Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2020. Т. 24, № 1. С. 199–208
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1730

УДК 539.3

Интегро-дифференциальные уравнения второй краевой задачи линейной теории упругости. Сообщение 2. Неоднородное анизотропное тело

В. В. Стружанов

Институт машиноведения УрО РАН,
Россия, 620049, Екатеринбург, ул. Комсомольская, 34.

Аннотация

Ранее, в сообщении 1, были рассмотрены интегро-дифференциальные уравнения второй краевой задачи теории упругости для однородного изотропного тела. Полученные результаты распространены на краевые задачи для общего случая неоднородного анизотропного тела. Показано, что найденные интегро-дифференциальные уравнения также являются уравнениями фредгольмовского типа. Доказано существование и единственность их решения. Определены условия, при которых решение можно найти методом последовательных приближений. Приведен пример расчета остаточных напряжений в неоднородном закаленном цилиндре.

Ключевые слова: вторая краевая задача, неоднородное анизотропное тело, интегро-дифференциальное уравнение, спектральный радиус, последовательные приближения, уравнения Фредгольма второго рода, сходимость итераций.

Получение: 30 июля 2019 г. / Исправление: 27 января 2020 г. /
Принятие: 10 февраля 2020 г. / Публикация онлайн: 12 марта 2020 г.

Введение. В данной работе, исходя из результатов, изложенных в первом сообщении [1], показана методика сведения уравнений второй краевой задачи теории упругости для неоднородного анизотропного тела к специальному интегро-дифференциальному уравнению, которое относится к классу уравнений Фредгольма второго рода. Разработан метод определения спектрального радиуса полученного уравнения и определены условия, при которых возможно найти решение методом последовательных приближений. В качестве примера решена задача расчета остаточных напряжений в цилиндре, являющимся после закалки неоднородным телом с разными характеристиками мартенсита и аустенита.

Краткое сообщение

Образец для цитирования

Стружанов В. В. Интегро-дифференциальные уравнения второй краевой задачи линейной теории упругости. Сообщение 2. Неоднородное анизотропное тело // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2020. Т. 24, № 1. С. 199–208. doi: 10.14498/vsgtu1730.

Сведения об авторе

Валерий Владимирович Стружанов https://orcid.org/0000-0002-3669-2032
доктор физико-математических наук, профессор; главный научный сотрудник; лаб. микромеханики материалов; e-mail: stru@imach.uran.ru

1. Интегро-дифференциальное уравнение второй краевой задачи теории упругости для неоднородного анизотропного тела. Система уравнений второй краевой задачи линейной теории упругости, записанная в инвариантной форме, в самом общем случае имеет вид [2, 3]:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{g} = 0, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \operatorname{def} \boldsymbol{v}, \quad \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{C} \cdot\cdot (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^*), \quad \boldsymbol{v}|_\Gamma = \boldsymbol{v}^\Gamma. \tag{1}$$

Здесь $\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{\varepsilon}$ — соответственно симметричные тензоры второго ранга напряжений и деформаций; $\boldsymbol{v}$ — вектор перемещений; $\boldsymbol{v}^\Gamma$ — значение вектора перемещений на границе Γ тела V; $\boldsymbol{C}$ — неоднородный анизотропный тензор четвертого ранга модулей упругости; $\boldsymbol{g}$ — вектор объемных сил; ∇ — набла-оператор Гамильтона [2], $\boldsymbol{\varepsilon}^*$ — тензор первоначальных деформаций свободных от связей элементов тела V, возникающих при нагреве, фазовых превращениях и т. п. [4]. Первая группа уравнений в системе (1) — уравнения равновесия, вторая группа — соотношения Коши, третья — закон Гука. Точкой в уравнениях равновесия обозначено скалярное произведение тензоров [5].

Подставляя теперь закон Гука в уравнения равновесия и заменяя деформации соотношениями Коши, получаем систему уравнений, которую в инвариантной форме можно представить уравнением в перемещениях

$$-\nabla \cdot (\boldsymbol{C} \cdot\cdot \operatorname{def} \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{g} - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}^*, \quad \boldsymbol{v}|_\Gamma = \boldsymbol{v}^\Gamma. \tag{2}$$

Произведем замену $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}^*$, где $\boldsymbol{u}$ — неизвестная вектор-функция, равная нулю на границе Γ, а $\boldsymbol{u}^*$ — известная вектор-функция, на границе равная $\boldsymbol{u}|_\Gamma = \boldsymbol{v}^\Gamma$ [1]. Тогда уравнение (2) принимает вид

$$-\nabla \cdot (\boldsymbol{C} \cdot\cdot \operatorname{def} \boldsymbol{u}) = \boldsymbol{p}, \quad \boldsymbol{u}|_\Gamma = 0, \tag{3}$$

где $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{g} + \nabla \cdot (\boldsymbol{C} \cdot\cdot \operatorname{def} \boldsymbol{u}^*) - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}^*$, $\boldsymbol{\sigma}^* = \boldsymbol{C} \cdot\cdot \boldsymbol{\varepsilon}^*$ — формальный вектор псевдонапряжений. Уравнение (3) будем рассматривать как некоторое отображение пространства $W^2_{2,0}(V)$ в пространство $L_2(V)$ ($u \in W^2_{2,0}(V)$, $p \in L_2(V)$). Здесь $L_2(V)$ — вещественное полное сепарабельное гильбертово пространство вектор-функций, компоненты которых интегрируемы с квадратом, а $W^2_{2,0}(V)$ — вещественное полное сепарабельное пространство вектор-функций, компоненты которых обращаются в нуль на Γ и принадлежат $L_2(V)$ вместе со своими обобщенными производными до второго порядка включительно [6, 7].

Выделим в уравнении (3) оператор Δ. Для этого представим тензор $\boldsymbol{C}$ в виде суммы $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{K}$, где $\boldsymbol{A}$ — некоторый однородный изотропный тензор четвертого ранга. Тогда уравнение (3) принимает вид

$$-\nabla \cdot (\boldsymbol{A} \cdot\cdot \operatorname{def} \boldsymbol{u}) - \nabla \cdot (\boldsymbol{K} \cdot\cdot \operatorname{def} \boldsymbol{u}) = \boldsymbol{p}, \quad \boldsymbol{u}|_\Gamma = \boldsymbol{0}.$$

Преобразовывая первое слагаемое в уравнение Навье—Ляме [1, 8], имеем

$$-\left[\mu \Delta \boldsymbol{u} + (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{u}\right] = \nabla \cdot (\boldsymbol{K} \cdot\cdot \operatorname{def} \boldsymbol{u}) + \boldsymbol{p}, \quad \boldsymbol{u}|_\Gamma = \boldsymbol{0}, \tag{4}$$

где λ, μ — коэффициенты Ляме однородной изотропной среды, свойства которой определяются тензором модулей упругости $\boldsymbol{A}$. Далее используем равенство [9] $\operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{u} = \nabla \boldsymbol{u} + \operatorname{rot} \operatorname{rot} \boldsymbol{u}$ и преобразуем уравнение (4) к виду

$$-(\Delta \boldsymbol{u} + l \operatorname{rot} \operatorname{rot} \boldsymbol{u}) - m D \boldsymbol{u} = \boldsymbol{t}, \tag{5}$$

в котором $l = (\lambda + \mu)(\lambda + 2\mu)^{-1}$, $m = (\lambda + 2\mu)^{-1}$, $D\boldsymbol{u} = \nabla \cdot (\boldsymbol{K} \cdot \cdot \operatorname{def} \boldsymbol{u})$, $\boldsymbol{t} = m\,\boldsymbol{p}$. Умножая теперь обе части уравнения (5) на оператор $(-\Delta^{-1})$ [1,10], получаем интегро-дифференциальное уравнение

$$\boldsymbol{u} = H\boldsymbol{u} + \boldsymbol{f}, \tag{6}$$

где $\boldsymbol{f} = \Delta^{-1}\boldsymbol{t} \in W^2_{2,0}(V)$, $\boldsymbol{t} \in L_2(V)$, $\boldsymbol{u} \in W^2_{2,0}(V)$, $H\boldsymbol{u} = -\Delta^{-1}(l \operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{u} + mD\boldsymbol{u})$, $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{u} \in L_2(V)$, $\Delta^{-1}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{u} \in W^2_{2,0}(V)$, $D\boldsymbol{u} \in L_2(V)$, $\Delta^{-1}D\boldsymbol{u} \in W^2_{2,0}(V)$. Оператор H действует из $W^2_{2,0}(V)$ в $W^2_{2,0}(V)$ и является вполне непрерывным [11–14]. Таким образом, уравнение (6) есть уравнение Фредгольма второго рода [15].

2. Спектральный радиус оператора H и решения второй краевой задачи. Для уравнения (6) справедлива альтернатива Фредгольма [15]. Поэтому вопрос существования и единственности решения, а также метода решения сводится к проблеме собственных чисел оператора H, расположение которых определяется его спектральным радиусом $\rho(H)$. Определение этого радиуса, аналогично работе [1], связано с рассмотрением уравнения,

$$B\boldsymbol{u} - k(-\Delta\boldsymbol{u}) = 0, \quad \boldsymbol{u} \in W^2_{2,0}(V), \quad k \in (-\infty, +\infty), \tag{7}$$

где $B\boldsymbol{u} = -(\Delta\boldsymbol{u} + l \operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{u}) - mD\boldsymbol{u}$ — оператор теории упругости. В случае закрепленной границы он положительно определенный и имеет дискретный спектр [11]. Таков же и оператор $(-\Delta)$ [11]. Тогда собственные числа уравнения (7) вещественные, положительные и расположены в отрезке $[k_1, k_2]$. Здесь

$$k_1 = \inf \frac{(B\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u})}{(-\Delta\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u})} > 0, \quad k_2 = \sup \frac{(B\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u})}{(-\Delta\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u})} > 0, \quad \boldsymbol{u} \in W^2_{2,0}(V).$$

Круглыми скобками обозначены скалярные произведения в $L_2(V)$.

Применяя оператор $(-\Delta^{-1})$ к равенству (7), получаем эквивалентное уравнение

$$\lambda\boldsymbol{u} = H\boldsymbol{u}, \quad \lambda = 1 - k, \quad k \in [k_1, k_2].$$

Собственные числа оператора H лежат в отрезке $1 - k_1 \geqslant 1 - k \geqslant 1 - k_2$. Поскольку спектральный радиус вполне непрерывного оператора совпадает с наибольшим по модулю собственным числом,

$$\rho(H) = \max\big\{|1 - k_1|, |1 - k_2|\big\}.$$

Отсюда $\rho(H) < 1$, когда

$$k_2 < 2. \tag{8}$$

В этом случае оператор H является оператором сжатия [16] и решение уравнения (6) представимо рядом Неймана

$$\boldsymbol{u} = \sum_{n=0}^{\infty} H^n \boldsymbol{f},$$

который сходится со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем, сколь угодно близким к $\rho(H)$ [16].

Отметим, что решение уравнения (6) и, следовательно, второй краевой задачи теории упругости для неоднородного анизотропного тела существует и единственно вне зависимости от выполнения неравенства (8), так как $\lambda = 1$ не является собственным числом оператора H. Если предположить обратное, то $1 - k_1 \geqslant 1$ и тогда $k_1 \leqslant 0$, что невозможно.

3. Остаточные напряжения в закаленном неоднородном цилиндре. В качестве примера определим остаточные напряжения, возникающие в длинном круговом цилиндре после его закалки, в результате которой часть зерен аустенита в приповерхностных слоях переходит в мартенситное состояние. Пусть P — объемное содержание мартенсита:

$$P = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant r \leqslant a; \\ P_0 \frac{(r-a)}{(b-a)}, & a \leqslant r \leqslant b, \end{cases}$$

где b — радиус основания цилиндра, $(b-a)$ — глубина закалки, $P_0 \leqslant 1$ — объемное содержание мартенсита в поверхностном слое. Таким образом, после закалки цилиндр состоит из двух изотропных компонентов, каковыми являются аустенит и мартенсит. Так как зерна мартенсита имеют несколько больший объем [17], материальные элементы в приповерхностных слоях находятся в стесненном состоянии, что вызывает появление остаточных (собственных) напряжений.

Компоненты первоначальных (собственных) деформаций свободных от связей элементов определяются следующими соотношениями [1]:

$$\varepsilon^*_{ij} = \alpha P \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Здесь δ_{ij} — символ Кронекера, α — параметр свободной структурной деформации мартенсита [17]. В отличие от работы [1] считаем, что постоянные упругости мартенсита и аустенита различны, но достаточно близки и разница между ними находится в пределах 10 %:

$$|C^{\mathrm{I}}_{1111} - C^{\mathrm{II}}_{1111}| < 0.1 C^{\mathrm{II}}_{1111}, \quad |C^{\mathrm{I}}_{1122} - C^{\mathrm{II}}_{1122}| < 0.1 C^{\mathrm{II}}_{1122}. \tag{9}$$

Эффективный тензор модулей упругости (макромодулей) материала, полученного после закалки, с достаточной степенью точности можно считать таким:

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{C}^{\mathrm{I}} P + \boldsymbol{C}^{\mathrm{II}} (1 - P),$$

где $\boldsymbol{C}^{\mathrm{I}}$ и $\boldsymbol{C}^{\mathrm{II}}$ — однородные изотропные тензоры четвертого ранга соответственно мартенсита и аустенита. Кроме того, в данной задаче полагаем, что $C^{\mathrm{I}}_{1212} = C^{\mathrm{II}}_{1212}$.

Деформации ϵ^*_{ij} не удовлетворяют условиям совместности. Поэтому в теле реализуются совместные деформации $\varepsilon'_{ij} = \varepsilon'^*_{ij} + \varepsilon''_{ij}$. Здесь деформации ε''_{ij} связаны с собственными напряжениями σ''_{ij} законом Гука [1], который в инвариантной форме имеет вид

$$\boldsymbol{\sigma}'' = \boldsymbol{C} \cdot\cdot \boldsymbol{\varepsilon}'' = \boldsymbol{C} \cdot\cdot (\boldsymbol{\varepsilon}' - \boldsymbol{\varepsilon}^*). \tag{10}$$

Стесненный компонент расположен симметрично относительно оси цилиндра. Поэтому точки поверхности получают постоянные по величине радиальные перемещения:

$$v_r^\Gamma = v_r^0 = \text{const}.$$

Таким образом, задача по определению закалочных напряжений осесимметричная и цилиндр находится в плоском деформированном состоянии:

$$v = v_r(r); \quad \varepsilon'_{11} = \varepsilon'_r(r), \quad \varepsilon'_{22} = \varepsilon'_\theta(r), \quad \varepsilon'_{33} = \varepsilon'_{12} = \varepsilon'_{13} = \varepsilon'_{23} = 0;$$

$$\varepsilon^*_{11} = \varepsilon^*_{22} = \varepsilon^*_{33} = \alpha P(r), \quad \varepsilon^*_{12} = \varepsilon^*_{13} = \varepsilon^*_{23} = 0;$$

$$\sigma''_{11} = \sigma''_r(r), \quad \sigma''_{22} = \sigma''_\theta(r), \quad \sigma''_{33} = \sigma''_{12} = \sigma''_{13} = \sigma''_{23} = 0.$$

Соотношения Коши и уравнения равновесия определены следующими формулами [4]:

$$\varepsilon'_r = \frac{dv_r}{dr}, \quad \varepsilon'_\theta = \frac{v_r}{r}; \quad \frac{d\sigma''_r}{dr} + \frac{1}{r}(\sigma''_r - \sigma''_\theta) = 0.$$

Тогда с учетом замены $v_r = u_r + u_r^* = u + v_r^0 r b^{-1}$ $(u_r(b) = 0)$ и представления $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{K} = \boldsymbol{C}^{\mathrm{II}} + (\boldsymbol{C}^{\mathrm{I}} - \boldsymbol{C}^{\mathrm{II}})P$ уравнение (5) после некоторых преобразований принимает вид

$$\begin{gathered} \Delta u + l \operatorname{rot}\operatorname{rot} u + h \operatorname{grad}(P \operatorname{div} u) = h_1 \operatorname{grad} P + h_2 \operatorname{grad} P^2, \\ u(b) = 0 \quad (u = u_r(r)). \end{gathered} \tag{11}$$

Здесь

$$l = \frac{C^{\mathrm{II}}_{1122} + C^{\mathrm{II}}_{1212}}{C^{\mathrm{II}}_{1111}}, \quad h = \frac{C^{\mathrm{I}}_{1111} - C^{\mathrm{II}}_{1111}}{C^{\mathrm{II}}_{1111}}, \quad h_1 = h_3 - h_4 v_r^0, \quad h_2 = 3h\alpha,$$

$$h_3 = \frac{(C^{\mathrm{II}}_{1111} + 2C^{\mathrm{II}}_{1122})\alpha}{C^{\mathrm{II}}_{1111}}, \quad h_4 = \frac{2h}{b}.$$

Уравнение (11) эквивалентно интегро-дифференциальному уравнению

$$\begin{multline} u = -l\Delta^{-1} \operatorname{rot}\operatorname{rot} u + h - h\Delta^{-1} \operatorname{grad}(P \operatorname{div} u) + \\ + h_1 \Delta^{-1} \operatorname{grad} P + h_2 \Delta^{-1} \operatorname{grad} P^2, \quad u(b) = 0. \end{multline} \tag{12}$$

Здесь $\Delta^{-1} X = \int_V G X\, dV$; V — круг радиуса b; G — функция Грина для круга [10].

Проверим выполнение условия (8). Наибольшее собственное число уравнения (7) в данном примере есть

$$\begin{multline} k_2 = \sup \frac{\big(-\Delta u - l \operatorname{rot}\operatorname{rot} u - h \operatorname{grad}(P \operatorname{div} u), u\big)}{(-\Delta u, u)} = \\ = \sup\Big[1 + l\frac{(-\operatorname{rot}\operatorname{rot} u, u)}{(-\Delta u, u)} + h\frac{-\operatorname{grad}(P \operatorname{div} u)}{(-\Delta u, u)}\Big]. \end{multline}$$

Далее для произвольного $u \in W^2_{2,0}(V)$, используя формулу Остроградского—Гаусса, получаем следующие неравенства:

$$\big(-\operatorname{grad}(P\operatorname{div}u), u\big) = -\int_V u\operatorname{grad}(P\operatorname{div}u)\,dV = \int_V P(\operatorname{div}u)^2 dV \geqslant 0, \quad (13)$$

$$\int_V P(\operatorname{div}u)^2 dV \leqslant \int_V (\operatorname{div}u)^2 dV = (-\operatorname{grad}\operatorname{div}u, u), \quad P \leqslant 1. \quad (14)$$

Наконец, применяя неравенство

$$0 \geqslant (-\operatorname{rot}\operatorname{rot}u, u) \geqslant -(-\Delta u, u),$$

полученное в работе [1], с учетом неравенств (13) и (14) находим, что $k_2 \leqslant 1 + h$. В силу неравенства (9) величина $|h| < 1$ и условие (8) выполняется. Следовательно, ряд Неймана для уравнения (12) сходится.

Следовательно, если взять достаточное число членов ряда Неймана, то можно получить значение перемещения v_r, зависящее от v_r^0. Например, когда величина h мала, можно ограничиться начальным приближением

$$u_r^0 = h_1\Delta^{-1}\operatorname{grad}P + h_2\Delta^{-1}\operatorname{grad}P^2.$$

Тогда радиальные перемещения будут определяться соотношением

$$v_r = u_r^* + v_r^0 r b^{-1}.$$

В области $a \leqslant r \leqslant b$ имеем

$$v_r = u_r^0\frac{r}{b} + \frac{(v_r^0 h_4 - h_3)}{b-a}P_0\Big[\frac{r}{3}(b-r) - \frac{a^3}{6b^2 r}(b^2 - r^2)\Big] + \\ + \frac{2h_2P_0^2}{(b-a)^2}\Big[\frac{b^2 r}{8} - \frac{r^3}{8} + \frac{ar^2}{3} - \frac{bar}{3} + \frac{a^4}{24r} - \frac{a^4 r}{24b^2}\Big]. \quad (15)$$

Подставляя выражение (15) в соотношения Коши, а затем полученные деформации в закон Гука (10) для случая плоской деформации, и вспоминая, что цилиндр ненагружен, т.е. $\sigma_r''(b) = 0$, получаем значение v_r^0.

После вычисления радиальных перемещений уже не составляет труда определение остаточных (закалочных) напряжений с использованием соотношений Коши и определяющих соотношений (10) для случая плоской деформации. Отметим, что при равенстве свойств аустенита и мартенсита из данного решения получаем распределение напряжений, представленных в работе [1].

Заключение. Изложена процедура приведения второй краевой задачи теории упругости для неоднородного анизотропного тела к интегро-дифференциальному уравнению фредгольмовского типа. Определены условия сходимости итерационного метода решения такой задачи. Приведенная методика применена к задаче об остаточных напряжениях в длинном неоднородном цилиндре, материал которого состоит из зерен аустенита и мартенсита, имеющих различные свойства.

Конкурирующие интересы. У меня нет конкурирующих интересов.

Авторская ответственность. Я несу полную ответственность за предоставление окончательной версии рукописи в печать. Окончательная версия рукописи мною одобрена.

Финансирование. Исследование не имело финансирования.

Библиографический список

1. Стружанов В. В. Интегро-дифференциальные уравнения второй краевой задачи линейной теории упругости. Сообщение 1. Однородное изотропное тело // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2017. Т. 21, № 3. С. 496–506. doi: 10.14498/vsgtu1555. [Struzhanov V. V. Integro-differential equations the second boundary value problem of linear elasticity theory. Message 1. Homogeneous isotropic body // *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2017. vol. 21, no. 3. pp. 496–506 (In Russian)].
2. Лурье А. И. *Теория упругости*. М.: Наука, 1970. 939 с.; Lurie A. I. *Theory of Elasticity* / Foundations of Engineering Mechanics. Berlin, Heidelberg: Springer, 2005. 1050 pp. doi: 10.1007/978-3-540-26455-2.
3. Елисеев В. В. *Механика упругих тел*. СПб.: СПбГПУ, 2002. 341 с. [Eliseev V. V. *Mekhanika uprugikh tel* [Mechanics of Elastic Bodies]. Saint-Petersburg: SPbGPU, 2002. 341 pp. (In Russian)]
4. Timoshenko S. P., Goodier J. N. *Theory of elasticity* / Engineering Societies Monographs. International Student Edition. New York: McGraw-Hill Book Comp., 1970. xxiv+567 pp.
5. Димитриенко Ю. И. *Тензорное исчисление*. М.: Высш. шк., 2001. 575 с. [Dimitrienko Yu. I. *Tenzornoe ischislenie* [Tensor Calculus]. Moscow: Vyssh. shk., 2001. 575 pp. (In Russian)]
6. Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н. *Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа*. М.: Наука, 1973. 576 с. [Ladyzhenskaia O. A., Ural'tseva N. N. *Lineinye i kvazilineinye uravneniia ellipticheskogo tipa* [Linear and quasilinear equations of elliptic type]. Moscow: Nauka, 1973. 576 pp. (In Russian)]
7. Соболев С. Л. *Некоторые применения функционального анализа в математической физике*. М.: Наука, 1988. 334 с. [Sobolev S. L. *Nekotorye primeneniia funktsional'nogo analiza v matematicheskoi fizike* [Some applications of functional analysis in mathematical physics]. Moscow: Nauka, 1988. 334 pp. (In Russian)]
8. Hahn H. G. *Elastizitätstheorie. Grundlagen der linearen Theorie und Anwendungen auf eindimensionale, ebene und räumliche Probleme* / Leitfäden der Angewandten Mathematik und Mechanik. vol. 62. Stuttgart: B. G. Teubner, 1985. 332 pp.
9. Коренев Г. В. *Тензорное исчисление*. М.: МФТИ, 2000. 240 с. [Korenev G. V. *Tenzornoe ischislenie* [Tensor Calculus]. Moscow: Mosk. Fiz.-Tekhn. Inst., 2000. 240 pp. (In Russian)]
10. Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М. *Уравнения в частных производных математической физики*. М.: Высш. шк., 1970. 712 с. [Koshlyakov N. S., Gliner E. B., Smirnov M. M. *Uravneniia v chastnykh proizvodnykh matematicheskoi fiziki* [Equations in partial derivatives of mathematical physics]. Moscow: Vyssh. shk., 1970. 712 pp. (In Russian)]
11. Михлин С. Г. *Вариационные методы в математической физике*. М.: Наука, 1970. 512 с. [Mikhlin S. G. *Variatsionnye metody v matematicheskoi fizike* [Variational Methods in Mathematical Physics]. Moscow: Nauka, 1970. 512 pp. (In Russian)]
12. Треногин В. А. *Функциональный анализ*. М.: Наука, 1980. 496 с. [Trenogin V. A. *Funktsional'nyi analiz* [Functional analysis]. Moscow: Nauka, 1980. 496 pp. (In Russian)]
13. *Функциональный анализ* / Справочная математическая библиотека / ред. С. Г. Крейн. М.: Наука, 1972. 544 с.; *Functional analysis* / Wolters-Noordhoff Series of Monographs and Textbooks on Pure and Applied Mathematics / ed. S. G. Krejn. Groningen, Netherlands: Wolters-Noordhoff Publ., 1972. xv+379 pp.

14. Люстерник Л. А., Соболев В. И. *Элементы функционального анализа.* М.: Наука, 1965. 520 с. [Lyusternik L. A., Sobolev V. I. *Elementy funktsional'nogo analiza* [Elements of Functional Analysis]. Moscow: Nauka, 1965. 520 pp. (In Russian)]
15. Кантарович Л. В., Акилов Г. П. *Функциональный анализ.* М.: Наука, 1977. 741 с. [Kantorovich L. V., Akilov G. P. *Funktsional'nyi analiz* [Functional Analysis]. Moscow: Nauka, 1977. 741 pp. (In Russian)]
16. Красносельский М. А., Вайникко Г. М., Забрейко П. П. *Приближенное решение операторных уравнений.* М.: Высш. шк., 1969. 455 с. [Krasnosel'sky M. A., Vainikko G. M., Zabreiko P. P., Rutitsky Ya. B., Stetsenko V. Ya. *Priblizhennoe reshenie operatornykh uravnenii* [Approximate Solution of Operator Equations]. Moscow: Nauka, 1969. 455 pp. (In Russian)]
17. Юрьев С. Ф. *Удельные объемы фаз в мартенситном превращении аустенита.* М.: Металлургиздат, 1950. 48 с. [Yuriev S. F. *Udel'nye ob"emy faz v martensitnom prevrashchenii austenita* [Specific Volumes of Phases in Martensite Transformation of Austenite]. Moscow: Metallurgizdat, 1950. 48 pp. (In Russian)]

Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2020, vol. 24, no. 1, pp. 199–208

MSC: 74C10

Integro-differential equations of the second boundary value problem of linear elasticity theory. Communication 2. Inhomogeneous anisotropic body

V. V. Struzhanov

Institute of Engineering Science, Ural Branch of RAS,
34, Komsomolskaya st., Ekaterinburg, 620049, Russian Federation.

Abstract

In communication 1, the integro-differential equations of the second boundary value problem of the theory of elasticity for a homogeneous isotropic body were considered. The results obtained are extended to boundary value problems for the general case of an inhomogeneous anisotropic body. It is shown that the integro-differential equations found are also Fredholm type equations. The existence and uniqueness of their solution is proved, the conditions under which the solution can be found by the method of successive approximations are determined. An example of calculating the residual stresses in an inhomogeneous quenched cylinder is given.

Keywords: second boundary-value problem, inhomogeneous anisotropic body, integro-differential equation, spectral radius, successive approximation, second kind Fredholm equations, iteration convergence.

Received: 30th July, 2019 / Revised: 27th January, 2020 / Accepted: 10th February, 2020 / First online: 12th March, 2020

Competing interests. I have no competing interests.

Author's Responsibilities. I take full responsibility for submitting the final manuscript in print. I approved the final version of the manuscript.

Funding. The research has not had any sponsorship.

References

1. Struzhanov V. V. Integro-differential equations the second boundary value problem of linear elasticity theory. Message 1. Homogeneous isotropic body, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ.,*

Short Communication

Please cite this article in press as:
Struzhanov V. V. Integro-differential equations of the second boundary value problem of linear elasticity theory. Communication 2. Inhomogeneous anisotropic body, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2020, vol. 24, no. 1, pp. 199–208. doi: 10.14498/vsgtu1730 (In Russian).

Author's Details:
Valery V. Struzhanov https://orcid.org/0000-0002-3669-2032
Dr. Phys. & Math. Sci., Professor; Chief Researcher; Lab. of Material Micromechanics;
e-mail: stru@imach.uran.ru

Ser. Fiz.-Mat. Nauki [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2017, vol. 21, no. 3, pp. 496–506 (In Russian).

2. Lurie A. I. *Theory of Elasticity*, Foundations of Engineering Mechanics. Berlin, Heidelberg, Springer, 2005, 1050 pp. doi: 10.1007/978-3-540-26455-2.
3. Eliseev V. V. *Mekhanika uprugikh tel* [Mechanics of Elastic Bodies]. Saint-Petersburg, SPbGPU, 2002, 341 pp. (In Russian)
4. Timoshenko S. P., Goodier J. N. *Theory of elasticity*, Engineering Societies Monographs. International Student Edition. New York, McGraw-Hill Book Comp., 1970, xxiv+567 pp.
5. Dimitrienko Yu. I. *Tenzornoe ischislenie* [Tensor Calculus]. Moscow, Vyssh. shk., 2001, 575 pp. (In Russian)
6. Ladyzhenskaia O. A., Ural'tseva N. N. *Lineinye i kvazilineinye uravneniia ellipticheskogo tipa* [Linear and quasilinear equations of elliptic type]. Moscow, Nauka, 1973, 576 pp. (In Russian)
7. Sobolev S. L. *Nekotorye primeneniia funktsional'nogo analiza v matematicheskoi fizike* [Some applications of functional analysis in mathematical physics]. Moscow, Nauka, 1988, 334 pp. (In Russian)
8. Hahn H. G. *Elastizitätstheorie. Grundlagen der linearen Theorie und Anwendungen auf eindimensionale, ebene und räumliche Probleme*, Leitfäden der Angewandten Mathematik und Mechanik, vol. 62. Stuttgart, B. G. Teubner, 1985, 332 pp.
9. Korenev G. V. *Tenzornoe ischislenie* [Tensor Calculus]. Moscow, Mosk. Fiz.-Tekhn. Inst., 2000, 240 pp. (In Russian)
10. Koshlyakov N. S., Gliner E. B., Smirnov M. M. *Uravneniia v chastnykh proizvodnykh matematicheskoi fiziki* [Equations in partial derivatives of mathematical physics]. Moscow, Vyssh. shk., 1970, 712 pp. (In Russian)
11. Mikhlin S. G. *Variatsionnye metody v matematicheskoi fizike* [Variational Methods in Mathematical Physics]. Moscow, Nauka, 1970, 512 pp. (In Russian)
12. Trenogin V. A. *Funktsional'nyi analiz* [Functional analysis]. Moscow, Nauka, 1980, 496 pp. (In Russian)
13. *Functional analysis*, Wolters-Noordhoff Series of Monographs and Textbooks on Pure and Applied Mathematics, ed. S. G. Krejn. Groningen, Netherlands, Wolters-Noordhoff Publ., 1972, xv+379 pp.
14. Lyusternik L. A., Sobolev V. I. *Elementy funktsional'nogo analiza* [Elements of Functional Analysis]. Moscow, Nauka, 1965, 520 pp. (In Russian)
15. Kantorovich L. V., Akilov G. P. *Funktsional'nyi analiz* [Functional Analysis]. Moscow, Nauka, 1977, 741 pp. (In Russian)
16. Krasnosel'sky M. A., Vainikko G. M., Zabreiko P. P., Rutitsky Ya. B., Stetsenko V. Ya. *Priblizhennoe reshenie operatornykh uravnenii* [Approximate Solution of Operator Equations]. Moscow, Nauka, 1969, 455 pp. (In Russian)
17. Yuriev S. F. *Udel'nye ob"emy faz v martensitnom prevrashchenii austenita* [Specific Volumes of Phases in Martensite Transformation of Austenite]. Moscow, Metallurgizdat, 1950, 48 pp. (In Russian)