Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2020. Т. 24, № 2. С. 249–274
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1759

УДК 517.984.5

Пространства Соболева и краевые задачи для операторов ротор и градиент дивергенции

Р. С. Сакс

Институт математики с вычислительным центром УФИЦ РАН,
Россия, 450077, Уфа, ул. Чернышевского, 112.

Аннотация

В ограниченной области $G \subset \mathbb{R}^3$ с гладкой границей изучаются краевые и спектральные задачи для операторов $\operatorname{rot} + \lambda I$ и $\nabla \operatorname{div} + \lambda I$ в пространствах Соболева.

При $\lambda \neq 0$ операторы расширяются (методом Б. Вайнберга и В. Грушина) до эллиптических матриц, а краевые задачи удовлетворяют условиям эллиптичности В. Солонникова. Из теории и оценок вытекают полезные свойства решений спектральных задач. Операторы $\nabla \operatorname{div}$ и rot имеют самосопряженные расширения $\mathscr{N}_d$ и $\mathscr{S}$ в ортогональные подпространства $\mathscr{A}_\gamma$ и $\mathbf{V}^0$ потенциальных и вихревых полей в $\mathbf{L}_2(G)$, а их собственные векторы задают ортогональные базисы в $\mathscr{A}_\gamma$ и $\mathbf{V}^0$, элементы которых представляются рядами Фурье, а операторы — преобразованиями рядов.

Определены аналоги пространств Соболева $\mathbf{A}^{2k}_\gamma$ и $\mathbf{W}^m$ порядков $2k$ и m в классах потенциальных и вихревых полей и классы $C(2k, m)$ их прямых сумм. Доказано, что при $\lambda \neq \operatorname{Sp}(\operatorname{rot})$ оператор $\operatorname{rot} + \lambda I$ отображает класс $C(2k, m+1)$ на класс $C(2k, m)$ взаимно однозначно и непрерывно, а при $\lambda \neq \operatorname{Sp}(\nabla \operatorname{div})$ оператор $\nabla \operatorname{div} + \lambda I$ отображает $C(2(k+1), m)$ на $C(2k, m)$ соответственно.

Ключевые слова: пространства Соболева, градиент, дивергенция, ротор, эллиптические краевые задачи, спектральные задачи.

Получение: 25 ноября 2019 г. / Исправление: 10 марта 2020 г. / Принятие: 16 марта 2020 г. / Публикация онлайн: 22 июня 2020 г.

Научная статья

Образец для цитирования

Сакс Р. С. Пространства Соболева и краевые задачи для операторов ротор и градиент дивергенции // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2020. Т. 24, № 2. С. 249–274. doi: 10.14498/vsgtu1759.

Сведения об авторе

Ромэн Семенович Сакс доктор физико-математических наук; профессор;
e-mail: romen-saks@yandex.ru

1. Основные подпространства $\mathbf{L}_2(G)$

1.1. Шкала пространств Соболева. Рассматриваются линейные пространства над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел. Через $\mathbf{L}_2(G)$ обозначаем пространство Лебега вектор-функций (полей), квадратично интегрируемых в G с внутренним произведением $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = \int_G \boldsymbol{u}\cdot\overline{\boldsymbol{v}}\,d\boldsymbol{x}$ и нормой $\|\boldsymbol{u}\| = (\boldsymbol{u},\boldsymbol{u})^{1/2}$. Пространство Соболева, состоящее из полей, принадлежащих $\mathbf{L}_2(G)$ вместе с обобщенными производными до порядка $s>0$, обозначается через $\mathbf{H}^s(G)$, $\|\boldsymbol{f}\|_s$ — норма его элемента $\boldsymbol{f}$; $\mathbf{H}^0(G)\equiv\mathbf{L}_2(G)$. Замыкание в $\mathbf{H}^s(G)$ множества $\mathscr{C}_0^\infty(G)$ обозначается через $\mathbf{H}_0^s(G)$. Пространство Соболева отрицательного порядка $\mathbf{H}^{-s}(G)$ двойственно к $\mathbf{H}_0^s(G)$ (см. пространство $W_2^{(m)}(\Omega)$ у С. Л. Соболева [1, § 9 гл. 12] и $H^k(Q)$ у В. П. Михайлова [2, § 4 гл. 3]).

В области G с гладкой границей Γ в каждой точке $y\in\Gamma$ определена нормаль $\boldsymbol{n}(y)$ к Γ. Поле $\boldsymbol{u}$ из $\mathbf{H}^{s+1}(G)$ имеет след $\gamma(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{u})$ на Γ его нормальной компоненты, который принадлежит пространству Соболева—Слободецкого $\mathbf{H}^{s+1/2}(G)$, $|\gamma(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{u})|_{s+1/2}$ — его норма.

1.2. Разложение $\mathbf{L}_2(G)$ на два класса $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ потенциальных и соленоидальных полей. Пусть h — функция из $H^1(G)$, а $\boldsymbol{u}=\nabla h$ — ее градиент. Обозначим $\mathscr{A}(G)=\{\nabla h, h\in H^1(G)\}$ — подпространство в $\mathbf{L}_2(G)$, а через $\mathscr{B}(G)$ — его ортогональное дополнение. Соотношения $(\boldsymbol{u},\nabla h)=0$ для любой $h\in H^1(G)$ означают, что $\mathscr{B}(G)=\{\boldsymbol{u}\in\mathbf{L}_2(G) : \operatorname{div}\boldsymbol{u}=0,\ \gamma(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{u})=0\}$. Итак,

$$\mathbf{L}_2(G)=\mathscr{A}(G)\oplus\mathscr{B}(G).^1 \tag{1.1}$$

Замечание. В разложении Г. Вейля $L_2(G)\equiv\mathfrak{F}_0=\mathfrak{G}+\mathfrak{F}'$, где $\mathfrak{G}$ есть замыкание в норме L_2 градиентов $\nabla\psi$ функций $\psi\in\mathscr{C}_0^1(G)$, а $\mathfrak{F}'$ — множество соленоидальных элементов в $\mathfrak{F}_0$ [3, Теорема II].

Если граница области G имеет положительный род ρ, то $\mathscr{B}$ содержит в себе конечномерное подпространство

$$\mathscr{B}_H=\{\boldsymbol{u}\in\mathbf{L}_2(G) : \operatorname{rot}\boldsymbol{u}=0,\ \operatorname{div}\boldsymbol{u}=0,\ \gamma(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{u})=0\}.$$

Его размерность равна ρ [4], а базисные поля $\mathbf{h}_j\in\mathscr{C}^\infty(G)$ [3].

Ортогональное дополнение в $\mathscr{B}$ к $\mathscr{B}_H$ назовем классом вихревых полей и обозначим $\mathbf{V}^0(G)$. Значит,

$$\mathscr{B}(G)=\mathscr{B}_H(G)\oplus\mathbf{V}^0(G).^2$$

По определению $\mathscr{A}_\gamma=\{\nabla h, h\in H^2(G), \gamma(\boldsymbol{n}\cdot\nabla)h=0\}$.

Замечание. С. Л. Соболев [5], О. А. Ладыженская [6], K. Friedrichs [7], Э. Быховский и Н. Смирнов [8] приводят аналогичные разложения $\mathbf{L}_2(G)$ на ортогональные подпространства. Так, С. Л. Соболев предполагает, что область Ω гомеоморфна шару. В этом случае $\rho=0$ и пространство $\mathscr{B}_H(\Omega)$ пусто.

О. А. Ладыженская приводит разложение $\mathbf{L}_2(\Omega)=\mathbf{G}(\Omega)\oplus\mathbf{J}^\circ(\Omega)$, где $\mathbf{J}^\circ(\Omega)$ — замыкание в норме $\mathbf{L}_2(\Omega)$ множества бесконечно дифференцируемых финитных в Ω

---

[1] Это разложение взято из статьи Z. Yoshida и Y. Giga [9]. Авторы называют его разложением Вейля [3], а $\mathscr{B}(\Omega)$ обозначают как $L^2_\sigma(\Omega)$.

[2] В [9] $L^2_\sigma(\Omega)=L^2_\Sigma(\Omega)\oplus L^2_H(\Omega)$. Символ L перегружен. Автор изменил авторские обозначения пространств $L^2_\Sigma(\Omega)$ и $L^2_H(\Omega)$ на $\mathbf{V}^0(\Omega)$ и $\mathscr{B}_H(\Omega)$.

соленоидальных векторов, а $\mathbf{G}(\Omega)$ состоит из $\operatorname{grad}\varphi$, где φ есть однозначная в Ω функция, локально квадратично суммируемая и имеющая первые производные из $\mathbf{L}_2(\Omega)$ [6, Теорема 1, § 2 гл. 1].

Далее будем придерживаться разложения (1.1).

1.3. Операторы градиент, ротор и дивергенция. Эти операторы определяются в трехмерном векторном анализе [10]. Им соответствует оператор d внешнего дифференцирования на формах ω^k степени $k = 0$, 1 и 2. Соотношения $dd\omega^k = 0$ при $k = 0$, 1 имеют вид $\operatorname{rot}\nabla h = 0$ и $\operatorname{div}\operatorname{rot}\boldsymbol{u} = 0$. Формулы

$$\boldsymbol{u}\cdot\nabla h + h\operatorname{div}\boldsymbol{u} = \operatorname{div}(h\boldsymbol{u}), \quad \boldsymbol{u}\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{v} - \operatorname{rot}\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} = \operatorname{div}[\boldsymbol{v},\boldsymbol{u}],$$

где $[\boldsymbol{v},\boldsymbol{u}]$ — векторное произведение, и интегрирование по области G используются при определении операторов $\operatorname{div}\boldsymbol{u}$ и $\operatorname{rot}\boldsymbol{u}$ в $\mathbf{L}_2(G)$. Оператор Лапласа выражается через $\operatorname{rot}\operatorname{rot}$ и $\nabla\operatorname{div}$:

$$\Delta\boldsymbol{v} = \nabla\operatorname{div}\boldsymbol{v} - \operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{v}.$$

Оператор Лапласа эллиптичен [11], а операторы rot и $\nabla\operatorname{div}$ не являются таковыми. Они вырождены, причем $\operatorname{rot}\boldsymbol{u} = 0$ при $\boldsymbol{u}\in\mathscr{A}$, $\nabla\operatorname{div}\boldsymbol{v} = 0$ при $\boldsymbol{v}\in\mathscr{B}$ в смысле $\mathbf{L}_2(G)$ [3].

Поэтому $\Delta\boldsymbol{v} = \nabla\operatorname{div}\boldsymbol{v}$ на $\mathscr{A}$ и $\Delta\boldsymbol{v} = -\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{v}$ на $\mathscr{B}$.

Замечание. H. Weyl называет безвихревым (irrotational) поле $\boldsymbol{u}\in\mathbf{L}_2(G)$, для которого $(\boldsymbol{u},\operatorname{rot}\boldsymbol{v}) = 0$ для любого поля $\boldsymbol{v}$ с компонентами v_j из $\mathscr{C}^1_0(G)$, а поле $\boldsymbol{w}\in\mathbf{L}_2(G)$, для которого $(\boldsymbol{w},\nabla\boldsymbol{v}) = 0$ $\forall\,\boldsymbol{v}\in\mathscr{C}^1_0(G)$ — соленоидальным [3]. Запись "$\operatorname{rot}\boldsymbol{u} = 0$ при $\boldsymbol{u}\in\mathscr{A}$" означает, что $\boldsymbol{u} = \{\nabla h\}$, где $h\in H^1(G)$, и $(\boldsymbol{u},\operatorname{rot}\boldsymbol{v}) = (\nabla h,\operatorname{rot}\boldsymbol{v}) = 0$ для любого $\boldsymbol{v}$ с компонентами $v_j\in\mathscr{C}^\infty_0(G)$, что очевидно.

1.4. Содержание. Классы обобщенно эллиптических задач. В § 1 настоящей статьи определяются основные подпространства $\mathbf{L}_2(G)$, операторы, их соотношения, и формулируются основные результаты работы. § 2 содержит постановку краевых задач (2.1), (2.2) для операторов $\operatorname{rot}+\lambda I$ и $\nabla\operatorname{div}+\lambda I$ первого и второго порядков в пространствах Соболева. Определяются классы [REES p] обобщенно эллиптических систем. Системы (2.1), (2.2) при $\lambda\neq 0$ принадлежат классу [REES 1]. Им соответствуют операторы $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$, которые расширяются до эллиптических (по В. Солонникову) операторов $\mathbb{A}_R$ и $\mathbb{B}_R$. Применяя его Теорему 1.1 [11], можно доказать следующие теоремы.

Теорема 1. *Оператор $\mathbb{A}_R$ имеет левый регуляризатор. Его ядро конечномерно и для любых $\boldsymbol{u}\in\mathbf{H}^{s+1}(G)$ и $\lambda\neq 0$ (с постоянной $C_s = C_s(\lambda) > 0$, зависящей только от s, λ) выполняется оценка*

$$C_s\|\boldsymbol{u}\|_{s+1} \leqslant \|\operatorname{rot}\boldsymbol{u}\|_s + |\lambda|\|\operatorname{div}\boldsymbol{u}\|_s + |\gamma(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{u})|_{s+1/2} + \|\boldsymbol{u}\|_s. \tag{1.2}$$

Теорема 2. *Оператор $\mathbb{B}_R$ имеет левый регуляризатор. Его ядро конечномерно и для любых $\boldsymbol{u}\in\mathbf{H}^{s+2}(G)$ и $\lambda\neq 0$ (с постоянной $C_s = C_s(\lambda) > 0$, зависящей только от s, λ) выполняется оценка*

$$C_s\|\boldsymbol{v}\|_{s+2} \leqslant |\lambda|\|\operatorname{rot}\boldsymbol{v}\|_{s+1} + \|\nabla\operatorname{div}\boldsymbol{v}\|_s + |\gamma(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v})|_{s+3/2} + \|\boldsymbol{v}\|_s. \tag{1.3}$$

Топологических ограничений на область нет, предполагается ее связность, ограниченность и гладкость границы.

Оценка (1.3) получена автором *впервые* из оценок Солонникова [11]. Оценка (1.2) известна автору давно, она не была выписана в [12], хотя ему было известно, что эллиптичность задачи эквивалентна точной оценке в пространствах Соболева от Л. Р. Волевича [13]. Тогда автор еще работал в пространствах Гельдера. Z. Yoshida и Y. Giga в [9] ссылаются на работы J. P. Bourguignon, H. Brezis [14] и C. Foias, R. Temam [15].

Этот подход применим для других обобщенно эллиптических систем класса [REES p]. Этот класс выделен из класса Вайнберга и Грушина [16], он содержит системы математической физики, главные части которых суть степени ротора или градиента дивергенции.

Из эллиптической теории вытекают свойства решений спектральных задач операторов ротора и градиента дивергенции, такие как конечная кратность ненулевых с.-значений и гладкость с.-полей в любой области G с гладкой границей.

Решения спектральных задач операторов ротора и градиента дивергенции в шаре [17] имеют простые связи с решениями спекральных задач Дирихле и Неймана для оператора Лапласа, которые решены явно в учебнике В. С. Владимирова [18].

1.5. Оператор ротор в классе $\mathbf{V^0}$ вихревых полей. Z. Yoshida и Y. Giga [9] рассмотрели в $\mathbf{L}_2(G)$ подпространства L^2_Σ и $H^1_{\Sigma\Sigma}$ и ввели в L^2_Σ оператор S, который совпадает с $\operatorname{rot}\boldsymbol{u}$, если $\boldsymbol{u}\in H^1_{\Sigma\Sigma}$. Они доказали теорему 1: *The operator S is self-adjoint in the space L^2_Σ. The spectrum $\sigma(S)$ of S consists of only point spectrum $\sigma_p(S)\subset\mathbb{R}$. Therefore, the set of eigenfunctions of S gives an orthogonal complete basis of the space L^2_Σ.*

Кроме того, в лемме 1 они доказывают, что

(1) *пространство $H^1_{\Sigma\Sigma}(\Omega)$ является подпространством $H^1(\Omega)$ и оно плотно в $L^2_\Sigma(\Omega)$,*

(2) *область значений $R(S)$ оператора S совпадает с $L^2_\Sigma(\Omega)$; оператор S имеет компактный обратный из $L^2_\Sigma(\Omega)$ в $H^1_{\Sigma\Sigma}(\Omega)$.*

Переобозначим эти пространства: $L^2_\Sigma\equiv\mathbf{V}^0$, $H^1_{\Sigma\Sigma}\equiv\mathbf{W}^1$, а отображения S и S^{-1} запишем так:

$$\mathscr{D}(S)=\mathbf{W}^1\subset\mathbf{V}^0\subset\mathbf{L}_2,\quad S^{-1}:\mathbf{V}^0\to\mathbf{W}^1,\quad S=\operatorname{rot}:\mathscr{D}(S)\to\mathbf{V}^0.$$

В § 3 показывается, что собственные поля ротора всегда *встречаются парами*: каждой собственной вектор-функции ротора $\boldsymbol{u}_j^+$ с положительным собственным значением λ_j соответствует собственная вектор-функция ротора $\boldsymbol{u}_j^-$ с отрицательным собственным значением $-\lambda_j$, а в $\mathbf{V}^0$ фиксируется ортонормированный базис $\boldsymbol{q}_j^\pm$:

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{q}_j^\pm=\pm\lambda_j\boldsymbol{q}_j^\pm,\quad \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{q}_j^\pm|_\Gamma=0,\quad \|\boldsymbol{q}_j^\pm\|=1.$$

В этом базисе элементы $\mathbf{V}^0(G)$ представляются рядами Фурье (3.1), а операторы S и S^{-1} — преобразованиями этих рядов (3.2) и (3.3).

При $k \geqslant 1$ определяются пространства

$$\mathbf{W}^k = \{\boldsymbol{f} \in \mathbf{V}^0, \ldots, \operatorname{rot}^k \boldsymbol{f} \in \mathbf{V}^0\} \quad \text{и} \quad \mathbf{W}^{-k} = (\mathbf{W}_0^k)^*,$$

где пространство $\mathbf{W}_0^k(G)$ есть замыкание в норме $\mathbf{W}^k(G)$ множества $\mathscr{C}_0^\infty(G)$, а пространство $\mathbf{W}^{-k} = (\mathbf{W}_0^k)^*$ сопряженно с ним [1]. Отметим вложения

$$\cdots \subset \mathbf{W}^m \subset \cdots \subset \mathbf{W}^1 \subset \mathbf{V}^0(G) \subset \mathbf{W}^{-1} \subset \cdots \subset \mathbf{W}^{-m} \subset \cdots. \tag{m}$$

Оператор S^{-1} отображает $\mathbf{V}^0$ на $\mathbf{W}^1$, а $\mathbf{W}^{k-1}$ на $\mathbf{W}^k$ при $k > 1$. Оператор S отображает $\mathbf{W}^k$ на $\mathbf{W}^{k-1}$, а $\mathbf{W}^1$ на $\mathbf{W}^0 \equiv \mathbf{V}^0$. Рассматривается также оператор $S + \lambda I$. Мы доказываем, что оператор $S + \lambda I : \mathbf{W}^k \to \mathbf{W}^{k-1}$ — фредгольмов. По определению, оператор $S + \lambda I$ совпадает с $\operatorname{rot} + \lambda I$ на $\mathbf{W}^1$ и

$$(S + \lambda I)\boldsymbol{f} = \lim_{n \to \infty} (\operatorname{rot} + \lambda I)(\boldsymbol{f}_{\mathbf{V}}^n) = \sum_{j=1}^{\infty} \big[(\lambda + \lambda_j)(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{q}_j^+)\boldsymbol{q}_j^+ + (\lambda - \lambda_j)(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{q}_j^-)\boldsymbol{q}_j^-\big].$$

Ряд сходится в $\mathbf{L}_2(G)$, так как $\|(S+\lambda I)\boldsymbol{f}\|_{\mathbf{V}^0}^2 \leqslant c_0^2 \|\boldsymbol{f}\|_{\mathbf{W}^1}^2$, где $c_0 < \infty$ (см. (3.4)). Обратный оператор имеет вид

$$(S + \lambda I)^{-1}\boldsymbol{f} = \sum_{j=1}^{\infty} \left[\frac{(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{q}_j^+)}{\lambda + \lambda_j}\boldsymbol{q}_j^+(\boldsymbol{x}) + \frac{(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{q}_j^-)}{\lambda - \lambda_j}\boldsymbol{q}_j^-(\boldsymbol{x})\right], \tag{1.4}$$

если ни одно из слагаемых этого ряда не обращается в бесконечность. Это означает, что либо $\lambda \pm \lambda_j \neq 0$ для всех j, либо $(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{q}_j^-) = 0$ при $\lambda = \lambda_j = \lambda_{j_0}$, и эти элементы отсутствуют в ряду. При этом

$$\|(S + \lambda I)^{-1}\boldsymbol{f}\|_{\mathbf{W}^1}^2 \leqslant C_0^2 \|\boldsymbol{f}\|_{\mathbf{V}^0}^2,$$

где $C_0^2 < \infty$ не зависит от $\boldsymbol{f}$ (см. (3.5)). Следовательно, оба оператора непрерывны и имеет место

Теорема 3. *Оператор $S + \lambda I : \mathbf{W}^1(G) \to \boldsymbol{V}^0(G)$ непрерывен и однозначно обратим, если λ не принадлежит спектру $\sigma_p(S) \subset \mathbb{R}$ оператора S. Его обратный оператор задается формулой (1.4) и для любого $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{V}^0$ ряд $(S + \lambda I)^{-1}\boldsymbol{f} \in \mathbf{W}^1$.*

Если $\lambda = \lambda_{j_0}$, то он обратим тогда и только тогда, когда

$$\int_G \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{q}_j^- \, dx = 0 \quad \textit{для} \quad \forall \boldsymbol{q}_j^- : \lambda_j = \lambda_{j_0}.$$

Ядро оператора $S + \lambda_{j_0} I$ конечномерно и определяется собственными функциями $\boldsymbol{q}_j^-(\boldsymbol{x})$, собственные значения которых равны λ_{j_0}:

$$\operatorname{Ker}(S + \lambda_{j_0} I) = \sum_{\lambda_j = \lambda_{j_0}} c_j \boldsymbol{q}_j^-(\boldsymbol{x}) \quad \forall\, c_j \in \mathbb{R}.$$

В п. 3.5 приводятся также оценки

$$\|(S + \lambda I)\boldsymbol{f}\|_{\mathbf{W}^m}^2 \leqslant c_m^2 \|\boldsymbol{f}\|_{\mathbf{W}^{m+1}}^2, \quad \|(S + \lambda I)^{-1}\boldsymbol{f}\|_{\mathbf{W}^{m+1}}^2 \leqslant C_m^2 \|\boldsymbol{f}\|_{\mathbf{W}^m}^2,$$

где постоянные c_m, $C_m < \infty$ не зависят от $\boldsymbol{f}$ и при $m = 0$ совпадают с (3.4) и (3.5).

Из теоремы и этих оценок следует

Лемма 1. *Если* $\lambda \overline{\in} \operatorname{Sp}(S)$, $m \geqslant 0$, *то операторы* $S + \lambda I$ (*и его обратный*) *отображают пространство* $\mathbf{W}^{m+1}$ *на* $\mathbf{W}^m$ (*и обратно*) *взаимно однозначно и непрерывно.*

1.6. Соотношения между пространствами $\mathbf{W}^k$, $\mathbf{H}^k$ и $\mathbf{C}^{k-2}$. Рассмотрим область Ω, гомеоморфную шару, которую С. Л. Соболев выделил в [5]. В этом случае пространство $\mathscr{B}_H(\Omega)$ пусто. Граница области Ω предполагается гладкой. Скалярное произведение в $\mathbf{H}^k(\Omega)$ С. Л. Соболевым определяется так:

$$(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g})_k = (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}) + \int_\Omega \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} \partial^\alpha \boldsymbol{f} \cdot \partial^\alpha \boldsymbol{g}\, d\boldsymbol{x}, \quad k \geqslant 1.$$

В пространстве $\mathbf{W}^k(\Omega) = \{\boldsymbol{f} \in \mathbf{V}^0, \ldots, \operatorname{rot}^k \boldsymbol{f} \in \mathbf{V}^0\}$ норма $\boldsymbol{f} \in \mathbf{W}^k$ выбирается так же: $\|\boldsymbol{f}\|^2_{\mathbf{W}^k} \equiv \|\boldsymbol{f}\|^2 + \|\operatorname{rot}^k \boldsymbol{f}\|^2$.

Имеет место

Теорема 4. *Для того чтобы* $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{V}^0(\Omega)$ *разлагалась в ряд Фурье*

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \sum_{j=1}^{\infty} \big[(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{q}_j^+)\boldsymbol{q}_j^+(\boldsymbol{x}) + (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{q}_j^-)\boldsymbol{q}_j^-(\boldsymbol{x})\big], \quad \|\boldsymbol{q}_j^\pm\| = 1, \tag{1.5}$$

по собственным вектор-функциям $\boldsymbol{q}_j^\pm(\boldsymbol{x})$ *ротора в области* Ω, *сходящийся в норме пространства Соболева* $\mathbf{H}^k(\Omega)$, *необходимо и достаточно, чтобы* $\boldsymbol{f}$ *принадлежала* $\mathbf{W}^k(\Omega)$.

Если $\boldsymbol{f} \in \mathbf{W}^k(\Omega)$, *то существует такая постоянная* $C > 0$, *не зависящая от* $\boldsymbol{f}$, *что*

$$\sum_j \lambda_j^{2k} \big[(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{q}_j^+)^2 + (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{q}_j^-)^2\big] \leqslant C \|\boldsymbol{f}\|^2_{\mathbf{H}^k(\Omega)}. \tag{1.6}$$

Если $k \geqslant 2$, *то вектор-функция* $\boldsymbol{f}$ *из* $\mathbf{W}^k(\Omega)$ *разлагается в ряд* (1.5), *сходящийся в пространстве* $\mathbf{C}^{k-2}(\overline{\Omega})$.

Следствие. *Вектор-функция* $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{V}^0 \cap \mathbf{C}_0^\infty(\Omega)$ *разлагается в ряд* (1.5), *сходящийся в любом из пространств* $\mathbf{C}^k(\overline{\Omega})$, $k \in \mathbb{N}$.

Эти результаты дополняют известные в теории рядов Фурье утверждения (см. [6, Теорема 7, § 4 гл. 2], [2, Теорема 8, § 2 гл. 4]).

Таким образом, $\mathbf{W}^k(G)$ — аналоги пространств Соболева $\mathbf{H}^k(G)$ в классе соленоидальных полей. Отметим вложения

$$\mathbf{W}^k \subset \mathbf{W}^{k-1} \subset \cdots \subset \mathbf{W}^1 \subset \mathbf{V}^0.$$

Заметим, что Z. Yoshida и Y. Giga [9] не рассматривали пространства $\mathbf{W}^k$, $k > 1$. Они ввели $H^1_{\Sigma\Sigma} = \mathscr{D}(S)$ как область определения S. Пространства $\mathbf{W}^k$ и соотношения между ними и $\mathbf{H}^k$ и $\mathbf{C}^{k-2}$ (теоремы 3, 4 и лемма 1) — это *первый основной* результат настоящей статьи.

1.7. Класс $\mathscr{A}$ потенциальных полей. В статье [19] изучен класс $\mathscr{A}$ потенциальных полей: собственные поля оператора $\nabla\operatorname{div}$ задают ортогональный базис в $\mathscr{A}_\gamma$, оператор $\mathscr{N}_d$ есть самосопряженное расширение $\nabla\operatorname{div}$ в $\mathscr{A}_\gamma$, пространства

$$\mathbf{A}^{2k}_\gamma(G)=\{\boldsymbol{f}\in\mathscr{A}_\gamma(G),\ldots,(\nabla\operatorname{div})^k\boldsymbol{f}\in\mathscr{A}_\gamma(G)\}\quad\forall\,k\geqslant 1,$$

— аналоги пространств Соболева $\mathbf{H}^{2k}(G)$ порядков $2k$ в классе $\mathscr{A}_\gamma$.

Так же как лемма 1, доказана

Лемма 2. *Если $\lambda\overline{\in}\operatorname{Sp}(\mathscr{N}_d)$, $k\geqslant 0$, то операторы $\mathscr{N}_d+\lambda I$ (и его обратный) отображает пространство $\mathbf{A}^{2(k+1)}_\gamma$ на $\mathbf{A}^{2k}_\gamma$ (и обратно) взаимно однозначно и непрерывно.*

Отметим вложения

$$\mathbf{A}^{2k}_\gamma\subset\cdots\subset\mathbf{A}^{2}_\gamma\subset\mathscr{A}_\gamma\subset\mathscr{A}\subset\mathbf{L}_2(G).$$

Базисные векторы в классах $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}=\mathscr{B}_H\oplus\mathbf{V}^0$ в совокупности образуют базис во всем пространстве $\mathbf{L}_2(G)$.

1.8. Содержание. Классы пространств $\boldsymbol{C(2k,m)}$ в $\mathbf{L_2(\Omega)}$. В § 4 рассматривается целочисленная сетка пространств $C(2k,m)\equiv\mathbf{A}^{2k}_\gamma\oplus\mathbf{W}^m$, называемых классами, $k\geqslant 0$, $m\geqslant 0$ — целые, $k+m>0$, а также пространство $\mathbf{E}^0_\gamma(\Omega)$. Доказана

Теорема 5. *Если $\lambda\neq 0,\ \pm\lambda_j$, $j\in\mathbb{N}$ и $\boldsymbol{f}\in\mathbf{L}_2(\Omega)$, то единственное решение $\boldsymbol{u}$ задачи 1 п. 4.3 дается суммой рядов-проекций $\boldsymbol{u}_{\mathscr{A}}+\boldsymbol{u}_{\mathbf{V}}$:*

$$\boldsymbol{u}_{\mathscr{A}}=\lambda^{-1}\boldsymbol{f}_{\mathscr{A}}\equiv\lambda^{-1}\sum_{j=1}^{\infty}(\boldsymbol{f},\boldsymbol{q}_j)\boldsymbol{q}_j(\boldsymbol{x}),\tag{1.7}$$

$$\boldsymbol{u}_{\mathbf{V}}=(S+\lambda I)^{-1}\boldsymbol{f}_{\mathbf{V}}\equiv\sum_{j=1}^{\infty}\left[\frac{(\boldsymbol{f},\boldsymbol{q}^+_j)}{\lambda+\lambda_j}\boldsymbol{q}^+_j(\boldsymbol{x})+\frac{(\boldsymbol{f},\boldsymbol{q}^-_j)}{\lambda-\lambda_j}\boldsymbol{q}^-_j(\boldsymbol{x})\right].\tag{1.8}$$

В частности,

- *если $\boldsymbol{f}=\boldsymbol{f}_{\mathscr{A}}$ и $\boldsymbol{f}_{\mathscr{A}}\in\mathscr{A}$ или $\boldsymbol{f}_{\mathscr{A}}\in\mathscr{A}_\gamma$, то $\boldsymbol{u}=\lambda^{-1}\boldsymbol{f}_{\mathscr{A}}\in\mathscr{A}$ или $\boldsymbol{u}\in\mathscr{A}_\gamma$ — обобщенные решения задачи 1;*
- *если $\boldsymbol{f}\in\mathscr{B}\perp\mathscr{A}$ в $\mathbf{L}_2(\Omega)$, то $\boldsymbol{u}=(S+\lambda I)^{-1}\boldsymbol{f}_{\mathbf{V}}\in\mathbf{W}^1\subset\mathbf{H}^1_\gamma(\Omega)$;*
- *если $\boldsymbol{f}\in\mathbf{E}^0_\gamma(\Omega)$, то $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}_{\mathscr{A}}+\boldsymbol{u}_{\mathbf{V}}\in\mathbf{H}^1_\gamma(\Omega)$;*
- *если $\boldsymbol{f}$ принадлежит классу $C(2k,m)$, то $\boldsymbol{u}\in C(2k,m+1)$;*
- *если же $\boldsymbol{f}\in\mathscr{D}(\Omega)$, то ряды (1.7), (1.8) сходятся в $\mathbf{H}^s(\Omega)$ для любого $s\geqslant 1$ и $\boldsymbol{u}\in C^\infty(\overline{\Omega})$ — классическое решение задачи.*

Замечание. В статье [17] доказано, что собственные значения ротора в шаре радиуса R равны $\pm\rho_{n,m}R^{-1}$, где числа $\pm\rho_{n,m}$ — нули функций

$$\psi_n(z)=(-z)^n\left(\frac{d}{z\,dz}\right)^n\frac{\sin z}{z},\quad m,n\in\mathbb{N},\tag{1.9}$$

кратность собственного значения $\lambda_{n,m}=\pm\rho_{n,m}R^{-1}$ равна $2n+1$.

Собственные значения оператора $\nabla \operatorname{div}$ равны $-\nu_{n,m}^2$, где $\nu_{n,m} = \alpha_{n,m} R^{-1}$, а числа $\alpha_{n,m}$ — нули производных $\psi_n'(r)$, $n \geqslant 0$, $m \in \mathbb{N}$; кратность собственного значения $-\nu_{n,m}^2$ равна $2n+1$.

Собственные поля $\boldsymbol{q}_\kappa$ градиента дивергенции и $\boldsymbol{q}_\kappa^\pm$ ротора выражаются явно через сферические функции и функции $\psi_n(r)$; $\kappa = (n, m, k)$.

Из теоремы 5 и леммы 1 вытекают следующие утверждения.

Лемма 3. *При* $\lambda \neq \operatorname{Sp}(\operatorname{rot})$ *оператор* $\operatorname{rot} + \lambda I$ *отображает класс* $C(2k, m+1)$ *на класс* $C(2k, m)$ *взаимно однозначно и непрерывно*, k, $m \geqslant 0$.

Следствие. *Если область* $\Omega = B$, $\psi_n(\lambda R) \neq 0$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$, *а поле* $\boldsymbol{f} \in \mathbf{A}_\gamma^{2k}(B) \oplus \mathbf{W}^m(B)$, *то решение задачи* 1 *существует, единственно и принадлежит классу* $\mathbf{A}_\gamma^{2k}(B) \oplus \mathbf{W}^{m+1}(B)$.

Аналогично доказаны следующие утверждения.

Лемма 4. *При* $\nu^2 \neq \operatorname{Sp}(-\nabla \operatorname{div})$ *оператор* $\nabla \operatorname{div} + \nu^2 I$ *отображает класс* $C(2(k+1), m)$ *на класс* $C(2k, m)$ *взаимно однозначно и непрерывно.*

Следствие. *Если область* $\Omega = B$, $\psi_n'(\nu R) \neq 0$ $\forall\, n \geqslant 0$, *а поле* $\boldsymbol{f} \in \mathbf{A}_\gamma^{2k}(B) \oplus \mathbf{W}^m(B)$, *то решение задачи* 2 *п.* 4.3 *существует, единственно и принадлежит классу* $\mathbf{A}_\gamma^{2(k+1)}(B) \oplus \mathbf{W}^m(B)$.

Таким образом, изучены пространства $\mathbf{W}^m$ на рядах Фурье, определяемых собственными полями оператора ротор (вихрь). В пространстве $\mathbf{L}_2(\Omega)$ введены классы $C(2k, m) \equiv \mathbf{A}_\gamma^{2k} \oplus \mathbf{W}^m$ и рассмотрены их отображения операторами $\operatorname{rot} + \lambda I$ и $\nabla \operatorname{div} + \nu^2 I$.

Теорема 5, леммы 3, 4 и их следствия — это *второй основной* результат этой статьи.

2. Краевые и спектральные задачи

2.1. Краевые задачи. В ограниченной области G с гладкой границей Γ изучаются *задачи*: найти вектор-функции $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{v}$ такие, что

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{u} + \lambda \boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in G, \quad \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{u}|_\Gamma = g, \tag{2.1}$$

$$\nabla \operatorname{div} \boldsymbol{v} + \lambda \boldsymbol{v} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in G, \quad \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{v}|_\Gamma = g, \tag{2.2}$$

где векторная и скалярная функции $\boldsymbol{f}$ и g заданы. Решения задач ищем в пространствах Соболева $\mathbf{H}^{s+1}(G)$ и $\mathbf{H}^{s+2}(G)$, где s — целое $s \geqslant 0$, а $(\boldsymbol{f}, g)$ задаем в следующих пространствах: $\boldsymbol{f} \in \mathbf{H}^s(G)$, $g \in H^{s+1/2}(\Gamma)$ и $\boldsymbol{f} \in \mathbf{H}^s(G)$, $g \in H^{s+3/2}(\Gamma)$ соответственно. Эта постановка является *классической* в теории *эллиптических краевых задач в пространствах Соболева* [1, 11].

Отметим, что ненулевые решения $(\boldsymbol{u}, \lambda)$ и $(\boldsymbol{v}, \lambda)$ однородных задач (2.1), (2.2) ($\boldsymbol{f} = 0$ и $g = 0$) — решения спектральных задач операторов rot и $\nabla \operatorname{div}$. Они аннулируют друг друга и

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{u} = 0 \ \text{ на } \ \mathscr{A} = \{\nabla h,\ h \in H^1\}, \quad \nabla \operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0 \ \text{ на } \ \mathscr{B} \perp \mathscr{A}.$$

Ортогональные пространства $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ в $\mathbf{L}_2(G)$ бесконечномерны [3].

При $\lambda = 0$ однородные задачи (2.1) и (2.2) имеют счетное число линейно независимых решений. Значит, *нулевая точка* спектра каждого из операторов rot и $\nabla \operatorname{div}$ имеет *бесконечную кратность*. Специфика этих задач состоит в том, что эти операторы при $\lambda \neq 0$ являются *обобщенно эллиптическими* класса [REES 1].

2.2. Класс систем, приводимых к эллиптическим системам. Определение этого класса мы приведем для систем дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Система дифференциальных уравнений $S(\boldsymbol{\partial})u = f$ порядка m из этого класса обладает свойствами:

а) ее символическая матрица $S_0(i\boldsymbol{\xi})$ имеет постоянный ранг для любой $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^3\backslash 0$. Это позволяет построить аннулятор $C(\partial)$ оператора $S_0(\boldsymbol{\partial})$ такой, что $(CS_0)(\boldsymbol{\partial}) \equiv 0$ на X и определить

б) расширенную систему $\begin{pmatrix} Su = f \\ CSu = Cf \end{pmatrix}$ порядка $\begin{pmatrix} m \\ k \end{pmatrix}$. Ее символическая матрица $\begin{pmatrix} S_0(i\boldsymbol{\xi}) \\ (CS)_0(i\boldsymbol{\xi}) \end{pmatrix}$ определяется младшей частью оператора $S(\boldsymbol{\partial})$ и дополняет матрицу $S_0(i\boldsymbol{\xi})$.

в) Если ранг расширенной матрицы максимален, то исходная система $Su = f$ принадлежит классу [REES 1] и степень ее приводимости равна единице.

г) Если система $Su = f$ такова, что ранг расширенной матрицы не максимален, но постоянен, то процесс повторяется и при определенных условиях система принадлежит классу [REES 2]. Символ [REES p] означает "REduced to Elliptic Systems на p-том шаге".

Б. Вайнберг и В. Грушин [16] доказали, что система $Su = f$ класса [REES p] является разрешимой по Фредгольму или Нетеру в пространствах Соболева $\mathbf{H}^s(X)$, если $f \in \mathbf{H}^{s-m+p}(X)$, где $s \geqslant m$ — целое. В качестве примера приводится оператор $d + *$ на дифференциальных формах степени k в $2k+1$-мерном многообразии X без края, где d — оператор внешнего дифференцирования, а $*$ — оператор нулевого порядка, который переводит форму ω^j степени j в форму $*\omega$ степени $n - j$.

Системы (2.1), (2.2) являются *обобщенно эллиптическими* класса [REES 1]. Действительно, из этих уравнений вытекают соотношения

$$\lambda \operatorname{div} \boldsymbol{u} = \operatorname{div} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \quad \lambda \operatorname{rot} \boldsymbol{v} = \operatorname{rot} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in G.$$

Соединяя их в систему, видим, что операторы

$$\begin{pmatrix} \operatorname{rot} + \lambda I \\ \lambda \operatorname{div} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} \nabla \operatorname{div} + \lambda I \\ \lambda \operatorname{rot} \end{pmatrix}$$

являются эллиптическими по Даглису—Ниренбергу [11]. Значит, они принадлежат классу [REES 1] систем дифференциальных уравнений, приводимых к эллиптическим системам на первом шаге расширений Б. Вайнберга и В. Грушина [16].[3]

2.3. Обобщенно эллиптическая краевая задача. Рассмотрим подробнее первую из них. Расширенная система

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{u} + \lambda \boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}, \quad \lambda \operatorname{div} \mathbf{u} = \operatorname{div} \boldsymbol{f}, \tag{2.3}$$

[3] Другие классы обобщенно эллиптических операторов см. в работе [20].

является эллиптической системой первого порядка (переопределенной, если $f_4 \neq \operatorname{div} \boldsymbol{f}$). Вместе с краевым условием $\gamma\, \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{u} = g$ она составляет эллиптическую краевую задачу по Солонникову [11]. Это означает, что

1) система (2.3) эллиптична;[4]
2) краевое условие $\gamma\, \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{u}$ “накрывает” оператор системы.

Первое условие сводится к тому, что однородная система линейных алгебраических уравнений

$$\operatorname{rot}(i\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{w} = 0, \quad \lambda \operatorname{div}(i\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{w} = 0, \quad \forall\, \boldsymbol{\xi} \neq 0 \tag{2.4}$$

с параметром $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^3$ имеет только тривиальное решение $\boldsymbol{w} = 0$.

Второе условие означает, что однородная система линейных дифференциальных уравнений

$$\operatorname{rot}\Big(i\boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{n}\frac{d}{dz}\Big)\boldsymbol{v} = 0, \quad \operatorname{div}\Big(i\boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{n}\frac{d}{dz}\Big)\boldsymbol{v} = 0, \quad \forall\, \boldsymbol{\tau} \neq 0 \tag{2.5}$$

на полуоси $z \geqslant 0$ с краевым условием

$$\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{v}|_{z=0} = 0$$

и убыванием $\boldsymbol{v}(y, \boldsymbol{\tau}; z) \to 0$ при $z \to +\infty$ имеет только тривиальное решение.

Здесь $\boldsymbol{\tau}$ и $\boldsymbol{n}$ — касательный и нормальный векторы к Γ в точке $y \in \Gamma$ и $|\boldsymbol{n}| = 1$. При доказательстве этих утверждений используется соотношение

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{v} = -\Delta\boldsymbol{v} + \nabla \operatorname{div}\boldsymbol{v}.$$

Тогда

1°. Из уравнений (2.4) вытекает уравнение $-\Delta(i\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{w} = 0$. Оно распадается на три скалярных уравнения $|\boldsymbol{\xi}|^2 w_j = 0$. Значит, $\boldsymbol{w} = 0$ при $|\boldsymbol{\xi}| \neq 0$. Эллиптичность системы (2.3) доказана.

2°. Из уравнений (2.5) получаем уравнение $\big(-|\boldsymbol{\tau}|^2 + (\frac{d}{dz})^2\big)\boldsymbol{v} = 0$ с параметром $|\boldsymbol{\tau}| > 0$. Его убывающее при $z \to +\infty$ решение имеет вид $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w}e^{-|\boldsymbol{\tau}|z}$. Оно удовлетворяет уравнениям (2.5), если вектор-функция $\boldsymbol{w}$ такова, что $\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{w} = 0$, $\boldsymbol{\omega}' \cdot \boldsymbol{w} = 0$, где $\boldsymbol{\omega} \equiv i\boldsymbol{\tau} - |\boldsymbol{\tau}|\boldsymbol{n}$ — вектор-столбец, $\boldsymbol{\omega}'$ — вектор-строка, а $\boldsymbol{\omega}' \cdot \boldsymbol{\omega}$ — их произведение.

Легко убедиться, что векторное и “скалярное” произведения $\boldsymbol{\omega}$ на $\boldsymbol{\omega}$ равны нулю: $\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} = 0$, $\boldsymbol{\omega}' \cdot \boldsymbol{\omega} = 0$. Ранг матрицы $\operatorname{rot}(i\boldsymbol{\xi})$ равен двум при $\boldsymbol{\xi} \neq 0$, поэтому $\boldsymbol{w} = c\boldsymbol{\omega}$, где c — постоянная, и других решений нет. Граничное условие приводит к уравнению $|\boldsymbol{\tau}|\, c = 0$. Значит, $c = 0$ при $|\boldsymbol{\tau}| > 0$ и, следовательно, $\boldsymbol{v} = 0$.

Итак, система (2.3) с краевым условием $\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{u}|_\Gamma = g$ при $\lambda \neq 0$ — эллиптическая задача. Будем говорить при этом, что задача (2.1) при $\lambda \neq 0$ является *обобщенно эллиптической*.

Обобщенная эллиптичность задачи (2.2) доказана в [19].

2.4. Операторы задач (2.1) и (2.2) в пространствах $\mathbf{H}^s(\boldsymbol{G})$. Пусть вектор-функция $\boldsymbol{u}$ принадлежит пространству Соболева $\mathbf{H}^{s+1}$, где $s \geqslant 0$ —

[4] Главные части системы в [11] определяются с помощью весов s_k и t_j таких, что $\operatorname{ord} L_{k,j} \leqslant s_k + t_j$. Положив $s_k = 0$ при $k = 1, 2, 3, 4$ и $t_j = 1$ при $j = 1, 2, 3$, мы получим операторы системы (2.3), а в краевом операторе положим $\sigma_1 = -1$.

целое. Тогда компоненты $\operatorname{rot}\boldsymbol{u}$ и $\operatorname{div}\boldsymbol{u}$ принадлежат $H^s(G)$, а вектор-функция $\boldsymbol{f} := \operatorname{rot}\boldsymbol{u} + \lambda\boldsymbol{u}$ принадлежит пространству

$$\mathbf{E}^s(G) = \{\boldsymbol{f} \in \mathbf{H}^s : \operatorname{div}\boldsymbol{f} \in H^s\}, \quad \|\boldsymbol{v}\|_{\mathbf{E}^s} = (\|\boldsymbol{v}\|_s^2 + \|\operatorname{div}\boldsymbol{v}\|_s^2)^{1/2}.$$

Функция $g := \gamma(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{u}) \equiv \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{u}|_\Gamma$ принадлежит пространству Соболева—Слободецкого $H^{s+1/2}(\Gamma)$. Следовательно, задаче (2.1) соответствует ограниченный оператор

$$\mathbb{A}\boldsymbol{u} \equiv \begin{pmatrix}\operatorname{rot} + \lambda I\\ \gamma\,\boldsymbol{n}\,\cdot\end{pmatrix}\boldsymbol{u} : \mathbf{H}^{s+1}(G) \to \begin{pmatrix}\mathbf{E}^s(G)\\ H^{s+1/2}(\Gamma)\end{pmatrix},$$

а эллиптической задаче $\gamma\,\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{u} = g$ для расширенной системы (2.3) соответствует оператор

$$\mathbb{A}_R\boldsymbol{u} \equiv \begin{pmatrix}\operatorname{rot} + \lambda I\\ \lambda\operatorname{div}\\ \gamma\,\boldsymbol{n}\,\cdot\end{pmatrix}\boldsymbol{u} : \mathbf{H}^{s+1}(G) \to \begin{pmatrix}\mathbf{H}^s(G)\\ H^s(G)\\ H^{s+1/2}(\Gamma)\end{pmatrix}.$$

Аналогично, задаче (2.2) соответствует ограниченный оператор

$$\mathbb{B}\boldsymbol{u} \equiv \begin{pmatrix}\nabla\operatorname{div} + \lambda I\\ \gamma\,\boldsymbol{n}\,\cdot\end{pmatrix}\boldsymbol{u} : \mathbf{H}^{s+2}(G) \to \begin{pmatrix}\mathbf{F}^s(G)\\ H^{s+3/2}(\Gamma)\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{F}^s = \{\boldsymbol{f} \in \mathbf{H}^s : \operatorname{rot}\boldsymbol{f} \in H^{s+1}\}, \quad \|\boldsymbol{v}\|_{\mathbf{F}^s} = (\|\boldsymbol{v}\|_s^2 + \|\operatorname{rot}\boldsymbol{v}\|_{s+1}^2)^{1/2},$$

а расширенный эллиптический оператор имеет вид

$$\mathbb{B}_R\boldsymbol{u} \equiv \begin{pmatrix}\nabla\operatorname{div} + \lambda I\\ \lambda\operatorname{rot}\\ \gamma\,\boldsymbol{n}\,\cdot\end{pmatrix}\boldsymbol{u} : \mathbf{H}^{s+2}(G) \to \begin{pmatrix}\mathbf{H}^s(G)\\ \mathbf{H}^{s+1}(G)\\ H^{s+3/2}(\Gamma)\end{pmatrix}.$$

Таким образом, краевые задачи (2.1) и (2.2) являются обобщенно эллиптическими, а операторы $\mathbb{A}_R$ и $\mathbb{B}_R$ являются *эллиптическими по Солонникову* [11]. Из [11, Теорема 1.1] следуют теоремы 1 и 2 (см. п. 1.4). Область G ограничена гладкой границей.

2.5. Спектральные задачи операторов rot и ∇ div. Они состоят в нахождении ненулевых вектор-функций (полей) $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{v}$ и чисел λ и μ таких, что

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{u} = \lambda\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in G, \quad \gamma\,\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{u} = 0, \quad \boldsymbol{u} \in \mathscr{C}^1(G)\cap\mathscr{C}(\overline{G}), \tag{2.6}$$
$$-\nabla\operatorname{div}\boldsymbol{v} = \mu\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in G, \quad \gamma\,\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v} = 0, \quad \boldsymbol{v} \in \mathscr{C}^2(G)\cap\mathscr{C}(\overline{G}).$$

Из теорем 1, 2 и оценок вытекают полезные свойства решений *спектральных задач* операторов ротора и градиента дивергенции:

а) *ненулевые собственные значения* имеет конечную кратность;

б) соответствующие им *обобщенные собственные функции* бесконечно дифференцируемы вплоть до границы области, то есть поля $\boldsymbol{u}_\lambda(\boldsymbol{x})$ и $\boldsymbol{v}_\mu(\boldsymbol{x}) \in \mathscr{C}^\infty(\overline{G})$ при $\lambda \neq 0$ и $\mu \neq 0$.

Замечание. Автору в работе [17] удалось найти формулы решений спектральной задачи (2.6) в шаре благодаря идее сведения задачи (2.1) к задаче Дирихле для уравнения Гельмгольца[5] и учебнику Владимирова [18]. Поля $\boldsymbol{u}_\kappa^{\pm}$, отвечающие ненулевым значениям ротора $\pm\lambda_\kappa = \pm\rho_{n,m}R^{-1}$, выражаются через сферические функции и функции $\psi_n(z)$, см. (1.9), где $\kappa = (n, m, k)$, n, $m \in \mathbb{N}$, $|k| \leqslant n$, а числа $\pm\rho_{n,m}$ — нули функций $\psi_n(r)$.

Поля $\boldsymbol{q}_\kappa$ со значениями $-\nu_\kappa^2$, где $\nu_\kappa = \alpha_{n,m}R^{-1}$, определяются решениями задачи Неймана; $\alpha_{n,m}$ — нули производных $\psi_n'(r)$, $n \geqslant 0$. Поля $\{\boldsymbol{u}_\kappa^+\} \cup \{\boldsymbol{u}_\kappa^-\} \cup \{\boldsymbol{q}_\kappa\}$ образуют базис в $\mathbf{L}_2(B)$.

3. Класс $\mathbf{V}^0$ и его подпространства $\mathbf{W}^k$

Другой путь решения задачи (2.1) открылся после обнаружения важных свойств а) и б) решений спектральной задачи (2.6) и работы Z. Yoshida и Y. Giga [9]. Они ввели оператор $S : \mathbf{W}^1 \to \mathbf{V}^0$ в пространстве $\mathbf{V}^0$ с областью определения $\mathbf{W}^1$, который совпадает с $\operatorname{rot} \boldsymbol{u}$, если $\boldsymbol{u} \in \mathbf{W}^1$, и доказали, что *оператор S самосопряжен в $\mathbf{V}^0$, имеет точечный спектр $\sigma_p(S) \subset \mathbb{R}$, а его собственные поля образуют в $\mathbf{V}^0$ полный ортогональный базис.*

3.1. Свойства собственных полей ротора. Построение базиса в $\mathbf{V}^0$. Поля $\boldsymbol{u}_\lambda(\boldsymbol{x})$ принадлежат пространствам $\mathbf{W}^1(G) \cap \mathscr{C}^\infty(\overline{G})$. Из соотношения $(\operatorname{rot} + \lambda I)(\operatorname{rot} - \lambda I)\mathbf{u} = -\Delta\boldsymbol{u} + \nabla \operatorname{div} \mathbf{u} - \lambda^2\mathbf{u}$ и определения пространства $\mathbf{V}^0(G)$ видим, что собственные поля ротора $\boldsymbol{u}_\lambda^{\pm}$, отвечающие значениям $\pm\lambda \neq 0$, являются также собственными полями оператора Лапласа:

$$-\Delta\boldsymbol{u} = \lambda^2\boldsymbol{u}, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0, \quad \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{u}|_\Gamma = 0.$$

Множество собственных значений $\mu = \lambda^2$ этого оператора счетно, положительно и каждое из них имеет конечную кратность. Перенумеруем их в порядке возрастания: $0 < \mu_1 \leqslant \mu_2 \leqslant \ldots$, повторяя μ_k столько раз, какова его кратность. Соответствующие вектор-функции обозначим через $\boldsymbol{u}_1^{\pm}$, $\boldsymbol{u}_2^{\pm}$, $\ldots$, так, чтобы каждому значению $\pm\sqrt{\mu_k}$ соответствовала только одна функция $\boldsymbol{u}_k^{\pm}$: $\operatorname{rot} \boldsymbol{u}_k^{\pm} = \pm\sqrt{\mu_k}\boldsymbol{u}_k^{\pm}$, $k = 1, 2, \ldots$.

Собственные функции, соответствующие одному и тому же собственному значению, выберем ортонормальными, используя процесс ортогонализации Шмидта (см. [18]). Поля, соответствующие различным с.- значениям, ортогональны. Их нормируем. Нормированные собственные поля ротора обозначим через $\boldsymbol{q}_j^{\pm}$, норма $\|\boldsymbol{q}_j^{\pm}\| = 1$. Они составляют полный ортонормированный базис $B^{\pm}$ в классе $\mathbf{V}^0$ вихревых полей в $\mathbf{L}_2(G)$.

3.2. Ряды Фурье в $\mathbf{V}^0$. Проекция вектор-функции $\boldsymbol{f}$ из $\mathbf{L}_2(G)$ на $\mathbf{V}^0$ имеет вид

$$\boldsymbol{f}_{\mathbf{v}} = \sum_{j=1}^{\infty} \big[(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{q}_j^+)\boldsymbol{q}_j^+ + (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{q}_j^-)\boldsymbol{q}_j^-\big]. \tag{3.1}$$

Действительно, частичные суммы $\boldsymbol{f}_{\mathbf{v}}^n$ этого ряда состоят из элементов, для

[5] Ее осуществил под руководством автора выпусник НГУ 1971 года А. А. Фурсенко. В своей дипломной работе “Краевая задача для одной равномерно неэллиптической системы” он решил задачу (2.1) в шаре в классах Гельдера.

которых $0 < \lambda_j \leqslant N(n)$:

$$\boldsymbol{f}^n_{\mathbf{v}} = \sum_{j=1}^{n} \big[(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{q}^+_j)\boldsymbol{q}^+_j + (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{q}^-_j)\boldsymbol{q}^-_j\big], \quad \|\boldsymbol{f}^n_{\mathbf{v}}\|^2 \leqslant \|\boldsymbol{f}\|^2,$$

проекции $(\boldsymbol{f} - \boldsymbol{f}^n_{\mathbf{v}}, \boldsymbol{q}^\pm_j) = 0$, если $0 < \lambda_j \leqslant N(n)$, и

$$\|\boldsymbol{f}_{\mathbf{v}} - \boldsymbol{f}^n_{\mathbf{v}}\|^2 = \|\boldsymbol{f}_{\mathbf{v}}\|^2 - \|\boldsymbol{f}^n_{\mathbf{v}}\|^2 \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

По построению $\boldsymbol{f}^n_{\mathbf{v}} \in \mathscr{C}^\infty(\overline{G})$, $\operatorname{div} \boldsymbol{f}^n_{\mathbf{v}} = 0$, $\gamma_{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{f}^n_{\mathbf{v}} = 0$ и при любом n поле $\boldsymbol{f}^n_{\mathbf{v}} \perp \operatorname{Ker}(\operatorname{rot})$ в $\mathbf{L}_2(G)$. Значит, $(\boldsymbol{f}^n_{\mathbf{v}}, \nabla h) = 0$ для любой функции $h \in H^1(G)$. Переходя к пределу, получим $(\boldsymbol{f}_{\mathbf{v}}, \nabla h) = 0$, то есть вектор $\boldsymbol{f}_{\mathbf{v}} \perp \mathscr{A} \subset \operatorname{Ker}(\operatorname{rot})$. Он принадлежит $\mathbf{V}^0$, если пространство $\mathscr{B}_H \subset \operatorname{Ker}(\operatorname{rot})$ пусто. В общем случае

$$\boldsymbol{f}_{\mathbf{v}} \in \mathbf{V}^0 \quad \Leftrightarrow \quad (\boldsymbol{f}_{\mathbf{v}}, \boldsymbol{h}_i) = 0 \quad \forall\, i = 1, 2, \ldots, \rho.$$

Так как

$$\operatorname{rot}(\boldsymbol{f}^n_{\mathbf{v}}) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \big[(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{q}^+_j)\boldsymbol{q}^+_j - (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{q}^-_j)\boldsymbol{q}^-_j\big]$$

и суммы $\boldsymbol{f}^n_{\mathbf{v}}$ и $\operatorname{rot}(\boldsymbol{f}^n_{\mathbf{v}})$ принадлежат $\mathbf{V}^0$, то $\boldsymbol{f}^n_{\mathbf{v}} \in \mathbf{W}^1$ — области определения оператора S.

По определению, $S\boldsymbol{w} = \operatorname{rot} \boldsymbol{w}$ *для любого* $\boldsymbol{w} \in \mathbf{W}^1$. Следовательно

$$S\boldsymbol{f}_{\mathbf{v}} = \lim_{n\to\infty} \operatorname{rot}(\boldsymbol{f}^n_{\mathbf{v}}) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \big[(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{q}^+_j)\boldsymbol{q}^+_j - (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{q}^-_j)\boldsymbol{q}^-_j\big], \tag{3.2}$$

если ряд сходится и принадлежит $\mathbf{V}^0$. Ясно, что $S\boldsymbol{f}_{\mathbf{v}} \in \mathbf{V}^0$, если

$$f \in \mathbf{H}^1(G), \quad (\boldsymbol{f}_{\mathbf{v}}, \boldsymbol{h}_i) = 0 \quad \text{и} \quad (S\boldsymbol{f}_{\mathbf{v}}, \boldsymbol{h}_i) = 0 \quad \forall\, i = 1, 2, \ldots, \rho.$$

В [9, § 3, с. 240] доказано, что оператор S замкнут.

Следовательно, предел $S\boldsymbol{f}_{\mathbf{v}}$ *не зависит от выбора в* $\mathbf{V}^0$ *последовательности* $\boldsymbol{w}_n \to \boldsymbol{f}_{\mathbf{v}}$.

3.3. Подпространства $\mathbf{V}^0$. Ранее были введены пространства

$$\mathbf{W}^k(G) = \{\boldsymbol{f} \in \mathbf{V}^0(G), \ldots, \operatorname{rot}^k \boldsymbol{f} \in \mathbf{V}^0(G)\} \quad \forall\, k \geqslant 1.$$

Вложение $\mathbf{W}^1 \subset \mathbf{H}^1(G)$ вытекает из оценки (1.2) при $s = 0$:

$$C_0\|\boldsymbol{f}\|_1 \leqslant \|\operatorname{rot} \boldsymbol{f}\| + \|\boldsymbol{f}\|, \quad C_0 > 0.$$

По индукции $\mathbf{W}^k \subset \mathbf{H}^k(G)$. Очевидно, что $\mathbf{W}^k \subset \cdots \subset \mathbf{W}^1 \subset \mathbf{V}^0$. При $n < \infty$ ряды $\boldsymbol{f}^n_{\mathbf{V}}$ принадлежат любому из этих пространств. Оператор S отображает $\mathbf{W}^k$ на $\mathbf{W}^{k-1}$ при $k > 1$, а $\mathbf{W}^1$ на $\mathbf{W}^0 \equiv \mathbf{V}^0$.

Пространство $\mathbf{V}^0$ ортогонально ядру ротора в $\mathbf{L}_2(G)$, поэтому S имеет единственный обратный оператор S^{-1}, определенный на $\mathbf{V}^0$:

$$S^{-1}\boldsymbol{f}_{\mathbf{V}} = \lim_{n\to\infty} S^{-1}(\boldsymbol{f}^n_{\mathbf{V}}) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^{-1} \big[(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{q}^+_j)\boldsymbol{q}^+_j - (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{q}^-_j)\boldsymbol{q}^-_j\big]. \tag{3.3}$$

В [9] доказано, что оператор S^{-1} компактен.

Следствие. *Спектр оператора S^{-1} точечный с единственной точкой накопления в нуле, $\lambda_j^{-1} \to 0$ при $j \to \infty$.*

Очевидно, что оператор $S^{-1} : \mathbf{V}^0 \to \mathbf{W}^1$ и $S^{-1} : \mathbf{W}^{k-1} \to \mathbf{W}^k$.

3.4. Полнота пространства $\mathbf{V^0}$. В базисе из собственных функций ротора скалярное произведение векторов $\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g} \in \mathbf{V}^0$ имеет вид

$$(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}) = \lim_{n\to\infty} (\boldsymbol{f}^n_{\mathbf{V}}, \boldsymbol{g}^n_{\mathbf{V}}) = \sum_{j=1}^{\infty} \bigl[(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{q}_j^+)(\boldsymbol{g}, \boldsymbol{q}_j^+) + (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{q}_j^-)(\boldsymbol{g}, \boldsymbol{q}_j^-)\bigr].$$

Согласно Владимирову [18], ортонормальная система $\{\boldsymbol{q}_j^+\} \cup \{\boldsymbol{q}_j^-\}_{j=1,2,\ldots}$ полна в $\mathbf{V}^0$, если для любой $\boldsymbol{f} \in \mathbf{V}^0$ ее ряд (3.1) сходится к $\boldsymbol{f}$ в $\mathbf{L}_2(G)$. По [18, § 1.9, Теорема 1] эта система полна в $\mathbf{V}^0$ тогда и только тогда, когда для любой функции $\boldsymbol{f} \in \mathbf{V}^0$ выполняется равенство Парсеваля—Стеклова, которое называется уравнением замкнутости:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \bigl[(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{q}_j^+)^2 + (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{q}_j^-)^2\bigr] = \|\boldsymbol{f}\|^2.$$

Пространство $\mathbf{W}^1$ плотно в $\mathbf{V}^0$, так как множество $\mathbf{C}_0^\infty(G) \cap \mathbf{V}^0$, плотное в $\mathbf{V}^0$, содержится в $\mathbf{W}^1$. Квадрат нормы $\boldsymbol{f} \in \mathbf{C}_0^\infty(G) \cap \mathbf{V}^0$ ограничен:

$$\|\boldsymbol{f}\|^2_{\mathbf{W}^1} = \|\boldsymbol{f}\|^2 + \|\operatorname{rot} \boldsymbol{f}\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} (1 + \lambda_j^2)\bigl[(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{q}_j^+)^2 + (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{q}_j^-)^2\bigr] < \infty \Rightarrow$$
$$\lim_{n\to\infty} \|\boldsymbol{f}^n_{\mathbf{V}}\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \bigl[(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{q}_j^+)^2 + (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{q}_j^-)^2\bigr] = \|\boldsymbol{f}\|^2.$$

Полнота пространства $\mathbf{V}^0$ доказана.

3.5. Самосопряженность оператора $\boldsymbol{S}$. Действительно, если $\boldsymbol{f}$ и $\boldsymbol{g}$ принадлежат $\mathbf{W}^1$, то имеют место равенства

$$(S\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}) = (\boldsymbol{f}, S\boldsymbol{g}) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \bigl[(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{q}_j^+)(\boldsymbol{g}, \boldsymbol{q}_j^+) - (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{q}_j^-)(\boldsymbol{g}, \boldsymbol{q}_j^-)\bigr].$$

Отметим, что равенство

$$\int_G (\operatorname{rot} \boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{x} = \int_G \boldsymbol{u} \cdot (\operatorname{rot} \boldsymbol{v})\, d\boldsymbol{x}$$

для любых функций $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{v}$ из $\mathscr{D}(S)$ доказано в [9], а в случае шара — в [17]. Также в [9] доказано, что оператор S самосопряжен.

3.6. Фредгольмовость оператора $\boldsymbol{S} + \boldsymbol{\lambda I} : \mathbf{W}^1 \to \mathbf{V^0}$. Действительно, по определению, оператор $S + \lambda I$ совпадает с $\operatorname{rot} + \lambda I$ на $\mathbf{W}^1$. При $\boldsymbol{f} \in \mathbf{W}^1$

$$(S + \lambda I)\boldsymbol{f} = \lim_{n\to\infty} (\operatorname{rot} + \lambda I)(\boldsymbol{f}^n_{\mathbf{V}}) = \sum_{j=1}^{\infty} \bigl[(\lambda + \lambda_j)(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{q}_j^+)\boldsymbol{q}_j^+ + (\lambda - \lambda_j)(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{q}_j^-)\boldsymbol{q}_j^-\bigr]$$

и ряд сходится в $\mathbf{L}_2(G)$, поскольку

$$\|(S+\lambda I)\boldsymbol{f}\|^2_{\mathbf{V}^0} = \sum_{j=1}^{\infty}\bigl[|\lambda+\lambda_j|^2(\boldsymbol{f},\boldsymbol{q}_j^+)^2 + |\lambda-\lambda_j|^2(\boldsymbol{f},\boldsymbol{q}_j^-)^2\bigr] \leqslant$$

$$\leqslant c_0^2\sum_{j=1}^{\infty}(1+\lambda_j^2)\bigl[(\boldsymbol{f},\boldsymbol{q}_j^+)^2 + (\boldsymbol{f},\boldsymbol{q}_j^-)^2\bigr] = c_0^2\|\boldsymbol{f}\|^2_{\mathbf{W}^1};$$

$$c_0^2 = \max_j(a_j^+, a_j^-) \quad \text{и} \quad a_j^\pm = |1\pm\lambda/\lambda_j|^2/(1+1/\lambda_j^2) < \infty, \tag{3.4}$$

так как при больших λ_j они находятся в окрестности единицы.

Обратный оператор имеет вид

$$(S+\lambda I)^{-1}\boldsymbol{f} = \sum_{j=1}^{\infty}\left[\frac{(\boldsymbol{f},\boldsymbol{q}_j^+)}{\lambda+\lambda_j}\boldsymbol{q}_j^+(\boldsymbol{x}) + \frac{(\boldsymbol{f},\boldsymbol{q}_j^-)}{\lambda-\lambda_j}\boldsymbol{q}_j^-(\boldsymbol{x})\right],$$

если ни одно из слагаемых этого ряда не обращается в бесконечность. Это означает, что либо $\lambda\pm\lambda_j\neq 0$ для всех j, либо $(\boldsymbol{f},\boldsymbol{q}_j^-)=0$, если $\lambda=\lambda_j=\lambda_{j_0}$ и функция $\boldsymbol{f}$ ортогональна всем собственным полям $\boldsymbol{q}_j^-(\boldsymbol{x})$ ротора, отвечающим собственному значению λ_{j_0}. При этом

$$\|(S+\lambda I)^{-1}\boldsymbol{f}\|^2_{\mathbf{W}^1} = \sum_{j=1}^{\infty}\left[\frac{(1+\lambda_j^2)}{|\lambda+\lambda_j|^2}(\boldsymbol{f},\boldsymbol{q}_j^+)^2 + \frac{(1+\lambda_j^2)}{|\lambda-\lambda_j|^2}(\boldsymbol{f},\boldsymbol{q}_j^-)^2\right] \leqslant C_0^2\|\boldsymbol{f}\|^2_{\mathbf{V}^0},$$

$$C_0^2 = \max_j(A_j^+, A_j^-) \quad \text{и} \quad A_j^\pm = (1+1/\lambda_j^2)/|1\pm\lambda/\lambda_j|^2 < \infty. \tag{3.5}$$

Итак, оба оператора непрерывны и имеет место теорема 3 (п. 1.5).

Аналогично предыдущему видим, что

$$\|(S+\lambda I)\boldsymbol{f}\|^2_{\mathbf{W}^m} = \sum_{j=1}^{\infty}(1+\lambda_j^{2m})\bigl[|\lambda+\lambda_j|^2(\boldsymbol{f},\boldsymbol{q}_j^+)^2 + |\lambda-\lambda_j|^2(\boldsymbol{f},\boldsymbol{q}_j^-)^2\bigr] \leqslant$$

$$\leqslant c_m^2\sum_{j=1}^{\infty}(1+\lambda_j^{2(m+1)})\bigl[(\boldsymbol{f},\boldsymbol{q}_j^+)^2 + (\boldsymbol{f},\boldsymbol{q}_j^-)^2\bigr] = c_m^2\|\boldsymbol{f}\|^2_{\mathbf{W}^{m+1}},$$

$$\|(S+\lambda I)^{-1}\boldsymbol{f}\|^2_{\mathbf{W}^{m+1}} \leqslant C_m^2\|\boldsymbol{f}\|^2_{\mathbf{W}^m}, \quad c_m,\ C_m < \infty.$$

Числа c_m и C_m при $m=0$ совпадают с (3.4) и (3.5). По определению, $\mathbf{W}^0\equiv\mathbf{V}^0$. Из теоремы 3 и оценок следует лемма 1 (п. 1.5) о свойствах отображений $(S+\lambda I)$ и $(S+\lambda I)^{-1}$. Так же доказывается лемма 2 (п. 1.7) о свойствах отображений $(\mathscr{N}_d+\lambda I)$ и $(\mathscr{N}_d+\lambda I)^{-1}$.

3.7. Сходимость ряда Фурье в норме пространства $\mathbf{H}^{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{\Omega})$. Приведем *доказательство теоремы* 4 из п. 1.6.

Граница $\partial\Omega\in\mathscr{C}^\infty$ и собственные функции $\boldsymbol{q}_j^\pm(\boldsymbol{x})$ оператора ротор принадлежат классу $\mathscr{C}^\infty(\overline{\Omega})$, а значит, любому из пространств $\mathbf{W}^l(\Omega)$, $l>0$.

Поэтому, если ряд Фурье (1.5) вектор-функции $\boldsymbol{f}$ из $\mathbf{H}^k(\Omega)$ сходится в норме $\mathbf{H}^k(\Omega)$, то $\boldsymbol{f} \in \mathbf{V}^0, \ldots, \operatorname{rot}^k \boldsymbol{f} \in \mathbf{V}^0 \subset \mathbf{L}_2(\Omega)$ и, значит, $\boldsymbol{f} \in \mathbf{W}^k(\Omega)$. Необходимость доказана.

Пусть $\boldsymbol{f} \in \mathbf{W}^k(\Omega)$, где $k \geqslant 1$. Приведем доказательство неравенства (1.6). Так как $S\boldsymbol{f} = \operatorname{rot} \boldsymbol{f}$ на $\mathbf{W}^k \subset \mathbf{W}^1(\Omega)$ и $S\boldsymbol{q}_j^{\pm} = \pm\lambda_j \boldsymbol{q}_j^{\pm}$, то

$$(\operatorname{rot} \boldsymbol{f}, \boldsymbol{q}_j^{\pm}) = \pm\lambda_j(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{q}_j^{\pm}). \tag{3.6}$$

Пусть $\beta_{k,j}^{\pm}$ коэффициенты Фурье функции $\operatorname{rot}^k \boldsymbol{f}$. По формуле (3.6)

$$\beta_{k,j}^{\pm} = (\operatorname{rot}^k \boldsymbol{f}, \boldsymbol{q}_j^{\pm}) = \pm\lambda_j(\operatorname{rot}^{k-1} \boldsymbol{f}, \boldsymbol{q}_j^{\pm}) = \cdots = (\pm\lambda_j)^k(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{q}_j^{\pm}).$$

Поскольку $\operatorname{rot}^k \boldsymbol{f} \in \mathbf{L}_2(\Omega)$, то

$$\sum_{j=1}^{\infty} \big[(\beta_{k,j}^{+})^2 + (\beta_{k,j}^{-})^2\big] = \|\operatorname{rot}^k \boldsymbol{f}\|^2.$$

Итак, для вектор-функций $\boldsymbol{f} \in \mathbf{W}^k(\Omega)$ имеем

$$\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^{2k}\big[(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{q}_j^{+})^2 + (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{q}_j^{-})^2\big] = \|\operatorname{rot}^k \boldsymbol{f}\|^2 \leqslant C\|\boldsymbol{f}\|^2_{\mathbf{H}^k(\Omega)}.$$

Последнее неравенство вытекает из определений нормы в $\mathbf{H}^k(\Omega)$. Неравенство (1.6) доказано.

Докажем сходимость ряда (1.5) к $\boldsymbol{f}$ в норме $\mathbf{H}^k(B)$. Пусть $\boldsymbol{S}_l(\boldsymbol{x})$ — частичная сумма ряда (1.5). Очевидно, что $\mathbf{S}_l(\boldsymbol{x}) \in \mathbf{W}^l(\Omega)$ при $l > 0$. В частности, $\operatorname{div} \boldsymbol{S}_l(\boldsymbol{x}) = 0$ и $\gamma\, \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{S}_l(\boldsymbol{x}) = 0$. Поэтому оценка (1.2) при $s = 0$ принимает вид $C_1\|\boldsymbol{S}_l\|_1 \leqslant \|\operatorname{rot} \boldsymbol{S}_l\| + \|\boldsymbol{S}_l\|$. Поскольку $\lambda_j^{-2} \to 0$ при $j \to \infty$, норма $\|\boldsymbol{S}_l\|^2 \leqslant c\|\operatorname{rot} \boldsymbol{S}_l\|^2$, где $c = \max\limits_j \lambda_j^{-2}$. Поэтому $\|\boldsymbol{S}_l\|_1^2 \leqslant a_1\|\operatorname{rot} \boldsymbol{S}_l\|^2$ и по индукции $\|\boldsymbol{S}_l\|_k^2 \leqslant a_k\|\operatorname{rot}^k \boldsymbol{S}_l\|^2$.

Пусть $\boldsymbol{f} \in \mathbf{W}^k(\Omega)$, где $k > 0$. Согласно неравенству (1.6), ряды в его левой части сходятся, и если $l > m \geqslant 1$, то

$$\|\boldsymbol{S}_l - \boldsymbol{S}_m\|_k^2 \leqslant a_k\|\operatorname{rot}^k(\boldsymbol{S}_l - \boldsymbol{S}_m)\|^2 \leqslant a_k \sum_{m+1}^{l} \lambda_j^{2k}\big[|(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{q}_j^{+})|^2 + |(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{q}_j^{-})|^2\big] \to 0$$

при $l, m \to \infty$. Это означает, что ряд (1.5) сходится к $\boldsymbol{f}$ в норме $\mathbf{H}^k(B)$.

Замечание. Известны вложение пространств $\mathbf{H}^k(\Omega) \subset \mathbf{C}^{k-2}(\overline{\Omega})$ при $k \geqslant 2$ в трехмерной области Ω и оценка $\|\boldsymbol{f}\|_{\mathbf{C}^{k-2}(\overline{\Omega})} \leqslant C_k\|\boldsymbol{f}\|_{\mathbf{H}^k(\Omega)}$ для любой функции $\boldsymbol{f} \in \mathbf{H}^k(\Omega)$, причем постоянная $C_k > 0$ не зависит от $\boldsymbol{f}$ (см., например, [2, Теорема 3, § 6.2]). В частности

$$\|\boldsymbol{S}_l - \boldsymbol{S}_m\|_{\mathbf{C}^{k-2}(\overline{\Omega})} \leqslant C_k\|\boldsymbol{S}_l - \boldsymbol{S}_m\|_{\mathbf{H}^k(\Omega)}.$$

Если $\|\boldsymbol{S}_l - \boldsymbol{S}_m\|_{\mathbf{H}^k(\Omega)} \to 0$ при $l, m \to \infty$, то $\|\boldsymbol{S}_l - \boldsymbol{S}_m\|_{\mathbf{C}^{k-2}(\overline{\Omega})} \to 0$. Это означает, что ряд (1.5) сходится к $\boldsymbol{f}$ в $\mathbf{C}^{k-2}(\overline{\Omega})$.

Теорема доказана.

4. Краевые задачи в $\mathbf{L_2}(\Omega)$

4.1. Классы $C(2k, m)$ подпространств в $\mathbf{L_2}(\Omega)$. Предположим, что область Ω гомеоморфна шару. Если собственные поля $\boldsymbol{q}_j(\boldsymbol{x})$ и $\boldsymbol{q}_j^{\pm}(\boldsymbol{x})$ градиента дивергенции и ротора известны, то элементы $\boldsymbol{f}_{\mathscr{A}} \in \mathscr{A}$ и $\boldsymbol{f}_{\mathbf{V}} \in \mathscr{B} = \mathbf{V}^0$ представляются рядами Фурье:

$$\boldsymbol{f}_{\mathscr{A}} = \sum_{j=1}^{\infty} (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{q}_j)\boldsymbol{q}_j(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{f}_{\mathbf{V}} = \sum_{j=1}^{\infty} \big[(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{q}_j^+)\boldsymbol{q}_j^+(\boldsymbol{x}) + (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{q}_j^-)\boldsymbol{q}_j^-(\boldsymbol{x})\big],$$

а элемент $\boldsymbol{f}$ из $\mathbf{L}_2(\Omega)$ — их суммой $\boldsymbol{f}_{\mathscr{A}} + \boldsymbol{f}_{\mathbf{V}}$. Причем $\operatorname{div} \boldsymbol{f} = \operatorname{div} \boldsymbol{f}_{\mathscr{A}}$, а $\operatorname{rot} \boldsymbol{f} = \operatorname{rot} \boldsymbol{f}_{\mathbf{V}}$, так как $\operatorname{rot} \boldsymbol{f}_{\mathscr{A}} = 0$ в $\mathscr{A}$ и $\operatorname{div} \boldsymbol{f}_{\mathbf{V}} = 0$ в $\mathscr{B}$. Скалярное произведение $(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g})$ полей $\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{g}$ из $\mathbf{L}_2(\Omega)$ равно $(\boldsymbol{f}_{\mathscr{A}}, \boldsymbol{g}_{\mathscr{A}}) + (\boldsymbol{f}_{\mathbf{V}}, \boldsymbol{g}_{\mathbf{V}})$. Представления операторов $\mathscr{N}_d$ в $\mathscr{A}_\gamma$, S в $\mathscr{B}$ и обратных имеют вид

$$\mathscr{N}_d \boldsymbol{f}_{\mathscr{A}} = -\sum_{j=1}^{\infty} \nu_j^2 (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{q}_j)\boldsymbol{q}_j, \quad S\boldsymbol{f}_{\mathbf{V}} = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \big[(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{q}_j^+)\boldsymbol{q}_j^+ - (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{q}_j^-)\boldsymbol{q}_j^-\big],$$

$$\mathscr{N}_d^{-1} \boldsymbol{f}_{\mathscr{A}} = -\sum_{j=1}^{\infty} \nu_j^{-2} (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{q}_j)\boldsymbol{q}_j, \quad S^{-1}\boldsymbol{f}_{\mathbf{V}} = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^{-1} \big[(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{q}_j^+)\boldsymbol{q}_j^+ - (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{q}_j^-)\boldsymbol{q}_j^-\big].$$

Рассмотрим пространства

$$\mathbf{A}_\gamma^{2k} \equiv \{\boldsymbol{f} \in \mathscr{A}_\gamma, \ldots, (\nabla \operatorname{div})^k \boldsymbol{f} \in \mathscr{A}_\gamma\} \quad \text{и} \quad \mathbf{W}^m \equiv \{\boldsymbol{g} \in \mathbf{V}^0, \ldots, \operatorname{rot}^m \boldsymbol{g} \in \mathbf{V}^0\}$$

при $k \geqslant 1$, $m \geqslant 1$; $\mathbf{A}_\gamma^0 \equiv \mathscr{A}$, $\mathbf{W}^0 \equiv \mathbf{V}^0 \equiv \mathscr{B}$.

Имеют место вложения

$$\mathbf{A}_\gamma^{2k} \subset \mathbf{A}_\gamma^{2(k-1)} \subset \mathbf{A}_\gamma^2 \subset \mathscr{A}_\gamma, \quad \mathbf{W}^m \subset \mathbf{W}^{m-1} \subset \cdots \subset \mathbf{W}^1 \subset \mathbf{V}^0.$$

Прямую сумму векторных пространств $\mathbf{A}_\gamma^{2k} \oplus \mathbf{W}^m$ обозначим как $C(2k, m)$ и назовем классом; $k \geqslant 0$, $m \geqslant 0$ — целые, $k + m > 0$. Операторы $(\mathscr{N}_d^{-1}, I)$, (I, S^{-1}) и $(\mathscr{N}_d^{-1}, S^{-1})$ отображают класс $C(2k, m)$ на классы $C(2(k+1), m)$, $C(2k, m+1)$ и $C(2(k+1), m+1)$ и обратно (пп. 1.5 и 1.7).

4.2. Пространство $\mathbf{E}^s(\Omega)$, $s \geqslant 0$ — целое. Это пространство определяется в [21] так:

$$\mathbf{E}^s = \{\boldsymbol{f} \in \mathbf{H}^s : \operatorname{div} \boldsymbol{f} \in H^s\}.$$

Квадрат нормы $\|\boldsymbol{f}\|_{E^s}^2 = \|\boldsymbol{f}\|_s^2 + \|\operatorname{div} \boldsymbol{f}\|_s^2 = \|\boldsymbol{f}_{\mathscr{A}}\|_s^2 + \|\operatorname{div} \boldsymbol{f}_{\mathscr{A}}\|_s^2 + \|\boldsymbol{f}_{\mathbf{V}}\|_s^2$; $\mathbf{E}^s$ — гильбертово пространство и

$$\mathbf{C}_0^\infty(\Omega) \subset \mathbf{E}^s(\Omega), \quad \mathbf{H}^{s+1}(\Omega) \subset \mathbf{E}^s(\Omega) \subset \mathbf{H}^s(\Omega).$$

Очевидно, что $\operatorname{rot} \boldsymbol{u} + \lambda \boldsymbol{u} \in \mathbf{E}^s(\Omega)$, если $\boldsymbol{u} \in \mathbf{H}^{s+1}(\Omega)$.

Для функций v из пространства $H^1(\Omega)$ определен [2] оператор *следа*

$$\gamma : H^1(\Omega) \to H^{1/2}(\omega),$$

равный следу v на границе ω для функций из $\mathscr{C}^1(\overline{\Omega})$: $\gamma v = v|_\omega$, причем $\|\gamma v\|_{L_2(\omega)} \leqslant c\|v\|_{H^1(\Omega)}$.

Аналогично, для поля $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ из $\mathbf{E}^0(\Omega)$ определен [21] оператор *следа ее нормальной компоненты* $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{u}$, $\gamma_{\boldsymbol{n}}:\mathbf{E}^0(\Omega)\to H^{-1/2}(\omega)$, равный сужению $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{u}$ на ω для функций из $\mathscr{C}^1(\overline{\Omega})$: $\gamma_{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{u}=\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{u}|_\omega$.

Для $\boldsymbol{u}\in\mathbf{E}^0(\Omega)$ и $v\in H^1(\Omega)$ верна обобщенная формула Стокса:

$$\langle\gamma_{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{u},\gamma v\rangle=(\boldsymbol{u},\nabla v)+(\operatorname{div}\boldsymbol{u},v),$$

где $\langle\gamma_{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{u},\gamma v\rangle$ — линейный функционал над пространством $H^{1/2}(\omega)$;

$$\mathbf{E}^0_\gamma(\Omega)\equiv\{\boldsymbol{f}\in\mathbf{E}^0:\gamma_{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{f}=0\}.$$

4.3. Метод Фурье решения краевых задач в $\mathbf{L_2(\Omega)}$. Пусть в $\mathbf{L}_2(\Omega)$ задано поле $\boldsymbol{f}$. Рассмотрим следующие задачи.

Задача 1. *Найти поле $\boldsymbol{u}$ в $\mathbf{L}_2(\Omega)$ такое, что*

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{u}+\lambda\boldsymbol{u}=\boldsymbol{f}\quad \textit{в}\quad \mathbf{L}_2(\Omega),\tag{4.1}$$

то есть $(\boldsymbol{u},(\operatorname{rot}+\lambda I)\boldsymbol{v})=(\boldsymbol{f},\boldsymbol{v})$ *для любого поля* $\boldsymbol{v}\in\mathbf{C}_0^\infty(\Omega)$ *и* $\gamma_{\mathbf{n}}\mathbf{u}=0$, *если след* $\gamma_{\mathbf{n}}\mathbf{u}$ *существует.*

Задача 2. *Найти поле $\boldsymbol{w}$ в $\mathbf{L}_2(\Omega)$ такое, что*

$$\nabla\operatorname{div}\boldsymbol{w}+\nu^2\boldsymbol{w}=\boldsymbol{f}\quad \text{в}\quad \mathbf{L}_2(\Omega)$$

и $\gamma_{\mathbf{n}}\mathbf{w}=0$, *если след* $\gamma_{\mathbf{n}}\mathbf{w}$ *существует.*

Перейдем *в объемлющее пространство* $\mathbf{L}_2(\Omega)=\mathscr{A}\oplus\mathscr{B}$. Используя разложение полей $\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{w}$ из $\mathbf{L}_2(\Omega)$ в суммы $\boldsymbol{f}_{\mathscr{A}}+\boldsymbol{f}_{\mathbf{V}}$, $\boldsymbol{u}_{\mathscr{A}}+\boldsymbol{u}_{\mathbf{V}}$ и $\boldsymbol{w}_{\mathscr{A}}+\boldsymbol{w}_{\mathbf{V}}$ и расширения S и $\mathscr{N}_d$ операторов ротор и градиент дивергенции, запишем эти уравнения в виде уравнений-проекций

$$\lambda\boldsymbol{u}_{\mathscr{A}}=\boldsymbol{f}_{\mathscr{A}},\quad (\mathscr{N}_d+\nu^2I)\boldsymbol{w}_{\mathscr{A}}=\boldsymbol{f}_{\mathscr{A}}\quad \text{в}\quad \mathscr{A};\tag{4.2}$$

$$(S+\lambda I)\boldsymbol{u}_{\mathbf{V}}=\boldsymbol{f}_{\mathbf{V}},\quad \nu^2\boldsymbol{w}_{\mathbf{V}}=\boldsymbol{f}_{\mathbf{V}},\quad \text{в}\quad \mathscr{B},\tag{4.3}$$

учитывая, что $\operatorname{rot}\boldsymbol{u}_{\mathscr{A}}=0$ в $\mathscr{A}$, $\nabla\operatorname{div}\boldsymbol{u}_{\mathbf{V}}=0$ в $\mathscr{B}\equiv\mathbf{V}^0$.

Замечание. Если пространство $\mathbf{C}\equiv\mathscr{B}_H(G)$ не пусто и $\lambda\neq0$, то уравнение $(\nabla\operatorname{div}+\operatorname{rot}+\lambda I)\boldsymbol{u}=\boldsymbol{f}$ распадается на три проекции:

$$(\mathscr{N}_d+\lambda I)\boldsymbol{u}_{\mathscr{A}}=\boldsymbol{f}_{\mathscr{A}},\quad (S+\lambda I)\boldsymbol{u}_{\mathbf{V}}=\boldsymbol{f}_{\mathbf{V}},\quad \lambda\boldsymbol{u}_{\mathbf{C}}=\boldsymbol{f}_{\mathbf{C}}$$

— уравнения второго, первого и нулевого порядков соответственно.

Согласно теореме 3 и леммам 1, 2, уравнения

$$(S+\lambda I)\boldsymbol{u}_{\mathbf{V}}=\boldsymbol{f}_{\mathbf{V}}\quad \text{и}\quad (\mathscr{N}_d+\nu^2I)\boldsymbol{u}_{\mathscr{A}}=\boldsymbol{f}_{\mathscr{A}}$$

разрешимы по Фредгольму.

При $\lambda\neq\operatorname{Sp}(\operatorname{rot})$ проекции решения задачи 1 имеют вид

$$\boldsymbol{u}_{\mathscr{A}}=\lambda^{-1}\boldsymbol{f}_{\mathscr{A}},\quad \boldsymbol{u}_{\mathbf{V}}=(S+\lambda I)^{-1}\boldsymbol{f}_{\mathbf{V}}.\tag{4.4}$$

Действительно, формулы (4.4) получаются из формул (4.2), (4.3) и обратимости оператора $S+\lambda I$ при $\lambda\neq\operatorname{Sp}(\operatorname{rot})$ в $\mathbf{V}^0$ (теорема 3, п. 1.5).

Рассмотрим утверждения теоремы 5 и прокомментируем их:

– *если* $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{f}_{\mathscr{A}}$ *и* $\boldsymbol{f}_{\mathscr{A}} \in \mathscr{A}$ *или* $\boldsymbol{f}_{\mathscr{A}} \in \mathscr{A}_\gamma$, *то* $\boldsymbol{u} = \lambda^{-1}\boldsymbol{f}_{\mathscr{A}} \in \mathscr{A}$ *или* $\boldsymbol{u} \in \mathscr{A}_\gamma$ — *обобщенные решения задачи* 1.

  Эти ряды являются обобщенными решениями уравнения (4.1);

– *если* $\boldsymbol{f} \in \mathscr{B}\perp\mathscr{A}$ *в* $\mathbf{L}_2(\Omega)$, *то* $\boldsymbol{u} = (S+\lambda I)^{-1}\boldsymbol{f}_{\mathbf{V}} \in \mathbf{W}^1 \subset \mathbf{H}^1_\gamma(\Omega)$;
– *если* $\boldsymbol{f} \in \mathbf{E}^0_\gamma(\Omega)$, *то* $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_{\mathscr{A}} + \boldsymbol{u}_{\mathbf{V}} \in \mathbf{H}^1_\gamma(\Omega)$.

  Действительно, если $\boldsymbol{f} \in \mathbf{H}^0 = \mathbf{L}_2(\Omega)$ и $\operatorname{div}\boldsymbol{f} \in H^0$, то $\boldsymbol{f}_{\mathscr{A}} \in \mathbf{H}^0$ и $\operatorname{div}\boldsymbol{f}_{\mathscr{A}} = \operatorname{div}\boldsymbol{f} \in H^0$, так как $\operatorname{div}\boldsymbol{f}_{\mathbf{V}} = 0$.
  Кроме того, $\operatorname{rot}\boldsymbol{f}_{\mathscr{A}} = 0$ и $\gamma_{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{f}_{\mathscr{A}} = 0$. Из оценки (1.2) при $s = 0$ поле $\boldsymbol{f}_{\mathscr{A}} \in \mathbf{H}^1_\gamma$, значит $\boldsymbol{u}_{\mathscr{A}} = \lambda^{-1}\boldsymbol{f}_{\mathscr{A}} \in \mathbf{H}^1_\gamma(\Omega)$.
  Так как $\boldsymbol{u}_{\mathbf{V}} = (S+\lambda I)^{-1}\boldsymbol{f}_{\mathbf{V}}$ также принадлежит $\mathbf{H}^1_\gamma$, то $\boldsymbol{u} \in \mathbf{H}^1_\gamma(\Omega)$;

– *если* $\boldsymbol{f}$ *принадлежит классу* $C(2k,m)$, *то* $\boldsymbol{u} \in C(2k, m+1)$;
– *если же* $\boldsymbol{f} \in \mathscr{D}(\Omega)$, *то ряды* (1.7), (1.8) *сходятся в* $\mathbf{H}^s(\Omega)$ *для любого* $s \geqslant 1$ *и* $\boldsymbol{u} \in C^\infty(\overline{\Omega})$ — *классическое решение задачи.*

  Если $\boldsymbol{f} \in C(2k,m)$, то согласно (4.4) $\boldsymbol{u} \in C(2k, m+1)$.
  Последнее утверждение очевидно.

Теорема 5 доказана.

Замечание. В случае шара эта теорема имеет наиболее натуральный вид. Согласно [17], собственные значения $\lambda_{n,m}$ оператора S в шаре радиуса R равны $\pm\rho_{n,m}R^{-1}$, где числа $\pm\rho_{n,m}$ — нули функций $\psi_n(r)$ (см. (1.9)), m, $n \in \mathbb{N}$; кратность собственного значения $\lambda_{n,m}$ равна $2n+1$. Собственные поля $\boldsymbol{q}^\pm_\kappa(\boldsymbol{x})$ ротора и $\boldsymbol{q}_\kappa(\boldsymbol{x})$ градиента дивергенции, $\kappa = (n,m,k)$, выражены явно через сферические функции и функции $\psi_n(r)$.

Из теоремы 5 и леммы 1 очевидно следуют лемма 3 и ее следствие.
Решение краевой задачи 2 при $\lambda \neq \operatorname{Sp}(\nabla\operatorname{div})$ аналогично [19].
Таким образом, задачи 1 и 2 решены полностью.

4.4. О приложениях. Собственные поля ротора имеют приложения в гидродинамике [6], где они называются полями Бельтрами; в астрофизике и в физике плазмы они называются бессиловыми полями (force-free magnetic fields — L. Woltjer [22], free-decay fields — J. B. Taylor [23]). В. И. Арнольд [24] и В. В. Козлов [25] изучали топологию линий тока течений идеальной жидкости при условии $[\operatorname{rot}\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}] \neq 0$. Об этих и других работах подробно написано в работе [17].

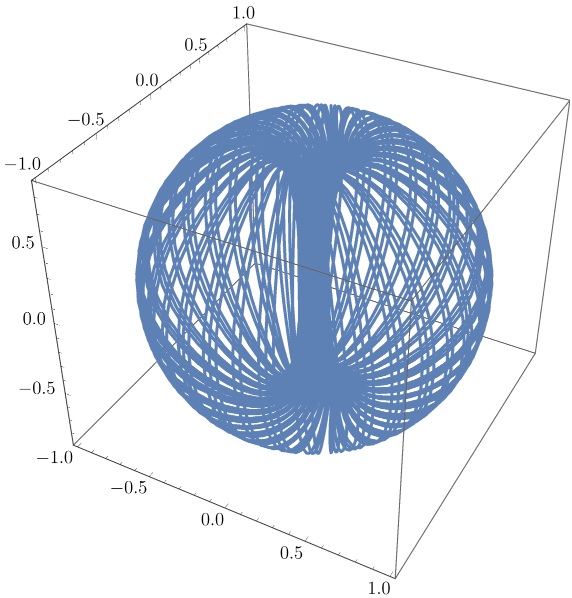
Отметим еще работы L. Woltjer [22, 26], который ввел понятие спиральности (helicity) гладкого векторного поля в области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$.

J. Cantarella, D. DeTurck, H. Gluck и M. Teytel [27] изучили линии тока собственных полей ротора с минимальным собственным значением в шаре и в шаровом слое.

Автор вывел формулы собственных полей ротора и градиента дивергенции в шаре для любых собственных значений (см. [17, 28, 29]). Формулы собственных полей ротора, полученные независимо от [27] и опубликованные в [28] примерно в то же время, дополняют формулы, приведенные в [27], которые получены, следуя работам [22, 26].

Установлена связь собственных полей ротора и Стокса [17, 30]. Для нелинейной системы Навье—Стокса с периодическими граничными условиями найдены явные решения [31]. Совместно с А. Г. Хайбуллиным автор разработал новый метод численного решения задачи Коши [32, 33].

Профессор Г. Г. Исламов [34], используя формулу из работы [30], осуществил визуализацию линий тока поля $u^+_{1,1,0}(\boldsymbol{x})$ ротора с минимальным собственным значением в шаре.[6] Траектория движения отдельной точки напоминает нить, которая наматывается на тороидальную катушку (см. рисунок).



Катушка Исламова [Islamov Coil]

В работе М. Е. Боговского [35] исследована задача Дирихле для оператора дивергенции, важная в гидродинамике (см. [6, § 2 гл. 1]).

Статья В. Н. Масленниковой и М. Е. Боговского [36] содержит обзор работ по решению задачи С. Л. Соболева [5] и *аппроксимации потенциальных и соленоидальных векторных полей финитными бесконечно дифференцируемыми полями.* В частности, они пишут, что в 1976 г. J. Heywood [37] построил соленоидальное векторное поле в $W^1_2(\Omega)$, которое не аппроксимируется векторными полями из $J^\infty_0(\Omega) = \{\boldsymbol{u} \in C^\infty_0(\Omega) : \operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0\}$.

Конкурирующие интересы. Я заявляю, что у меня нет конкурирующих интересов в отношении данной статьи. Статья является продолжением исследований автора [17, 19, 38–40] (см. также arXiv:1704.05699 [math.FA], arXiv:1710.06428 [math.AP] и arXiv:1712.03804 [math.AP]).

Авторская ответственность. Я несу полную ответственность за представление окончательной рукописи в печатном виде. Я одобрил окончательный вариант руко-

[6] Данная визуализация была представлена Г. Г. Исламовым в докладе «Моделирование полей смещения вакуума в системе “Mathematica”» на 4-ой Российской конференции по технологиям Wolfram (г. Санкт–Петербург, 6–7 июня 2016 г.). На момент написания данной статьи материалы этого доклада были доступны по следующей ссылке: http://wac.36f4.edgecastcdn.net/0036F4/pub/www.wolfram.com/pdf/report-islamov.pdf. Представленный рисунок получен с помощью программы, переданной автору Г. Г. Исламовым.

писи. Исходный вариант статьи был опубликован в виде препринта: arXiv:1911.13230 [math.AP].

Благодарности. Я выражаю благодарность академику РАН профессору В. П. Маслову, профессору д. ф.-м. н. М. Д. Рамазанову и доценту к. ф.-м. н. Р. Н. Гарифуллину за поддержку при написании данной статьи, а также к. ф.-м. н. М. Н. Саушкину, чья редакторская правка способствовала улучшению содержания рукописи.

Библиографический список

1. Соболев С. Л. *Введение в теорию кубатурных формул.* М.: Наука, 1974. 810 с.
2. Михайлов В. П. *Дифференциальные уравнения в частных производных.* М.: Наука, 1975. 392 с.
3. Weyl H. The method of orthogonal projection in potential theory // *Duke Math. J.*, 1940. vol. 7, no. 1. pp. 411–444. doi: 10.1215/S0012-7094-40-00725-6.
4. Borchers W., Sohr H. On the equations $\operatorname{div} u = f$ and $\operatorname{rot} v = g$ with zero boundary conditions // *Hokkaido Math. J.*, 1990. vol. 19, no. 1. pp. 67–87. doi: 10.14492/hokmj/1381517172.
5. Соболев С. Л. Об одной новой задаче математической физики // *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, 1954. Т. 18, № 1. С. 3–50.
6. Ладыженская О. А. *Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости.* М.: Наука, 1970. 288 с.
7. Friedrichs K. O. Differential forms on riemannian manifolds // *Comm. Pure Appl. Math.*, 1955. vol. 8, no. 2. 551–590 pp. doi: 10.1002/cpa.3160080408.
8. Быховский Э. Б., Смирнов Н. В. Об ортогональном разложении пространства вектор-функций, квадратично суммируемых по заданной области, и операторах векторного анализа / *Математические вопросы гидродинамики и магнитной гидродинамики для вязкой несжимаемой жидкости*: Сборник работ / Тр. МИАН СССР, Т. 59. М.–Л.: Изд-во АН СССР, 1960. С. 5–36.
9. Yoshida Z., Giga Y. Remarks on spectra of operator rot // *Math. Z.*, 1990. vol. 204. pp. 235–245. doi: 10.1007/BF02570870.
10. Зорич В. А. *Математический анализ. Часть II.* М.: Наука, 1984. 640 с.
11. Солонников В. А. Переопределенные эллиптические краевые задачи / *Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций. 5* / Зап. научн. сем. ЛОМИ, Т. 21. Л.: Изд-во «Наука», Ленинград. отд., 1971. С. 112–158.
12. Сакс Р. С. О краевых задачах для системы $\operatorname{rot} u + \lambda u = h$ // *Дифференц. уравнения*, 1972. Т. 8, № 1. С. 126–133.
13. Волевич Л. Р. Разрешимость краевых задач для общих эллиптических систем // *Матем. сб.*, 1965. Т. 68(110), № 3. С. 373–416. [Volevich L. R. Solubility of boundary value problems for general elliptic systems // *Mat. Sb. (N.S.)*, 1965. vol. 68(110), no. 3. pp. 373–416 (In Russian)].
14. Bourguignon J. P., Brezis H. Remarks on the Euler equation // *J. Funct. Anal.*, 1974. vol. 15, no. 4. pp. 341–363. doi: 10.1016/0022-1236(74)90027-5.
15. Foias C., Temam R. Remarques sur les équations de Navier–Stokes stationnaireset les phénomènes successifs de bifurcation // *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa – Classe di Scienze, Serie 4*, 1978. vol. 5, no. 1. pp. 29–63, http://www.numdam.org/item/ASNSP_1978_4_5_1_29_0/.
16. Вайнберг Б. Р., Грушин В. В. О равномерно неэллиптических задачах. I // *Матем. сб.*, 1967. Т. 72(114), № 4. С. 602–636.
17. Сакс Р. С. Решение спектральных задач для операторов ротора и Стокса // *Уфимск. матем. журн.*, 2013. Т. 5, № 2. С. 63–81.
18. Владимиров В. С. *Уравнения математической физики.* М.: Наука, 1988. 512 с.
19. Сакс Р. С. Оператор градиент дивергенции и пространства Соболева // *Динамические системы*, 2018. Т. 8, № 4. С. 385–407.

20. Сакс Р. С. О свойствах обобщенно эллиптических псевдодифференциальных операторов на замкнутых многообразиях / *Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций. 28* / Зап. научн. сем. ПОМИ, Т. 243. СПб.: ПОМИ, 1997. С. 215–269.
21. Temam R. I. *Navier–Stokes Equations: Theory and Numerical Analysis.* Amsterdam: North-Holland, 1984. doi: 10.1090/chel/343.
22. Woltjer L. A theorem on force-free magnetic fields // *Proc. Nat. Acad. Sci.*, 1958. vol. 44. pp. 489-491. doi: 10.1073/pnas.44.6.489.
23. Taylor J. B. Relaxation of toroidal plasma and generation of reverse magnetic fields // *Phys. Rev. Letters*, 1974. vol. 33, no. 19. pp. 1139–1141. doi: 10.1103/PhysRevLett.33.1139.
24. Arnold V. I. Sur la topologie des écoulements stationnaires des fluides parfaits // *C. R. Acad. Sci. Paris*, 1965. vol. 261. pp. 17–20; *Vladimir I. Arnold — Collected Works.* vol. 2. Berlin, Heidelberg: Springer, 2013. pp. 15–18. doi: 10.1007/978-3-642-31031-7_3.
25. Козлов В. В. *Общая теория вихрей.* Ижевск: Удмурт. гос. унив., 1998. 240 с.
26. Woltjer L. The Crab Nebula // *Bull. Astron. Inst. Netherlands*, 1958. vol. 14. pp. 39–80.
27. Cantarella J., DeTurck D., Gluck H., Teytel M. // *Physics of Plasmas*, 2000. vol. 7. pp. 2766–2775. doi: 10.1063/1.874127.
28. Сакс Р. С. Спектр оператора вихря в шаре при условии непротекания и собственные значения колебаний упругого шара, закрепленного на границе / *Труды конф. «Комплексный анализ, дифференциальные уравнения и смежные вопросы», IV. Прикладная математика.* Уфа, 2000. С. 61–68.
29. Saks R. S. On the spectrum of the operator curl / *Progress in Analysis*: Proceedings of the 3rd ISAAC Congress. vol. 1 (Berlin, Germany, 20–25 August 2001), 2003. pp. 811–819. doi: 10.1142/9789812794253_0094.
30. Сакс Р. С. Собственные функции операторов ротора, градиента дивергенции и Стокса. Приложения // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2013. № 2(31). С. 131–146. doi: 10.14498/vsgtu1166.
31. Сакс Р. С. Глобальные решения уравнений Навье–Стокса в равномерно вращающемся пространстве // *ТМФ*, 2010. Т. 162, № 2. С. 196–215. doi: 10.4213/tmf6464.
32. Сакс Р. С., Хайбуллин А. Г. Об одном методе численного решения задачи Коши для уравнений Навье–Стокса и рядах Фурье оператора ротор // *Докл. РАН*, 2009. Т. 429, № 1. С. 22–27.
33. Сакс Р. С. Задача Коши для уравнений Навье–Стокса, метод Фурье // *Уфимск. матем. журн.*, 2011. Т. 3, № 1. С. 53–79.
34. Исламов Г. Г. Об одном классе векторных полей // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2015. Т. 19, № 4. С. 680–696. doi: 10.14498/vsgtu1382.
35. Боговский М. Е. Решение некоторых задач векторного анализа, связанных с операторами div и grad // *Труды семинара С. Л. Соболева*, 1980. № 1. С. 5–40.
36. Масленникова В. Н., Боговский М. Е. Аппроксимация потенциальных и соленоидальных векторных полей // *Сиб. матем. журн.*, 1983. Т. 24, № 5. С. 149–171.
37. Heywood J. G. On uniqueness questions in theory of viscous flow // *Acta Math.*, 1976. vol. 136, no. 2. pp. 61–102. doi: 10.1007/BF02392043.
38. Сакс Р. С. Ортогональные подпространства пространства $L_2(G)$ и самосопряженные расширения операторов ротора и градиента дивергенции // *Докл. РАН*, 2015. Т. 462, № 3. С. 278–282. doi: 10.7868/S0869565215150050.
39. Сакс Р. С. Оператор градиент дивергенции в $L_2(G)$ // *Докл. РАН*, 2015. Т. 462, № 5. С. 61–65. doi: 10.7868/S0869565215170089.
40. Сакс Р. С. Оператор ротор в пространстве $L_2(G)$ // *Таврический вестник информатики и математики*, 2015. № 1. С. 87–103.

Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2020, vol. 24, no. 2, pp. 249–274
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1759

MSC: 35P05, 35P15, 47A10

Sobolev spaces and boundary-value problems for the curl and gradient-of-divergence operators

R. S. Saks

Institute of Mathematics with Computing Centre,
Ufa Science Centre, Russian Academy of Sciences,
112, Chernyshevskiy st., Ufa, Russia, 450077.

Abstract

We study boundary value and spectral problems in a bounded domain G with smooth border for operators $\operatorname{rot} + \lambda I$ and $\nabla \operatorname{div} + \lambda I$ in the Sobolev spaces.

For $\lambda \neq 0$ these operators are reducible (by B. Veinberg and V. Grushin method) to elliptical matrices and the boundary value problems and satisfy the conditions of V. Solonnikov's ellipticity. Useful properties of solutions of these spectral problems derive from the theory and estimates. The $\nabla \operatorname{div}$ and rot operators have self-adjoint extensions $\mathscr{N}_d$ and $\mathscr{S}$ in orthogonal subspaces $\mathscr{A}_\gamma$ and $\mathbf{V}^0$ forming from potential and vortex fields in $\mathbf{L}_2(G)$. Their eigenvectors form orthogonal basis in $\mathscr{A}_\gamma$ and $\mathbf{V}^0$ elements which are presented by Fourier series and operators are transformations of series.

We define analogues of Sobolev spaces $\mathbf{A}^{2k}_\gamma$ and $\mathbf{W}^m$ orders of $2k$ and m in classes of potential and vortex fields and classes $C(2k, m)$ of their direct sums. It is proved that if $\lambda \neq \operatorname{Sp}(\operatorname{rot})$, then the operator $\operatorname{rot} + \lambda I$ displays the class $C(2k, m+1)$ on the class $C(2k, m)$ one-to-one and continuously. And if $\lambda \neq \operatorname{Sp}(\nabla \operatorname{div})$, then operator $\nabla \operatorname{div} + \lambda I$ maps the class $C(2(k+1), m)$ on the class $C(2k, m)$, respectively.

Keywords: Sobolev spaces, gradient operator, divergence operator, curl operator, elliptic boundary value problems, spectral problems.

Received: 25th November, 2019 / Revised: 10th March, 2020 /
Accepted: 16th March, 2020 / First online: 22nd June, 2020

Research Article

Please cite this article in press as:
Saks R. S. Sobolev spaces and boundary-value problems for the curl and gradient-of-divergence operators, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2020, vol. 24, no. 2, pp. 249–274. doi: 10.14498/vsgtu1759 (In Russian).

Author's Details:
Romen S. Saks Dr. Phys. & Math. Sci.; Professor; e-mail: romen-saks@yandex.ru

Summary. We study boundary value and spectral problems in a bounded domain G with smooth border for operators $\operatorname{rot} + \lambda I$ and $\nabla \operatorname{div} + \lambda I$ in the Sobolev spaces.

The peculiarity of these operators is that they are not elliptic, they belong at $\lambda \neq 0$ to the class of systems, redused by B. Veinberg and V. Grushin method to elliptic matrices. Each of these problems satisfies the Solonnikov conditions of ellipticity.

From elliptic theory and estimates follow properties of solutions of spectral problems of the rotor and the gradient of the divergence:

a) non-zero eigenvalues have finite multiplicity,
b) each generalized eigenfunction is infinitely differentiable up to the boundary of the domain.

It is known that the space $\mathbf{L}_2(G)$ decomposes into two orthogonal subspaces of potential and solenoidal fields, which we call classes and denote by $\mathscr{A}$ and $\mathscr{B}$. They contain subspaces $\mathscr{A}_\gamma \subset \mathscr{A}$ and $\mathbf{V}^0 \subset \mathscr{B}$.

It is proved that operators: gradient of the divergence and rotor have self-adjoint extensions $\mathscr{N}_d$ and $\mathscr{S}$ to orthogonal subspaces $\mathscr{A}_\gamma$ and $\mathbf{V}^0$, where they are reversible. Their inverse operators $\mathscr{N}_d^{-1}$ and $\mathscr{S}^{-1}$ are completely continuous, and their eigenvectors form an orthogonal bases in each class $\mathscr{A}$ and $\mathscr{B}$.

The elements $\boldsymbol{f}_{\mathscr{A}}$ and $\boldsymbol{f}_{\mathbf{V}}$ decompose in Fourier series, and operators $\mathscr{N}_d : \mathscr{A}_\gamma \to \mathscr{A}_\gamma$ and $\mathscr{S} : \mathbf{V}^0 \to \mathbf{V}^0$ spectral representations are obtained. Their domains of definition $\mathscr{D}(\mathscr{N}_d) \equiv \{\boldsymbol{f} \in \mathscr{A}_\gamma : \nabla \operatorname{div} \boldsymbol{f} \in \mathscr{A}_\gamma\}$ and $\mathscr{D}(\mathscr{S}) \equiv \{\boldsymbol{g} \in \mathbf{V}^0 : \operatorname{rot} \boldsymbol{g} \in \mathbf{V}^0\}$ are contained in Sobolev spaces $\mathbf{H}^2$ and $\mathbf{H}^1$ of orders 2 and 1.

We introduce the spaces

$$\mathbf{A}^{2k}_\gamma \equiv \{\boldsymbol{f} \in \mathscr{A}_\gamma, \ldots, (\nabla \operatorname{div})^k \boldsymbol{f} \in \mathscr{A}_\gamma\} \quad \text{and} \quad \mathbf{W}^m \equiv \{\boldsymbol{g} \in \mathbf{V}^0, \ldots, \operatorname{rot}^m \boldsymbol{g} \in \mathbf{V}^0\}$$

for $k, m \geqslant 1$ and prove they are analogues of the Sobolev space orders $2k$ and m, respectively, in the classes of potential and solenoidal fields. The direct sums of these spaces we call classes and denote as $C(2k, m)$.

The boundary value problems 1 and 2 in $\mathbf{L}_2(\Omega)$ are solved by the Fourier method for $\mathbf{f} \in C(2k, m)$.

If $\lambda \neq \operatorname{Sp}(\operatorname{rot})$, then the $\operatorname{rot} + \lambda I$ operator maps the class $C(2k, m+1)$ to the class $C(2k, m)$ one-to-one and continuously.

If $\lambda \neq \operatorname{Sp}(\nabla \operatorname{div})$, then the $\nabla \operatorname{div} + \lambda I$ operator maps the class $C(2(k+1), m)$ to the class $C(2k, m)$ one-to-one and continuously.

In particular, if domain $\Omega = B$ is a ball, $\psi_n(\lambda R) \neq 0$ for all $n \in \mathbb{N}$ and field $\boldsymbol{f} \in \mathbf{A}^{2k}_\gamma(B) \oplus \mathbf{W}^m(B)$, then solution of the problem 1 exists, unique and belongs to the class $\mathbf{A}^{2k}_\gamma(B) \oplus \mathbf{W}^{m+1}(B)$.

Respective, if $\psi_n'(\nu R) \neq 0$ for all $0 \leqslant n \in \mathbb{N}$ and the field $\boldsymbol{f} \in \mathbf{A}^{2k}_\gamma(B) \oplus \mathbf{W}^m(B)$, then solution of the problem 2 exists, unique and belongs to the class $\mathbf{A}^{2(k+1)}_\gamma(B) \oplus \mathbf{W}^m(B)$.

Competing interests. I declare that I have no competing interests. This article is a continuation of the following studies [17, 19, 38–40] (see also arXiv:1704.05699 [math.FA], arXiv:1710.06428 [math.AP], and arXiv:1712.03804 [math.AP]).

Author's Responsibilities. I take full responsibility for submitting the final manuscript in print. I approved the final version of the manuscript. The initial version of this article was published as a preprint arXiv:1911.13230 [math.AP].

Acknowledgments. The author thanks the Academician of RAS V. P. Maslov, Professor M. D. Ramazanov and Associate Professor R. N. Garifullin for their support in writing this article. The author also thanks M. N. Saushkin, whose editorial help have been invaluable.

References

1. Sobolev S. L. *Cubature Formulas and Modern Analysis: An introduction.* Montreux, Gordon and Breach Science Publ., 1992, xvi+379 pp.
2. Mikhailov V. P. *Partial Differential Equations.* Moscow, Mir, 1978, 397 pp.
3. Weyl H. The method of orthogonal projection in potential theory, *Duke Math. J.*, 1940, vol. 7, no. 1, pp. 411–444. doi: 10.1215/S0012-7094-40-00725-6.
4. Borchers W., Sohr H. On the equations $\operatorname{div} u = f$ and $\operatorname{rot} v = g$ with zero boundary conditions, *Hokkaido Math. J.*, 1990, vol. 19, no. 1, pp. 67–87. doi: 10.14492/hokmj/1381517172.
5. Sobolev S. L. On a new problem of mathematical physics, *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 1954, vol. 18, no. 1, pp. 3–50 (In Russian).
6. Ladyzhenskaya O. A. *The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flows.* New York, Gordon and Breach, 1969, xviii+224 pp.
7. Friedrichs K. O. Differential forms on riemannian manifolds, *Comm. Pure Appl. Math.*, 1955, vol. 8, no. 2, 551–590 pp. doi: 10.1002/cpa.3160080408.
8. Bykhovskii É. B., Smirnov N. V. Orthogonal decomposition of the space of vector functions square-summable on a given domain, and the operators of vector analysis, In: *Mathematical problems of hydrodynamics and magnetohydrodynamics for a viscous incompressible fluid*, Collected papers, Trudy Mat. Inst. Steklov., 59. Moscow–Leningrad, Acad. Sci. USSR, 1960, pp. 5–36 (In Russian).
9. Yoshida Z., Giga Y. Remarks on spectra of operator rot, *Math. Z.*, 1990, vol. 204, pp. 235–245. doi: 10.1007/BF02570870.
10. Zorich V. A. *Mathematical analysis II.* Berlin, Springer, 2016, xx+720 pp.
11. Solonnikov V. A. Overdetermined elliptic boundary value problems, In: *Boundary-value problems of mathematical physics and related problems of function theory. Part 5*, Zap. Nauchn. Sem. LOMI, 21. Leningrad, Nauka, Leningrad. Otdel., 1971, pp. 112–158 (In Russian).
12. Saks R. S. Boundary value problems for the system $\operatorname{rot} u + \lambda u = h$, *Differ. Uravn.*, 1972, vol. 8, no. 1, pp. 126–133 (In Russian).
13. Volevich L. R. Solubility of boundary value problems for general elliptic systems, *Mat. Sb. (N.S.)*, 1965, vol. 68(110), no. 3, pp. 373–416 (In Russian).
14. Bourguignon J. P., Brezis H. Remarks on the Euler equation, *J. Funct. Anal.*, 1974, vol. 15, no. 4, pp. 341–363. doi: 10.1016/0022-1236(74)90027-5.
15. Foias C., Temam R. Remarques sur les équations de Navier–Stokes stationnaireset les phénomènes successifs de bifurcation, *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa – Classe di Scienze, Serie 4*, 1978, vol. 5, no. 1, pp. 29–63, http://www.numdam.org/item/ASNSP_1978_4_5_1_29_0/.
16. Vainberg B. R., Grushin V. V. Uniformly nonelliptic problems. I, *Math. USSR-Sb.*, 1967, vol. 1, no. 4, pp. 543–568. doi: 10.1070/SM1967v001n04ABEH001999.
17. Saks R. S. Solving of spectral problems for curl and Stokes operators, *Ufa Math. J.*, 2013, vol. 5, no. 2, pp. 63–81. doi: 10.13108/2013-5-2-63.
18. Vladimirov V. S. *Equations of Mathematical Physics.* New York, Marcel Dekker, 1971.
19. Saks R. S. Operator $\nabla \operatorname{div}$ and Sobolev spaces, *Dinamicheskie Sistemy*, 2018, vol. 8, no. 4, pp. 385–407 (In Russian).
20. Saks R. S. On properties of the generalized elliptic pseudo-differential operators on closed manifolds, *J. Math. Sci. (New York)*, 2000, vol. 99, no. 1, pp. 936–968. doi: 10.1007/BF02673601.

21. Temam R. I. *Navier–Stokes Equations: Theory and Numerical Analysis.* Amsterdam, North-Holland, 1984. doi: 10.1090/chel/343.
22. Woltjer L. A theorem on force-free magnetic fields, *Proc. Nat. Acad. Sci.*, 1958, vol. 44, pp. 489-491. doi: 10.1073/pnas.44.6.489.
23. Taylor J. B. Relaxation of toroidal plasma and generation of reverse magnetic fields, *Phys. Rev. Letters*, 1974, vol. 33, no. 19, pp. 1139–1141. doi: 10.1103/PhysRevLett.33.1139.
24. Arnold V. I. Sur la topologie des écoulements stationnaires des fluides parfaits, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 1965, vol. 261, pp. 17–20; *Vladimir I. Arnold — Collected Works*, vol. 2. Berlin, Heidelberg, Springer, 2013, pp. 15–18. doi: 10.1007/978-3-642-31031-7_3.
25. Kozlov V. V. *Obshchaia teoriia vikhrei* [General Vortex Theory]. Izhevsk, Udmurt. State Univ., 1998, 240 c. (In Russian)
26. Woltjer L. The Crab Nebula, *Bull. Astron. Inst. Netherlands*, 1958, vol. 14, pp. 39–80.
27. Cantarella J., DeTurck D., Gluck H., Teytel M., *Physics of Plasmas*, 2000, vol. 7, pp. 2766–2775. doi: 10.1063/1.874127.
28. Saks R. S. Spectrum of the curl operator in a ball under sliding conditions and eigenvalues for oscillations of an elastic ball fixed on the boundary, In: *Trudy Conf. Complex Analysis, Differential Equations, and Related Topics, IV.* Ufa, 2000, pp. 61–68.
29. Saks R. S. On the spectrum of the operator curl, In: *Progress in Analysis*, Proceedings of the 3rd ISAAC Congress, vol. 1 (Berlin, Germany, 20–25 August 2001), 2003, pp. 811–819. doi: 10.1142/9789812794253_0094.
30. R. S. Saks The eigenfunctions of curl, gradient of divergence and Stokes operators. Applications, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2013, no. 2(31), pp. 131–146 (In Russian). doi: 10.14498/vsgtu1166.
31. Saks R. S. Global solutions of the Navier–Stokes equations in uniformly rotating space, *Theoret. and Math. Phys.*, 2010, vol. 162, no. 2, pp. 163–178. doi: 10.1007/s11232-010-0012-8.
32. Saks R. S., Khaybullin A. G. One method for the numerical solution of the cauchy problem for the navier-stokes equations and fourier series of the curl operator, *Dokl. Math.*, 2009, vol. 80, no. 3, pp. 800–805. doi: 10.1134/S1064562409060052.
33. Saks R. S. Cauchy problem for Navier–Stokes equations, Fourier method, *Ufa Math. J.*, 2011, vol. 3, no. 1, pp. 51–77.
34. Islamov G. G. On a class of vector fields, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2015, vol. 19, no. 4, pp. 680–696 (In Russian). doi: 10.14498/vsgtu1382.
35. Bogovskii M. E. Solutions of some problems of vector analysis, associated with the operators div and grad, *Trudy Seminara S. L. Soboleva*, 1980, no. 1, pp. 5–40 (In Russian).
36. Maslennikova V. N., Bogovskii M. E. Approximation of potential and solenoidal vector fields, *Sib. Math. J.*, 1983, vol. 24, no. 5, pp. 768–787. doi: 10.1007/BF00969603.
37. Heywood J. G. On uniquness questions in theory of viscous flow, *Acta Math.*, 1976, vol. 136, no. 2, pp. 61–102. doi: 10.1007/BF02392043.
38. Saks R. S. Orthogonal subspaces of the space $L_2(G)$ and self-adjoint extensions of the curl and gradient-of-divergence operators, *Dokl. Math.*, 2015, vol. 91, no. 3, pp. 313–317. doi: 10.1134/S1064562415030151.
39. Saks R. S. The gradient-of-divergence operator in $L_2(G)$, *Dokl. Math.*, 2015, vol. 91, no. 3, pp. 359–363. doi: 10.1134/S1064562415030291.
40. Saks R. S. The curl operator in the $L_2(G)$ space, *Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics*, 2015, no. 1, pp. 87–103 (In Russian).