Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2020. Т. 24, № 1. С. 187–198
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1657

УДК 517.956

Нелокальная задача для нестационарного уравнения третьего порядка составного типа с общим краевым условием

А. Р. Хашимов

Ташкентский финансовый институт,
Узбекистан, 100000, Ташкент, ул. А. Темура, 60 а.

Аннотация

Рассматривается нелокальная краевая задача для нестационарного уравнения третьего порядка составного типа, в котором на границе области значения функции и их производные до второго порядка задаются в виде линейной комбинации, а начальные условия — в нелокальном виде. Доказывается однозначная разрешимость этой задачи. При доказательстве единственности решения задачи использованы метод интегралов энергии и теория квадратичных форм. При построении решения задач использованы теория потенциалов и интегральные уравнения Вольтерра. Изучены некоторые асимптотические свойства фундаментальных решений уравнения.

Ключевые слова: нестационарные уравнения, фундаментальные решения, краевая задача, теория потенциалов, метод интегралов энергии, уравнения третьего порядка, уравнения составного типа, система интегральных уравнений, нелокальная задача.

Получение: 24 октября 2018 г. / Исправление: 22 августа 2019 г. / Принятие: 27 января 2020 г. / Публикация онлайн: 6 апреля 2020 г.

Целью данной работы является исследование уравнения

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} - \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \tag{1}$$

в области $\Omega = \{(x, y, z) : 0 < x < 1, 0 < y < 1, 0 < t \leqslant T\}$ с краевыми условиями

$$u(x, y, 0) = \alpha u(x, y, T), \quad \alpha = \text{const}, \tag{2}$$

Краткое сообщение

Образец для цитирования
Хашимов А. Р. Нелокальная задача для нестационарного уравнения третьего порядка составного типа с общим краевым условием // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2020. Т. 24, № 1. С. 187–198. doi: 10.14498/vsgtu1657.

Сведения об авторе

Абдукомил Рисбекович Хашимов ; кандидат физико-математических наук, доцент; e-mail: abdukomil@yandex.ru

$$\begin{aligned} \alpha_1(y,t)u(0,y,t)+\alpha_2(y,t)u_{xx}(0,y,t)=\varphi_1(y,t), \quad u_x(0,y,t)=\varphi_2(y,t),\\ \alpha_3(y,t)u(1,y,t)+\alpha_4(y,t)u_x(1,y,t)+\alpha_5(y,t)u_{xx}(1,y,t)=\varphi_3(y,t), \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} \beta_1(x,t)u(x,0,t)+\beta_2(x,t)u_{yy}(x,0,t)=\psi_1(x,t), \quad u_y(x,0,t)=\psi_2(x,t),\\ \beta_3(x,t)u(x,1,t)+\beta_4(x,t)u_x(x,1,t)+\beta_5(x,t)u_{xx}(x,1,t)=\psi_3(x,t), \end{aligned} \tag{4}$$

где $\alpha_2\beta_2\alpha_5\beta_5 \neq 0$;

$$\begin{aligned} &\alpha_1(y,t),\ \alpha_2(y,t),\ \varphi_1(y,t) \in C^{0,1}_{y,t}(\overline{\Omega_1});\\ &\beta_1(y,t),\ \beta_2(y,t),\ \psi_1(x,t) \in C^{0,1}_{x,t}(\overline{\Omega_3});\\ &\varphi_2(y,t) \in C(\overline{\Omega_1}); \quad \alpha_3(y,t),\ \alpha_4(y,t),\ \alpha_5(y,t),\ \varphi_3(y,t) \in C^{0,1}_{y,t}(\overline{\Omega_2});\\ &\psi_2(x,t) \in C(\overline{\Omega_3}); \quad \beta_3(x,t),\ \beta_4(y,t),\ \beta_5(x,t),\ \psi_3(x,t) \in C^{0,1}_{x,t}(\overline{\Omega_4}). \end{aligned} \tag{5}$$

Здесь

$$\begin{aligned} \Omega_0 &= \{(x,y,t) : 0<x<1, 0<y<1, t=0\},\\ \Omega_1 &= \{(x,y,t) : x=0, 0<y<1, 0<t\leqslant T\},\\ \Omega_2 &= \{(x,y,t) : x=1, 0<y<1, 0<t\leqslant T\},\\ \Omega_3 &= \{(x,y,t) : 0<x<1, y=0, 0<t\leqslant T\},\\ \Omega_4 &= \{(x,y,t) : 0<x<1, y=1, 0<t\leqslant T\}. \end{aligned}$$

Уравнение (1) является обобщением уравнения

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \tag{6}$$

в пространстве $\mathbb{R}^3$. Уравнение (6) исследовано в работе [1], в которой построено фундаментальное решение уравнения и разработана теория потенциалов, с помощью которой можно построить регулярное решение краевых задач для уравнения (6).

В работе [2] доказано, что фундаментальное решение уравнения (1) имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} U_0(x,y,t;\xi,\eta,\tau) &= \frac{1}{(t-\tau)^{2/3}} f\Big(\frac{x-\xi}{(t-\tau)^{1/3}}\Big) f\Big(\frac{y-\eta}{(t-\tau)^{1/3}}\Big), \quad x\neq\xi, y\neq\eta, t>\tau;\\ U_1(x,y,t;\xi,\eta,\tau) &= \frac{1}{(t-\tau)^{2/3}} f\Big(\frac{x-\xi}{(t-\tau)^{1/3}}\Big) \varphi\Big(\frac{y-\eta}{(t-\tau)^{1/3}}\Big), \quad x\neq\xi, y>\eta, t>\tau;\\ U_2(x,y,t;\xi,\eta,\tau) &= \frac{1}{(t-\tau)^{2/3}} \varphi\Big(\frac{x-\xi}{(t-\tau)^{1/3}}\Big) f\Big(\frac{y-\eta}{(t-\tau)^{1/3}}\Big), \quad x>\xi, y\neq\eta, t>\tau. \end{aligned}$$

Здесь функции $f(z)$ и $\varphi(z)$ называются функциями Эйри и являются решениями уравнения

$$p''(z) + \frac{z}{3}p(z) = 0.$$

Для функций $f(z)$ и $\varphi(z)$ справедливы следующие соотношения (см. [3]):

$$p^{(n)}(z) \sim c_n^+ z^{n/2-1/4} \sin\Big(\frac{2}{3}z^{3/2}\Big), \quad \text{при} \quad z\to\infty,$$

$$p^{(n)}(z) \sim c_n^- |z|^{n/2-1/4} \exp\Big(-\frac{2}{3}|z|^{3/2}\Big), \quad \text{при} \quad z \to -\infty,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(z)dz = \pi, \quad \int_{-\infty}^{0} f(z)dz = \frac{\pi}{3}, \quad \int_{0}^{\infty} f(z)dz = \frac{2\pi}{3}, \quad \int_{0}^{\infty} \varphi(z)dz = 0.$$

Здесь c_n^+, c_n^- — постоянные.

Далее нами изучены (см. [3]) свойства фундаментальных решений уравнения (1), которые будут необходимы при построении решений краевых задач типа (1)–(4). Эти свойства фундаментальных решений даются в виде следующих лемм (см. [3, 14]).

Лемма 1. *Пусть* $\alpha(y,t) \in C\left(\overline{\Omega}_2\right)$. *Тогда*

$$\lim_{x\to 1-0} \int_0^t \int_0^1 U_{0\xi\xi}(x-1, y-\eta; t-\tau)\alpha(\eta,\tau)\, d\eta d\tau = \frac{\pi^2}{3}\alpha(y,t).$$

Лемма 2. *Пусть* $\beta(x,t) \in C\left(\overline{\Omega}_4\right)$. *Тогда*

$$\lim_{y\to 1-0} \int_0^t \int_0^1 U_{0\eta\eta}(x-\xi, y-1; t-\tau)\beta(\xi,\tau)\, d\xi d\tau = \frac{\pi^2}{3}\beta(x,t).$$

Лемма 3. *Пусть* $\alpha(y,t) \in C\left(\overline{\Omega}_1\right)$ *удовлетворяет неравенству Гельдера с показателем* $\beta \geqslant 1/4$. *Тогда*

$$\lim_{x\to 0+0} \int_0^t \int_0^1 U_{0\xi\xi}(x-0, y-\eta; t-\tau)\alpha(\eta,\tau)\, d\eta d\tau = -\frac{2\pi^2}{3}\alpha(y,t),$$

$$\lim_{x\to 0+0} \int_0^t \int_0^1 U_{2\xi\xi}(x-0, y-\eta; t-\tau)\alpha(\eta,\tau)\, d\eta d\tau = 0.$$

Лемма 4. *Пусть* $\beta(x,t) \in C\left(\overline{\Omega}_3\right)$ *удовлетворяет неравенству Гельдера с показателем* $\gamma \geqslant 1/4$. *Тогда*

$$\lim_{y\to 0+0} \int_0^t \int_0^1 U_{0\eta\eta}(x-\xi, y-0; t-\tau)\beta(\xi,\tau)\, d\xi d\tau = -\frac{2\pi^2}{3}\beta(x,t),$$

$$\lim_{y\to 0+0} \int_0^t \int_0^1 U_{1\eta\eta}(x-\xi, y-0; t-\tau)\beta(\xi,\tau)\, d\xi d\tau = 0.$$

Лемма 5. *Пусть* $\alpha(y,t) \in C\left(\overline{\Omega}_1\right)$. *Тогда*

$$\frac{d}{dz}\int_0^z \frac{J(y,t)}{(z-t)^{1/3}}\, dt = \frac{\pi^2 f'(0)}{\sqrt{3}}\alpha(y,z),$$

где $J(y,t) = \displaystyle\int_0^t \int_0^1 \frac{f'(0)}{(t-\tau)} f\Big(\frac{y-\eta}{(t-\tau)^{1/3}}\Big)\alpha(\eta,\tau)\, d\eta d\tau.$

Отметим, что фундаментальные решения уравнения (1) и линейного уравнения Захарова—Кузнецова

$$u_t + u_{xxx} + u_{xyy} = 0 \tag{7}$$

обладают идентичными асимптотическими свойствами на бесконечности [4–8]. Уравнение Захарова—Кузнецова (7) является одним из вариантов обобщения уравнение Кортевега—де Фриза в многомерном пространстве и описывает ионно-акустические волновые процессы в плазме [5, 8].

В настоящее время часто возникают задачи, связанные с исследованием уравнений в частных производных, не принадлежащих ни к одному из классических типов. Поэтому в последние годы уделяется большое внимание исследованию такого рода неклассических уравнений, которые еще мало изучены [3–14].

Проведем исследование задачи (1)–(4).

Теорема 1. *Пусть* $e^{mT}-\alpha^2 \geqslant 0$, $m<0$, *и выполнены следующие условия*:

$$a)\quad \alpha_5\neq 0,\quad 2\alpha_3\alpha_5-\alpha_4^2\geqslant 0,\quad \frac{\alpha_3}{\alpha_5}+\frac{1}{2}\geqslant 0,\quad \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\leqslant 0;$$

$$b)\quad \beta_5\neq 0,\quad 2\beta_3\beta_5-\beta_4^2\geqslant 0,\quad \frac{\beta_3}{\beta_5}+\frac{1}{2}\geqslant 0,\quad \frac{\beta_1}{\beta_2}\leqslant 0.$$

Тогда задача (1)–(4) *имеет не более одного решения.*

Доказательство. Допустим, что существует два решения задачи (1)–(4). Тогда, вводя обозначение $v(x,y,t)=u_1(x,y,t)-u_2(x,y,t)$, получаем относительно функции $v(x,y,t)$ следующую задачу с однородным краевым условием:

$$L(v)\equiv v_{xxx}+v_{yyy}-v_t=0,$$

$$v(x,y,0)=\alpha v(x,y,T),\quad \alpha=\mathrm{const},$$

$$\begin{gathered}\alpha_1(y,t)v(0,y,t)+\alpha_2(y,t)v_{xx}(0,y,t)=0,\qquad v_x(0,y,t)=0,\\ \alpha_3(y,t)v(1,y,t)+\alpha_5(y,t)v_x(1,y,t)+\alpha_5(y,t)v_{xx}(1,y,t)=0,\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}\beta_1(x,t)v(x,0,t)+\beta_2(x,t)v_{yy}(x,0,t)=0,\qquad v_y(x,0,t)=0,\\ \beta_3(x,t)v(x,1,t)+\beta_4(x,t)v_y(x,1,t)+\beta_5(x,t)v_{yy}(x,1,t)=0.\end{gathered}$$

Рассмотрим тождество

$$\int_0^1\int_0^1\int_0^T L(v)v(x,y,t)e^{mt}\,dxdydt=0.$$

Интегрируя его по частям, получим

$$\begin{aligned}-\int_0^T\int_0^1\Big(\frac{\alpha_3}{\alpha_5}v^2(1,y,t)+\frac{\alpha_4}{\alpha_5}v(1,y,t)v_x(1,y,t)+\frac{1}{2}v_x^2(1,y,t)\Big)e^{mt}\,dydt-\\ -\int_0^T\int_0^1\Big(\frac{\beta_3}{\beta_5}v^2(x,1,t)+\frac{\beta_4}{\beta_5}v(x,1,t)v_y(x,1,t)+\frac{1}{2}v_y^2(x,1,t)\Big)e^{mt}\,dxdt-\\ -\int_0^T\int_0^1\Big(-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\Big)v^2(0,y,t)e^{mt}\,dydt-\int_0^T\int_0^1\Big(-\frac{\beta_1}{\beta_2}\Big)v^2(x,0,t)e^{mt}\,dxdt-\end{aligned}$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^1\int_0^1\left(e^{mT}-\alpha^2\right)v^2(x,y,T)\,dxdy+\frac{m}{2}\int_0^T\int_0^1\int_0^1 v^2(x,y,t)e^{mt}\,dxdydt=0.$$

Отсюда в силу условий теоремы квадратичная форма $Q=\frac{\alpha_3}{\alpha_5}v^2+\frac{\alpha_4}{\alpha_5}vv_x+\frac{1}{2}v_x^2$ будет положительно определенной. Следовательно, можно записать

$$\frac{\alpha_3}{\alpha_5}v^2+\frac{\alpha_4}{\alpha_5}vv_x+\frac{1}{2}v_x^2\equiv\lambda_1v^2+\lambda_2v_x^2.$$

Здесь $\lambda_1>0$, $\lambda_2>0$ — характеристические числа матрицы квадратичной формы Q. Аналогичный вывод можно сделать для $\frac{\beta_3}{\beta_5}v^2+\frac{\beta_4}{\beta_5}vv_y+\frac{1}{2}v_y^2$. Тогда в силу условий теоремы имеем $v=0$ в Ω, и в силу непрерывности функции $v(x,y,t)$ в $\overline{\Omega}$ получаем $v(x,y,t)=0$ в $\overline{\Omega}$. $\Box$

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* (5) *и условия теоремы* 1. *Тогда задача* (1)–(4) *имеет единственное решение.*

Доказательство. Решение задачи (1)–(4) построим методом потенциалов. Будем его искать в следующем виде:

$$\begin{aligned}u(x,y,t)&=\int_0^1\int_0^1 U_0(x,y,t;\xi,\eta,0)u_0(\xi,\eta)\,d\xi d\eta+\\&+\int_0^t\int_0^1 U_0(x,y,t;0,\eta,\tau)p_1(\eta,\tau)\,d\eta d\tau+\int_0^t\int_0^1 U_0(x,y,t;1,\eta,\tau)p_2(\eta,\tau)\,d\eta d\tau+\\&+\int_0^t\int_0^1 U_2(x,y,t;0,\eta,\tau)p_3(\eta,\tau)\,d\eta d\tau+\int_0^t\int_0^1 U_0(x,y,t;\xi,0,\tau)q_1(\xi,\tau)\,d\xi d\tau+\\&+\int_0^t\int_0^1\big(U_0(x,y,t;\xi,1,\tau)q_2(\xi,\tau)+U_1(x,y,t;\xi,0,\tau)q_3(\xi,\tau)\big)\,d\xi d\tau.\end{aligned}$$

Здесь $u_0(x,y)\equiv u(x,y,0)$; $p_i(\eta,\tau)$, $q_i(\xi,\tau)$ — пока неизвестные функции.

Теперь, удовлетворяя условию (2), первому и третьему условиям из (3) и (4), а также используя леммы 1, 2, 3, 4, из (7) получаем следующую систему интегральных уравнений:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\alpha}u_0(x,y)=&\int_0^1\int_0^1 U_0(x-\xi,y-\eta,T;)u_0(\xi,\eta)\,d\xi d\eta+\\&+\int_0^t\int_0^1 U_0(x-0,y-\eta,T-\tau)p_1(\eta,\tau)\,d\eta d\tau+\\&+\int_0^t\int_0^1 U_0(x-1,y-\eta,T-\tau)p_2(\eta,\tau)\,d\eta d\tau+\\&+\int_0^t\int_0^1 U_2(x-0,y-\eta,T-\tau)p_3(\eta,\tau)\,d\eta d\tau+\\&+\int_0^t\int_0^1 U_1(x-\xi,y-0,T-\tau)q_3(\xi,\tau)\,d\xi d\tau+\\&+\int_0^t\int_0^1 U_0(x-\xi,y-1,T-\tau)q_2(\xi,\tau)\,d\xi d\tau+\end{aligned}$$

$$+\int_0^t\int_0^1 U_0(x-\xi,y-0,T-\tau)q_1(\xi,\tau)\,d\xi d\tau, \quad (8)$$

$$\varphi_1(y,t)+\frac{2\pi^2}{3}\alpha_2(y,t)p_1(y,t)=$$
$$=\int_0^1\int_0^1\big(\alpha_1U_0(0-\xi,y-\eta,t)+\alpha_2U_{0xx}(0-\xi,y-\eta,t)\big)u_0(\xi,\eta)\,d\xi d\eta+$$
$$+\int_0^t\int_0^1\big(\alpha_1U_0(0-0,y-\eta,t-\tau)p_1(\eta,\tau)+\alpha_1U_2(0-0,y-\eta,t-\tau)p_3(\eta,\tau)\big)\,d\eta d\tau+$$
$$+\int_0^t\int_0^1\big(\alpha_1U_0(0-1,y-\eta,t-\tau)+\alpha_2U_{0xx}(0-1,y-\eta,t-\tau)\big)p_2(\eta,\tau)d\eta d\tau+$$
$$+\int_0^t\int_0^1\big(\alpha_1U_1(0-\xi,y-0,t-\tau)+\alpha_2U_{1xx}(0-\xi,y,t-\tau)\big)q_3(\xi,\tau)\,d\xi d\tau+$$
$$+\int_0^t\int_0^1\big(\alpha_1U_0(0-\xi,y-1,t-\tau)+\alpha_2U_{0xx}(0-\xi,y-1,t-\tau)\big)q_2(\xi,\tau)\,d\xi d\tau+$$
$$+\int_0^t\int_0^1\big(\alpha_1U_0(0-\xi,y-0,t-\tau)+\alpha_2U_{0xx}(0-\xi,y,t-\tau)\big)q_1(\xi,\tau)\,d\xi d\tau, \quad (9)$$

$$\varphi_3(y,t)-\frac{\pi^2}{3}\alpha_5(y,t)p_2(y,t)=\int_0^1\int_0^1\alpha_3U_0(1-\xi,y-\eta,t)u_0(\xi,\eta)\,d\xi d\eta+$$
$$+\int_0^1\int_0^1\big(\alpha_4U_{0x}(1-\xi,y-\eta,t)+\alpha_5U_{0xx}(1-\xi,y-\eta,t)\big)u_0(\xi,\eta)\,d\xi d\eta+$$
$$+\int_0^t\int_0^1\big(\alpha_3U_0(1-1,y-\eta,t-\tau)+\alpha_4U_{0x}(1-1,y-\eta,t-\tau)\big)p_2(\eta,\tau)\,d\eta d\tau+$$
$$+\int_0^t\int_0^1\big(\alpha_3U_0(1-0,y-\eta,t-\tau)+\alpha_4U_{0x}(1-0,y-\eta,t-\tau)\big)p_1(\eta,\tau)\,d\eta d\tau+$$
$$+\int_0^t\int_0^1\alpha_5U_{0xx}(1-0,y-\eta,t-\tau)p_1(\eta,\tau)\,d\eta d\tau+$$
$$+\int_0^t\int_0^1\big(\alpha_3U_2(1-0,y-\eta,t-\tau)+\alpha_4U_{2x}(1-0,y-\eta,t-\tau)\big)p_3(\eta,\tau)\,d\eta d\tau+$$
$$+\int_0^t\int_0^1\alpha_5U_{2xx}(1-0,y-\eta,t-\tau)p_3(\eta,\tau)\,d\eta d\tau+$$
$$+\int_0^t\int_0^1\big(\alpha_3U_1(1-\xi,y-0,t-\tau)+\alpha_4U_{1x}(1-\xi,y-0,t-\tau)\big)q_3(\xi,\tau)\,d\xi d\tau+$$
$$+\int_0^t\int_0^1\alpha_5U_{1xx}(1-\xi,y-0,t-\tau)q_3(\xi,\tau)\,d\xi d\tau+$$
$$+\int_0^t\int_0^1\big(\alpha_3U_0(1-\xi,y-1,t-\tau)+\alpha_4U_{0x}(1-\xi,y-1,t-\tau)\big)q_2(\xi,\tau)\,d\xi d\tau+$$
$$+\int_0^t\int_0^1\alpha_5U_{0xx}(1-\xi,y-1,t-\tau)q_2(\xi,\tau)\,d\xi d\tau+$$

$$+\int_0^t\int_0^1\big(\alpha_3U_0(1-\xi,y-0,t-\tau)+\alpha_4U_{0x}(1-\xi,y-0,t-\tau)\big)q_1(\xi,\tau)\,d\xi d\tau+$$
$$+\int_0^t\int_0^1\alpha_5U_{0xx}(1-\xi,y-0,t-\tau)q_1(\xi,\tau)\,d\xi d\tau, \quad (10)$$

$$\psi_1(y,t)+\frac{2\pi^2}{3}\beta_2(x,t)q_1(x,t)=$$
$$=\int_0^1\int_0^1\big(\beta_1U_0(x-\xi,0-\eta,t)+\beta_2U_{0yy}(x-\xi,0-\eta,t)\big)u_0(\xi,\eta)\,d\xi d\eta+$$
$$+\int_0^t\int_0^1\big(\beta_1U_0(x-1,0-\eta,t-\tau)+\beta_2U_{0yy}(x-1,0-\eta,t-\tau)\big)p_2(\eta,\tau)\,d\eta d\tau+$$
$$+\int_0^t\int_0^1\big(\beta_1U_0(x-0,0-\eta,t-\tau)+\beta_2U_{0yy}(x-0,0-\eta,t-\tau)\big)p_1(\eta,\tau)\,d\eta d\tau+$$
$$+\int_0^t\int_0^1\big(\beta_1U_2(x-0,0-\eta,t-\tau)+\beta_2U_{2yy}(x-0,0-\eta,t-\tau)\big)p_3(\eta,\tau)\,d\eta d\tau+$$
$$+\int_0^t\int_0^1\beta_1U_1(x-\xi,0-0,t-\tau)q_3(\xi,\tau)\,d\xi d\tau+$$
$$+\int_0^t\int_0^1\big(\beta_1U_0(x-\xi,0-1,t-\tau)+\beta_2U_{0yy}(x-\xi,0-1,t-\tau)\big)q_2(\xi,\tau)\,d\xi d\tau+$$
$$+\int_0^t\int_0^1\beta_1U_0(x-\xi,0-0,t-\tau)q_1(\xi,\tau)d\xi d\tau, \quad (11)$$

$$\psi_3(y,t)-\frac{\pi^2}{3}\beta_5(x,t)q_2(x,t)=$$
$$=\int_0^1\int_0^1\big(\beta_3U_0(x-\xi,1-\eta,t)+\beta_4U_{0y}(x-\xi,1-\eta,t)\big)u_0(\xi,\eta)\,d\xi d\eta+$$
$$+\int_0^1\int_0^1\beta_5U_{0yy}(x-\xi,1-\eta,t)u_0(\xi,\eta)\,d\xi d\eta+$$
$$+\int_0^t\int_0^1\big(\beta_3U_0(x-1,1-\eta,t-\tau)+\beta_4U_{0y}(x-1,1-\eta,t-\tau)\big)p_2(\eta,\tau)\,d\eta d\tau+$$
$$+\int_0^t\int_0^1\beta_5U_{0yy}(x-1,1-\eta,t-\tau)p_2(\eta,\tau)\,d\eta d\tau+$$
$$+\int_0^t\int_0^1\big(\beta_3U_0(x-0,1-\eta,t-\tau)+\beta_4U_{0y}(x-0,1-\eta,t-\tau)\big)p_1(\eta,\tau)\,d\eta d\tau+$$
$$+\int_0^t\int_0^1\beta_5U_{0yy}(x-0,1-\eta,t-\tau)p_1(\eta,\tau)\,d\eta d\tau+$$
$$+\int_0^t\int_0^1\big(\beta_3U_2(x-0,1-\eta,t-\tau)+\beta_4U_{2y}(x-0,1-\eta,t-\tau)\big)p_3(\eta,\tau)\,d\eta d\tau+$$
$$+\int_0^t\int_0^1\beta_5U_{2yy}(x-0,1-\eta,t-\tau)p_3(\eta,\tau)\,d\eta d\tau+$$

$$+\int_0^t\int_0^1\big(\beta_3U_1(x-\xi,1-0,t-\tau)+\beta_4U_{1y}(x-\xi,1-0,t-\tau)\big)q_3(\xi,\tau)\,d\xi d\tau+$$
$$+\int_0^t\int_0^1\beta_5U_{1yy}(x-\xi,1-0,t-\tau)q_3(\xi,\tau)\,d\xi d\tau+$$
$$+\int_0^t\int_0^1\beta_3U_0(x-\xi,1-1,t-\tau)q_2(\xi,\tau)\,d\xi d\tau\quad+$$
$$+\int_0^t\int_0^1\beta_4U_{0y}(x-\xi,1-1,t-\tau)q_2(\xi,\tau)\,d\xi d\tau\;+$$
$$+\int_0^t\int_0^1\big(\beta_3U_0(x-\xi,1-0,t-\tau)+\beta_4U_{0y}(x-\xi,1-0,t-\tau)\big)q_1(\xi,\tau)\,d\xi d\tau+$$
$$+\int_0^t\int_0^1\beta_5U_{0yy}(x-\xi,1-0,t-\tau)q_1(\xi,\tau)\,d\xi d\tau.\quad(12)$$

В этой системе первое уравнение является уравнением второго рода фредгольмовского типа, а остальные уравнения относятся к уравнениям второго рода вольтерровского типа.

Теперь, удовлетворяя второе условие из (3) и (4), получаем уравнения, относящиеся интегральным уравнением первого рода вольтерровского типа:

$$\varphi_2(x,y)=\int_0^1\int_0^1U_{0x}(0-\xi,y-\eta,t)u_0(\xi,\eta)\,d\xi d\eta+$$
$$+\int_0^t\int_0^1U_{0x}(0-0,y-\eta,t-\tau)p_1(\eta,\tau)\,d\eta d\tau+$$
$$+\int_0^t\int_0^1U_{0x}(0-1,y-\eta,t-\tau)p_2(\eta,\tau)\,d\eta d\tau+$$
$$+\int_0^t\int_0^1U_{2x}(0-0,y-\eta,t-\tau)p_3(\eta,\tau)\,d\eta d\tau+$$
$$+\int_0^t\int_0^1U_{1x}(0-\xi,y-0,t-\tau)q_3(\xi,\tau)\,d\xi d\tau+$$
$$+\int_0^t\int_0^1U_{0x}(0-\xi,y-1,t-\tau)q_2(\xi,\tau)\,d\xi d\tau+$$
$$+\int_0^t\int_0^1U_{0x}(0-\xi,y-0,t-\tau)q_1(\xi,\tau)\,d\xi d\tau,\quad(13)$$

$$\psi_2(x,y)=\int_0^1\int_0^1U_{0y}(x-\xi,0-\eta,t)u_0(\xi,\eta)\,d\xi d\eta+$$
$$+\int_0^t\int_0^1U_{0y}(x-0,0-\eta,t-\tau)p_1(\eta,\tau)\,d\eta d\tau+$$
$$+\int_0^t\int_0^1U_{0y}(x-1,0-\eta,t-\tau)p_2(\eta,\tau)\,d\eta d\tau+$$

$$+\int_0^t\int_0^1 U_{2y}(x-0,0-\eta,t-\tau)p_3(\eta,\tau)\,d\eta d\tau+$$
$$+\int_0^t\int_0^1 U_{1y}(x-\xi,0-0,t-\tau)q_3(\xi,\tau)\,d\xi d\tau+$$
$$+\int_0^t\int_0^1 U_{0y}(x-\xi,0-1,t-\tau)\gamma_2(\xi,\tau)\,d\xi d\tau+$$
$$+\int_0^t\int_0^1 U_{y}(x-\xi,0-0,t-\tau)q_1(\xi,\tau)\,d\xi d\tau. \quad (14)$$

Чтобы свести эти уравнения к уравнению второго рода, используем лемму 5, т.е. применяем преобразование Абеля. Тогда уравнения (13) и (14) сведутся к интегральным уравнениям второго рода вольтерровского типа.

Так как в системе уравнений, состоящих из уравнений (9)–(14),

$$\Delta=\begin{vmatrix} \frac{2\pi^2}{3}\alpha_2(y,\eta) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -\frac{\pi^2}{3}\alpha_5(y,\eta) & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \frac{2\pi^2}{3}\beta_2(x,\xi) & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\pi^2}{3}\beta_5(x,\xi) & 0\\ -\frac{\pi^2}{\sqrt3}f'(0) & 0 & -\frac{\pi^2}{\sqrt3}\varphi'(0) & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\pi^2}{\sqrt3}f'(0) & 0 & -\frac{\pi^2}{\sqrt3}\varphi'(0) \end{vmatrix}=$$
$$=\frac{4\pi^2}{243}\alpha_2\beta_2\alpha_5\beta_5\big(\varphi'(0)\big)^2\neq 0,$$

ее можно записать в следующем виде:

$$\mu_i(z,t)=\int_0^t\int_0^1 K_i(z,t;\varsigma,\tau)\mu_i(\varsigma,\tau)d\varsigma d\tau+\Phi_i(z,t;u_0),\quad i=\overline{1,6}. \quad (15)$$

Здесь

$$\mu_1(z,t)\equiv p_{1t}(x,t),\quad \mu_2(z,t)\equiv p_2(x,t),\quad \mu_3(z,t)\equiv p_{3t}(x,t),$$
$$\mu_4(z,t)\equiv q_{1t}(y,t),\quad \mu_5(z,t)\equiv q_2(y,t),\quad \mu_6(z,t)\equiv q_{3t}(y,t),$$
$$|K_i(z,t;\varsigma,\tau)|\leqslant C\cdot(t-\tau)^{-11/12},\qquad \Phi_i(z,t)\in C^1(\overline{D}).$$

Так как система уравнений (15) является системой уравнения вольтерровского типа, она имеет единственное решение.

Теперь, воспользовавшись ее решением, из уравнения (8) получаем интегральные уравнения второго рода фредгольмовского типа:

$$u_{0x}(x,y)=\int_0^1\int_0^1 K_1(x,y;\xi,\eta)u_{0\xi}(\xi,\eta)\,d\xi d\eta+\Phi_0(x,y),$$
$$u_{0y}(x,y)=\int_0^1\int_0^1 K_1(x,y;\xi,\eta)u_{0\eta}(\xi,\eta)\,d\xi d\eta+\Phi_1(x,y).$$

Здесь в силу свойств функций Эйри имеем

$$|K_1(x,y;\xi,\eta)|\leqslant C\cdot\big((x-\xi)(y-\eta)\big)^{-1/4},\quad \Phi_0(x,y),\ \Phi_1(x,y)\in C^1(\overline{D}).$$

Теперь в силу теоремы 1 решение этого интегрального уравнения существует. Тогда задача (1)–(4) имеет единственное решение. □

Конкурирующие интересы. Конкурирующих интересов не имею.

Авторский вклад и ответственность. Я несу полную ответственность за предоставление окончательной версии рукописи в печать. Окончательная версия рукописи мною одобрена.

Финансирование. Исследование выполнялось без финансирования.

Библиографический список

1. Cattabriga L. Un problema al contorno per una equazione parabolica di ordine dispari // *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa — Classe di Scienze, Serie 3*, 1959. vol. 13, no. 2. pp. 163–203.
2. Абдиназаров С., Собиров З. А. О фундаментальных решениях уравнения с кратными характеристиками третьего порядка в многомерном пространстве / *Дифференциальные уравнения с частными производными и родственные проблемы анализа и информатики*: Тр. межд. научн. конф. Ташкент, 2004. С. 12–13.
3. Хашимов А. Р. О некоторых свойствах фундаментальных решений нестационарного уравнения нечетного порядка составного типа в многомерных областях // *Докл. АН РУз*, 2010. № 5. С. 6–9.
4. Фаминский А. В. Задача Коши для уравнения Захарова–Кузнецова // *Дифференц. уравнения*, 1995. Т. 31, № 6. С. 1070–1081.
5. Попов С. П. Особенности численного моделирования двухсолитонных решений уравнения Захарова–Кузнецова // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 1999. Т. 39, № 10. С. 1749–1757.
6. Khashimov A. R. Some properties of the fundamental solutions of nonstationary third order composite type equation in multidimensional domains // *J. Nonlin. Evol. Equ. Appl.*, 2013. no. 1. pp. 29–38.
7. Хашимов А. Р., Якубов С. О некоторых свойствах решений задачи Коши для нестационарного уравнения третьего порядка составного типа // *Уфимск. матем. журн.*, 2014. Т. 6, № 4. С. 139–148.
8. Фаминский А. В. О нелокальной корректности смешанной задачи для уравнения Захарова–Кузнецова // *Современная математика и ее приложения*, 2006. Т. 38. С. 135–148.
9. Кожанов А. И. *Краевые задачи для уравнений математической физики нечетного порядка.* Новосибирск: НГУ, 1990. 130 с.
10. Фаминский А. В., Опритова М. А. О задаче Коши для уравнения Кавахары / *Труды Шестой Международной конференции по дифференциальным и функционально-дифференциальным уравнениям* (Москва, 14–21 августа, 2011). Часть 1 / СМФН, Т. 45. М.: РУДН, 2012. С. 132–150.
11. Катсон В. М. Уединенные волны двумерного модифицированного уравнения Кавахары // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика*, 2008. Т. 16, № 6. С. 76–85.
12. Сангаре К., Фаминский А. В. Слабые решения смешанной задачи в полуполосе для обобщенного уравнения Кавахары // *Матем. заметки*, 2009. Т. 85, № 1. С. 98–109. doi: 10.4213/mzm4307.
13. Фаминский А. В., Кувшинов Р. В. Начально-краевые задачи для обобщенного уравнения Кавахары // *УМН*, 2011. Т. 66, № 4(400). С. 187–188. doi: 10.4213/rm9427.
14. Хашимов А. Р. Вторая краевая задача для нестационарного уравнения третьего порядка составного типа // *Матем. заметки СВФУ*, 2017. Т. 24, № 4. С. 76–86. doi: 10.25587/SVFU.2018.4.11318.

Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2020, vol. 24, no. 1, pp. 187–198
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1657

MSC: 35M10

The nonlocal problem for a non-stationary third order composite type equation with general boundary condition

A. R. Khashimov

Tashkent Financial Institute,
60 a, Amir Temur str., Tashkent, 100000, Uzbekistan.

Abstract

We consider a nonlocal boundary value problem for non-stationary composite type equation of the third order. The values of function and its derivatives up to the second order on the boundary are given as a linear combination. The initial conditions are nonlocal. We prove the unique solvability for this problem. In proving the problem solution uniqueness we use the method of energy integrals and the theory of quadratic forms. For the problem solution construction we use the potential theory and Volterra integral equations. Some asymptotic properties of the fundamental solutions of the equation are studied.

Keywords: non-stationary equations, fundamental solutions, boundary value problem, potential theory, energy integral method, third order equations, composite type equations, system of integral equations, nonlocal problem.

Received: 24th October, 2018 / Revised: 22nd August, 2019 /
Accepted: 27th January, 2020 / First online: 6th April, 2020

Competing interests. I have no competing interests.

Authors' contributions and responsibilities. I take full responsibility for submitting the final manuscript in print. I approved the final version of the manuscript.

Funding. The research has not had any funding.

References

1. Cattabriga L. Un problema al contorno per una equazione parabolica di ordine dispari, *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa — Classe di Scienze, Serie 3*, 1959, vol. 13, no. 2, pp. 163–203.

Short Communication

Please cite this article in press as:
Khashimov A. R. The nonlocal problem for a non-stationary third order composite type equation with general boundary condition, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2020, vol. 24, no. 1, pp. 187–198. doi: 10.14498/vsgtu1657 (In Russian).

Author's Details:
Abdukomil R. Khashimov; Cand. Phys. & Math. Sci; Associate Professor;
e-mail: abdukomil@yandex.ru

2. Abdinazarov S., Sobirov Z. A. On fundamental solutions of an equation with multiple third-order characteristics in a multidimensional space, In: *Differential Equations with Partial Derivatives and Related Problems of Analysis and Informatics*, Proc. Int. Sci. Conf.. Tashkent, 2004, pp. 12–13 (In Russian).
3. Khashimov A. R. On some properties of fundamental solutions of a non-stationary oddorder equation of composite type in multidimensional domains, *Dokl. Akad. Nauk Resp. Uzb.*, 2010, no. 5, pp. 6–9 (In Russian).
4. Faminskij A. V. The Cauchy problem for the Zakharov–Kuznetsov equation, *Differ. Equ.*, 1995, vol. 31, no. 6, pp. 1002–1012.
5. Popov S. P. Numerical simulation of two-soliton solutions to the Zakharov–Kuznetsov equation, *Comput. Math. Math. Phys.*, 1999, vol. 39, no. 10, pp. 1679–1686.
6. Khashimov A. R. Some properties of the fundamental solutions of nonstationary third order composite type equation in multidimensional domains, *J. Nonlin. Evol. Equ. Appl.*, 2013, no. 1, pp. 29–38.
7. Khashimov A. R., Yakubov S. On some properties of Cauchy problem for non-stationary third order composite type equation, *Ufa Math. J.*, 2014, vol. 6, no. 4, pp. 135–144. doi: 10.13108/2014-6-4-135.
8. Faminskii A. V. Nonlocal well-posedness of the mixed problem for the Zakharov–Kuznetsov equation, *J. Math. Sci.*, 2007, vol. 147, no. 1, pp. 6524–6537. doi: 10.1007/s10958-007-0491-9.
9. Kozhanov A. I. *Boundary Value Problems for Mathematical Physics Equations of Odd Order*. Novosibirsk, Novosibirsk State Univ., 1990, 130 pp. (In Russian)
10. Faminskii A. V., Opritova M. A. On the initial-value problem for the Kawahara equation, *J. Math. Sci.*, 2014, vol. 201, no. 5, pp. 614–633. doi: 10.1007/s10958-014-2015-8.
11. Katson V. M. Solitary waves of two-dimensional modified Kawahara equation, *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved., Prikl. Nelinejn. Din.*, 2008, vol. 16, no. 6, pp. 76–85 (In Russian).
12. Sangare K., Faminskii A. V. Weak solutions of a mixed problem in a half-strip for a generalized Kawahara equation, *Math. Notes*, 2009, vol. 85, no. 1, pp. 90–100. doi: 10.1134/S000143460901009X.
13. Faminskii A. V., Kuvshinov R. V. Initial-boundary value problems for the generalized Kawahara equation, *Russian Math. Surveys*, 2011, vol. 66, no. 4, pp. 819–821. doi: 10.1070/RM2011v066n04ABEH004760.
14. Khashimov A. R. On the second boundary value problem for nonstationary third-order equations of mixed type, *Math. Notes of NEFU*, 2017, vol. 24, no. 4, pp. 76–86 (In Russian). doi: 10.25587/SVFU.2018.4.11318.