tilde{z}^*|$;
4) *известны оценки погрешности* $\tilde{z}^*$ *и* $\tilde{\alpha} : |\tilde{z}^* - z^*| \leqslant \Delta\tilde{z}^*$, $|\tilde{\alpha} - \alpha| \leqslant \Delta\tilde{\alpha}$;

5) $\Delta\tilde{z}^* < 1/(4\sqrt[5]{(M+1)^2})$.
*Тогда аналитическое приближенное решение* (5) *задачи* (1), (2) *в областях*

$$\{z : |\tilde{z}^*| < |z| < |\tilde{z}^*| + \Delta\tilde{z}^*\} \cap \{z : |z - \tilde{z}^*| < \rho_4\}, \tag{6}$$

$$\{z : |z| \geqslant |\tilde{z}^*| + \Delta\tilde{z}^*\} \cap \{z : |z - \tilde{z}^*| < \rho_4\} \tag{7}$$

*будет иметь погрешность*

$$\Delta\tilde{y}_N(z) \leqslant \Delta_0 + \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3,$$

*где*

$$\Delta_0 = \frac{\Delta\tilde{z}^*}{|z - \tilde{z}^*|}\sqrt[4]{\frac{3}{4}},$$

$$\Delta_1 = \frac{2^N M(M+1)^{\left[\frac{N}{5}\right]}|z-\tilde{z}^*|^{\frac{N-1}{2}}}{1 - 2^5(M+1)|z-\tilde{z}^*|^{\frac{5}{2}}}\sum_{i=0}^{4}\frac{2^i\eta(M+1)^{\left[\frac{i}{5}\right]}|z-\tilde{z}^*|^{\frac{i}{2}}}{(N+i+2)(N+i-6)},$$

$$\Delta_2 = \frac{2^5\Delta\tilde{z}^* M(M+1)\beta^{\frac{3}{2}}}{1 - 2^{10}(M+1)^2\beta^5}\left(\sum_{i=0}^{4} 2^{2i}(M+1)^{\gamma_1}\beta^i + \beta^{\frac{1}{2}}\sum_{i=0}^{4}2^{2i}(M+1)^{\gamma_2}\beta^i\right),$$

$$\Delta_3 = \frac{2^7\Delta M\mu\beta^2}{1 - 2^{15}\mu^2\beta^5}\left(\sum_{i=0}^{4}2^{3i}\mu^{\gamma_1}\beta^i + 2(2\beta)^{\frac{1}{2}}\sum_{i=0}^{4}2^{3i}\mu^{\gamma_2}\beta^i\right),$$

$$\rho_4 = \min\{\rho_1,\rho_2,\rho_3\}, \quad \rho_2 = \frac{1}{4\sqrt[5]{(M+1)^2}}\ (\text{из } [14]), \quad \rho_3 = \frac{1}{8(M+\Delta M+1)^2},$$

$$\beta = \begin{cases} |z-\tilde{z}^*|, & z \in (6), \\ \Delta\tilde{z}^*, & z \in (7), \end{cases} \quad \mu = M + \Delta M + 1, \quad \eta = \begin{cases} i+1, & i = 0,1,2,3,4, \\ 8-i+1, & i = 5,6,7,8, \end{cases}$$

$$\gamma_1 = \begin{cases} 0, & i = 0,1,2, \\ 1, & i = 3,4, \end{cases} \quad \gamma_2 = \begin{cases} 0, & i = 0,1, \\ 1, & i = 2,3,4, \end{cases} \quad M = \max\left\{|\tilde{\alpha}|, \sup_n \frac{|r^{(n)}(\tilde{z}^*)|}{n!}\right\},$$

$$\Delta M = \max\left\{\sup_{n,G}\frac{|r^{(n+1)}(z)|}{n!}\Delta\tilde{z}^*, \Delta\tilde{z}^*, \Delta\tilde{\alpha}\right\}, \quad G = \{z : |z-\tilde{z}^*| \leqslant \Delta\tilde{z}^*\},$$

$n = 0,1,2,\ldots$; $\alpha$ — *параметр, зависящий от условий* (2).

*Доказательство.* На основании классического подхода в оценке получаем

$$\Delta\tilde{y}_N(z) = |y(z) - \tilde{y}_N(z)| \leqslant |y(z) - \tilde{y}(z)| + |\tilde{y}(z) - \tilde{y}_N(z)|.$$

Вначале рассмотрим $|y(z) - \tilde{y}(z)|$:

$$|y(z) - \tilde{y}(z)| \leqslant \left|\sum_{n=0}^{\infty} C_n(z-z^*)^{\frac{n-1}{2}} - \sum_{n=0}^{\infty}\tilde{C}_n(z-\tilde{z}^*)^{\frac{n-1}{2}}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\sum_{n=0}^{\infty} C_n(z-z^*)^{\frac{n-1}{2}} - \sum_{n=0}^{\infty}\tilde{C}_n(z-z^*)^{\frac{n-1}{2}} + \right.$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\tilde{C}_n(z-z^*)^{\frac{n-1}{2}}+\sum_{n=0}^{\infty}\tilde{C}_n(z-\tilde{z}^*)^{\frac{n-1}{2}}\Bigg|\leqslant$$

$$\leqslant\left|\sum_{n=0}^{\infty}\Delta\tilde{C}_n(z-z^*)^{\frac{n-1}{2}}\right|+\left|\sum_{n=0}^{\infty}\Delta\tilde{C}_n\Big((z-z^*)^{\frac{n-1}{2}}-(z-\tilde{z}^*)^{\frac{n-1}{2}}\Big)\right|\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{n=0}^{\infty}\Delta\tilde{C}_n\Big|(|z-\tilde{z}^*|+\Delta\tilde{z}^*)^{\frac{n-1}{2}}\Big|+\sum_{n=0}^{\infty}|\tilde{C}_n|\Big|(z-z^*)^{\frac{n-1}{2}}-(z-\tilde{z}^*)^{\frac{n-1}{2}}\Big|.$$

Затем рассмотрим

$$\sum_{n=0}^{\infty}|\tilde{C}_n|\Big|(z-z^*)^{\frac{n-1}{2}}-(z-\tilde{z}^*)^{\frac{n-1}{2}}\Big|.$$

Принимая во внимание условие $|z^*|\leqslant|\tilde{z}^*|<|z|$ и $|C_0|=|\tilde{C}_0|=\sqrt[4]{3/4}$ при $n=0$, имеем

$$|\tilde{C}_0|\Big|(z-z^*)^{-\frac{1}{2}}-(z-\tilde{z}^*)^{-\frac{1}{2}}\Big|\leqslant\frac{\Delta\tilde{z}^*}{|z-\tilde{z}^*|}\sqrt[4]{\frac{3}{4}}.$$

Учитывая, как выше было отмечено, что [14]

$$|C_1|=|\tilde{C}_1|=|C_2|=|\tilde{C}_2|=|C_3|=|\tilde{C}_3|=|C_4|=|\tilde{C}_4|=0,$$

получаем

$$|y(z)-\tilde{y}(z)|\leqslant\frac{\Delta\tilde{z}^*}{|z-\tilde{z}^*|}\sqrt[4]{\frac{3}{4}}+\sum_{n=5}^{\infty}|\tilde{C}_n|\Big|(z-z^*)^{\frac{n-1}{2}}-(z-\tilde{z}^*)^{\frac{n-1}{2}}\Big|+$$

$$+\sum_{n=5}^{\infty}\Delta\tilde{C}_n\Big|\big((z-\tilde{z}^*)+\Delta\tilde{z}^*\big)^{\frac{n-1}{2}}\Big|.$$

Для $n=5,6,7,\ldots$ упростим выражение:

$$\Big|(z-z^*)^{\frac{n-1}{2}}-(z-\tilde{z}^*)^{\frac{n-1}{2}}\Big|\leqslant\Big|\big((z-\tilde{z}^*)+\Delta\tilde{z}^*\big)^{\frac{n-1}{2}}-(z-\tilde{z}^*)^{\frac{n-1}{2}}\Big|\leqslant$$

$$\leqslant\Big|\Delta\tilde{z}^*\big((z-\tilde{z}^*)+\Delta\tilde{z}^*\big)^{\frac{n-2}{2}}\Big|.$$

Тогда для оценки приближенного решения (5) получаем

$$|y(z)-\tilde{y}_N(z)|\leqslant\frac{\Delta\tilde{z}^*}{|z-\tilde{z}^*|}\sqrt[4]{\frac{3}{4}}+\sum_{n=N+1}^{\infty}|\tilde{C}_n||z-\tilde{z}^*|^{\frac{n-1}{2}}+$$

$$+\sum_{n=5}^{\infty}|\tilde{C}_n|\Big|\Delta\tilde{z}^*\big((z-\tilde{z}^*)+\Delta\tilde{z}^*\big)^{\frac{n-2}{2}}\Big|+$$

$$+\sum_{n=5}^{\infty}|\Delta\tilde{C}_n|\left|\big((z-\tilde{z}^*)+\Delta\tilde{z}^*\big)^{\frac{n-1}{2}}\right| = \Delta_0+\Delta_1+\Delta_2+\Delta_3,$$

где $|\tilde{C}_n - C_n| = \Delta\tilde{C}_n$. Из последнего следует

$$\Delta_0 = \frac{\Delta\tilde{z}^*}{|z-\tilde{z}^*|}\sqrt[4]{\frac{3}{4}}.$$

Выражение для $\Delta_1$ следует из теоремы 2 работы [14].

Проведем оценку для $\Delta_2$. Учитывая структуру ряда (5), проведем суммирование целых и дробных степеней раздельно при условии, что $\Delta\tilde{z}^* \leqslant |z-\tilde{z}^*|$:

$$\Delta_2 = \sum_{n=5}^{\infty}|\tilde{C}_n|\left|\Delta\tilde{z}^*\big((z-\tilde{z}^*)+\Delta\tilde{z}^*\big)^{\frac{n-2}{2}}\right| =$$
$$= \sum_{n=3}^{\infty}|\tilde{C}_{2n-1}|\left|\Delta\tilde{z}^*\big((z-\tilde{z}^*)+\Delta\tilde{z}^*\big)^{\frac{2n-3}{2}}\right|+$$
$$+\sum_{n=3}^{\infty}|\tilde{C}_{2n}|\left|\Delta\tilde{z}^*\big((z-\tilde{z}^*)+\Delta\tilde{z}^*\big)^{n-1}\right| = \Delta_{2,1}+\Delta_{2,2}.$$

Принимая во внимание закономерность оценок коэффициентов $C_n$ [14]:

$$|C_{5n}| \leqslant \frac{2^{5n}(M+1)^n}{(5n+2)(5n-6)}, \quad |C_{5n+1}| \leqslant \frac{2^{5n+1}(M+1)^n}{(5n+3)(5n-5)},$$
$$|C_{5n+2}| \leqslant \frac{2^{5n+2}(M+1)^n}{(5n+4)(5n-4)}, \quad |C_{5n+3}| \leqslant \frac{2^{5n+3}(M+1)^n}{(5n+5)(5n-3)},$$
$$|C_{5n+4}| \leqslant \frac{2^{5n+4}(M+1)^n}{(5n+6)(5n-2)},$$

получаем для $\Delta_{2,1}$:

$$\Delta_{2,1} = \sum_{n=3}^{\infty}|\tilde{C}_{2n-1}|\left|\Delta\tilde{z}^*\big((z-\tilde{z}^*)+\Delta\tilde{z}^*\big)^{\frac{2n-3}{2}}\right| =$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty}|C_{10k-5}|\left|\Delta\tilde{z}^*\big((z-\tilde{z}^*)+\Delta\tilde{z}^*\big)^{\frac{10k-7}{2}}\right|+$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}|C_{10k-3}|\left|\Delta\tilde{z}^*\big((z-\tilde{z}^*)+\Delta\tilde{z}^*\big)^{\frac{10k-5}{2}}\right|+$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}|C_{10k-1}|\left|\Delta\tilde{z}^*\big((z-\tilde{z}^*)+\Delta\tilde{z}^*\big)^{\frac{10k-3}{2}}\right|+$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}|C_{10k+1}|\left|\Delta\tilde{z}^*\big((z-\tilde{z}^*)+\Delta\tilde{z}^*\big)^{\frac{10k-1}{2}}\right|+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}|C_{10k+3}|\Big|\Delta\tilde{z}^*\big((z-\tilde{z}^*)+\Delta\tilde{z}^*\big)^{\frac{10k+1}{2}}\Big|=$$

$$=\sum_{i=0}^{4}\sum_{k=1}^{\infty}|\tilde{C}_{10k-5+2i}|\Big|\Delta\tilde{z}^*\big((z-\tilde{z}^*)+\Delta\tilde{z}^*\big)^{\frac{10k-7+2i}{2}}\Big|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{2^5\Delta\tilde{z}^*M(M+1)|z-\tilde{z}^*|^{\frac{3}{2}}}{1-2^{10}(M+1)^2|z-\tilde{z}^*|^5}\sum_{i=0}^{4}2^{2i}(M+1)^i|z-\tilde{z}^*|^i$$

при условии $|z-\tilde{z}^*|<\rho_2$, $\rho_2=1/(4\sqrt[5]{(M+1)^2})$ из [14]. Аналогичным образом получаем оценку для $\Delta_{2,2}$:

$$\Delta_{2,2}\leqslant\frac{2^5\Delta\tilde{z}^*M(M+1)|z-\tilde{z}^*|^2}{1-2^{10}(M+1)^2|z-\tilde{z}^*|^5}\sum_{i=0}^{4}2^{2i}(M+1)^i|z-\tilde{z}^*|^i.$$

Рассмотрим случай $|z-\tilde{z}^*|<\Delta\tilde{z}^*$, тогда

$$\Delta_{2,1}\leqslant\frac{2^5M(M+1)(\Delta\tilde{z}^*)^{\frac{5}{2}}}{1-2^{10}(M+1)^2(\Delta\tilde{z}^*)^5}\sum_{i=0}^{4}2^{2i}(M+1)^i(\Delta\tilde{z}^*)^i.$$

И для $\Delta_{2,2}$ получим соответственно оценку

$$\Delta_{2,2}\leqslant\frac{2^5M(M+1)(\Delta\tilde{z}^*)^3}{1-2^{10}(M+1)^2(\Delta\tilde{z}^*)^5}\sum_{i=0}^{4}2^{2i}(M+1)^i(\Delta\tilde{z}^*)^i.$$

Перейдем к оценке $\Delta_3$. Из гипотез оценок для $\Delta\tilde{C}_n$:

$$\Delta\tilde{C}_{5n}\leqslant\frac{2^{5n}\Delta M(M+\Delta M+1)^n}{(5n+2)(5n-6)},\quad\Delta\tilde{C}_{5n+1}\leqslant\frac{2^{5n+1}\Delta M(M+\Delta M+1)^n}{(5n+3)(5n-4)},$$

$$\Delta\tilde{C}_{5n+2}\leqslant\frac{2^{5n+2}\Delta M(M+\Delta M+1)^n}{(5n+4)(5n-4)},\quad\Delta\tilde{C}_{5n+3}\leqslant\frac{2^{5n+3}\Delta M(M+\Delta M+1)^n}{(5n+5)(5n-3)},$$

$$\Delta\tilde{C}_{5n+4}\leqslant\frac{2^{5n+4}\Delta M(M+\Delta M+1)^n}{(5n+6)(5n-2)},$$

где

$$M=\max\Big\{|\tilde{\alpha}|,\sup_n\frac{|r^{(n)}(\tilde{z}^*)|}{n!}\Big\},\quad\Delta M=\max\Big\{\sup_{n,G}\frac{|r^{(n+1)}(z)|}{n!}\Delta\tilde{z}^*,\Delta\tilde{z}^*,\Delta\tilde{\alpha}\Big\},$$

$$G=\{z:|z-\tilde{z}^*|\leqslant\Delta\tilde{z}^*\},\quad n=0,1,2,\ldots.$$

Докажем оценку для $\Delta\tilde{C}_{5n}$ в случае $N+1=5(2n+1)$:

$$\Delta\tilde{C}_{10n+5}=|C_{10n+5}-\tilde{C}_{10n+5}|\leqslant\frac{1}{(10n+7)(10n-1)}\times$$

$$\times \left| \sum_{i=0}^{10n+3} \left( \sum_{j=0}^{10n+3-i} \left( \sum_{m=0}^{10n+3-i-j} C_{10n+3-i-j-m} C_m \right) \left( \sum_{l=0}^{j} C_{j-l} C_l \right) \right) C_i + B_{10n+3} - \right.$$

$$\left. - \sum_{i=0}^{10n+3} \left( \sum_{j=0}^{10n+3-i} \left( \sum_{m=0}^{10n+3-i-j} \tilde{C}_{10n+3-i-j-m} \tilde{C}_m \right) \left( \sum_{l=0}^{j} \tilde{C}_{j-l} \tilde{C}_l \right) \right) \tilde{C}_i - B_{10n+3} \right| =$$

$$= \frac{1}{(10n+7)(10n-1)} \times$$

$$\times \left| \sum_{i=0}^{10n+3} \left( \sum_{j=0}^{10n+3-i} \left( \sum_{m=0}^{10n+3-i-j} (\tilde{C}_{10n+3-i-j-m} + \Delta\tilde{C}_{10n+3-i-j-m})(\tilde{C}_m + \Delta\tilde{C}_m) \right) \times \right. \right.$$

$$\left. \times \left( \sum_{l=0}^{j} (\tilde{C}_{j-l} + \Delta\tilde{C}_{j-l})(\tilde{C}_l + \Delta\tilde{C}_l) \right) \right) (\tilde{C}_i + \Delta\tilde{C}_i) -$$

$$\left. - \sum_{i=0}^{10n+3} \left( \sum_{j=0}^{10n+3-i} \left( \sum_{m=0}^{10n+3-i-j} \tilde{C}_{10n+3-i-j-m} \tilde{C}_m \right) \left( \sum_{l=0}^{j} \tilde{C}_{j-l} \tilde{C}_l \right) \right) \tilde{C}_i \right|.$$

Выполнив в последнем соотношении ряд преобразований, с учетом оценок для коэффициентов $\tilde{C}_n$, полученных в работе [14], и предполагаемых оценок для $\Delta\tilde{C}_n$ в конечном итоге получаем

$$\Delta\tilde{C}_{10n+5} \leqslant \frac{2^{10n+5} \Delta M (M + \Delta M + 1)^{2n+1}}{|(10n+7)(10n-1)|}.$$

Аналогичные выражения получим и в случаях $N+1 = 5n+1$, $N+1 = 5n+2$, $N+1 = 5n+3$ и $N+1 = 5n+4$. Таким образом, убеждаемся в справедливости оценки

$$\Delta\tilde{C}_{n+1} \leqslant \frac{2^{n+1} \Delta M (M + \Delta M + 1)^{\left[\frac{n+1}{5}\right]}}{(n+3)(n-5)}.$$

В выражении $\Delta_3$ повторим суммирование по целым и дробным степеням:

$$\Delta_3 = \sum_{n=5}^{\infty} |\Delta\tilde{C}_n| \left| \left( (z - \tilde{z}^*) + \Delta\tilde{z}^* \right)^{\frac{n-1}{2}} \right| =$$

$$= \sum_{n=3}^{\infty} \Delta\tilde{C}_{2n-1} |(z - \tilde{z}^*) + \Delta\tilde{z}^*|^{n-1} + \sum_{n=3}^{\infty} \Delta\tilde{C}_{2n} |(z - \tilde{z}^*) + \Delta\tilde{z}^*|^{\frac{2n-1}{2}} =$$

$$= \sum_{t=0}^{4} \sum_{k=1}^{\infty} \Delta\tilde{C}_{10k-5+2t} |(z - \tilde{z}^*) + \Delta\tilde{z}^*|^{5k-3+t} +$$

$$+ \sum_{t=0}^{4} \sum_{k=1}^{\infty} \Delta\tilde{C}_{10k-4+2t} |(z - \tilde{z}^*) + \Delta\tilde{z}^*|^{\frac{10k-5+2t}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{t=0}^{4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{10k-5+2t} \Delta M (M + \Delta M + 1)^{\left[\frac{10k-5+2t}{5}\right]}}{(10k-3+2t)(10k-11+2t)} |(z - \tilde{z}^*) + \Delta\tilde{z}^*|^{5k-3+t} +$$

$$+\sum_{t=0}^{4}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{10k-4+2t}\Delta M(M+\Delta M+1)^{\left[\frac{10k-4+2t}{5}\right]}}{(10k-2+2t)(10k-10+2t)}|(z-\tilde{z}^*)+\Delta\tilde{z}^*|^{\frac{10k-5+2t}{2}}=$$

$$=\sum_{t=0}^{4}2^{2t-5}\Delta M\Bigg(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{10k}(M+\Delta M+1)^{\left[\frac{10k-5+2t}{5}\right]}}{(10k-3+2t)(10k-11+2t)}|(z-\tilde{z}^*)+\Delta\tilde{z}^*|^{5k-3+t}+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{10k+1}(M+\Delta M+1)^{\left[\frac{10k-4+2t}{5}\right]}}{(10k-2+2t)(10k-10+2t)}|(z-\tilde{z}^*)+\Delta\tilde{z}^*|^{\frac{10k-5+2t}{2}}\Bigg)\leqslant$$

$$\leqslant\frac{2^7\Delta M\mu\beta^2}{1-2^{15}\mu^2\beta^5}\Bigg(\sum_{i=0}^{4}2^{3i}\mu^{\gamma_1}\beta^i+2(2\beta)^{\frac{1}{2}}\sum_{i=0}^{4}2^{3i}\mu^{\gamma_2}\beta^i\Bigg),$$

где

$$\beta=\begin{cases}|z-\tilde{z}^*|, & z\in(6),\\ \Delta\tilde{z}^*, & z\in(7),\end{cases}\qquad \mu=M+\Delta M+1,$$

$$\gamma_1=\begin{cases}0, & i=0,1,2,\\ 1, & i=3,4,\end{cases}\qquad \gamma_2=\begin{cases}0, & i=0,1,\\ 1, & i=2,3,4.\end{cases}$$

Оценка для выражения $\Delta_3$ справедлива в области $|z-\tilde{z}^*|<\rho_3$, $\rho_3=1/[8(M+ +\Delta M+1)^2]$.

В ходе преобразований при получении оценки для погрешности приближенного решения (5) получаем области

$$\{z:|z|\geqslant|\tilde{z}^*|+\Delta\tilde{z}^*\}\cap\{z:|z-\tilde{z}^*|<\rho_4\},$$

$$\{z:|\tilde{z}^*|<|z|\leqslant|\tilde{z}^*|+\Delta\tilde{z}^*\}\cap\{z:|z-\tilde{z}^*|<\rho_4\},$$

при этом $|\tilde{z}^*-z^*|\leqslant\Delta\tilde{z}^*$ и $\rho_4=\min\{\rho_1,\rho_2,\rho_3\}$. □

Следствие. Теорема справедлива в вещественной области, если комплексную переменную $z$ заменить на вещественную переменную $x$. В п. 1 изменение на $r(x)\in C^\infty$, в п. 3 — на $x^*<\tilde{x}^*$. Область (6) будет иметь вид $\tilde{x}^*<x<\tilde{x}^*+\Delta\tilde{x}^*$, а (7) — $\tilde{x}^*+\Delta\tilde{x}^*<x<\tilde{x}^*+\rho_4$.

**3. Пример.** Найдем приближенное решение задачи (1), (2) в окрестности подвижной особой точки $\tilde{z}^*$ в случае $r(z)=0$ при начальных данных

$$y\Big(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\Big)=-1+i,\quad y'\Big(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\Big)=-\frac{2}{\sqrt{3}}+\frac{2}{\sqrt{3}}i.$$

Величина возмущения не превышает $\varepsilon=0.5\cdot10^{-5}$ и $\alpha=\tilde{\alpha}=0$, $\Delta\tilde{\alpha}=0$, так как в нашем случае точное решение совпадает по структуре с приближенным. Точное решение

$$y=\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2z-1-\big(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\big)i}}.$$

Найдем радиус окрестности подвижной особой точки: $\rho_4\approx0.1247503745$. Точное значение подвижной особой точки

$$z^*=\frac{1}{2}+\frac{2+\sqrt{3}}{4}i,\quad \Delta\tilde{z}^*=0.000003,\quad \tilde{z}^*=0.5000021213+0.9330148232i.$$

Выберем значение аргумента

$$z = 0.5848549351 + 1.0178676370i \in |z - \tilde{z}^*| < \rho_4.$$

Применяя (5), $N = 9$, вычислим приближенное значение решения при заданном значении аргумента:

$$\begin{aligned} z &= 0.5848549351 + 1.0178676370i; \\ y &= 2.4819018915 - 1.0280374240i; \\ \tilde{y}_9 &= 2.4819310056 - 1.0280456659i; \\ \Delta y &= 3.0258 \cdot 10^{-5}; \\ \Delta\tilde{y}_9 &= 0.001366; \\ \Delta_1 y &= 0.00005. \end{aligned}$$

Здесь $y$ — значение точного решения; $\tilde{y}_9$ — приближенное решение (5); $\Delta y$ — абсолютная погрешность приближенного решения $\tilde{y}_9$; $\Delta\tilde{y}_9$ — оценка погрешности приближенного решения, полученная по теореме; $\Delta_1 y$ — апостериорная оценка погрешности.

Решением обратной задачи теории погрешности для $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-5}$ получаем $N = 19$, но с учетом того, что для номеров $n = 10, 11, \ldots, 19$ коэффициенты $C_n = 0$, в структуре приближенного решения можем ограничиться значением $N = 9$, при котором приближенное решение будет иметь погрешность $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-5}$.

**Выводы.** В статье сформулирована и доказана теорема, отражающая влияние возмущения подвижной особой точки на приближенное решение одного класса нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка в окрестности подвижной особой точки в комплексной области, определяемой соотношениями (6) и (7) при направлении движения по лучу к началу координат. Теорема справедлива и в вещественной области при соответствующих изменениях, указанных в следствии. Для оптимизации структуры приближенного решения была использована апостериорная оценка погрешности.

**Конкурирующие интересы.** Конкурирующих интересов не имеем.

**Авторский вклад и ответственность.** Все авторы принимали участие в разработке концепции статьи и в написании рукописи. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

**Финансирование.** Исследование выполнялось без финансирования.

**Благодарность.** Авторы выражают благодарность рецензенту и главному редактору за ценные замечания, позволившие улучшить текст статьи.

## Библиографический список

1. Hill J. M. Radial deflections of thin precompressed cylindrical rubber bush mountings // *Int. J. Solids Struct.*, 1977. no. 13. pp. 93–104. doi: 10.1016/0020-7683(77)90125-1.
2. Ockendon J. R. Numerical and analytical solutions of moving boundary problems / *Moving Boundary Problems*; eds. D. G. Wilson, A. D. Solomon and P. T. Boggs. New York: Academic Press, 1978. pp. 129–145.
3. Axford R. *Differential equations invariant urber two-parameter Lie groups with applications to non-linear diffusion*: Los Alamos Technical Reports, Rept. no. LA-4517, 1970. 39 pp., https://fas.org/sgp/othergov/doe/lanl/lib-www/la-pubs/00387291.html.

4. Kalman R. E., Bucy R. S. New results in linear filtering and prediction theory // *J. Basic Eng.*, 1961. vol. 83, no. 1. pp. 95–108. doi: 10.1115/1.3658902.
5. Shi M. On the solution of a one-dimensional Riccati equation related to risk-sencitive portfolio optimization problem // *Rep. Fac. Sci. Engrg. Saga. Univ. Math.*, 2005. vol. 34, no. 1. pp. 17–24.
6. Orlov V. N., Kovalchuk O. A. Mathematical problems of reliability assurance the building constructions // *E3S Web Conf.*, 2019. vol. 97, 03031. doi: 10.1051/e3sconf/20199703031.
7. Orlov V. N. Features of mathematical modelling in the analysis of console-type structures // *E3S Web Conf.*, 2019. vol. 97, 03036. doi: 10.1051/e3sconf/20199703036.
8. Голубев В. В. *Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений*. М.-Л.: ГИТЛ, 1950. 436 с.
9. Орлов В. Н. О приближенном решении первого уравнения Пенлеве // *Вестник КГТУ им. А. Н. Туполева*, 2008. №2. С. 42–46.
10. Орлов В. Н. Исследование приближенного решения дифференциального уравнения Абеля в окрестности подвижной особой точки // *Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2009. №4(35). С. 102–108.
11. Орлов В. Н. Об одном методе приближенного решения матричных дифференциальных уравнений Риккати // *Вестник МАИ*, 2008. Т. 15, №5. С. 128–135.
12. Orlov V. N., Kovalchuk O. A. Mathematical modeling of complex structures and nonlinear differential equations with movable points // *IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng.*, 2018. vol. 456, 012122. doi: 10.1088/1757-899X/456/1/012122.
13. Орлов В. Н., Ковальчук О. А., Линник Е. П., Линник И. И. Исследование одного класса нелинейного дифференциального уравнения третьего порядка в области аналитичности // *Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2018. №4(79). С. 24–35. doi: 10.18698/1812-3368-2018-4-24-35.
14. Орлов В. Н., Леонтьева Т. Ю. Построение приближенного решения одного нелинейного дифференциального уравнения второго порядка в окрестности подвижной особой точки в комплексной области // *Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Сер. Механика предельного состояния*, 2014. №4(22). С. 157–166.

**Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki**
**[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2020, vol. 24, no. 1, pp. 174–186**
**ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print)** https://doi.org/10.14498/vsgtu1727

**MSC: 34M99**

# On extension of the domain for analytical approximate solution of one class of nonlinear differential equations of the second order in a complex domain

***V. N. Orlov***[1]**, *T. Yu. Leontieva***[2]

[1] National Research Moscow State University of Civil Engineering,
26, Yaroslavskoye shosse, Moscow, 129337, Russian Federation.
[2] SAPEI CR "Interregional Competence Centre – Cheboksary Electromechanical College"
of the Ministry of Education and Youth Policy of the Chuvash Republic,
9, Lenin av., Cheboksary, 428000, Russian Federation.

**Abstract**

In previous research the authors have implemented the investigation of one class of nonlinear differential equations of the second order in the neighborhood of variable exceptional point. The authors have proven the following: the existence of variable exceptional point, theorem of the existence and uniqueness of solution in the neighborhood of variable exceptional point. The analytical approximated solution in the neighborhood of variable exceptional point was built. The authors researched the influence of disturbance of variable exceptional point on an approximated solution. The results obtained for the real domain have been extended to the complex domain $|z| < |\tilde{z}^*| \leqslant |z^*|$, where $z^*$ is precise value of variable exceptional point, $\tilde{z}^*$ is approximate value of variable exceptional point. In the present paper, the authors have carried out the investigation of analytical approximate solution of the influence of disturbance of variable exceptional point in the domain $|z| > |\tilde{z}^*| \geqslant |z^*|$, giving special attention to change of direction of movement along the beam towards the origin of coordinates of a complex domain. These researches are actual due to the variable exceptional point pattern (even fractional degree of critical pole). The received results are accompanied by the numerical experiment and complete the investigation of analytical approximated solution of the considered class of nonlinear differential equations in the neighborhood of variable exceptional point depending on the direction of movement along the beam in a complex domain.

**Keywords:** movable singular point, nonlinear differential equation, analytical approximate solution, neighborhood of variable exceptional point, complex domain, a posteriori estimate.

## Short Communication



**Please cite this article in press as:**
Orlov V. N., Leontieva T. Yu. On extension of the domain for analytical approximate solution of one class of nonlinear differential equations of the second order in a complex domain, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2020, vol. 24, no. 1, pp. 174–186. doi: 10.14498/vsgtu1727 (In Russian).

**Authors' Details:**
*Victor N. Orlov* https://orcid.org/0000-0001-7606-5490
Dr. Phys. & Math. Sci.; Associate Professor; Dept. of Applied Mathematics;
e-mail: orlovvn@mgsu.ru

*Tatyana Yu. Leontieva* https://orcid.org/0000-0002-4008-7468
Teacher; Dept. of the First Course; e-mail: betty2784@mail.ru

Received: 26th July, 2019 / Revised: 7th February, 2020 /
Accepted: 10th February, 2020 / First online: 10th March, 2020

**Competing interests.** We have no competing interests.

**Authors' contributions and responsibilities.** Each author has participated in the article concept development and in the manuscript writing. The authors are absolutely responsible for submitting the final manuscript in print. Each author has approved the final version of manuscript.

**Funding.** The research has not had any funding.

**Acknowledgments.** We are grateful to the anonymous reviewer and editor-in-chief of the journal for valuable comments that allowed us to improve the content of the article.

### References

1. Hill J. M. Radial deflections of thin precompressed cylindrical rubber bush mountings, *Int. J. Solids Struct.*, 1977, no. 13, pp. 93–104. doi: 10.1016/0020-7683(77)90125-1.
2. Ockendon J. R. Numerical and analytical solutions of moving boundary problems, In: *Moving Boundary Problems*; eds. D. G. Wilson, A. D. Solomon and P. T. Boggs. New York, Academic Press, 1978, pp. 129–145.
3. Axford R. *Differential equations invariant urber two-parameter Lie groups with applications to non-linear diffusion*, Los Alamos Technical Reports, Rept. no. LA-4517, 1970, 39 pp., https://fas.org/sgp/othergov/doe/lanl/lib-www/la-pubs/00387291.html.
4. Kalman R. E., Bucy R. S. New results in linear filtering and prediction theory, *J. Basic Eng.*, 1961, vol. 83, no. 1, pp. 95–108. doi: 10.1115/1.3658902.
5. Shi M. On the solution of a one-dimensional Riccati equation related to risk-sencitive portfolio optimization problem, *Rep. Fac. Sci. Engrg. Saga. Univ. Math.*, 2005, vol. 34, no. 1, pp. 17–24.
6. Orlov V. N., Kovalchuk O. A. Mathematical problems of reliability assurance the building constructions, *E3S Web Conf.*, 2019, vol. 97, 03031. doi: 10.1051/e3sconf/20199703031.
7. Orlov V. N. Features of mathematical modelling in the analysis of console-type structures, *E3S Web Conf.*, 2019, vol. 97, 03036. doi: 10.1051/e3sconf/20199703036.
8. Golubev V. V. *Lektsii po analiticheskoi teorii differentsial'nykh uravnenii* [Lectures on analytical theory of differential equations]. Moscow, Leningrad, GITL, 1950, 436 pp. (In Russian)
9. Orlov V. N. On the approximate solution of first Painlevé equation, *Vestnik KGTU im. A.N. Tupoleva*, 2008, no. 2, pp. 42–46 (In Russian).
10. Orlov V. N. Investigation of approximated solution of Abele equation in the neighborhood of variable exceptional point, *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Ser. Natural Sciences*, 2009, no. 4(35), pp. 102–108 (In Russian).
11. Orlov V. N. On the one method of approximate solution of matrix Riccati differential equations, *Aerospace MAI Journal*, 2008, vol. 15, no. 5, pp. 128–135 (In Russian).
12. Orlov V. N., Kovalchuk O. A. Mathematical modeling of complex structures and nonlinear differential equations with movable points, *IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng.*, 2018, vol. 456, 012122. doi: 10.1088/1757-899X/456/1/012122.
13. Orlov V. N., Kovalchuk O. A, Linnik E. P., Linnik I. I. Research into a class of third-order nonlinear differential equations in the domain of analyticity, *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Ser. Natural Sciences*, 2018, no. 4(79), pp. 24–35 (In Russian). doi: 10.18698/1812-3368-2018-4-24-35.
14. Orlov V. N., Leontieva T. Yu. Construction of the approximate solution of a second-order nonlinear differential equation in the neighborhood of a movable singular point in the complex domain, *Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Ser. Mechanics of Limit State*, 2014, no. 4(22), pp. 157–166 (In Russian).