



УДК 519.248:[33+301]

Математические модели стохастической динамики развития предприятий

А. Л. Сараев, Л. А. Сараев


Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева,
Россия, 443086, Самара, Московское ш., 34.

Аннотация

Предложены математические модели стохастической динамики развития однофакторных производственных предприятий за счет внутренних и внешних инвестиций. Сформулированы уравнения баланса для таких предприятий, описывающие случайные процессы непрерывного увеличения выпуска продукции и роста факторов производства. Исследовано взаимодействие пропорциональных, прогрессивных и дигрессивных амортизационных отчислений с внутренними и внешними инвестициями. Получены уравнения для определения равновесного состояния работы предприятия и вычислены предельные значения факторов производства. Рассмотрены случаи стабильного поступательного развития предприятия, приостановки его работы во время переоснащения производства и временного кризисного сворачивания производства при замене оборудования.

Алгоритм численного решения стохастических дифференциальных уравнений развития предприятий построен в соответствии с методом Эйлера–Маруямы. Для каждой реализации этого алгоритма строятся соответствующие стохастические траектории для случайной функции фактора производства. Разработан вариант метода расчета математического ожидания случайной функции фактора производства и получено для него соответствующее дифференциальное уравнение. Показано, что численное решение этого уравнения и среднее значение функции фактора производства вычисленное по двумстам реализациям стохастических траекторий, дают практически одинаковые результаты. Численный анализ разработанных моделей показал хорошее соответствие известным статистическим данным работы производственного предприятия.

Научная статья

 Контент публикуется на условиях лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru) (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Образец для цитирования

Сараев А. Л., Сараев Л. А. Математические модели стохастической динамики развития предприятий // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2020. Т. 24, № 2. С. 343–364. doi: [10.14498/vsgtu1700](https://doi.org/10.14498/vsgtu1700).

Сведения об авторах

Александр Леонидович Сараев  <https://orcid.org/0000-0002-9223-6330>

кандидат экономических наук; доцент; каф. математики и бизнес-информатики;
e-mail: alex.saraev@gmail.com

Леонид Александрович Сараев  <https://orcid.org/0000-0003-3625-5921>

доктор физико-математических наук, профессор; заведующий кафедрой; каф. математики
и бизнес-информатики; e-mail: saraev_leo@mail.ru

Ключевые слова: факторы производства, производственная функция, стохастические уравнения, винеровский процесс, коэффициент сноса, коэффициент волатильности, метод Эйлера–Маруямы.

Получение: 7 мая 2019 г. / Исправление: 27 февраля 2020 г. /

Принятие: 16 марта 2020 г. / Публикация онлайн: 3 мая 2020 г.

Введение. Развитие математических методов расчета и моделирование показателей стохастической динамики экономического развития производственных предприятий является одной из актуальных проблем современной экономической теории, успешное решение которой позволяет адекватно выполнять экономический анализ деятельности предприятий, вычислять их предельные производительности ресурсов, прогнозировать выпуск продукции, прибыль и затраты, оценивать эффекты замещения производственных факторов и т.д.

Применение методов теории случайных функций для построения математических моделей динамики экономических показателей предприятия позволяет учесть стохастический характер формирования производственных факторов и волатильность выпуска продукции. Кроме того, подобное стохастическое моделирование помогает учесть особенности нестабильной работы реальных предприятий и существенно обогатить и уточнить имеющиеся аналогичные детерминистские модели.

Для построения недетерминированных моделей экономического развития предприятий широко применяются стохастические дифференциальные уравнения, содержащие члены, представляющие собой стандартные винеровские процессы, отражающие случайные внешние воздействия.

Очевидно, что построение уравнений балансов для процессов роста факторов производства и выпуска продукции производственных предприятий, учитывающих внешние случайные возмущающие факторы, будет приводить к существенным отклонениям от аналогичных детерминированных моделей развития предприятия [1–7].

Основные положения теории стохастических дифференциальных уравнений и методы их исследования подробно изложены в работах [8–12].

Следует отметить, что на практике для исследования стохастических моделей помимо их качественного анализа применяются численные методы решения стохастических дифференциальных уравнений, с помощью которых можно рассчитывать реализации случайных процессов, устанавливать дифференциальные уравнения для математических ожиданий рассматриваемых величин и в некоторых случаях получать точные решения [13–21].

Целью публикуемой работы является разработка новых экономико-математических моделей стохастической динамики развития производственных предприятий за счет внутренних и внешних инвестиций.

Особенность этих моделей и их научная новизна заключаются в том, что они учитывают взаимодействие пропорциональных, прогрессивных и дигрессивных амортизационных отчислений с внутренними и внешними инвестициями и позволяют найти предельные значения факторов производства.

Рассмотрены случаи стабильного поступательного развития предприятия, приостановки его работы во время переоснащения производства и временного кризисного сворачивания производства при замене оборудования.

1. Математическая модель развития предприятия за счет внутренних инвестиций. Рассмотрим некоторое производственное предприятие, выпуск готовой продукции которого обеспечивается одним ресурсом в виде некоторого объема фактора производства Q . Этот объем может составлять основной капитал, производственные фонды, привлекаемые трудовые ресурсы, используемые материалы, применяемые технологии, различного рода инновации и т.д.

Выпуск продукции предприятия описывается однофакторной производственной функцией Кобба—Дугласа

$$V = PQ^a. \quad (1)$$

Здесь показатель степени a представляет собой эластичность выпуска продукции, $0 < a < 1$; P — стоимость продукции, произведенной на единичный объем ресурса.

Величина объема фактора производства $Q = Q(t)$ предполагается непрерывной и непрерывно дифференцируемой на числовой полуоси ($0 \leq t < \infty$) функцией непрерывного аргумента времени t . Единицей измерения времени служит соответствующий обстоятельствам рыночный период (месяц, квартал, год).

Начальное значение фактора производства $Q_0 = Q(0)$ считается известным, его предельное значение $Q_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} Q(t)$ подлежит вычислению.

Для наблюдения за динамикой развития предприятия следует составить уравнение баланса для объема фактора производства $Q = Q(t)$.

Приращение объема фактора производства $\Delta Q = Q(t + \Delta t) - Q(t)$ за некоторый промежуток времени Δt может быть представлено в виде суммы трех слагаемых:

$$\Delta Q = \Delta Q^A + \Delta Q^I + \Delta Q^W. \quad (2)$$

Здесь ΔQ^A — приращение амортизации фактора производства, ΔQ^I — приращение частичного восстановления фактора производства за счет внутренних инвестиций, ΔQ^W — случайные колебания приращения объема фактора производства, обусловленные определенной волатильностью процесса выпуска продукции.

Приращение амортизации ΔQ^A за промежуток времени Δt можно представить в виде

$$\Delta Q^A(t) = -A \theta(t) Q^u(t) \cdot \Delta t. \quad (3)$$

Здесь A — коэффициент амортизации, доля выбывшего за единицу времени объема фактора производства, u — показатель интенсивности амортизации. При $u = 1$ имеет место обычная пропорциональная амортизация, при $u > 1$ амортизационные отчисления увеличиваются и становятся прогрессивными, при $u < 1$, наоборот, амортизационные отчисления снижаются и становятся дигрессивными.

Приращение восстановления фактора производства ΔQ^I за счет внутренних инвестиций за промежуток времени Δt определяется формулой

$$\Delta Q^I(t) = \theta(t) I(t) \cdot \Delta t. \quad (4)$$

Здесь $I(t)$ — внутренние инвестиции, сделанные в момент времени t . Они связаны с объемом выпуска продукции $V(t)$:

$$I(t) = B V(t), \quad (5)$$

где B — норма накопления внутренних инвестиций.

Подстановка (1) и (5) в формулу (4) окончательно дает

$$\Delta Q^I(t) = B P \theta(t) Q^a(t) \cdot \Delta t. \quad (6)$$

Случайные изменения приращения объема фактора производства $\Delta Q^W(t)$, обусловленные волатильностью процесса выпуска продукции, могут быть представлены в виде стохастического стандартного винеровского процесса:

$$\Delta Q^W(t) = \rho \theta(t) (Q(t) - Q_0) \left(1 - \frac{Q(t)}{Q_\infty}\right) \cdot \Delta w. \quad (7)$$

Здесь w — стандартный винеровский процесс, $\Delta w = \varepsilon(t)\sqrt{\Delta t}$, ρ — волатильность фактора производства $Q(t)$, при каждом t функция $\varepsilon(t) \sim \mathcal{N}(0, 1)$ — случайная величина с нормальным законом распределения, нулевым средним значением $\langle \varepsilon \rangle = 0$ и единичной дисперсией $\langle \varepsilon^2 \rangle = 1$.

Структура формулы (7) показывает, что в начале процесса развития предприятия в окрестности точки Q_0 и в его финале в окрестности точки Q_∞ случайный процесс становится почти детерминированным.

Подстановка (3), (6) и (7) в формулу (2) приводит к соотношению баланса

$$\begin{aligned} \Delta Q(t) = \theta(t) (-A Q^u(t) + B P Q^a(t)) \cdot \Delta t + \\ + \rho \theta(t) (Q - Q_0) \left(1 - \frac{Q(t)}{Q_\infty}\right) \cdot \Delta w. \end{aligned} \quad (8)$$

Предельный переход в уравнении (8) при $\Delta t \rightarrow 0$ и $\Delta w \rightarrow 0$ приводит к стохастическому дифференциальному уравнению диффузии Ито [22]:

$$dQ = \theta(t) S(Q, t) dt + \theta(t) Z(Q, t) dw. \quad (9)$$

Здесь

$$S(Q) = -A Q^u + B P Q^a \quad (10)$$

— коэффициент сноса уравнения (9),

$$Z(Q) = \rho (Q - Q_0) \left(1 - \frac{Q}{Q_\infty}\right) \quad (11)$$

— коэффициент волатильности уравнения (9).

Начальное условие для уравнения (9) с коэффициентами (10) и (11) имеет вид

$$Q(0) = Q_0. \quad (12)$$

Структура уравнения баланса (9) показывает, что предприятие будет успешно развиваться до тех пор, пока объем внутренних инвестиций $I_Q = BPQ^a$ будет превосходить амортизационные отчисления $A_Q = AQ^u$. Поскольку вблизи точки Q_∞ случайный процесс становится практически детерминированным, предельное значение Q_∞ объема производственного фактора $Q(t)$ находится из уравнения

$$I_Q - A_Q = -AQ^u + BPQ^a = 0 \quad (13)$$

и равно

$$Q_\infty = \left(\frac{A}{BP} \right)^{1/(a-u)}. \quad (14)$$

Здесь предполагается, что $a \neq u$, поскольку показатель интенсивности амортизации u незначительно отклоняется от единицы, соответствующей пропорциональной амортизации, а эластичность a всегда меньше единицы.

Функция $\theta = \theta(t)$ описывает варианты развития рассматриваемого предприятия. Для постоянной и единичной скорости $\theta(t) \equiv 1$ развитие предприятия будет стабильным. Различные размеры отклонения значения функции $\theta(t)$ от единицы в сторону уменьшения будут соответствовать замедлению процесса развития предприятия, его временной остановке во время смены технологий производства, частичному сворачиванию производства.

Формы интегральных кривых уравнения (9) существенно зависят от вида функции $\theta(t)$, определяющей центр временного интервала, его протяженность и величину отклонения от единичного значения, при котором предприятие работает стабильно. Если в некоторой временной окрестности с центром $t = t^*$ на предприятии производится полная или частичная замена технологического оборудования, то функция $\theta(t)$ будет иметь вид [23]

$$\theta(t) = 1 - \omega \exp\left(-\frac{(t-t^*)^2}{2\sigma^2}\right). \quad (15)$$

Здесь ω — максимальный размер отклонения функции от единицы, σ — радиус временного интервала, на котором происходит основное замедление производственного процесса. Если $\omega = 0$, то предприятие будет работать стабильно; если $\omega = 1$, то в момент времени $t = t^*$ рост функции $Q(t)$ прекращается и на интервале времени $(t^* - \sigma, t^* + \sigma)$ происходит переоснащение производства; если $\omega > 1$, то на интервале времени $(t^* - \sigma, t^* + \sigma)$ происходит переоснащение производства, сопровождаемое его некоторым сворачиванием.

Численное решение уравнения (9) с начальным условием (12) представляется в виде алгоритма, построенного в соответствии с методом Эйлера—Маруямы [24]:

$$Q_{s+1} = \theta(t_s) S(Q_s) \Delta t_s + \varepsilon_s \theta(t_s) Z(Q_s) \sqrt{\Delta t_s}. \quad (16)$$

Для каждой реализации алгоритма (16) на малом временном шаге $\Delta t_s > 0$ начиная с начального значения Q_0 генерируется случайное число ε_s и вычисляется последующее значение Q_{s+1} . В результате применения этого алгоритма образуются последовательности $\{t_s\}$ и $\{Q_s\}$, которые на координатной плоскости образуют случайную систему точек $\{t_s, Q_s\}$ и соответствующую

ей случайную траекторию. Очевидно, что всякий раз при повторении алгоритма (16) образуется новая случайная траектория, поскольку каждый раз случайная величина ε генерирует новые случайные значения.

При численной реализации алгоритма (16) временной промежуток $t \in [0, 40]$ был разбит на $n = 200$ одинаковых частей с постоянной величиной шага $\Delta t_s = \Delta t = 0.2$. Число реализаций случайного процесса динамики предприятия было принято $m = 200$.

Следует отметить, что в начальной точке $\{t = 0, Q = Q_0\}$ и в точках $\{t \approx 40, Q \approx Q_\infty\}$ стохастический процесс становится почти детерминированным, что является вполне ожидаемым и определяется видом функции коэффициента волатильности (11).

Вид этой функции $Z(Q)$ не позволяет найти точное решение для математического ожидания функции $Q(t)$ с помощью формулы Ито.

Статистическое осреднение стохастического уравнения (9)

$$d\langle Q \rangle = \theta(t) \langle S(Q) \rangle \cdot dt = \theta(t) \langle -A Q^u + B P Q^a \rangle \cdot dt \quad (17)$$

приводит к уравнению, содержащему статистические моменты:

$$\frac{d\langle Q \rangle}{dt} = \theta(t) \left(-A \langle Q^u \rangle + B P \langle Q^a \rangle \right). \quad (18)$$

Процесс последовательного вычисления статистических моментов вида $\langle Q^h(t) \rangle$ приводит к появлению моментов более высоких порядков, образующих бесконечную цепочку статистических уравнений, которую можно обобщать, сделав определенные допущения.

В качестве такого допущения предположим здесь, что флуктуации величины $Q(t)$ относительно ее среднего значения $\langle Q(t) \rangle$ пропорциональны случайной величине $\varepsilon(t)$:

$$Q - \langle Q \rangle = \xi \cdot \varepsilon. \quad (19)$$

Здесь $\xi = \rho \left(\langle Q \rangle - Q_0 \right) \left(1 - \frac{\langle Q \rangle}{Q_\infty} \right)$ — коэффициент пропорциональности.

Тогда выражение для величины Q^h , с учетом формулы (19) принимает вид

$$Q^h = \left(\langle Q \rangle + \xi \cdot \varepsilon \right)^h = \langle Q \rangle^h \left(1 + \frac{\xi}{\langle Q \rangle} \cdot \varepsilon \right)^h. \quad (20)$$

Ограничиваясь в формуле (20) малыми флуктуациями $\left| \frac{\xi}{\langle Q \rangle} \cdot \varepsilon \right| < 1$, рассмотрим три слагаемых сходящегося биномиального ряда:

$$Q^h = \langle Q \rangle^h \left(1 + h \frac{\xi}{\langle Q \rangle} \cdot \varepsilon + \frac{h(h-1)}{2} \frac{\xi^2}{\langle Q \rangle^2} \cdot \varepsilon^2 + \dots \right). \quad (21)$$

Вычисляя по формуле (21) средние величины

$$\langle Q^u \rangle \approx \langle Q \rangle^u \left(1 + \frac{u(u-1)}{2} \frac{\xi^2}{\langle Q \rangle^2} \right), \quad \langle Q^a \rangle \approx \langle Q \rangle^a \left(1 + \frac{a(a-1)}{2} \frac{\xi^2}{\langle Q \rangle^2} \right)$$

и подставляя их в уравнения (17), (18), находим дифференциальное уравнение для математического ожидания $\langle Q(t) \rangle$ функции производственного фактора $Q(t)$:

$$\frac{d\langle Q \rangle}{dt} = -A\theta \langle Q \rangle^u \left(1 + \frac{u(u-1)}{2} \frac{\xi^2}{\langle Q \rangle^2} \right) + BP\theta \langle Q \rangle^a \left(1 + \frac{a(a-1)}{2} \frac{\xi^2}{\langle Q \rangle^2} \right). \quad (22)$$

Начальное условие для уравнения (22) записывается в виде

$$\langle Q(0) \rangle = Q_0. \quad (23)$$

Сравнение результатов численного решения задачи Коши (22), (23) с численными значениями статистического среднего, вычисленного по всем двумстам реализациям алгоритма (16), показывает их почти полное совпадение.

На рис. 1 представлены численные реализации решений алгоритма (16) в виде семейства стохастических траекторий и кривая математического ожидания, построенная в соответствии с численным решением задачи Коши (22), (23), для случая стабильной работы предприятия, при котором функция (15) тождественно равна единице ($\theta(t) \equiv 1$), а размер отклонения равен нулю ($\omega = 0$). Для наглядности на рис. 1 показаны только пять стохастических кривых из двухсот.

Значение величины $Q_\infty = 34.551$ вычислено по формуле (14) в соответствии с приведенными расчетными значениями параметров.

На рис. 2 представлены численные реализации решений алгоритма (16) в виде семейства стохастических траекторий и кривая математического ожидания, построенная в соответствии с численным решением задачи Коши (22), (23), для случая переоснащения процесса производства на временном интервале $(t^* - \sigma, t^* + \sigma)$ с центром в точке $t^* = 15$ и радиусом интервала $\sigma = 5$. Размер отклонения функции (15) в этом случае принимается $\omega = 1$.

На рис. 3 представлены численные реализации решений алгоритма (16) в виде семейства стохастических траекторий и кривая математического ожидания, построенная в соответствии с численным решением задачи Коши (22), (23), для случая переоснащения процесса производства на временном интервале $(t^* - \sigma, t^* + \sigma)$ с центром в точке $t^* = 15$ и радиусом интервала $\sigma = 5$, сопровождаемого частичным сворачиванием производства. Размер отклонения функции (15) в этом случае принимается $\omega = 1.5$.

В случае если волатильность ρ обращается в нуль и процесс становится детерминированным, полученные результаты совпадают с результатами работы [23].

Применим построенную стохастическую модель для расчета показателей развития ПАО «Челябинский трубопрокатный завод». Статистические данные по выпуску продукции этим предприятием приведены в табл. 1 [25]. Здесь переменная времени t изменяется на отрезке $[0, 10]$, а ее целые значения соответствуют годам от 2008 до 2017.

Производственная функция (1), аппроксимирующая данные табл. 1, принимает вид

$$V = 0.914 \cdot Q^{0.9843}. \quad (24)$$

На рис. 4 приведен график функции выпуска предприятия, построенный по формуле (24).

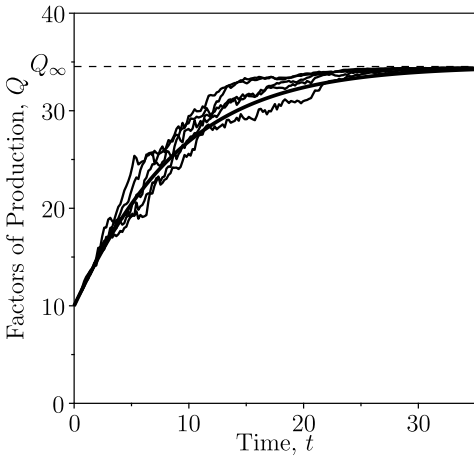


Рис. 1. Семейство стохастических траекторий, построенных в соответствии с численными реализациями алгоритма (16), и кривая математического ожидания $\langle Q(t) \rangle$, построенная по результатам численного решения задачи Коши (22), (23). Расчетные значения: $n = 200$, $\Delta t = 0.2$, $m = 200$, $Q_0 = 10$, $P = 10$, $a = 0.35$, $u = 1$, $A = 0.2$, $B = 0.2$, $\rho = 0.25$, $\omega = 0$

[Figure 1. The family of stochastic trajectories constructed in accordance with the numerical implementations of the algorithm (16) and the expectation curve $\langle Q(t) \rangle$ constructed from the results of a numerical solution of the Cauchy problem (22), (23). Parameters for calculating: $n = 200$, $\Delta t = 0.2$, $m = 200$, $Q_0 = 10$, $P = 10$, $a = 0.35$, $u = 1$, $A = 0.2$, $B = 0.2$, $\rho = 0.25$, $\omega = 0$]

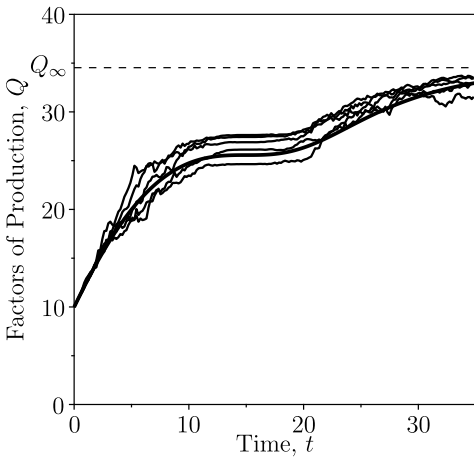


Рис. 2. Семейство стохастических траекторий, построенных в соответствии с численными реализациями алгоритма (16), и кривая математического ожидания $\langle Q(t) \rangle$, построенная по результатам численного решения задачи Коши (22), (23). Расчетные значения: $n = 200$, $\Delta t = 0.2$, $m = 200$, $Q_0 = 10$, $P = 10$, $a = 0.35$, $u = 1$, $A = 0.2$, $B = 0.2$, $\rho = 0.25$, $\omega = 1$, $t^* = 15$, $\sigma = 5$

[Figure 2. The family of stochastic trajectories constructed in accordance with the numerical implementations of the algorithm (16) and the expectation curve $\langle Q(t) \rangle$ constructed from the results of a numerical solution of the Cauchy problem (22), (23). Parameters for calculating: $n = 200$, $\Delta t = 0.2$, $m = 200$, $Q_0 = 10$, $P = 10$, $a = 0.35$, $u = 1$, $A = 0.2$, $B = 0.2$, $\rho = 0.25$, $\omega = 1$, $t^* = 15$, $\sigma = 5$]

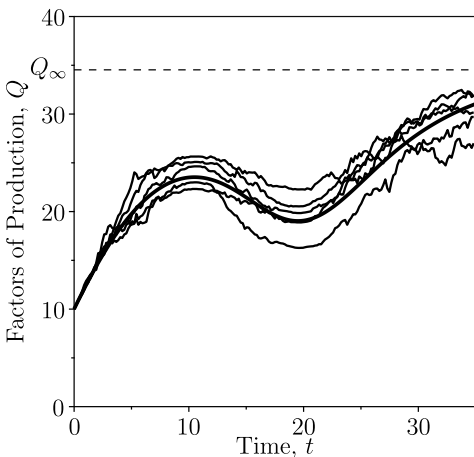


Рис. 3. Семейство стохастических траекторий, построенных в соответствии с численными реализациями алгоритма (16), и кривая математического ожидания $\langle Q(t) \rangle$, построенная по результатам численного решения задачи Коши (22), (23). Расчетные значения: $n = 200$, $\Delta t = 0.2$, $m = 200$, $Q_0 = 10$, $P = 10$, $a = 0.35$, $u = 1$, $A = 0.2$, $B = 0.2$, $\rho = 0.25$, $\omega = 1.5$, $t^* = 15$, $\sigma = 5$

[Figure 3. The family of stochastic trajectories constructed in accordance with the numerical implementations of the algorithm (16) and the expectation curve $\langle Q(t) \rangle$ constructed from the results of a numerical solution of the Cauchy problem (22), (23). Parameters for calculating: $n = 200$, $\Delta t = 0.2$, $m = 200$, $Q_0 = 10$, $P = 10$, $a = 0.35$, $u = 1$, $A = 0.2$, $B = 0.2$, $\rho = 0.25$, $\omega = 1.5$, $t^* = 15$, $\sigma = 5$]

Таблица 1

Статистические данные по выпуску продукции ПАО «Челябинский трубопрокатный завод» [25] [Factors of Production and Total Production for PJSC Chelyabinsk Tube Rolling Plant [25]]

| Years | Time, t | Factors of Production, Q (mln rubles) | Total Production, V (mln rubles) |
|-------|-----------|---|------------------------------------|
| 2008 | 0 | 72.698296 | 63.721902 |
| 2009 | 1 | 77.103839 | 66.246199 |
| 2010 | 2 | 87.578960 | 72.564189 |
| 2011 | 3 | 92.435837 | 76.645429 |
| 2012 | 4 | 97.656699 | 84.048139 |
| 2013 | 5 | 100.399083 | 82.721179 |
| 2014 | 6 | 115.118761 | 97.184656 |
| 2015 | 7 | 123.270175 | 112.285286 |
| 2016 | 8 | 128.353653 | 109.806604 |
| 2017 | 9 | 142.265642 | 116.090570 |

На рис. 5 представлено сравнение графиков пяти стохастических кривых численной реализации случайного процесса, описываемого алгоритмом (16), и графика математического ожидания $\langle Q(t) \rangle$ функции производственного фактора $Q(t)$, построенного в результате численного решения задачи Коши (22), (23) с расчетными коэффициентами, с соответствующими статистическими данными для ПАО «Челябинский трубопрокатный завод».

2. Математическая модель развития предприятия за счет внутренних и внешних инвестиций. Обобщим теперь рассмотренные выше уравнения стохастической модели развития предприятия на тот случай, когда помимо внутренних инвестиций в структуру производства привлекаются внешние инвестиции.

Составим уравнения баланса для объема фактора производства $Q(t)$ такого предприятия. Очевидно, что приращение объема фактора производства $\Delta Q(t)$ за некоторый малый промежуток времени Δt будет образовано суммой четырех слагаемых:

$$\Delta Q = \Delta Q^A + \Delta Q^I + \Delta Q^G + \Delta Q^W. \quad (25)$$

Здесь приращение амортизации фактора производства ΔQ^A , приращение частичного восстановления фактора производства за счет внутренних инвестиций ΔQ^I , случайные колебания приращения объема фактора производства, обусловленные волатильностью процесса выпуска продукции ΔQ^W , по-прежнему задаются формулами (3), (6) и (7).

Приращение внешних инвестиций за промежуток времени определим соотношением

$$\Delta Q^G(t) = \theta(t) G(t) \cdot \Delta t. \quad (26)$$

Здесь $G(t)$ — объем внешних инвестиций.

Моделирование функции объема внешних инвестиций существенно зависит от условий инвестирования. Если уровень объема внешних инвестиций определяется уровнем объема производственного фактора, то функция $G(t)$ и функция фактора производства $Q(t)$ будут связаны между собой некоторым соотношением. Ограничимся здесь степенной зависимостью функций

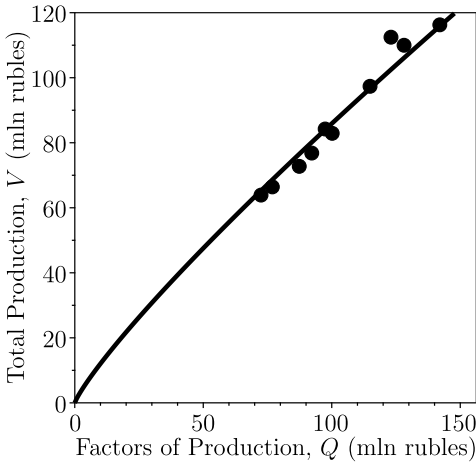


Рис. 4. График функции выпуска (24) и статистические данные для ПАО «Челябинский трубопрокатный завод». Расчетные значения: $P = 0.914$, $a = 0.9843$; точки соответствуют данным табл. 1

[Figure 4. The production function (24) and statistical data for PJSC Chelyabinsk Tube Rolling Plant. Calculated values: $P = 0.914$, $a = 0.9843$; the points correspond to the data in Table 1]

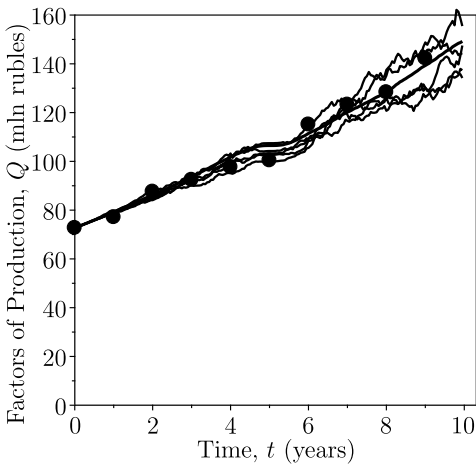


Рис. 5. Семейство стохастических траекторий, построенных в соответствии с численными реализациями алгоритма (16), статистические данные (точки) и кривая математического ожидания $\langle Q(t) \rangle$, построенные по результатам численного решения задачи Коши (22), (23) для ПАО «Челябинский трубопрокатный завод». Расчетные значения: $n = 200$, $\Delta t = 0.05$, $m = 200$, $Q_0 = 72.698296$, $P = 0.914$, $a = 0.9843$, $A = 0.12$, $u = 0.94$, $B = 0.2$, $\rho = 0.1$, $\omega = 1$, $t^* = 5$, $\sigma = 0.35$; точки соответствуют данным табл. 1

[Figure 5. The family of stochastic trajectories constructed in accordance with the numerical implementations of the algorithm (16), statistical data, and the expectation curve $\langle Q(t) \rangle$ constructed from the results of a numerical solution of the Cauchy problem (22), (23) for PJSC Chelyabinsk Tube Rolling Plant. Parameters for calculating: $n = 200$, $\Delta t = 0.05$, $m = 200$, $Q_0 = 72.698296$, $P = 0.914$, $a = 0.9843$, $A = 0.12$, $u = 0.94$, $B = 0.2$, $\rho = 0.1$, $\omega = 1$, $t^* = 5$, $\sigma = 0.35$; the points correspond to the data in Table 1]

$G(t)$ и $Q(t)$ [27]:

$$G(t) = C Q^v(t). \tag{27}$$

Константа C в формуле (27) представляет собой стоимость привлеченных внешних инвестиций на единичный объем ресурса $Q(t)$, а показатель степени v описывает интенсивность внедрения внешних инвестиций в предприятие ($0 < v \leq 1$).

Таким образом, приращение объема внешних инвестиций (27) примет вид

$$\Delta Q^G(t) = C \theta(t) Q^v(t) \cdot \Delta t. \tag{28}$$

С помощью соотношения (28) уравнение баланса (25) сводится к стохастическому дифференциальному уравнению (9), в котором коэффициент сноса

определяется выражением

$$S(Q) = -A Q^u + B P Q^a + C Q^v, \quad (29)$$

коэффициент волатильности по-прежнему определяется формулой (11), а начальное условие задается соотношением (12).

Структура уравнения (9) с коэффициентами (29) и (11) показывает, что предприятие будет стабильно развиваться до тех пор, пока объем внутренних и внешних инвестиций $I_Q = B P Q^a + C Q^v$ будет превосходить амортизационные отчисления $A_Q = A Q^u$.

Случайный процесс вблизи значения Q_∞ становится почти детерминированным, поэтому предельное значение Q_∞ объема производственного фактора $Q(t)$ является решением уравнения

$$I_Q - A_Q = -A Q^u + B P Q^a + C Q^v = 0. \quad (30)$$

Очевидно, что уравнение (30) в отличие от уравнения (13) может быть решено только численно. Численное решение уравнения (9) с коэффициентом сноса (29), коэффициентом волатильности (11) и начальным условием (12) выполняется методом Эйлера–Маруямы в соответствии с алгоритмом (16).

Статистическое осреднение стохастического уравнения (9) с коэффициентами (29) и (11) приводит к уравнению, содержащему статистические моменты $\langle Q^u(t) \rangle$, $\langle Q^a(t) \rangle$ и $\langle Q^v(t) \rangle$:

$$\frac{d\langle Q \rangle}{dt} = \theta(t) (-A \langle Q^u \rangle + B P \langle Q^a \rangle + C \langle Q^v \rangle). \quad (31)$$

Вычисляя эти моменты по формуле (21), находим

$$\begin{aligned} \langle Q^u \rangle &\approx \langle Q \rangle^u \left(1 + \frac{u(u-1)}{2} \frac{\xi^2}{\langle Q \rangle^2} \right), \\ \langle Q^a \rangle &\approx \langle Q \rangle^a \left(1 + \frac{a(a-1)}{2} \frac{\xi^2}{\langle Q \rangle^2} \right), \\ \langle Q^v \rangle &\approx \langle Q \rangle^v \left(1 + \frac{v(v-1)}{2} \frac{\xi^2}{\langle Q \rangle^2} \right). \end{aligned}$$

Подставляя эти статистические моменты в уравнение (31), находим дифференциальное уравнение для математического ожидания $\langle Q(t) \rangle$ функции производственного фактора $Q(t)$:

$$\begin{aligned} \frac{d\langle Q \rangle}{dt} &= -A \theta \langle Q \rangle^u \left(1 + \frac{u(u-1)}{2} \frac{\xi^2}{\langle Q \rangle^2} \right) + \\ &+ B P \theta \langle Q \rangle^a \left(1 + \frac{a(a-1)}{2} \frac{\xi^2}{\langle Q \rangle^2} \right) + \\ &+ C \theta \langle Q \rangle^v \left(1 + \frac{v(v-1)}{2} \frac{\xi^2}{\langle Q \rangle^2} \right). \quad (32) \end{aligned}$$

Начальным условием для уравнения (32) по-прежнему является условие (23).

Если уровень объема внешних инвестиций никак не связан с уровнем объема производственного фактора, то функция $G(t)$ задается непосредственно исходя из наблюдаемых статистических данных.

В этом случае уравнение баланса (26) сводится к стохастическому дифференциальному уравнению (9), в котором коэффициент сноса определяется выражением

$$S(Q(t), t) = -A Q^u(t) + B P Q^a(t) + G(t), \quad (33)$$

коэффициент волатильности по-прежнему вычисляется по формуле (11), а начальное условие задается соотношением (12).

Из уравнения (9) с коэффициентами (33) и (11) следует, что предприятие будет развиваться до тех пор, пока объем внутренних и внешних инвестиций $I_Q = B P Q^a + G(t)$ будет превосходить амортизационные отчисления $A_Q = A Q^u$.

Вблизи значения Q_∞ развитие предприятия становится почти детерминированным, поэтому предельное значение Q_∞ объема производственного фактора $Q(t)$ является решением уравнения

$$I_Q - A_Q = -A Q^u + B P Q^a + G_\infty = 0. \quad (34)$$

В уравнении (34) величина $G_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} G(t)$ представляет собой предельное значение внешних инвестиций.

Численное решение уравнения (9) с коэффициентом сноса (33), коэффициентом волатильности (11) и начальным условием (12) реализуется методом Эйлера–Маруамы в соответствии с алгоритмом (16).

Статистическое осреднение стохастического уравнения (9) с коэффициентами (33) и (11) приводит к уравнению

$$\frac{d\langle Q \rangle}{dt} = \theta(t) (-A \langle Q^u \rangle + B P \langle Q^a \rangle + G). \quad (35)$$

Подстановка статистических моментов $\langle Q(t)^u \rangle$ и $\langle Q(t)^a \rangle$ в уравнение (35) приводит к дифференциальному уравнению для математического ожидания $\langle Q(t) \rangle$ функции производственного фактора $Q(t)$:

$$\begin{aligned} \frac{d\langle Q \rangle}{dt} = & -A \theta \langle Q \rangle^u \left(1 + \frac{u(u-1)}{2} \frac{\xi^2}{\langle Q \rangle^2} \right) + \\ & + B P \theta \langle Q \rangle^a \left(1 + \frac{a(a-1)}{2} \frac{\xi^2}{\langle Q \rangle^2} \right) + \theta G. \end{aligned} \quad (36)$$

Начальным условием для уравнения (36) по-прежнему является условие (23).

Рассмотрим вариант развития предприятия, при котором наибольший размер внешних инвестиций вкладывается в производство в начальный момент времени, а затем уровень этих внешних инвестиций постепенно снижается до определенного предела.

Пусть снижение объема внешних инвестиций $\Delta G(t)$ за время Δt будет пропорционально отклонению функции $G(t)$ от минимального значения этих инвестиций G_{\min} :

$$\Delta G(t) = -\lambda(G(t) - G_{\min}) \cdot \Delta t.$$

Переход к пределу при условии $\Delta t \rightarrow 0$ приводит к дифференциальному уравнению для функции $G(t)$:

$$\frac{dG(t)}{dt} = -\lambda(G(t) - G_{\min}),$$

решение которого с начальным условием $G(0) = G_{\max}$ дает объемы внешних вложений в предприятие в виде

$$G(t) = G_{\min} + (G_{\max} - G_{\min}) \exp(-\lambda t). \quad (37)$$

Здесь константа G_{\max} представляет собой максимальную стоимость привлеченных внешних инвестиций, λ — параметр, характеризующий скорость снижения объемов внешних инвестиций.

Если для всех значений аргумента t функция внешних инвестиций $G(t) = G_{\max}$, то предельное значение объема производственного фактора Q_{∞}^{\max} находится из уравнения

$$I_Q - A_Q = -A Q^u + B P Q^a + G_{\max} = 0. \quad (38)$$

Если для всех значений аргумента t функция внешних инвестиций $G(t) = G_{\min}$, то предельное значение объема производственного фактора Q_{∞}^{\min} находится из уравнения

$$I_Q - A_Q = -A Q^u + B P Q^a + G_{\min} = 0. \quad (39)$$

В уравнениях (38) и (39) предполагается, что $A \neq B P$. Такое предположение экономически вполне оправдано, поскольку норма накопления инвестиций и норма амортизации всегда близки друг другу и лежат в пределах $0.1 \div 0.2$.

На рис. 6 представлены численные реализации решений алгоритма (16) с коэффициентом сноса (33) в виде семейства стохастических траекторий и трех кривых для математических ожиданий $\langle Q(t) \rangle$, полученных в результате численных решений задачи Коши (36), (23), для случая стабильной работы рассматриваемого предприятия, при котором функция $\theta(t) \equiv 1$, размер отклонения $\omega = 0$.

Верхняя кривая соответствует максимальным инвестициям $G(t) \equiv G_{\max}$, нижняя кривая соответствует минимальным инвестициям $G(t) \equiv G_{\min}$, средняя кривая соответствует убывающим инвестициям $G(t)$, вычисленным по формуле (37). Значения величин $Q_{\max}^{\infty} = 69.0189$ и $Q_{\min}^{\infty} = 38.3290$ являются численными решениями уравнений (38) и (39) соответственно.

Рассмотрим еще один вариант развития предприятия, при котором внешние инвестиции вкладываются в производство на небольшом временном интервале. При этом эти инвестиции сначала увеличиваются до своего максимального значения, а затем уменьшаются.

Пример таких объемов внешних вложений в предприятие можно описать формулой

$$G(t) = G_{\max} \exp\left(-\frac{(t - t_G)^2}{2\sigma_G^2}\right). \quad (40)$$

Здесь G_{\max} — максимальная стоимость привлеченных внешних инвестиций; t_G — момент времени, отвечающий максимальному значению внешних инвестиций; σ_G — радиус временного интервала значимого вложения внешних инвестиций.

На рис. 7 представлены численные реализации решений алгоритма (16) с коэффициентом сноса (33) в виде семейства пяти стохастических траекторий и трех кривых для математических ожиданий $\langle Q(t) \rangle$, полученных в результате численных решений задачи Коши (36), (23), для случая стабильной работы рассматриваемого предприятия, при котором функция $\theta(t) \equiv 1$, размер отклонения $\omega = 0$.

Верхняя кривая соответствует максимальным инвестициям $G(t) \equiv G_{\max}$, нижняя кривая соответствует минимальным инвестициям $G(t) \equiv G_{\min} = 0$, средняя кривая соответствует убывающим инвестициям $G(t)$, вычисленным по формуле (37). Значения величин $Q_{\max}^{\infty} = 55.8837$ и $Q_{\min}^{\infty} = 34.5511$ являются численными решениями уравнений (38) и (39) соответственно.

Применим построенную модель для расчета показателей развития ООО «ЛАДА Ижевский автомобильный завод». Статистические данные по выпуску продукции этим предприятием приведены в табл. 2 [26].

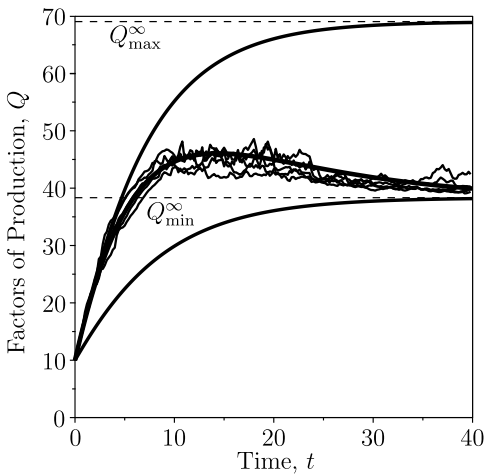


Рис. 6. Семейство стохастических траекторий, построенных в соответствии с численной реализацией алгоритма (16), и кривые математических ожиданий $\langle Q(t) \rangle$, построенные по результатам численного решения задачи Коши (32), (23). Расчетные значения: $n = 200$, $\Delta t = 0.2$, $m = 200$, $Q_0 = 10$, $P = 10$, $a = 0.35$, $u = 1$, $A = 0.2$, $B = 0.2$, $\rho = 0.25$, $\omega = 0$

[Figure 6. The family of stochastic trajectories constructed in accordance with the numerical implementation of the (16) algorithm and $\langle Q(t) \rangle$ mathematical expectation curves constructed from the results of a numerical solution of the Cauchy problem (32), (23). Parameters for calculating: $n = 200$, $\Delta t = 0.2$, $m = 200$, $Q_0 = 10$, $P = 10$, $a = 0.35$, $u = 1$, $A = 0.2$, $B = 0.2$, $\rho = 0.25$, $\omega = 0$]

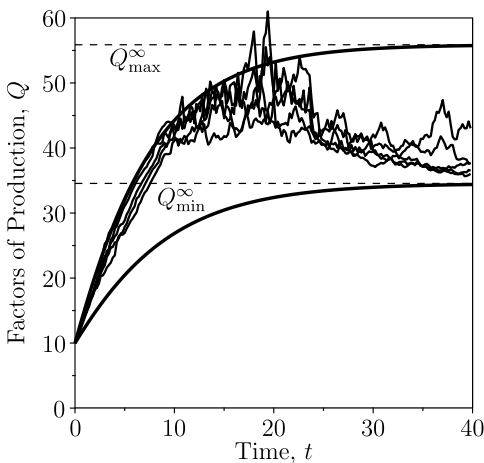


Рис. 7. Семейство стохастических траекторий, построенных в соответствии с численной реализацией алгоритма (16), и кривые математических ожиданий $\langle Q(t) \rangle$, построенные по результатам численных решений задачи Коши (32), (23). Расчетные значения: $n = 200$, $\Delta t = 0.2$, $m = 200$, $Q_0 = 10$, $P = 10$, $a = 0.35$, $u = 1$, $A = 0.2$, $B = 0.2$, $\rho = 0.25$, $\omega = 0$

[Figure 7. The family of stochastic trajectories constructed in accordance with the numerical implementation of the (16) algorithm and $\langle Q(t) \rangle$ mathematical expectation curves constructed from the results of numerical solutions of the Cauchy problem (32), (23). Parameters for calculating: $n = 200$, $Q_0 = 10$, $P = 10$, $a = 0.35$, $u = 1$, $A = 0.2$, $B = 0.2$, $\rho = 0.25$, $\omega = 0$]

Таблица 2

Статистические данные по выпуску продукции ООО «ЛАДА Ижевский автомобильный завод» [26] [Factors of Production and Total Production for LADA Izhevsk Automobile Plant LLC [26]]

| Years | Time, t | Factors of Production, Q (mln rubles) | Total Production, V (mln rubles) |
|-------|-----------|--|---------------------------------------|
| 2008 | 0 | 13.217574 | 8.456392 |
| 2009 | 1 | 14.207309 | 8.931730 |
| 2010 | 2 | 14.955581 | 9.372198 |
| 2011 | 3 | 17.083839 | 10.683700 |
| 2012 | 4 | 17.801323 | 11.779749 |
| 2013 | 5 | 21.029907 | 13.996108 |
| 2014 | 6 | 40.349890 | 22.646566 |
| 2015 | 7 | 47.985065 | 29.901182 |
| 2016 | 8 | 59.579269 | 45.173967 |
| 2017 | 9 | 72.758050 | 52.328860 |

Переменная времени t по-прежнему изменяется на отрезке $[0, 10]$, а ее целые значения соответствуют годам от 2008 до 2017.

Анализ статистических данных табл. 2 показывает, что до 2013 года предприятие развивалось монотонно за счет внутренних инвестиций, а после 2013 года на развитие предприятия стали существенно влиять внешние инвестиции.

Данные табл. 2 до 2013 года могут быть хорошо аппроксимированы теоретической кривой

$$Q(t) = 13.217574 + 0.26 t^{0.21}. \quad (41)$$

На рис. 8 представлено сравнение графиков функции объема фактора производства $Q(t)$, построенного по данным табл. 2 (сплошная ломаная линия), и функции (41) (штриховая линия).

Сравнение этих графиков показывает, что на развитие предприятия после 2013 года существенно влияют внешние инвестиции. Статистический график функции этих инвестиций представляет собой ломаную линию, полученную в результате разности графиков функций, изображенных на рис. 8. Такой график функции объема внешних инвестиций может быть достаточно точно аппроксимирован с помощью функции (40).

На рис. 9 показано сравнение графика функции объема внешних инвестиций, построенного по статистическим данным табл. 2, и графика функции, построенного по формуле (40).

Построенная по данным табл. 2 производственная функция (1) записывается в виде

$$V = 0.75 \cdot Q^{0.951}. \quad (42)$$

На рис. 10 представлено сравнение графиков пяти стохастических кривых численной реализации случайного процесса, описываемого алгоритмом (16), и графика математического ожидания $\langle Q(t) \rangle$ функции производственного фактора $Q(t)$, построенного в результате численного решения задачи Коши (36), (23) с производственной функцией (42) и расчетными коэффициентами, соответствующими статистическим данным работы ООО «ЛАДА Ижевский автомобильный завод».

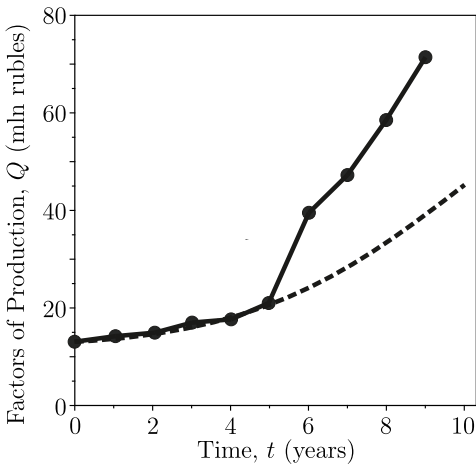


Рис. 8. Объем факторов производства $Q(t)$ для ООО «ЛАДА Ижевский автомобильный завод» по данным табл. 2 (сплошная ломаная линия) и функция (41) (штриховая линия)

[Figure 8. The volume of factors of production $Q(t)$ for LADA Izhevsk Automobile Plant LLC by data of Table 2 (solid broken line) and the function (41) (dashed line)]

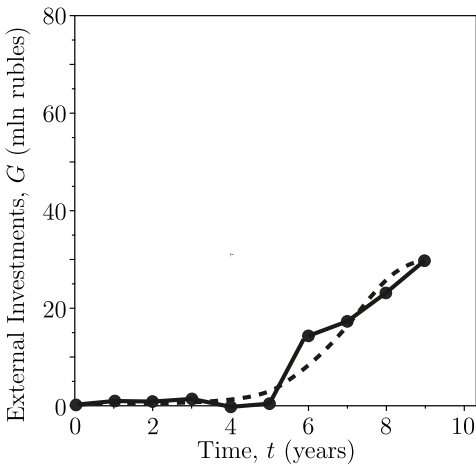


Рис. 9. Объем внешних инвестиций $G(t)$ для ООО «ЛАДА Ижевский автомобильный завод» на основании данных табл. 2 (сплошная ломаная линия) и функция (40) (штриховая линия). Расчетные значения: $G_{\max} = 33.25$, $t_G = 9$, $\sigma_G = 1.85$

[Figure 9. The volume of external investments $G(t)$ for LADA Izhevsk Automobile Plant LLC based on data from Table 2 (solid broken line) and the function (40) (dashed line). Parameters for calculating: $G_{\max} = 33.25$, $t_G = 9$, $\sigma_G = 1.85$]

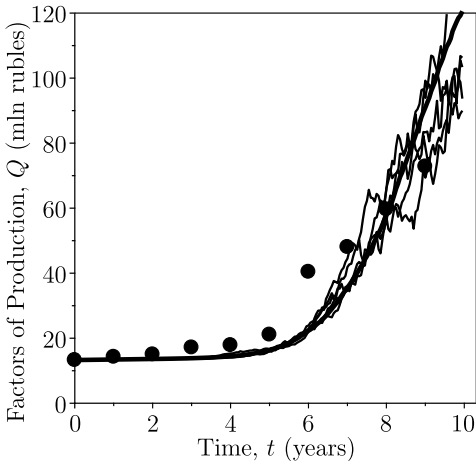


Рис. 10. Семейство стохастических траекторий, построенных в соответствии с численными реализациями алгоритма (16), статистические данные (точки) и кривая математического ожидания $\langle Q(t) \rangle$, построенная по результатам численного решения задачи Коши (36), (23) для ООО «ЛАДА Ижевский автомобильный завод». Расчетные значения: $n = 200$, $\Delta t = 0.05$, $m = 200$, $Q_0 = 13.217574$, $P = 0.75$, $a = 0.95$, $A = 0.12$, $u = 1.0$, $B = 0.2$, $\rho = 0.25$, $\omega = 0$; точки соответствуют данным табл. 2

[Figure 10. The family of stochastic trajectories constructed in accordance with the numerical implementations of the algorithm (16), statistical data, and the expectation curve $\langle Q(t) \rangle$ constructed from the results of a numerical solution of the Cauchy problem (36), (23) for LADA Izhevsk Automobile Plant LLC. Parameters for calculating: $n = 200$, $\Delta t = 0.05$, $m = 200$, $Q_0 = 13.217574$, $P = 0.75$, $a = 0.95$, $A = 0.12$, $u = 1.0$, $B = 0.2$, $\rho = 0.25$, $\omega = 0$; the points correspond to the data in Table 2]

Заключение. Разработаны новые стохастические модели динамического развития однофакторных производственных предприятий за счет внутренних и внешних инвестиций.

Построены стохастические дифференциальные уравнения баланса для таких предприятий, описывающие случайные процессы увеличения выпуска продукции и роста факторов производства.

Исследовано взаимодействие пропорциональных, прогрессивных и дигрессивных амортизационных отчислений с внутренними и внешними инвестициями.

Сформулированы условия равновесного состояния работы предприятия и получены уравнения для определения предельных значений факторов производства, при достижении которых дальнейший рост выпуска продукции предприятием прекращается.

Рассмотрены три варианта развития предприятий. В первом случае предприятие развивается стабильно и поступательно. Во втором случае предприятие временно приостанавливает рост выпуска продукции, переоснащая производство и заменяя технологическое оборудование. В третьем случае предприятие вынуждено временно сворачивать производство при смене технологического уклада.

Представлен алгоритм построения стохастических траекторий для случайной функции фактора производства на основе численного решения стохастических дифференциальных уравнений развития предприятий.

Разработан вариант метода статистического осреднения стохастических дифференциальных уравнений баланса предприятий, с помощью которого установлены дифференциальные уравнения для определения математических ожиданий случайных функций факторов производства.

Показано, что численные решения этих уравнений и статистическое среднее значение функции фактора производства, вычисленное по двумстам реализациям стохастических траекторий, дают почти одинаковые результаты.

Численный анализ разработанных моделей показал хорошее соответствие известным статистическим данным работы производственного предприятия.

Конкурирующие интересы. Конкурирующих интересов не имеем.

Авторский вклад и ответственность. Все авторы принимали участие в разработке концепции статьи и в написании рукописи. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Исследование выполнялось без финансирования.

Библиографический список

1. Колемаев В. А. *Математическая экономика*. М., 2005. 399 с.
2. Артемьев С. С., Якунин М. А. *Математическое и статистическое моделирование в финансах*. Новосибирск: ИВМиМГ СО РАН, 2008. 174 с.
3. Воронцовский А. В., Дикарев А. Ю. Прогнозирование макроэкономических показателей в режиме имитации на основе стохастических моделей экономического роста // *Финансы и бизнес*, 2013. № 2. С. 33–51.
4. Курзенев В. А., Лычагина Е. Б. Стохастическое моделирование динамики экономической системы // *Управленческое консультирование*, 2013. № 5. С. 78–83.
5. Андрианов Д. Л., Шульц Д. Н., Ощепков И. А. Динамические стохастические модели

- общего экономического равновесия // *Управление экономическими системами*, 2014. Т. 67, № 7, <http://www.uecs.ru/uecs67-672014/item/2998-2014-07-30-07-14-51>.
6. Андрианов Д. Л., Шульц Д. Н., Ощепков И. А. Динамическая стохастическая модель общего экономического равновесия России // *Вестник Нижегородского университета. Сер. Социальные науки*, 2015. № 2(38). С. 18–25.
 7. Андрианов Д. Л., Арбузов В. О., Ивлиев С. В., Максимов В. П., Симонов П. М. Динамические модели экономики: теория, приложения, программная реализация // *Вестник Пермского университета. Сер. Экономика*, 2015. № 4. С. 8–32.
 8. Itô K., McKean H. P. Jr. *Diffusion processes and their sample paths* / Classics in Mathematics. Berlin: Springer. xv+321 pp. doi: [10.1007/978-3-642-62025-6](https://doi.org/10.1007/978-3-642-62025-6).
 9. Allen E. *Modeling with Itô stochastic differential equations* / Mathematical Modelling: Theory and Applications. vol. 22. Netherlands: Springer, 2007. xii+230 pp. doi: [10.1007/978-1-4020-5953-7](https://doi.org/10.1007/978-1-4020-5953-7).
 10. Степанов С. С. *Стохастический мир*, 2009, <https://synset.com/pdf/ito.pdf>; дата обращения: 27.02.2020.
 11. Neisy A., Peymany M. Financial modeling by ordinary and stochastic differential equations // *World Applied Sciences Journal*, 2011. vol. 13, no. 11. pp. 2288–2295.
 12. Kallianpur G., Sundar P. *Stochastic analysis and diffusion processes* / Oxford Graduate Texts in Mathematics. vol. 24. Oxford: Oxford University Press, 2014. xiv+352 pp. doi: [10.1093/acprof:oso/9780199657063.001.0001](https://doi.org/10.1093/acprof:oso/9780199657063.001.0001).
 13. Bally V., Talay D. The law of the Euler scheme for stochastic differential equations: I. Convergence rate of the distribution function // *Probab. Th. Rel. Fields*, 1996. vol. 104, no. 1. pp. 43–60. doi: [10.1007/BF01303802](https://doi.org/10.1007/BF01303802).
 14. Bally V., Talay D. The law of the Euler scheme for stochastic differential equations: II. Convergence rate of the density // *Monte Carlo Methods and Applications*, 1996. vol. 2, no. 2. pp. 93–128. doi: [10.1515/mcma.1996.2.2.93](https://doi.org/10.1515/mcma.1996.2.2.93).
 15. Debarant K., Rößler A. Classification of stochastic Runge–Kutta methods for the weak approximation of stochastic differential equations // *Mathematics and Computers in Simulation*, 2008. vol. 77, no. 4. pp. 408–420, arXiv: [1303.4510](https://arxiv.org/abs/1303.4510) [math.NA]. doi: [10.1016/j.matcom.2007.04.016](https://doi.org/10.1016/j.matcom.2007.04.016).
 16. Soheili A. R., Namjoo M. Strong approximation of stochastic differential equations with Runge–Kutta methods // *World Journal of Modelling and Simulation*, 2008. vol. 4, no. 2. pp. 83–93.
 17. Кузнецов Д. С. *Стохастические дифференциальные уравнения: теория и практика численного решения*. Санкт-Петербург: Политехн. ун-т, 2007. 800 с. doi: [10.18720/SPBPU/2/s17-229](https://doi.org/10.18720/SPBPU/2/s17-229).
 18. Konakov V., Menozzi S. Weak error for stable driven stochastic differential equations: Expansion of the densities // *J. Theor. Probab.*, 2011. vol. 24. pp. 454–478. doi: [10.1007/s10959-010-0291-x](https://doi.org/10.1007/s10959-010-0291-x).
 19. Konakov V., Menozzi S. Weak error for the Euler scheme approximation of diffusions with non-smooth coefficients // *Electron. J. Probab.*, 2017. vol. 22, 46. 47 pp., arXiv: [1604.00771](https://arxiv.org/abs/1604.00771) [math.PR]. doi: [10.1214/17-EJP53](https://doi.org/10.1214/17-EJP53).
 20. Hottovy S., Volpe G., Wehr J. Noise-Induced drift in stochastic differential equations with arbitrary friction and diffusion in the Smoluchowski–Kramers limit // *J. Stat. Phys.*, 2012. vol. 146, no. 4. pp. 762–773. doi: [10.1007/s10955-012-0418-9](https://doi.org/10.1007/s10955-012-0418-9).
 21. Frikha N. On the weak approximation of a skew diffusion by an Euler-type scheme // *Bernoulli*, 2018. vol. 24, no. 3. pp. 1653–1691. doi: [10.3150/16-BEJ909](https://doi.org/10.3150/16-BEJ909).
 22. Соловьев В. И. *Экономико-математическое моделирование рынка программного обеспечения*. М.: Вега-Инфо, 2009. 176 с.
 23. Ильина Е. А., Сараев А. Л., Сараев Л. А. К теории модернизации производственных предприятий, учитывающей запаздывание внутренних инвестиций // *Экономика и предпринимательство*, 2017. № 9–4(86). С. 1130–1134.

24. Кузнецова И. Ю. Численное решение стохастического дифференциального уравнения методом Эйлера–Маруямы // *Международный научно-исследовательский журнал*, 2013. № 11–1(18). С. 8–11.
25. *Бухгалтерская отчетность ПАО “Челябинский трубопрокатный завод” ИНН 7449006730 за 2017 год*, <https://e-ecolog.ru/buh/2017/7449006730>; дата обращения: 27.02.2020.
26. *Бухгалтерская отчетность ООО “ЛАДА Ижевский автомобильный завод” ИНН 1834051678 за 2017 год*, <https://e-ecolog.ru/buh/2017/1834051678>; дата обращения: 27.02.2020.
27. Сараев А. Л., Сараев Л. А. Показатели нелинейной динамики и предельное состояние производственного предприятия // *Экономика и предпринимательство*, 2018. № 11. С. 1237–1241.

MSC: 60H10

Stochastic calculation of curves dynamics of enterprise

*A. L. Saraev, L. A. Saraev*Samara National Research University,
34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.

Abstract


The article proposes mathematical models of the stochastic dynamics of the single-factor manufacturing enterprises development through internal and external investments. Balance equations for such enterprises are formulated, describing random processes of continuous increase in output and growth of production factors. The interaction of proportional, progressive and digressive depreciation with internal and external investments is investigated. Equations are obtained to determine the equilibrium state of the enterprise and the limiting values of the factors of production are calculated. The cases of the stable progressive development of the enterprise, the suspension of its work during the re-equipment of production and the temporary crisis of production shutdown during equipment replacement are considered.

The algorithm for the numerical solution of stochastic differential equations of enterprise development is constructed in accordance with the Euler–Maruyama method. For each implementation of this algorithm, the corresponding stochastic trajectories are constructed for the random function of the production factor. A variant of the method for calculating the expectation of a random function of a factor of production is developed and the corresponding differential equation is obtained for it. It is shown that the numerical solution of this equation and the average value of the function of the production factor calculated from two hundred realizations of stochastic trajectories give almost identical results. Numerical analysis of the developed models showed good compliance with the known statistical data of the production enterprise.

Keywords: production factors, production function, stochastic equations, Wiener process, drift coefficient, volatility factor, Euler–Maruyama method.

Received: 7th May, 2019 / Revised: 27th February, 2020 /Accepted: 16th March, 2020 / First online: 3rd May, 2020

Research Article

 The content is published under the terms of the [Creative Commons Attribution 4.0 International License](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)


Please cite this article in press as:

Saraev A. L., Saraev L. A. Stochastic calculation of curves dynamics of enterprise, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2020, vol. 24, no. 2, pp. 343–364. doi: [10.14498/vsgtu1700](https://doi.org/10.14498/vsgtu1700) (In Russian).

Authors' Details:

Alexander L. Saraev  <https://orcid.org/0000-0002-9223-6330>

Cand. Econom. Sci., Associate Professor; Associate Professor; Department of Mathematics and Business Informatics; e-mail: alex.saraev@gmail.com

Leonid A. Saraev  <https://orcid.org/0000-0003-3625-5921>

Dr. Phys. & Math. Sci., Professor; Head of Department; Department of Mathematics and Business Informatics; e-mail: saraev_leo@mail.ru

Competing interests. We have no competing interests.

Authors' contributions and responsibilities. Each author has participated in the article concept development and in the manuscript writing. The authors are absolutely responsible for submitting the final manuscript in print. Each author has approved the final version of manuscript.

Funding. The research has not had any funding.

References

1. Kolemavev V. A. *Matematicheskaja ekonomika* [Mathematical Economics]. Moscow, 2005, 399 pp. (In Russian)
2. Artemyev S. S., Yakunin M. A. *Matematicheskoe i statisticheskoe modelirovanie v finansakh* [Mathematical and Statistical Modeling in Finances]. Novosibirsk, 2008, 174 pp. (In Russian)
3. Vorontsovskii A. V., Dikarev A. Yu. Forecasting macroeconomic indicators in simulation mode based on stochastic models of economic growth, *Finansy i Biznes*, 2013, no. 2, pp. 33–51 (In Russian).
4. Kurzenev V. A., Lychagina E. B. Stochastic Modelling of Dynamics of Economic System, *Upravlencheskoe konsultirovanie*, 2013, no. 5, pp. 78–83 (In Russian).
5. Andrianov D. L., Shultz D. N., Oshchepkov I. A. Dynamic stochastic general economic equilibrium models, *Upravlenie ekonomicheskimi sistemami* [Management of Economic Systems], 2014, vol. 67, no. 7 (In Russian), <http://www.uecs.ru/uecs67-672014/item/2998-2014-07-30-07-14-51>.
6. Andrianov D. L., Shultz D. N., Oshchepkov I. A. Dynamic stochastic model of Russia's general economic equilibrium, *Vestnik Nizhegorodskogo universiteta, Ser. Sotsialnye nauki*, 2015, no. 2(38), pp. 18–25 (In Russian).
7. Andrianov D. L., Arbuzov V. O., Ivliev S. V., Maksimov V. P., Simonov P. M. Dynamic models of economics: Theory, applications, software implementation, *Vestnik Permskogo Universiteta, Ser. Ekonomika*, 2015, no. 4, pp. 8–32 (In Russian).
8. Itô K., McKean H. P. Jr. *Diffusion processes and their sample paths*, Classics in Mathematics. Berlin, Springer, xv+321 pp. doi: [10.1007/978-3-642-62025-6](https://doi.org/10.1007/978-3-642-62025-6).
9. Allen E. *Modeling with Itô stochastic differential equations*, Mathematical Modelling: Theory and Applications, vol. 22. Netherlands, Springer, 2007, xii+230 pp. doi: [10.1007/978-1-4020-5953-7](https://doi.org/10.1007/978-1-4020-5953-7).
10. Stepanov S. S. *Stokhasticheskii mir* [Stochastic World] (In Russian), <https://synset.com/pdf/ito.pdf>; Accessed February 27, 2020.
11. Neisy A., Peymany M. Financial modeling by ordinary and stochastic differential equations, *World Applied Sciences Journal*, 2011, vol. 13, no. 11, pp. 2288–2295.
12. Kallianpur G., Sundar P. *Stochastic analysis and diffusion processes*, Oxford Graduate Texts in Mathematics, vol. 24. Oxford, Oxford University Press, 2014, xiv+352 pp. doi: [10.1093/acprof:oso/9780199657063.001.0001](https://doi.org/10.1093/acprof:oso/9780199657063.001.0001).
13. Bally V., Talay D. The law of the Euler scheme for stochastic differential equations: I. Convergence rate of the distribution function, *Probab. Th. Rel. Fields*, 1996, vol. 104, no. 1, pp. 43–60. doi: [10.1007/BF01303802](https://doi.org/10.1007/BF01303802).
14. Bally V., Talay D. The law of the Euler scheme for stochastic differential equations: II. Convergence rate of the density, *Monte Carlo Methods and Applications*, 1996, vol. 2, no. 2, pp. 93–128. doi: [10.1515/mcma.1996.2.2.93](https://doi.org/10.1515/mcma.1996.2.2.93).
15. Debarant K., Rößler A. Classification of stochastic Runge–Kutta methods for the weak approximation of stochastic differential equations, *Mathematics and Computers in Simulation*, 2008, vol. 77, no. 4, pp. 408–420, arXiv: [1303.4510](https://arxiv.org/abs/1303.4510) [math.NA]. doi: [10.1016/j.matcom.2007.04.016](https://doi.org/10.1016/j.matcom.2007.04.016).
16. Soheili A. R., Namjoo M. Strong approximation of stochastic differential equations with Runge–Kutta methods, *World Journal of Modelling and Simulation*, 2008, vol. 4, no. 2, pp. 83–93.

17. Kuznetsov D. S. *Stokhasticheskie differentsial'nye uravneniia: teoriia i praktika chislennogo resheniia* [Stochastic Differential Equations: Theory and Practice of Numerical Solution]. St. Petersburg, Polytechnic Univ., 2007, 800 pp. (In Russian). doi: [10.18720/SPBPU/2/s17-229](https://doi.org/10.18720/SPBPU/2/s17-229).
18. Konakov V., Menozzi S. Weak error for stable driven stochastic differential equations: Expansion of the densities, *J. Theor. Probab.*, 2011, vol. 24, pp. 454–478. doi: [10.1007/s10959-010-0291-x](https://doi.org/10.1007/s10959-010-0291-x).
19. Konakov V., Menozzi S. Weak error for the Euler scheme approximation of diffusions with non-smooth coefficients, *Electron. J. Probab.*, 2017, vol. 22, 46, 47 pp., arXiv: [1604.00771](https://arxiv.org/abs/1604.00771) [math.PR]. doi: [10.1214/17-EJP53](https://doi.org/10.1214/17-EJP53).
20. Hottovy S., Volpe G., Wehr J. Noise-Induced drift in stochastic differential equations with arbitrary friction and diffusion in the Smoluchowski–Kramers limit, *J. Stat. Phys.*, 2012, vol. 146, no. 4, pp. 762–773. doi: [10.1007/s10955-012-0418-9](https://doi.org/10.1007/s10955-012-0418-9).
21. Frikha N. On the weak approximation of a skew diffusion by an Euler-type scheme, *Bernoulli*, 2018, vol. 24, no. 3, pp. 1653–1691. doi: [10.3150/16-BEJ909](https://doi.org/10.3150/16-BEJ909).
22. Solov'ev V. I. *Ekonomiko-matematicheskoe modelirovanie rynka programmnogo obespicheniia* [Economic and Mathematical Modeling of the Software Market]. Moscow, Vega-Info, 2009, 176 pp. (In Russian)
23. Ilyina E. A., Saraev A. L., Saraev L. A. To the theory of modernization of manufacturing enterprises, taking into account the lag of domestic investment, *Ekonomika i predprinimatel'stvo*, 2017, no. 9–4(86), pp. 1130–1134 (In Russian).
24. Kuznetzova I. Yu. Numerical solution of a stochastic differential equation by the Euler–Maruyama method, *Mezhdunarodnyi nauchno-issledovatel'skii zhurnal*, 2013, no. 11–1(18), pp. 8–11 (In Russian).
25. *Accounting (financial) statements for PJSC Chelyabinsk Tube Rolling Plant after 2017* (In Russian), <https://e-ecolog.ru/buh/2017/7449006730>; Accessed February 27, 2020.
26. *Accounting (financial) statements for LADA Izhevsk Automobile Plant LLC after 2017* (In Russian), <https://e-ecolog.ru/buh/2017/1834051678>; Accessed February 27, 2020.
27. Saraev A. L., Saraev L. A. Indicators of nonlinear dynamics and the limiting condition of a manufacturing enterprise, *Ekonomika i predprinimatel'stvo*, 2018, no. 11, pp. 1237–1241 (In Russian).