Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2024. Т. 28, № 1. С. 45–58
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu2024
EDN: WZQYTV

УДК 517.955

Видоизмененная задача Коши для неоднородного вырождающегося гиперболического уравнения второго рода

А. К. Уринов[1,2]***, А. Б. Окбоев***[2]

[1] Ферганский государственный университет,
Узбекистан, 150100, Фергана, ул. Мураббийлар, 19.
[2] Институт математики имени В.И. Романовского АН Республики Узбекистан,
Узбекистан, 100174, Ташкент, ул. Университетская, 46.

Аннотация

Изучена видоизмененная задача Коши для неоднородного уравнения вырождающегося гиперболического типа второго рода в характеристическом треугольнике. Известно, что вырождающиеся гиперболические уравнения обладают той особенностью, что для них не всегда имеет место корректность задачи Коши с начальными данными на линии параболического вырождения. Поэтому в таких случаях необходимо рассмотреть задачу с начальными условиями в видоизмененной форме.

Сформулированы видоизмененные задачи Коши с начальными условиями на линии параболического вырождения для неоднородного уравнения вырождающегося гиперболического типа второго рода. Поставленная задача сводится к видоизмененной задаче Коши для однородного уравнения и к задаче Коши для неоднородного уравнения с нулевыми начальными условиями. Решения видоизмененной задачи Коши для однородного уравнения получено из общего решения рассмотренного уравнения, а решения видоизмененной задачи Коши с однородными условиями для уравнения неоднородного уравнения найдены с помощью метода Римана в явном виде.

Доказано, что найденные решения действительно удовлетворяют уравнению и начальным условиям.

Ключевые слова: вырождающееся уравнение гиперболического типа, видоизмененная задача Коши, существование и единственность решения, функция Римана.

Дифференциальные уравнения и математическая физика
Научная статья

Образец для цитирования
Уринов А. К., Окбоев А. Б. Видоизмененная задача Коши для неоднородного вырождающегося гиперболического уравнения второго рода // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2024. Т. 28, № 1. С. 45–58. EDN: WZQYTV. DOI: 10.14498/vsgtu2024.

Сведения об авторах

Ахмаджон Кушакович Уринов https://orcid.org/0000-0002-9586-1799
доктор физико-математических наук, профессор; профессор каф. математического анализа и дифференциальных уравнений[1]; ведущий научный сотрудник[2]; e-mail: urinovak@mail.ru

Акмалжон Бахромжонович Окбоев https://orcid.org/0000-0002-5544-3111
PhD (физико-математические науки); старший научный сотрудник[2];
e-mail: akmaljon12012@gmail.com

Получение: 16 мая 2023 г. / Исправление: 7 июля 2023 г. /
Принятие: 19 сентября 2023 г. / Публикация онлайн: 3 июня 2024 г.

Введение. Известно, что задача Коши для вырождающихся гиперболических уравнений с начальными данными на линии параболического вырождения не всегда бывает корректно поставленной. В том случае, когда задача Коши поставлена некорректно, необходимо рассмотреть видоизмененную задачу Коши (см., напр., [1–3]). На корректность таких задач существенно влияют коэффициенты и показатель вырождения рассматриваемого уравнения. Естественно, что эта проблема связана и с вопросом о корректной постановке и исследовании краевых задач для уравнений смешанного типа, содержащих такие уравнения (см., напр., [4–12]).

В конечной односвязной области D, ограниченной его характеристиками $OB : x - 2\sqrt{-y} = 0$, $AB : x + 2\sqrt{-y} = 1$ и $OA : y = 0$, рассматривается вырождающееся гиперболическое уравнение второго рода

$$L_{\alpha,\lambda}(u) \equiv u_{xx} + yu_{yy} + \alpha u_y - \lambda^2 u = f(x, y), \quad y < 0, \tag{1}$$

где α и λ — заданные числа, причем $\alpha < 1$, $\lambda \in \mathbb{R}$ или $i\lambda \in \mathbb{R}$, $f(x, y)$ — заданная функция.

Отметим, что М. Чибрарио одним из первых провела углубленный анализ уравнения (1) при $\alpha = 0$ и $\lambda = 0$ [13]. С. А. Терсенов [2], И. Л. Кароль [14], М. С. Салахитдинов, С. С. Исамухаммедов [6], В. А. Елеев [3], J. W. Reyn [15], Ю. М. Крикунов [16], Р. С. Хайруллин [4], Н. К. Мамадалиев [5] и многие другие исследовали различные задачи для уравнения (1) при различных значениях α, когда $\lambda = 0$ и $f(x, y) = 0$. Следует отметить, что М. В. Капилевич исследовал задачу Коши для уравнения (1) при $\alpha \in (1/2, 1)$ и $f(x, y) = 0$ [17]. При $\alpha = 1/2$ и $f(x, y) = 0$ уравнение (1) сводится к телеграфному уравнению задачи Коши, которая была изучена в [18]. Задачу Коши для уравнения (1) при $\alpha \in (0, 1/2)$ и $f(x, y) = 0$ исследовал Ф. Ф. Евдокимов [19]. В работе [20] для уравнения (1) при $\alpha \in \mathbb{R}\backslash(0, 1)$ и $f(x, y) = 0$ сформулирована видоизмененная задача Коши, аналогичная предложенной задаче в [2], и получена формула единственного решения поставленной задачи. В работе [21] поставлена и изучена задача типа Коши с производными высокого порядка в начальных условиях для уравнения (1) при $f(x, y) = 0$ в характеристическом треугольнике.

В этой работе исследуется следующая видоизмененная задача Коши для уравнения (1).

Задача Коши. *Найти функцию $u(x, y) \in C(\overline{D}) \cap C^2(D)$, удовлетворяющую в области D уравнению (1) и следующим начальным условиям:*

$$\begin{cases} u(x, 0) = \tau(x), & x \in [0, 1]; \\ \lim\limits_{y\to-0} (-y)^\alpha (\partial/\partial y)[u - A_\alpha^-(\tau, \lambda)] = \nu(x), & x \in (0, 1), \end{cases} \tag{2}$$

где $\tau(x)$, $\nu(x)$ и $f(x, y)$ — заданные функции, $A_\alpha^-(\tau, \lambda)$ — оператор вида

$$A_\alpha^-(\tau,\lambda)=\sum_{k=0}^{n}\frac{\Gamma(2n+2\beta)(4y)^k C_n^k}{\Gamma^2(n+\beta)(\beta+1/2)_k(\beta+n)_k}\times$$
$$\times\int_0^1 \Psi_k(\tau,\lambda)[z(1-z)]^{k+n+\beta-1}\bar J_{k+n+\beta-1}(\sigma)dz \quad (3)$$

при $\alpha\neq -n,\ \alpha\neq 1/2-n,\ n=0,1,2,\ldots;$ *вида*

$$A_{-n+1/2}^-(\tau,\lambda)=\sum_{k=0}^{n+1}\frac{C_{n+1}^k(4y)^k}{k!(-n+1/2)_k}\int_0^1 \Psi_k(\tau,\lambda)[z(1-z)]^k\bar J_k(\sigma)dz \quad (4)$$

при $\alpha=1/2-n,\ n=0,1,2,\ldots;$ *вида*

$$A_{-n}^-(\tau,\lambda)=\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{n}\frac{(4y)^k C_{n+1}^k}{(-n)_k(1/2)_k}\int_0^1 \Psi_k(\tau,\lambda)[z(1-z)]^{k-1/2}\bar J_{k-1/2}(\sigma)dz+$$
$$+\frac{4(4y)^{n+1}}{\pi(-n)_n(3/2)_n}\int_0^1 \Psi_{n+1}(\tau,\lambda)[z(1-z)]^{n+1/2}\times$$
$$\times\{\ln[\sqrt{-y}z(1-z)]\bar J_{n+1/2}(\sigma)-\Omega_{n+1/2}(\sigma)\}dz \quad (5)$$

при $\alpha=-n,\ n=0,1,2,\ldots;$

$$\Omega_\gamma(\sigma)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m(\sigma/2)^{2m}}{m!(\gamma+1)_m}\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{\gamma+j};$$

$\Psi_k(\tau,\lambda)=\left(\lambda^2-d^2/dx^2\right)^k\tau(x)$, $\sigma=4\lambda\sqrt{-yz(1-z)}$, $\beta=\alpha-1/2$, $\Gamma(\delta)$ — *гамма-функция Эйлера*, $(a)_m=a(a+1)\cdots(a+m-1)$ — *символ Похгаммера*, $J_\gamma(z)$ — *функция Бесселя первого рода*, $\bar J_\gamma(z)=\Gamma(\gamma+1)(z/2)^{-\gamma}J_\gamma(z)$, *т.е.*

$$\bar J_\gamma(z)=\Gamma(\gamma+1)\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m(z/2)^{2m}}{m!\Gamma(m+\gamma+1)},\quad \gamma\neq -1,-2,-3,\ldots.$$

1. Исследование видоизмененной задачи Коши. Решение задачи (1), (2) будем искать в виде

$$u(x,y)=v(x,y)+\omega(x,y), \quad (6)$$

где $v(x,y)$ — решение задачи

$$L_{\alpha,\lambda}(v)\equiv v_{xx}+yv_{yy}+\alpha v_y-\lambda^2 v=0,\quad y<0;$$
$$\begin{cases} v(x,0)=\tau(x), & x\in[0,1];\\ \lim\limits_{y\to-0}(-y)^\alpha(\partial/\partial y)[v-A_\alpha^-(\tau,\lambda)]=\nu(x), & x\in(0,1),\end{cases}$$

которое определяется формулой [20]

$$v(x,y)=A_\alpha^-(\tau,\lambda)-\\ -\gamma_1(-y)^{1-\alpha}\int_0^1\nu\big(x-2\sqrt{-y}(1-2z)\big)[z(1-z)]^{-\beta}\bar{J}_{-\beta}(\sigma)dz. \qquad (7)$$

Здесь $\gamma_1=\Gamma(2-2\beta)/[(1-\alpha)\Gamma^2(1-\beta)]$, $\sigma=4\lambda\sqrt{-yz(1-z)}$, $A_\alpha^-(\tau,\lambda)$ — определяется по формулам (3)–(5), $\omega(x,y)$ — решение задачи

$$L_{\alpha,\lambda}(\omega)=f(x,y),\quad y<0; \qquad (8)$$

$$\begin{cases}\omega(x,0)=0, & x\in[0,1];\\ \lim\limits_{y\to-0}(-y)^\alpha(\partial/\partial y)\omega(x,y)=0, & x\in(0,1).\end{cases} \qquad (9)$$

Из (9) вытекает, что [21]

$$\lim_{y\to-0}(-y)^{\alpha-1}\omega(x,y)=0. \qquad (10)$$

Исследуем задачу (8), (9) методом Римана. Уравнение (8) и условия (9) в характеристических координатах $\xi=x-2\sqrt{-y}$, $\eta=x+2\sqrt{-y}$ имеют вид

$$E_\lambda(W)\equiv W_{\xi\eta}+\frac{\beta}{\eta-\xi}(W_\xi-W_\eta)-\frac{\lambda^2}{4}W=F(\xi,\eta),$$

$$W(\xi,\xi)=0,\quad \lim_{\eta-\xi\to0}\frac{(\eta-\xi)^{2\beta}}{4^{\beta-1/2}}[W_\xi(\xi,\eta)-W_\eta(\xi,\eta)]=0, \qquad (11)$$

где $W(\xi,\eta)=\omega(x,y)$, $F(x,y)=f(\xi,\eta)/4$. В координатах ξ, η равенство (10) имеет вид

$$\lim_{\eta-\xi\to0}\left(\frac{\eta-\xi}{4}\right)^{2\beta-1}W(\xi,\eta)=0. \qquad (12)$$

В характеристическом треугольнике Δ_0, ограниченном прямыми $\xi=\eta$, $\xi=\xi_0$, $\eta=\eta_0$, рассмотрим функцию Римана [22]:

$$R(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0)=\frac{(\eta-\xi)^{2\beta}}{(\eta-\xi_0)^\beta(\eta_0-\xi)^\beta}\sum_{k=0}^\infty\frac{\rho^k}{(k!)^2}F(\beta,\beta+k,1+k;\theta),$$

где $\rho=\lambda^2(\eta_0-\eta)(\xi-\xi_0)/4$, $\theta=(\eta_0-\eta)(\xi-\xi_0)/[(\eta-\xi_0)(\eta_0-\xi)]$. Легко видеть, что

$$E_\lambda^*(R)\equiv R_{\xi\eta}-\frac{\beta}{\eta-\xi}(R_\xi-R_\eta)-\frac{2\beta}{(\eta-\xi)^2}R-\frac{\lambda^2}{4}R=0;$$

$$\frac{\partial}{\partial\xi}R(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0)\Big|_{\eta=\eta_0}+\frac{\beta}{\eta-\xi}R(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0)\Big|_{\eta=\eta_0}=0; \qquad (13)$$

$$\frac{\partial}{\partial\eta}R(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0)\Big|_{\xi=\xi_0}-\frac{\beta}{\eta-\xi}R(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0)\Big|_{\xi=\xi_0}=0; \qquad (14)$$

$$\frac{\partial}{\partial\xi_0}R(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0)\Big|_{\eta=\eta_0}-\frac{\beta}{\eta_0-\xi_0}R(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0)\Big|_{\eta=\eta_0}=0; \qquad (15)$$

$$\frac{\partial}{\partial\eta_0}R(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0)\Big|_{\xi=\xi_0}+\frac{\beta}{\eta_0-\xi_0}R(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0)\Big|_{\xi=\xi_0}=0; \tag{16}$$

$$R(\xi_0,\eta_0;\xi_0,\eta_0)=1. \tag{17}$$

Имеет место тождество

$$2RE_\lambda(W)-2WE^*_\lambda(R)=2RF(\xi,\eta)=\frac{\partial}{\partial\eta}M+\frac{\partial}{\partial\xi}N, \tag{18}$$

где

$$M=\Big(\frac{\partial W}{\partial\xi}R-W\frac{\partial R}{\partial\xi}-\frac{2\beta}{\eta-\xi}WR\Big),\quad N=\Big(\frac{\partial W}{\partial\eta}R-W\frac{\partial R}{\partial\eta}+\frac{2\beta}{\eta-\xi}WR\Big).$$

Проинтегрируем тождество (18) по треугольнику, ограниченному прямыми $\xi=\xi_0$, $\eta=\eta_0$, $\eta-\xi=\varepsilon$, $\varepsilon>0$:

$$2\int_{\xi_0}^{\eta_0-\varepsilon}d\xi\int_{\xi+\varepsilon}^{\eta_0}F(\xi,\eta)Rd\eta=\int_{\xi_0}^{\eta_0-\varepsilon}d\xi\int_{\xi+\varepsilon}^{\eta_0}\frac{\partial}{\partial\eta}Md\eta+\int_{\xi_0+\varepsilon}^{\eta_0}d\eta\int_{\xi_0}^{\eta-\varepsilon}\frac{\partial}{\partial\xi}Nd\xi. \tag{19}$$

Вычислив внутренние интегралы, имеем

$$2\int_{\xi_0}^{\eta_0-\varepsilon}d\xi\int_{\xi+\varepsilon}^{\eta_0}F(\xi,\eta)Rd\eta=\int_{\xi_0}^{\eta_0-\varepsilon}M\Big|_{\eta=\xi+\varepsilon}^{\eta=\eta_0}d\xi+\int_{\xi_0+\varepsilon}^{\eta_0}N\Big|_{\xi=\xi_0}^{\xi=\eta-\varepsilon}d\eta.$$

Отсюда, принимая во внимание свойства (13), (14) и (17), получим

$$\int_{\xi_0}^{\eta_0-\varepsilon}M\Big|_{\eta=\xi+\varepsilon}^{\eta=\eta_0}d\xi=W(\eta_0-\varepsilon,\eta_0)R(\eta_0-\varepsilon,\eta_0;\xi_0,\eta_0)-W(\xi_0,\eta_0)-J_1, \tag{20}$$

$$\int_{\xi_0+\varepsilon}^{\eta_0}N\Big|_{\xi=\xi_0}^{\xi=\eta-\varepsilon}d\eta=J_2-W(\xi_0,\eta_0)+W(\xi_0,\xi_0+\varepsilon)R(\xi_0,\xi_0+\varepsilon;\xi_0,\eta_0), \tag{21}$$

где

$$J_1=\int_{\xi_0}^{\eta_0-\varepsilon}\Big(\frac{\partial W}{\partial\xi}R-W\frac{\partial R}{\partial\xi}-\frac{2\beta}{\eta-\xi}WR\Big)\Big|_{\eta=\xi+\varepsilon}d\xi, \tag{22}$$

$$J_2=\int_{\xi_0+\varepsilon}^{\eta_0}\Big(\frac{\partial W}{\partial\eta}R-W\frac{\partial R}{\partial\eta}+\frac{2\beta}{\eta-\xi}WR\Big)\Big|_{\xi=\eta-\varepsilon}d\eta. \tag{23}$$

Теперь, вычисляем

$$J_2-J_1=\int_{\xi_0}^{\eta_0-\varepsilon}\Big(\frac{\partial W}{\partial\eta}-\frac{\partial W}{\partial\xi}\Big)R\Big|_{\eta=\xi+\varepsilon}d\xi+$$
$$+\int_{\xi_0}^{\eta_0-\varepsilon}W\Big(\frac{\partial R}{\partial\xi}-\frac{\partial R}{\partial\eta}+\frac{4\beta}{\eta-\xi}R\Big)\Big|_{\eta=\xi+\varepsilon}d\xi. \tag{24}$$

Учитывая (11) и (12), имеем

$$\lim_{\varepsilon\to0}\Big(\frac{\partial W}{\partial\eta}-\frac{\partial W}{\partial\xi}\Big)R\Big|_{\eta=\xi+\varepsilon}=0,\quad \lim_{\varepsilon\to0}W\Big(\frac{\partial R}{\partial\xi}-\frac{\partial R}{\partial\eta}+\frac{4\beta}{\eta-\xi}R\Big)\Big|_{\eta=\xi+\varepsilon}=0.$$

Принимая во внимание (20)–(24), из формулы (19) в пределе при $\varepsilon \to 0$ получаем

$$W(\xi_0,\eta_0)=\int_{\xi_0}^{\eta_0}d\xi\int_{\xi}^{\eta_0}F(\xi,\eta)R(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0)d\eta.$$

Возвращаясь к переменным x и y, получим

$$\omega(x,y)=\frac{1}{4}\int_{x-2\sqrt{-y}}^{x+2\sqrt{-y}}d\xi\int_{\xi}^{x+2\sqrt{-y}}f\Big(\frac{\xi+\eta}{2},-\frac{(\eta-\xi)^2}{16}\Big)\times$$
$$\times R(\xi,\eta;x-2\sqrt{-y},x+2\sqrt{-y})d\eta. \quad (25)$$

Теорема 1. *Если $f(x,y)=(-y)^{\alpha}f_1(x,y)$, $f_1(x,y)\in C^1(\bar{D})$, то функция (25) является единственным решением задачи (8), (9).*

Доказательство. Сначала докажем, что функция (25) удовлетворяет уравнению (1). Для этого вычислим следующие производные:

$$\omega_{xx}(x,y)=\frac{1}{2}f(x,y)+$$
$$+\frac{1}{4}\int_{x-2\sqrt{-y}}^{x+2\sqrt{-y}}\frac{\partial}{\partial x}f\Big(\frac{x-2\sqrt{-y}+\eta}{2},-\frac{(\eta-x+2\sqrt{-y})^2}{16}\Big)\times$$
$$\times R(x-2\sqrt{-y},\eta;x-2\sqrt{-y},x+2\sqrt{-y})d\eta+$$
$$+\frac{1}{4}\int_{x-2\sqrt{-y}}^{x+2\sqrt{-y}}f\Big(\frac{x-2\sqrt{-y}+\eta}{2},-\frac{(\eta-x+2\sqrt{-y})^2}{16}\Big)\times$$
$$\times\frac{\partial}{\partial x}R(x-2\sqrt{-y},\eta;x-2\sqrt{-y},x+2\sqrt{-y})d\eta-$$
$$-\frac{1}{4}\int_{x-2\sqrt{-y}}^{x+2\sqrt{-y}}\frac{\partial}{\partial x}f\Big(\frac{\xi+x+2\sqrt{-y}}{2},-\frac{(x+2\sqrt{-y}-\xi)^2}{16}\Big)\times$$
$$\times R(\xi,x+2\sqrt{-y};x-2\sqrt{-y},x+2\sqrt{-y})d\xi-$$
$$-\frac{1}{4}\int_{x-2\sqrt{-y}}^{x+2\sqrt{-y}}f\Big(\frac{\xi+x+2\sqrt{-y}}{2},-\frac{(x+2\sqrt{-y}-\xi)^2}{16}\Big)\times$$
$$\times\frac{\partial}{\partial x}R(\xi,x+2\sqrt{-y};x-2\sqrt{-y},x+2\sqrt{-y})d\xi-$$
$$-\frac{1}{4}\int_{x-2\sqrt{-y}}^{x+2\sqrt{-y}}f\Big(\frac{\xi+\eta}{2},-\frac{(\eta-\xi)^2}{16}\Big)\times$$
$$\times\frac{\partial}{\partial x}R(\xi,\eta;x-2\sqrt{-y},x+2\sqrt{-y})\Big|_{\xi=x-2\sqrt{-y}}d\eta-$$
$$-\frac{1}{4}\int_{x-2\sqrt{-y}}^{x+2\sqrt{-y}}f\Big(\frac{\xi+\eta}{2},-\frac{(\eta-\xi)^2}{16}\Big)\times$$
$$\times\frac{\partial}{\partial x}R(\xi,\eta;x-2\sqrt{-y},x+2\sqrt{-y})\Big|_{\eta=x+2\sqrt{-y}}d\xi-$$
$$-\frac{1}{4}\int_{x-2\sqrt{-y}}^{x+2\sqrt{-y}}d\xi\int_{\xi}^{x+2\sqrt{-y}}f\Big(\frac{\xi+\eta}{2}-\frac{(\eta-\xi)^2}{16}\Big)\times$$

$$\times \frac{\partial^2}{\partial x^2} R(\xi,\eta;x-2\sqrt{-y},x+2\sqrt{-y})d\eta;$$

$$\omega_y(x,y)=\frac{1}{4\sqrt{-y}}\int_{x-2\sqrt{-y}}^{x+2\sqrt{-y}} f\Big(\frac{\xi+\eta}{2},-\frac{(\eta-\xi)^2}{16}\Big)\times$$
$$\times R(\xi,\eta;x-2\sqrt{-y},x+2\sqrt{-y})\Big|_{\xi=x-2\sqrt{-y}}d\eta+$$
$$+\frac{1}{4\sqrt{-y}}\int_{x-2\sqrt{-y}}^{x+2\sqrt{-y}} f\Big(\frac{\xi+\eta}{2},-\frac{(\eta-\xi)^2}{16}\Big)\times$$
$$\times R(\xi,\eta;x-2\sqrt{-y},x+2\sqrt{-y})\Big|_{\eta=x+2\sqrt{-y}}d\xi-$$
$$-\frac{1}{4}\int_{x-2\sqrt{-y}}^{x+2\sqrt{-y}} d\xi\int_{\xi}^{x+2\sqrt{-y}} f\Big(\frac{\xi+\eta}{2},-\frac{(\eta-\xi)^2}{16}\Big)\times$$
$$\times \frac{\partial}{\partial y} R(\xi,\eta;x-2\sqrt{-y},x+2\sqrt{-y})d\eta. \quad (26)$$

$$\omega_{yy}(x,y)=\frac{1}{8\sqrt{-y^3}}\int_{x-2\sqrt{-y}}^{x+2\sqrt{-y}} f\Big(\frac{\xi+\eta}{2},-\frac{(\eta-\xi)^2}{16}\Big)\times$$
$$\times R(\xi,\eta;x-2\sqrt{-y},x+2\sqrt{-y})\Big|_{\xi=x-2\sqrt{-y}}d\eta+$$
$$+\frac{1}{2y}f(x,y)+\frac{1}{4\sqrt{-y}}\int_{x-2\sqrt{-y}}^{x+2\sqrt{-y}} \frac{\partial}{\partial y} f\Big(\frac{x-2\sqrt{-y}+\eta}{2},-\frac{(\eta-x+2\sqrt{-y})^2}{16}\Big)\times$$
$$\times R(x-2\sqrt{-y},\eta;x-2\sqrt{-y},x+2\sqrt{-y})d\eta+$$
$$+\frac{1}{4\sqrt{-y}}\int_{x-2\sqrt{-y}}^{x+2\sqrt{-y}} f\Big(\frac{x-2\sqrt{-y}+\eta}{2},-\frac{(\eta-x+2\sqrt{-y})^2}{16}\Big)\times$$
$$\times \frac{\partial}{\partial y} R(x-2\sqrt{-y},\eta;x-2\sqrt{-y},x+2\sqrt{-y})d\eta+$$
$$+\frac{1}{8\sqrt{-y^3}}\int_{x-2\sqrt{-y}}^{x+2\sqrt{-y}} f\Big(\frac{\xi+\eta}{2},-\frac{(\eta-\xi)^2}{16}\Big)\times$$
$$\times R(\xi,\eta;x-2\sqrt{-y},x+2\sqrt{-y})d\xi\Big|_{\eta=x+2\sqrt{-y}}+$$
$$+\frac{1}{4\sqrt{-y}}\int_{x-2\sqrt{-y}}^{x+2\sqrt{-y}} \frac{\partial}{\partial y} f\Big(\frac{\xi+x+2\sqrt{-y}}{2},-\frac{(x+2\sqrt{-y}-\xi)^2}{16}\Big)\times$$
$$\times R(\xi,x+2\sqrt{-y};x-2\sqrt{-y},x+2\sqrt{-y})d\xi+$$
$$+\frac{1}{4\sqrt{-y}}\int_{x-2\sqrt{-y}}^{x+2\sqrt{-y}} f\Big(\frac{\xi+x+2\sqrt{-y}}{2},-\frac{(x+2\sqrt{-y}-\xi)^2}{16}\Big)\times$$
$$\times \frac{\partial}{\partial y} R(\xi,x+2\sqrt{-y};x-2\sqrt{-y},x+2\sqrt{-y})d\xi+$$

$$+\frac{1}{4\sqrt{-y}}\int_{x-2\sqrt{-y}}^{x+2\sqrt{-y}} f\Big(\frac{\xi+\eta}{2},-\frac{(\eta-\xi)^2}{16}\Big)\times$$
$$\times\frac{\partial}{\partial y}R(\xi,\eta;x-2\sqrt{-y},x+2\sqrt{-y})\Big|_{\xi=x-2\sqrt{-y}}d\eta+$$
$$+\frac{1}{4\sqrt{-y}}\int_{x-2\sqrt{-y}}^{x+2\sqrt{-y}} f\Big(\frac{\xi+\eta}{2},-\frac{(\eta-\xi)^2}{16}\Big)\times$$
$$\times\frac{\partial}{\partial y}R(\xi,\eta;x-2\sqrt{-y},x+2\sqrt{-y})\Big|_{\eta=x+2\sqrt{-y}}d\xi-$$
$$-\frac{1}{4}\int_{x-2\sqrt{-y}}^{x+2\sqrt{-y}}d\xi\int_{\xi}^{x+2\sqrt{-y}} f\Big(\frac{\xi+\eta}{2},-\frac{(\eta-\xi)^2}{16}\Big)\times$$
$$\times\frac{\partial^2}{\partial y^2}R\Big(\xi,\eta;x-2\sqrt{-y},x+2\sqrt{-y}\Big)d\eta.$$

Подставляя $\omega(x,y)$, $\omega_{xx}(x,y)$, $\omega_{yy}(x,y)$, $\omega_y(x,y)$ в $L_{\alpha,\lambda}(\omega)$, имеем

$$L_{\alpha,\lambda}(\omega)=\sum_{j=1}^{6}p_j,$$

где $p_1=f(x,y)$,

$$p_2=\int_{x-2\sqrt{-y}}^{x+2\sqrt{-y}} f\Big(\frac{\xi+\eta}{2},-\frac{(\eta-\xi)^2}{16}\Big)\frac{\partial}{\partial\eta_0}R(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0)\Big|_{\xi=x-2\sqrt{-y}}d\eta,$$
$$p_3=-\int_{x-2\sqrt{-y}}^{x+2\sqrt{-y}} f\Big(\frac{\xi+\eta}{2},-\frac{(\eta-\xi)^2}{16}\Big)\frac{\partial}{\partial\xi_0}R(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0)\Big|_{\eta=x+2\sqrt{-y}}d\xi,$$
$$p_4=\frac{\beta}{\eta_0-\xi_0}\int_{x-2\sqrt{-y}}^{x+2\sqrt{-y}} f\Big(\frac{\xi+\eta}{2},-\frac{(\eta-\xi)^2}{16}\Big)R(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0)\Big|_{\eta=x+2\sqrt{-y}}d\xi,$$
$$p_5=\frac{\beta}{\eta_0-\xi_0}\int_{x-2\sqrt{-y}}^{x+2\sqrt{-y}} f\Big(\frac{\xi+\eta}{2},-\frac{(\eta-\xi)^2}{16}\Big)R(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0)\Big|_{\xi=x-2\sqrt{-y}}d\eta,$$
$$p_6=-\int_{x-2\sqrt{-y}}^{x+2\sqrt{-y}}d\xi\int_{\xi}^{x+2\sqrt{-y}} f\Big(\frac{\xi+\eta}{2},-\frac{(\eta-\xi)^2}{16}\Big)\times$$
$$\times\Big[\frac{\partial^2}{\partial\xi_0\partial\eta_0}+\frac{\beta}{\eta_0-\xi_0}\Big(\frac{\partial}{\partial\xi_0}-\frac{\partial}{\partial\eta_0}\Big)-\frac{\lambda^2}{4}\Big]R(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0)d\eta,$$
$$\xi_0=x-2\sqrt{-y},\quad \eta_0=x+2\sqrt{-y}.$$

Принимая во внимание (15) и (16), имеем $p_3+p_4=0$, $p_2+p_5=0$, $p_6=0$. Из полученных равенств вытекает, что $L_{\alpha,\lambda}(\omega)=f(x,y)$. Теперь проверим, удовлетворяет ли функция $\omega(x,y)$ первому из условий (2). Для этого запишем $\omega(x,y)$ в виде

$$\omega(x,y)=4y\int_0^1(1-t)dt\times$$

$$\times \int_0^1 f\big(x - 2\sqrt{-y} + 4\sqrt{-y}t + 2\sqrt{-y}(1-t)z, y(1-t)^2z^2\big) \times$$
$$\times R\big(\xi_0 + 4\sqrt{-y}t, \xi_0 + 4\sqrt{-y}(t+(1-t)z); \xi_0, \eta_0\big)dz.$$

Отсюда $\omega(x,0) = 0$. Проверим, удовлетворяет ли функция $\omega(x,y)$ второму из условий (2). Для этого запишем функцию (26) в виде

$$\omega_y(x,y) = \int_0^1 f\big(x - 2\sqrt{-y}(1-s), ys^2\big)R(\xi_0, \xi_0 + 4\sqrt{-y}s; \xi_0, \eta_0\big)ds +$$
$$+ \int_0^1 f(x + 2\sqrt{-y}s, y(1-s)^2)R\big(\xi_0 + 4\sqrt{-y}s, \eta_0; \xi_0, \eta_0\big)ds -$$
$$- \int_0^1 (1-t)dt \int_0^1 f\big(\xi_0 + 4\sqrt{-y}t + 2\sqrt{-y}(1-t)s, y(1-t)^2s^2\big)G(\xi_0, \eta_0; t, s)ds,$$

где

$$G(\xi_0, \eta_0; t, s) = \frac{\beta(1-t)^\beta s^{2\beta}}{[t+(1-t)s]^\beta} \sum_{k=0}^\infty \frac{\rho^k}{(k!)^2} F(\beta, \beta+k; 1+k; \theta) +$$
$$+ \frac{4\lambda^2(1-t)^{\beta+1}s^{2\beta}(1-s)y}{[t+(1-t)s]^\beta} \sum_{k=0}^\infty \frac{k\rho^{k-1}}{(k!)^2} F(\beta, \beta+k; 1+k; \theta) -$$
$$- \frac{(1-t)^{\beta+1}s^{2\beta+1}(1-s)}{[t+(1-t)s]^{\beta+2}} \sum_{k=0}^\infty \frac{\beta(\beta+1)\rho^k}{(k!)^2(k+1)} F(1+\beta, 1+\beta+k; 2+k; \theta) +$$
$$+ \frac{\beta(1-t)^{\beta-1}s^{2\beta}}{[t+(1-t)s]^\beta} \sum_{k=0}^\infty \frac{\rho^k}{(k!)^2} F(\beta, \beta+k; 1+k; \theta) +$$
$$+ \frac{4y\lambda^2(1-t)^\beta s^{2\beta}t}{[t+(1-t)s]^{\beta+1}} \sum_{k=0}^\infty \frac{k\rho^{k-1}}{(k!)^2} F(\beta, \beta+k; 1+k; \theta) +$$
$$+ \frac{64y\sqrt{-y}(1-t)^{\beta+1}s^{2\beta+1}t}{[t+(1-t)s]^{\beta+1}} \sum_{k=0}^\infty \frac{\beta(\beta+k)\rho^k}{(k!)^2(1+k)} F(1+\beta, 1+\beta+k; 2+k; \theta),$$

$\rho = -4\lambda^2(1-t)sty$, $\theta = t(1-s)/[t+(1-t)s]$. Отсюда из условий $f(x,y) = (-y)^\alpha f_1(x,y)$, $f_1(x,y) \in C^1(D)$ легко вытекает, что

$$\lim_{y\to -0} (-y)^\alpha (\partial/\partial y)\omega(x,y) = 0.$$

Единственность решения задачи (8), (9) следует из метода получения решения (25). □

Подставляя (7) и (25) в (6), имеем

$$u(x,y) = A_\alpha^-(\tau, \lambda) -$$
$$- \gamma_1(-y)^{1-\alpha} \int_0^1 \nu\big(x - 2\sqrt{-y}(1-2z)\big)[z(1-z)]^{-\beta} \bar{J}_{-\beta}(4\lambda\sqrt{-yz(-z)})dz +$$

$$+\frac{1}{4}\int_{x-2\sqrt{-y}}^{x+2\sqrt{-y}}d\xi\int_{\xi}^{x+2\sqrt{-y}}f\Big(\frac{\xi+\eta}{2},-\frac{(\eta-\xi)^2}{16}\Big)\times$$
$$\times R(\xi,\eta;x-2\sqrt{-y},x+2\sqrt{-y})d\eta. \quad (27)$$

Таким образом, мы доказали следующие теоремы.

Теорема 2. *Если* $\tau(x)\in C^{2(n+1)}[0,1]$, $\nu(x)\in C^2[0,1]$ *и* $f(x,y)=(-y)^{1-\alpha}\times\times f_1(x,y)$, $f_1(x,y)\in C^1(\bar{D})$, *то функция* $v(x,y)$, *определяемая формулой* (27), *является решением задачи* (1), (2) *при* $\alpha\neq -n$, $\alpha\neq 1/2-n$, $n=0,1,2,\ldots$, $\alpha<1$, *где* $A^-_\alpha(\tau,\lambda)$ *— определяется по* (3).

Теорема 3. *Если* $\tau(x)\in C^{2(n+2)}[0,1]$, $\nu(x)\in C^2[0,1]$ *и* $f(x,y)=(-y)^{1-\alpha}\times\times f_1(x,y)$, $f_1(x,y)\in C^1(\bar{D})$, *то функция* $u(x,y)$, *определяемая формулой* (27), *является решением задачи* (1), (2) *при* $\alpha=1/2-n$, $n=0,1,2,\ldots$, *где* $A^-_\alpha(\tau,\lambda)$ *— определяется по* (4).

Теорема 4. *Если* $\tau(x)\in C^{2(n+2)}[0,1]$, $\nu(x)\in C^2[0,1]$ *и* $f(x,y)=(-y)^{1-\alpha}\times\times f_1(x,y)$, $f_1(x,y)\in C^1(\bar{D})$, *то функция* $u(x,y)$, *определяемая формулой* (27), *является решением задачи* (1), (2) *при* $\alpha=-n$, $n=0,1,2,\ldots$, *где* $A^-_\alpha(\tau,\lambda)$ *— определяется по* (5).

Заключение. Полученное решение рассматриваемой задачи позволяет исследовать различные задачи для уравнений смешанного типа, включающие в себя уравнение (1).

Конкурирующие интересы. Заявляем, что в отношении авторства и публикации этой статьи конфликта интересов не имеем.

Авторская ответственность. Все авторы принимали участие в разработке концепции статьи и в написании рукописи. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Исследование выполнялось без финансирования.

Библиографический список

1. Бицадзе А. В. *Уравнение смешанного типа.* М.: АН СССР, 1959. 155 с.
2. Терсенов С. А. К теории гиперболических уравнений с данными на линии вырождения типа // *Сиб. матем. журн.*, 1961. Т. 2, № 6. С. 913–935.
3. Елеев В. А. О некоторых задачах типа задачи Коши и задачи со смещением для одного вырождающегося гиперболического уравнения // *Диффер. уравн.*, 1976. Т. 12, № 1. С. 46–58.
4. Хайруллин Р. С. *Задача Трикоми для уравнения второго рода с сильным вырождением.* Казань: Казан. ун-т, 2015. 236 с. EDN: UWLDMB.
5. Мамадалиев Н. К. О представлении решения видоизменной задачи Коши // *Сиб. матем. журн.*, 2000. Т. 41, № 5. С. 1087–1097.
6. Салахитдинов М. С., Исамухамедов С. С. Краевые задачи для уравнения смешанного типа второго рода // *Сердика Бълг. матем. спис.*, 1977. Т. 3. С. 181–188. http://www.math.bas.bg/serdica/1977/1977-181-188.pdf.
7. Сабитов К. Б., Сулейманова А. Х. Задача Дирихле для уравнения смешанного типа с характеристическим вырождением в прямоугольной области // *Изв. вузов. Матем.*, 2009. № 11. С. 43–52. EDN: KVQCZZ.

8. Сабитов К. Б., Сулейманова А. Х. Задача Дирихле для уравнения смешанного типа второго рода в прямоугольной области // *Изв. вузов. Матем.*, 2007. №4. С. 45–53. EDN: JJSQRP.
9. Yuldashev T. K., Islomov B. I., Abdullaev A. A. On Solvability of a Poincare–Tricomi type problem for an elliptic–hyperbolic equation of the second kind // *Lobachevskii J. Math.*, 2021. vol. 42, no. 3. pp. 663–675. EDN: XNSEAX. DOI: https://doi.org/10.1134/S1995080221030239.
10. Уринов А. К., Усмонов Д. А. Начально-граничная задача для гиперболического уравнения второго рода с тремя линиями вырождения // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2022. Т. 26, №4. С. 672–693. EDN: DIOYZF. DOI: https://doi.org/10.14498/vsgtu1962.
11. Urinov A. K., Okboev A. B. Nonlocal boundary-value problem for a parabolic-hyperbolic equation of the second kind // *Lobachevskii J. Math.*, 2020. vol. 41, no. 9. pp. 1886–1897. EDN: GDVVCS. DOI: https://doi.org/10.1134/S1995080220090280.
12. Okboev A. B. Tricomi problem for second kind parabolic hyperbolic type equation // *Lobachevskii J. Math.*, 2020. vol. 41, no. 1. pp. 58–70. EDN: BCPUBY. DOI: https://doi.org/10.1134/S1995080220010096.
13. Cibrario M. Intorno ad una equazione lineare alle derivate parziali delsecondo ordine di tipo misto iperbolico-ellittica // *Ann. Scuola Normale Sup. di Pisa, Ser. 2*, 1934. vol. 3, no. 3–4. pp. 255–285. http://eudml.org/doc/82880.
14. Кароль И. Л. К теории уравнений смешанного типа // *Докл. АН СССР*, 1953. Т. 88, №3. С. 397–400.
15. Reyn J. W. Solutions in the hyperbolic region of an equation, which approximates Chaplygin's equation near the vacuum line // *J. Math. Phys.*, 1967. vol. 46, no. 1-4. pp. 28–42. DOI: https://doi.org/10.1002/sapm196746128.
16. Крикунов Ю. М. Видоизмененная задача Трикоми для уравнения $u_{xx} + yu_{yy} + (-n + 1/2)u_y = 0$ // *Изв. вузов. Матем.*, 1979. №9. С. 21–28.
17. Капилевич М. Б. Об одном уравнении смешанного эллиптико-гиперболического типа // *Матем. сб.*, 1952. Т. 30, №1. С. 11–38.
18. Тихонов А. Н., Самарский А. А. *Уравнения математической физики.* М.: Наука, 1966. 724 с.
19. Евдокимов Ф. Ф. Задача Коши для уравнения $u_{xx} - (-y)^m u_{yy} - \lambda^2 u = 0$ / *Диффер. уравн. Тр. пединститутов РСФСР*, Вып. 12. Рязань, 1978. С. 45–50.
20. Уринов А. К., Окбоев А. Б. Видоизмененная задача Коши для одного вырождающегося гиперболического уравнения второго рода // *Укр. мат. ж.*, 2020. Т. 72, №1. С. 100–118.
21. Urinov A. K., Okboev A. B. On a Cauchy type problem for a second kind degenerating hyperbolic equation // *Lobachevskii J. Math.*, 2022. vol. 43, no. 3. pp. 793–803. EDN: QPEVQB. DOI: https://doi.org/10.1134/S1995080222060324.
22. Капилевич М. Б. О конфлюэнтных гипергеометрических функциях Горна // *Диффер. уравн.*, 1966. Т. 2, №9. С. 1239–1254.

Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2024, vol. 28, no. 1, pp. 45–58
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu2024

MSC: 35L15, 35L80

A modified Cauchy problem for an inhomogeneous equation of degenerate hyperbolic type of the second kind

***A. K. Urinov*[1,2], *A. B. Okboev*[2]**

[1] Fergana State University,
19, Murabbiylar st., Ferghana, 150100, Uzbekistan.
[2] V.I. Romanovskiy Institute of Mathematics
of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan,
46, University st., Tashkent, 100174, Uzbekistan.

Abstract

In this study, a modified Cauchy problem was examined for an inhomogeneous equation of degenerate hyperbolic type of the second kind in a characteristic triangle. It is known that degenerate hyperbolic equations have a singularity, meaning that the well-posedness of the Cauchy problem with initial data on the line of parabolic degeneracy does not always hold for them. Therefore, in such cases, it is necessary to consider the problem with initial conditions in a modified form.

In present paper, modified Cauchy problems with initial conditions were formulated on the line of parabolic degeneracy for an inhomogeneous equation of degenerate hyperbolic type of the second kind. The considered problem is reduced to a modified Cauchy problem for a homogeneous equation and to a Cauchy problem for an inhomogeneous equation with zero initial conditions. The solutions of the modified Cauchy problem for a homogeneous equation are derived from the general solution of the considered equation. The explicit solutions of the modified Cauchy problem with homogeneous conditions for the inhomogeneous equation are found using the Riemann method.

It is proven that the discovered solutions indeed satisfy the equation and the initial conditions.

Keywords: degenerate equation of hyperbolic type, modified Cauchy problem, existence and uniqueness of solution, Riemann function.

Received: 16th May, 2023 / Revised: 7th July, 2023 /

Differential Equations and Mathematical Physics
Research Article

Please cite this article in press as:
Urinov A. K., Okboev A. B. A modified Cauchy problem for an inhomogeneous equation of degenerate hyperbolic type of the second kind, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2024, vol. 28, no. 1, pp. 45–58. EDN: WZQYTV. DOI: 10.14498/vsgtu2024 (In Russian).

Authors' Details:

Akhmadjon K. Urinov https://orcid.org/0000-0002-9586-1799
Dr. Phys. & Math. Sci., Professor; Head of Department; Dept. of Mathematical Analysis and Differential Equations[1]; Leading Researcher[2]; e-mail: urinovak@mail.ru

Akmaljon B. Okboev https://orcid.org/0000-0000-0000-xxxx
PhD (Phys. & Math. Sci.); Senior Researcher[2]; e-mail: akmaljon12012@gmail.com

Accepted: 19th September, 2023 / First online: 3rd June, 2024

Competing interests. The authors declare that they have no competing interests.

Authors' contributions and responsibilities. All authors participated in the development of the article's concept and in writing the manuscript. The authors bear full responsibility for providing the final manuscript for publication. The final version of the manuscript was approved by all authors.

Funding. The research was conducted without funding.

References

1. Bitsadze A. V. *Equations of the Mixed Type*. Oxford, Pergamon, 1964, xiii+160 pp. DOI: https://doi.org/10.1016/C2013-0-01727-6.
2. Tersenov S. A. On the theory of hyperbolic equations with given degeneracy type on lines, *Sibirsk. Mat. Zh.*, 1961, vol. 2, no. 6, pp. 913–935 (In Russian).
3. Eleev V. A. Some problems of the type of the Cauchy problem and problems with a shift for a certain degenerate hyperbolic equation, *Differ. Uravn.*, 1976, vol. 12, no. 1, pp. 46–58 (In Russian).
4. Khayrullin R. S. *Zadacha Trikomi dlia uravneniia vtorogo roda s sil'nym vyrozhdeniem* [Tricomi Problem for an Equation of the Second Kind with Strong Degeneracy]. Kazan, Kazan. Univ., 2015, 236 pp. (In Russian). EDN: UWLDMB.
5. Mamadaliev N. K. On representation of a solution to a modified Cauchy problem, *Sib. Math. J.*, 2000, vol. 41, no. 5, pp. 889–899. EDN: JFHDUB. DOI: https://doi.org/10.1007/BF02674745.
6. Salakhitdinov M. S., Isamukhamedov S. S. Boundary value problems for a mixed type equation of the second kind, *Serdica Bulg. Math. Publ.*, 1977, vol. 3, pp. 181–188 (In Russian). http://www.math.bas.bg/serdica/1977/1977-181-188.pdf.
7. Sabitov K. B., Suleimanova A. Kh. The Dirichlet problem for a mixed-type equation with characteristic degeneration in a rectangular domain, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2009, vol. 53, no. 11, pp. 37–45. DOI: https://doi.org/10.3103/S1066369X0911005X.
8. Sabitov K. B., Suleimanova A. Kh. The Dirichlet problem for a mixed-type equation with characteristic degeneration in a rectangular domain, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2007, vol. 51, no. 4, pp. 42–50. DOI: https://doi.org/10.3103/S1066369X07040068.
9. Yuldashev T. K., Islomov B. I., Abdullaev A. A. On Solvability of a Poincare–Tricomi type problem for an elliptic–hyperbolic equation of the second kind, *Lobachevskii J. Math.*, 2021, vol. 42, no. 3, pp. 663–675. EDN: XNSEAX. DOI: https://doi.org/10.1134/S1995080221030239.
10. Urinov A. K., Usmonov D. A. An initial-boundary problem for a hyperbolic equation with three lines of degenerating of the second kind, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2022, vol. 26, no. 4, pp. 672–693 (In Russian). EDN: DIOYZF. DOI: https://doi.org/10.14498/vsgtu1962.
11. Urinov A. K., Okboev A. B. Nonlocal boundary-value problem for a parabolic-hyperbolic equation of the second kind, *Lobachevskii J. Math.*, 2020, vol. 41, no. 9, pp. 1886–1897. EDN: GDVVCS. DOI: https://doi.org/10.1134/S1995080220090280.
12. Okboev A. B. Tricomi problem for second kind parabolic hyperbolic type equation, *Lobachevskii J. Math.*, 2020, vol. 41, no. 1, pp. 58–70. EDN: BCPUBY. DOI: https://doi.org/10.1134/S1995080220010096.
13. Cibrario M. Intorno ad una equazione lineare alle derivate parziali delsecondo ordine di tipo misto iperbolico-ellittica, *Ann. Scuola Normale Sup. di Pisa, Ser. 2*, 1934, vol. 3, no. 3–4, pp. 255–285. http://eudml.org/doc/82880.
14. Karol' I. L. On the theory of equations of mixed type, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1953, vol. 88, no. 3, pp. 397–400 (In Russian).

15. Reyn J. W. Solutions in the hyperbolic region of an equation, which approximates Chaplygin's equation near the vacuum line, *J. Math. Phys.*, 1967, vol. 46, no. 1-4, pp. 28–42. DOI: https://doi.org/10.1002/sapm196746128.
16. Krikunov Yu. M. The modified Tricomi problem for the equation $u_{xx}+yu_{yy}+(-n+1/2)u_y = 0$, *Soviet Math. (Iz. VUZ)*, 1979, vol. 9, no. 208, pp. 20–27 (In Russian).
17. Kapilevich M. B. On an equation of mixed elliptic-hyperbolic type, *Mat. Sb.*, 1952, vol. 30, no. 1, pp. 11–38 (In Russian).
18. Tikhonov A. N., Samarskii A. A. *Uravneniia matematicheskoi fiziki* [Equations of Mathematical Physics]. Moscow, Nauka, 1969, 724 pp.
19. Evdokimov F. F. Cauchy problem for the equation $u_{xx} - (-y)^m u_{yy} - \lambda^2 u = 0$, In: *Differ. Uravn. Tr. Pedinstitutov RSFSR*, Iss. 12. Ryazan, 1978, pp. 45–50 (In Russian).
20. Urinov A. K., Okboev A. B. Modified Cauchy problem for one degenerated hyperbolic equation of the second kind, *Ukr. Math. J.*, 2020, vol. 72, no. 1, pp. 114–135. EDN: XDIOGV. DOI: https://doi.org/10.1007/s11253-020-01766-1.
21. Urinov A. K., Okboev A. B. On a Cauchy type problem for a second kind degenerating hyperbolic equation, *Lobachevskii J. Math.*, 2022, vol. 43, no. 3, pp. 793–803. EDN: QPEVQB. DOI: https://doi.org/10.1134/S1995080222060324.
22. Kapilevich M. B. Confluent hypergeometric Horn functions, *Differ. Uravn.*, 1966, vol. 2, no. 9, pp. 1239–1254 (In Russian).