



УДК 539.3

Способ определения параметров электрического сигнала для управления вынужденными установившимися колебаниями электровязкоупругих тел.

Математические соотношения

Н. В. Севодина, Н. А. Юрлова, Д. А. Ошмарин

Институт механики сплошных сред УрО РАН,
Россия, 614013, Пермь, ул. Академика Королева, 1.

Аннотация

Представлен способ определения величины электрического потенциала, генерирующегося на электродированной поверхности пьезоэлемента, который является частью кусочно-однородной электровязкоупругой конструкции, необходимого для формирования управляющего воздействия при активном управлении ее динамическим поведением в режиме вынужденных установившихся колебаний с целью минимизации амплитуды колебаний на выбранной резонансной частоте. Путем математических преобразований уравнений, описывающих собственные и вынужденные колебания таких электровязкоупругих тел, выведены соотношения, выражающие связь между величинами смещения узлов и электрического потенциала на электродированной поверхности пьезоэлемента. Данные формулы позволяют определить величину потенциала, который необходимо подать на пьезоэлемент для того, чтобы наилучшим образом демпфировать заданную моду колебаний конструкции. В результате численных экспериментов с использованием пакета прикладных программ конечно-элементного анализа ANSYS подтверждена возможность использования результатов решения задачи о собственных колебаниях для поиска оптимальной величины потенциала, характеризующего

Механика деформируемого твердого тела

Научная статья

© Коллектив авторов, 2023

© СамГТУ, 2023 (составление, дизайн, макет)

 Контент публикуется на условиях лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru) (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Образец для цитирования

Севодина Н. В., Юрлова Н. А., Ошмарин Д. А. Способ определения параметров электрического сигнала для управления вынужденными установившимися колебаниями электровязкоупругих тел. Математические соотношения // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2023. Т. 27, № 4. С. 679–703. EDN: GNEHRB. DOI: [10.14498/vsgtu2025](https://doi.org/10.14498/vsgtu2025).

Сведения об авторах

Наталья Витальевна Севодина  <https://orcid.org/0000-0001-9374-7135>

кандидат технических наук; научный сотрудник; отд. комплексных проблем механики деформируемых твердых тел; e-mail: natsev@icmm.ru

Наталья Алексеевна Юрлова  <https://orcid.org/0000-0003-3497-0358>

кандидат физико-математических наук, доцент; старший научный сотрудник;
e-mail: yurlova@icmm.ru

Дмитрий Александрович Ошмарин  <https://orcid.org/0000-0002-9898-4823>

кандидат технических наук; научный сотрудник; отд. комплексных проблем механики деформируемых твердых тел; e-mail: oshmarin@icmm.ru

управляющее электрическое воздействие, направленное на демпфирование заданных мод в режиме вынужденных установившихся колебаний. Эффективность применения полученных аналитических зависимостей продемонстрирована на примере консольно защемленной вязкоупругой пластинки с расположенным на ее поверхности пьезоэлементом. Предложенный подход позволяет существенно сократить временные и ресурсные затраты при математическом моделировании активного управления вынужденными установившимися колебаниями электровязкоупругих тел, определить требования к аппаратной реализации актуаторов и контроллеров блока управления такого рода smart-систем.

Ключевые слова: электровязкоупругость, пьезоэлемент, вынужденные установившиеся колебания, собственные колебания, управление колебаниями, смещения, электрический потенциал.

Получение: 25 мая 2023 г. / Исправление: 17 ноября 2023 г. /

Принятие: 13 декабря 2023 г. / Публикация онлайн: 27 декабря 2023 г.

1. Введение. В связи с развитием материальной базы и программного обеспечения в последнее время технология интеллектуальных (smart) конструкций становится все более привлекательной в приложениях, связанных с управлением механическим поведением различных объектов в режиме реального времени и без участия операторов. Как правило, доступ к таким объектам в процессе эксплуатации либо невозможен (элементы космических конструкций [1–4]), либо затруднен (подводные установки, высокогорные, находящиеся в агрессивной для человека среде и т.д.). Для обеспечения необходимых эксплуатационных требований (например, неизменность формы параболической антенны, отсутствие колебаний в отдельных элементах конструкций и т.п.) smart-конструкции могут автоматически адаптировать свою реакцию в форме перемещений, напряжений, амплитуды колебаний, резонансных частот и т.п. в зависимости от внешнего воздействия. Кроме этого, в последнее время наблюдается тенденция уменьшения размеров беспроводной электроники и увеличения жизнеспособности беспроводных электронных устройств. В условиях возрастания потребляемой мощности такого рода устройств привлекательным становится использование в качестве источника питания энергии колебаний, вызываемых внешним воздействием, что также делает проблему управления динамическим поведением конструкции актуальной [5].

На основе применения smart-технологий выделяются следующие стратегии управления механическим поведением объектов: пассивная, активная, адаптивная, полуактивная, активно-пассивная и т.д. Для изготовления активных управляемых или реагирующих smart-конструкций необходимы актуаторы, или исполнительные механизмы. При соединении с конструкцией (путем встраивания внутрь или закрепления на поверхности) актуаторы создают локальные деформации и напрямую воздействуют на механический отклик всей конструкции.

В настоящее время в качестве актуаторов применяют: сплавы с памятью формы, пьезоэлектрические материалы, электрострикционные и магнестрикционные материалы, электрореологические жидкости. Обзор функциональных материалов, используемых в интеллектуальных структурах, приведен в работах [6, 7]. Широкое использование пьезоматериалов, особенно для

управления механическим поведением конструкций, обусловлено двумя главными причинами. Наличие у пьезоматериалов прямого и обратного пьезоэлектрического эффекта позволяет использовать пьезоэлементы как в качестве датчиков, так и в качестве актуаторов [8, 9]. Вторая причина состоит в том, что технологически реализуемая для пьезоматериалов возможность создания электропроводящей поверхности позволяет подключить к smart-конструкции различные варианты электрических цепей [10, 11].

Существуют два принципиально различных подхода к активному гашению отклонений: с обратной связью и с упреждающей адаптивной фильтрацией [12].

В работе [13] приводится основательный обзор существующих активных методов управления колебаниями и проблем, связанных с их применением. Обзор различных активных и полуактивных систем управления, используемых в основном в гражданских сооружениях, представлен в [14]. Теории активного управления колебаниями посвящены монографии [15, 16].

При решении проблем, связанных с активным управлением механическим поведением конструкций, имеющих в своем составе элементы, способные выполнять роль актуаторов, основной проблемой является определение величины управляющего воздействия, передаваемого от актуатора на конструкцию, который вызывает ее требуемый отклик. Поэтому одной из основных задач является определение характеристик управляющего сигнала, подаваемого на актуатор.

Реализация активной стратегии управления колебаниями помимо использования сенсоров и актуаторов подразумевает применение блоков управления, которые обеспечивают прием сигнала с сенсора, его преобразование, усиление и подачу на актуатор. В основном внимание исследователей сосредоточено на разработке как алгоритмов управления, так и аппаратуры контроллера, позволяющего реализовать закон управления [17, 18]. Наиболее часто используемыми методами управления являются классические алгоритмы управления, такие как положительная позиционная обратная связь (PPF), LQR и PID-регулирование [19–21].

Обзор различных стратегий активного управления, включая линейный квадратичный, линейный квадратичный гауссовский, нейронные сети и т.д. в применении к гражданскому строительству представлены в [22]. Авторы работы [23] успешно использовали и сравнили с экспериментом адаптивные стратегии управления линейными квадратичными гауссовыми и нейронными сетями для управления колебаниями балки.

Однако определению величины управляющего сигнала, который должен быть сформирован в блоке управления, что могло бы способствовать реализации аппаратной части блока управления требуемой величины, исследователями практически не уделяется внимания.

При многообразии вариантов управления динамическими характеристиками smart-конструкций с пьезоэлементами (электровязкоупругих конструкций) поиск необходимых по величине управляющих параметров практически невозможен без математического моделирования. Из динамических характеристик наиболее важными являются резонансные частоты и параметры, определяющие демпфирующие свойства моделируемой системы, которые оцениваются по величине амплитуды при резонансном режиме или по скоро-

сти переходных процессов. В первом случае решается задача о вынужденных установившихся колебаниях, во втором — динамическая задача с начальными условиями. Эти задачи малоэффективны при поиске значений параметров, обеспечивающих требуемый отклик электровязкоупругой конструкции в силу следующих причин. Для получения амплитуд при резонансных режимах на основе решения задачи о вынужденных установившихся колебаниях требуется многократное решение задачи при различных частотах внешних воздействий, при этом найденные решения зависят от моделируемого варианта нагружения исследуемой системы.

Задача о собственных колебаниях в такой ситуации становится привлекательной для исследователей, позволяя существенно сократить требуемые затраты времени и вычислительных ресурсов. Это побудило использовать ее и при определении величины управляющего сигнала, подаваемого на актуатор, для получения требуемого механического отклика конструкции.

В настоящей работе предложен способ, позволяющий на основе решения задачи о собственных колебаниях исследуемой электровязкоупругой конструкции получить аналитические выражения для определения величины электрического потенциала, генерируемого на электродированной поверхности пьезоэлемента при его деформировании на рассматриваемой моде при вынужденных установившихся колебаниях в момент резонанса. При реализации активной стратегии управления динамическим поведением конструкции он является основой для формирования управляющего сигнала, подаваемого на актуатор для получения требуемого отклика конструкции, совершающей вынужденные установившиеся колебания.

2. Математическая постановка задач о собственных и вынужденных колебаниях электровязкоупругих тел. В настоящем разделе приводится краткая математическая формулировка задач о собственных и вынужденных колебаниях. Более подробное описание содержится в работах [24, 25].

Вариационное уравнение равновесия в случае квазистатического деформирования кусочно-однородного электровязкоупругого тела имеет вид

$$\int_{V_1} (\sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} - D_i \delta E_i + \rho_1 \ddot{u}_i \delta u_i) dV + \int_{V_2} (\sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} + \rho_2 \ddot{u}_i \delta u_i) dV = \int_{S_q} q_e \delta \varphi dS + \int_{S_\sigma} p_i \delta u_i dS. \quad (1)$$

При отсутствии внешних усилий уравнение (1) будет описывать собственные колебания электровязкоупругого тела:

$$\int_{V_1} (\sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} - D_i \delta E_i + \rho_1 \ddot{u}_i \delta u_i) dV + \int_{V_2} (\sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} + \rho_2 \ddot{u}_i \delta u_i) dV = 0. \quad (2)$$

Здесь приняты следующие обозначения: σ_{ij} , ε_{ij} и u_i — компоненты симметричного тензора напряжений Коши, тензора линейных деформаций и вектора перемещений соответственно; ρ_1 и ρ_2 — удельные плотности электрорупругого материала тела объема V_1 и вязкоупругого материала тела объема V_2 ; D_i , E_i — компоненты векторов электрической индукции и напряженности электрического поля; φ — электрический потенциал; $V = V_1 + V_2$, при

этом V_1 относится к его электроупругой, а V_2 — к вязкоупругой частям; $S = S_u + S_\sigma + S_q + S_\varphi + S_{p0}$ — полная поверхность кусочно-однородного тела, ограничивающая объем V . При этом на частях поверхности, ограничивающей объем V_2 , заданы перемещения u_i^0 (на S_u) и поверхностные усилия p_i (на S_σ); на частях поверхности, ограничивающей объем V_1 , заданы поверхностная плотность зарядов q_s (на S_q) и электрический потенциал φ_0 (на S_φ).

Электрический потенциал может быть подведен только к электродированной поверхности, для чего S_φ покрывается тонким электропроводящим слоем, толщиной и массой которого пренебрегаем; S_{p0} — часть поверхности тела, ограничивающая объем V_1 , не покрытая электродами или неэлектродированная поверхность. Считаем, что все составляющие кусочно-однородного тела идеально скреплены между собой.

Покрывание токопроводящим слоем части поверхности пьезоэлектрического тела делает ее эквипотенциальной, т.е. на всей электродированной поверхности выполняется условие потенциальности и значение электрического потенциала одинаково:

$$\varphi_{,j} = -E_j.$$

Связь между компонентами вектора перемещений и компонентами тензора деформаций описывается дифференциальными соотношениями Коши:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}).$$

Для изотермических процессов в линейных электровязкоупругих средах справедливы следующие физические соотношения [26]:

– для вязкоупругой части объема V_2 :

$$\begin{aligned} s_{ij} &= 2\tilde{G}\varepsilon_{ij}, \quad \sigma = \tilde{B}\vartheta, \\ \tilde{G} &= G_{\text{Re}} + iG_{\text{Im}} = G_{\text{Re}}\left(1 + i\frac{G_{\text{Im}}}{G_{\text{Re}}}\right) = G_{\text{Re}}(1 + i\eta_g), \\ \tilde{B} &= B_{\text{Re}} + iB_{\text{Im}} = B_{\text{Re}}\left(1 + i\frac{B_{\text{Im}}}{B_{\text{Re}}}\right) = B_{\text{Re}}(1 + i\eta_b), \end{aligned}$$

где $\sigma = \sigma_{jj}/3$ — среднее напряжение; ϑ — объемная деформация; \tilde{G} , \tilde{B} — комплексные динамические модули сдвига и объемного сжатия, в общем случае являющиеся функциями частоты колебаний Ω ; η_g , η_b — соответствующие тангенсы углов механических потерь; значения действительных G_{Re} , B_{Re} и мнимых частей G_{Im} , B_{Im} комплексных модулей определяются следующим образом:

$$G_{\text{Re}} = G_0 \left(1 - \int_{-\infty}^t H(\tau) \cos(\Omega\tau) dt\right), \quad G_{\text{Im}} = G_0 \int_{-\infty}^t H(\tau) \sin(\Omega\tau) dt, \quad (3)$$

$$B_{\text{Re}} = B_0 \left(1 - \int_{-\infty}^t R(\tau) \cos(\Omega\tau) dt\right), \quad B_{\text{Im}} = B_0 \int_{-\infty}^t R(\tau) \sin(\Omega\tau) dt; \quad (4)$$

G_0 , B_0 — мгновенные сдвиговые и объемные модули; H , R — ядра релаксации;

– для электроупругой части объемом V_1 :

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}^p \varepsilon_{kl} - \beta_{ijk} E_k, \quad D_k = \beta_{ijk} \varepsilon_{ij} + e_{kl} E_l,$$

где C_{ijkl}^p – тензор упругих констант электроупругого элемента; β_{ijk} и e_{kl} – тензоры пьезоэлектрических и диэлектрических коэффициентов. Механические граничные условия имеют вид

$$u_i = u_i^0 \text{ на } S_u, \quad \sigma_{ij} n_j = p_i \text{ на } S_\sigma,$$

а электрические –

$$n_i D_i = -q_s \text{ на } S_q, \quad \varphi = \varphi_0 \text{ на } S_\varphi.$$

Потенциал φ определяется с точностью до аддитивной постоянной, поэтому принимается, что на участке поверхности S_φ задан нулевой потенциал, тогда φ_0 будет иметь смысл разности потенциалов.

Решение задачи о вынужденных установившихся колебаниях электровязкоупругого тела ищется в виде

$$\bar{u}(x, t) = \bar{u}_0(x) e^{-i\Omega t}, \quad x = (x_1, x_2, x_3),$$

а решение задачи о собственных колебаниях –

$$\bar{u}(x, t) = \bar{u}_0(x) e^{-i\omega t}, \quad x = (x_1, x_2, x_3).$$

Здесь $\bar{u}_0(x) = \{u_1(x), u_2(x), u_3(x), \varphi(x)\}$ – обобщенный вектор состояния, содержащий как компоненты механических перемещений u_1, u_2, u_3 , так и компоненту электрического потенциала φ ; ω – круговая комплексная собственная частота колебаний, $\omega = \omega_{\text{Re}} + i \omega_{\text{Im}}$, при этом ω_{Re} имеет смысл собственной частоты колебаний, а ω_{Im} характеризует скорость их затухания; Ω – круговая частота внешнего возбуждения.

Принимая, что собственные колебания вязкоупругого тела происходят с медленно меняющимися амплитудами и начальные возмущения не влияют на поведение системы в дальнейшем, можно определить компоненты комплексных динамических модулей $G_{\text{Re}}, G_{\text{Im}}, B_{\text{Re}}, B_{\text{Im}}$ из соотношений (3), (4) заменой частоты Ω на ω_{Re} .

В рамках данной работы принято, что составляющие комплексных динамических модулей вязкоупругого материала тела не зависят от частоты колебаний в пределах некоторого диапазона частот, ограниченного окрестностью рассматриваемой собственной или резонансной частоты.

2.1. Собственные колебания электровязкоупругого тела. Рассмотрим собственные колебания вязкоупругого тела, к поверхности которого присоединен пьезоэлемент, электрические граничные условия на котором соответствуют режиму холостого хода, т.е. одна электродированная поверхность пьезоэлемента заземлена (потенциал равен 0), а вторая электродированная поверхность свободна от электрических нагрузок. Такой объект представляет собой электровязкоупругое тело. При численной реализации задачи о собственных колебаниях электровязкоупругих тел методом конечных элементов

уравнение (2), описывающее собственные колебания, в матричной форме принимает вид

$$(-\omega^2[M] + [K_{\text{Re}}] + i[K_{\text{Im}}] + [K_p])\{\delta\} = \{0\}.$$

Здесь $[M]$ — матрица масс электровязкоупругого тела; $[K_p]$ — матрица жесткости упругого пьезоэлемента;

$$[K_{\text{Re}}] + i[K_{\text{Im}}] = (G_{\text{Re}}(1 + i\eta_g)[K_G] + B_{\text{Re}}(1 + i\eta_b)[K_B])$$

— матрица жесткости вязкоупругой части тела [27]; $[K_G]$, $[K_B]$ — объемная и сдвиговая компоненты матрицы жесткости; $\{\delta\} = \{u_1, u_2, u_3, \varphi\}^T$ — вектор узловых переменных.

Пусть тангенсы углов механических потерь сдвиговой и объемной частей комплексных динамических модулей равны между собой: $\eta_g = \eta_b = \eta$. Тогда выражение для матрицы жесткости вязкоупругой части тела можно записать в виде

$$[K_{\text{Re}}] + i[K_{\text{Im}}] = (1 + i\eta)(G_{\text{Re}}[K_G] + B_{\text{Re}}[K_B]) = (1 + i\eta)[K_\nu],$$

где $[K_\nu]$ — матрица жесткости вязкоупругого тела без учета вязкоупругих свойств (и только при вычислении элементов матрицы $[K_\nu]$ для того, чтобы получить уравнение собственных колебаний в виде, соответствующем принятому в пакете прикладных программ ANSYS, считаем, что $\eta_g = \eta_b = 0$).

Тогда окончательно уравнение собственных колебаний (2) в матричной форме может быть записано следующим образом:

$$(-\omega^2[M] + [K_p] + (1 + i\eta)[K_\nu])\{\delta\} = \{0\}. \quad (5)$$

В программном комплексе ANSYS уравнение собственных колебаний электровязкоупругого тела имеет вид

$$(-\omega^2[M] + [K] + i\omega[C])\{\delta\} = \{0\}.$$

Здесь $[K] = [K_p] + [K_\nu]$ — матрица жесткости составной конструкции, состоящей из основной конструкции, выполненной из вязкоупругого материала и упругого пьезоэлемента; $[K_p]$ — матрица жесткости упругого пьезоэлемента; $[K_\nu]$ — матрица жесткости вязкоупругого материала основной конструкции без учета вязкоупругих свойств. Вязкоупругие свойства материала конструкции в ANSYS [28] учитываются в матрице демпфирования $[C]$.

Принимая во внимание допущения о независимости компонент комплексных модулей от частоты, а также о равенстве тангенсов углов механических потерь для объемного и сдвигового модулей, выберем реализованный в ANSYS вариант, при котором $[C] = 2i\beta[K_\nu]$, $\beta = \eta_g/2 = \eta_b/2$, как наиболее близкий к рассматриваемому в работе варианту учета вязкоупругих свойств в задаче о собственных колебаниях.

Окончательно уравнение собственных колебаний рассматриваемого объекта в матричной форме в ANSYS имеет вид, аналогичный (5):

$$(-\omega^2[M] + [K_p] + (1 + 2i\beta)[K_\nu])\{\delta\} = \{0\}. \quad (6)$$

Решением уравнения (6) будут комплексные собственные частоты колебаний $\omega_i^{o/c}$ (собственные частоты колебаний в режиме холостого хода) и соответствующие им комплексные собственные векторы (собственные формы) колебаний $\{\delta\}_i = \{\delta^{o/c}\}_i$, где i — их количество, определяемое степенью дискретизации рассматриваемой системы.

Вектор собственной формы $\{\delta^{o/c}\}$ определяется с точностью до некоторой постоянной, следовательно, все компоненты вектора (включая потенциал на электродированной поверхности пьезоэлемента $V_{o/c}$) являются относительно величинами.

Домножим уравнение (6) слева на вектор, комплексно сопряженный с собственным вектором, соответствующим j -той форме колебаний ($i \neq j$):

$$-(\omega_i^{o/c})^2 \{\bar{\delta}^{o/c}\}_j^\top [M] \{\delta^{o/c}\}_i + \{\bar{\delta}^{o/c}\}_j^\top \{[K_p] + (1 + 2i\beta)[K_\nu]\} \{\delta^{o/c}\}_i = \{0\}.$$

С учетом ортогональности собственных форм колебаний и нормировки относительно матрицы масс $[M]$ имеем

$$\begin{aligned} \{\bar{\delta}^{o/c}\}_j^\top [M] \{\delta^{o/c}\}_i &= \delta_{ij} \implies \\ \{\bar{\delta}^{o/c}\}_i^\top [M] \{\delta^{o/c}\}_i &= 1. \end{aligned} \quad (7)$$

Отсюда следует, что

$$\{\bar{\delta}^{o/c}\}_j^\top \{[K_p] + (1 + 2i\beta)[K_\nu]\} \{\delta^{o/c}\}_i = \delta_{ij} (\omega_i^{o/c})^2,$$

или

$$\{\bar{\delta}^{o/c}\}_i^\top \{[K_p] + (1 + 2i\beta)[K_\nu]\} \{\delta^{o/c}\}_i = (\omega_i^{o/c})^2. \quad (8)$$

Представим получаемый в результате решения задачи о собственных колебаниях вектор искомым неизвестных $\{\delta^{o/c}\}$, содержащий компоненты вектора перемещений и электрический потенциал, следующим образом:

$$\{\delta^{o/c}\}_i = \{\delta_0\}_i + V_{o/c} \{\delta_1\}_i, \quad (9)$$

где $\{\delta_1\}_i$ — вектор, содержащий 1 на позиции, соответствующей значению потенциала на верхнем электроде пьезоэлемента, при этом все остальные компоненты вектора равны нулю; $\{\delta_0\}_i$ — вектор собственной формы колебаний конструкции с нулевым значением на позиции, соответствующей потенциалу на верхнем электроде пьезоэлемента. В дальнейшем индекс i при написании опустим, но будем иметь в виду, что рассматривается исследуемая i -тая форма колебаний.

Запишем уравнение (7) с учетом (9):

$$\begin{aligned} (\{\bar{\delta}_0\} + V_{o/c} \{\bar{\delta}_1\}^\top) [M] (\{\delta_0\}_i + V_{o/c} \{\delta_1\}) &= \\ = \{\bar{\delta}_0\}^\top [M] \{\delta_0\} + \{\bar{\delta}_0\}^\top V_{o/c} [M] \{\delta_1\} + \\ + V_{o/c} \{\bar{\delta}_1\}^\top [M] \{\delta_0\} + (V_{o/c})^2 \{\bar{\delta}_1\}^\top [M] \{\delta_1\} &= 1. \end{aligned} \quad (10)$$

Заметим, что $[M]\{\delta_1\} = \{0\}$, $\{\bar{\delta}_1\}^T[M]\{\delta_0\} = 0$. Следовательно, уравнение (10) сводится к уравнению

$$\{\bar{\delta}_0\}_i^T [M]\{\delta_0\}_i = 1.$$

Перепишем левую часть уравнения (8) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \{\bar{\delta}^{o/c}\}^T \{[K_p] + (1 + 2i\beta)[K_\nu]\} \{\delta^{o/c}\}_i &= \\ &= (\{\bar{\delta}_0\} + V_{o/c}\{\bar{\delta}_1\})^T [K_p](\{\delta_0\} + V_{o/c}\{\delta_1\}) + \\ &+ (\{\bar{\delta}_0\} + V_{o/c}\{\bar{\delta}_1\})^T (1 + 2i\beta)K_\nu(\{\delta_0\} + V_{o/c}\{\delta_1\}) = \\ &= \{\bar{\delta}_0\}^T [K_p]\{\delta_0\} + V_{o/c}\{\bar{\delta}_0\}^T [K_p]\{\delta_1\} + V_{o/c}\{\bar{\delta}_1\}^T [K_p]\{\delta_0\} + \\ &+ (V_{o/c})^2 \{\bar{\delta}_1\}^T [K_p]\{\delta_1\} + (1 + 2i\beta)\{\bar{\delta}_0\}^T \{[K_\nu]\{\delta_0\} + V_{o/c}\{\bar{\delta}_0\}^T [K_\nu]\{\delta_1\} + \\ &+ V_{o/c}\{\bar{\delta}_1\}^T [K_\nu]\{\delta_0\} + (V_{o/c})^2 \{\bar{\delta}_1\}^T [K_\nu]\{\delta_1\}\} \end{aligned}$$

и введем обозначения:

$$\begin{aligned} A_\nu &= \{\bar{\delta}_1\}^T [K_\nu]\{\delta_1\}, & A_p &= \{\bar{\delta}_1\}^T [K_p]\{\delta_1\}, \\ C_\nu &= \{\bar{\delta}_0\}^T [K_\nu]\{\delta_0\}, & C_p &= \{\bar{\delta}_0\}^T [K_p]\{\delta_0\}, \\ B_\nu &= \{\bar{\delta}_0\}^T [K_\nu]\{\delta_1\} + \{\bar{\delta}_1\}^T [K_\nu]\{\delta_0\}, & B_p &= \{\bar{\delta}_0\}^T [K_p]\{\delta_1\} + \{\bar{\delta}_1\}^T [K_p]\{\delta_0\}. \end{aligned} \quad (11)$$

Проанализировав полученные выражения, имеем $A_\nu = B_\nu = 0$, так как в матрице $[K_\nu]$, содержащей только компоненты, соответствующие узловым неизвестным, относящимся к конструкции без пьезоэлемента, строки, относящиеся к ненулевым значениям вектора $\{\delta_1\}$ — нулевые, а также в силу симметрии матриц имеем

$$\{\bar{\delta}_0\}^T [K_p]\{\delta_1\} = \{\bar{\delta}_1\}^T [K_p]\{\delta_0\} \implies 2\{\bar{\delta}_1\}^T [K_p]\{\delta_0\} = B_p.$$

С учетом введенных обозначений окончательно получим

$$A_p(V_{o/c})^2 + B_p V_{o/c} + C_p + (1 + 2i\beta)C_\nu - (\omega_i^{o/c})^2 = 0. \quad (12)$$

2.2. Вынужденные установившиеся колебания электровязкоупругих тел. В матричной форме разрешающая система уравнений для задачи о вынужденных установившихся колебаниях имеет вид

$$(-\Omega^2[M] + [K_p] + (1 + 2i\beta)[K_\nu])\{\delta\}_{df} = \{F\}, \quad (13)$$

где $\{\delta\}_{df}$ — вектор искомого решения, форма колебаний; $\{F\}$ — вектор внешней силовой нагрузки. Все матрицы, входящие в уравнение (13), такие же, как и в уравнении (6), но величины Ω и $\omega_{o/c}$ — разные, поскольку Ω — действительное число, а $\omega_{o/c}$ — комплексное.

Поскольку на каждой частоте вынужденных колебаний реализуется своя форма колебаний $\{\delta\}_{df}$, а резонанс появляется в том случае, когда частоты вынужденных и собственных колебаний совпадают (или близки), уместно предположение о том, что в режиме вынужденных колебаний в момент

резонанса форма колебаний конструкции совпадает с формой собственных колебаний конструкции или близка к ней. При этом решая задачу о свободных колебаниях, можно определить все возможные формы деформирования конструкции, которые будут наблюдаться при резонансах на различных частотах.

Таким образом, предположим, что искомый вектор неизвестных $\{\delta\}_{df}$ имеет вид $\{\delta\}_{df} = \alpha_{df}(\{\delta_0\} + V_{o/c}\{\delta_1\})$, т.е. пропорционален вектору собственных колебаний (9) с коэффициентом пропорциональности α_{df} .

Домножая уравнение (13) слева на собственный комплексно сопряженный вектор $(\{\bar{\delta}\}_0 + V_{o/c}\{\bar{\delta}\}_1)^\top$ и вводя обозначения (11), получим

$$A_p(V_{o/c})^2 + B_p V_{o/c} + [C_p + (1 + 2i\beta)C_\nu - (\Omega)^2] - \frac{Q}{\alpha_{df}} = 0, \quad (14)$$

где $Q = \{\bar{\delta}_0\}^\top \{F\}$. Отметим, что $\{\bar{\delta}_0\}^\top \{F\} = 0$. Параметр Q обозначает произведение величины узловых сил на величину смещения точек приложения этих усилий в направлении их действия, выбранных из собственного вектора. Например, если заданы три силы в узлах B_1, B_2, B_3 в направлениях $x, y, z - F_x, F_y, F_z$, то параметр Q определяется как $Q = F_x \cdot (U_{0x})_{B_1} + F_y \cdot (U_{0y})_{B_2} + F_z \cdot (U_{0z})_{B_3}$, где U_{0x}, U_{0y}, U_{0z} — смещения узлов B_1, B_2, B_3 в направлении осей x, y, z , выбранные из собственного вектора, соответствующего рассматриваемой моде колебаний.

Согласно (14), коэффициент пропорциональности α_{df} определяется по формуле

$$\alpha_{df} = \frac{Q}{A_p(V_{o/c})^2 + B_p V_{o/c} + [C_p + (1 + 2i\beta)C_\nu - \Omega^2]}.$$

С учетом (12) получим

$$\alpha_{df} = \frac{Q}{(\omega^{o/c})^2 - \Omega^2}.$$

Поскольку параметр α_{df} является в рассматриваемой задаче коэффициентом пропорциональности между вектором собственной формы колебаний и искомым вектором неизвестных, при i -том резонансе потенциал на электродированной поверхности пьезоэлемента V^* и смещение $(U)_A$ некоторой точки слежения A определяются по следующим формулам:

$$V^* = \alpha_{df} V_{o/c} = V_{o/c} \frac{Q}{(\omega^{o/c})^2 - \Omega^2}, \quad (15)$$

$$(U)_A = \alpha_{df} (U_0)_A = (U_0)_A \frac{Q}{(\omega^{o/c})^2 - \Omega^2}, \quad (16)$$

где $V_{o/c}, (U_0)_A$ — потенциал на электродированной поверхности пьезоэлемента и смещение некоторой точки A , за которой идет наблюдение, определенные из вектора собственной формы колебаний для рассматриваемой собственной частоты колебаний, близкой к исследуемому резонансу.

Частоту внешнего возбуждения, при которой отыскивается параметр α_{df} , определяем с учетом того, что при резонансе смещения точек тела максимальны, т.е. выполняется условие равенства нулю производной от смещения

по резонансной частоте вынужденных установившихся колебаний:

$$\frac{\partial(U)_A}{\partial\Omega} = (U_0)_A \frac{\partial\alpha_{df}}{\partial\Omega} \implies \Omega \approx \sqrt{(\omega_{\text{Re}}^{o/c})^2 - (\omega_{\text{Im}}^{o/c})^2}. \quad (17)$$

Анализируя полученные результаты, можно сделать вывод о том, что, используя полученные выражения (15) и (17), можно определить значение электрического потенциала, при котором достигается такая же величина смещения точек конструкции, как при приложении соответствующего механического усилия.

При этом не требуется решать задачу о вынужденных установившихся колебаниях для диапазона частот в окрестности некоторого резонанса. Достаточно решить задачу о собственных колебаниях исследуемой системы (конструкция с пьезоэлементом), определить спектр собственных частот колебаний и соответствующие им собственные векторы. Затем для рассматриваемой моды колебаний выбрать из соответствующего собственного вектора узловые неизвестные, соответствующие потенциалу на электродированной поверхности пьезоэлемента, смещению узла приложения вынуждающего усилия (далее этот узел будет обозначаться «точка B ») и узла, за которым ведется наблюдение (далее — «точка A »).

Следует отметить, что предложенный способ справедлив для резонансных частот колебаний, для которых формы в режиме вынужденных установившихся колебаний близки к собственным формам колебаний конструкции, реализующихся на собственных частотах, ближайших к резонансным.

3. Тестирование предложенного способа. Проверкой правильности предложенного подхода и полученных выражений (15) и (17) для определения величин смещения точки слежения и потенциала на электродированной поверхности пьезоэлемента, требуемого для достижения этого смещения, основанного на решении задачи о собственных колебаниях, может являться сравнение с аналогичными величинами в момент резонанса, снятыми с амплитудно-частотных характеристик (АЧХ) смещения и потенциала, полученными при решении задачи о вынужденных установившихся колебаниях системы.

В качестве объекта исследования рассмотрим консольно заземленную прямоугольную пластину со следующими размерами: длина $l_1 = 500$ мм, ширина $b_1 = 60$ мм, толщина $h_1 = 2$ мм (рис. 1). К поверхности пластины присоединен прямоугольный пьезоэлемент длиной $l_p = 50$ мм, шириной $b_p = 20$ мм и толщиной $h_p = 0.3$ мм. Верхняя и нижняя поверхности пьезоэлемента электродированы. Центр масс пьезоэлемента смещен на 55 мм от заделки и расположен на продольной оси симметрии пластины.

Материал пластины обладает вязкоупругими свойствами, которые описываются частотно-независимыми комплексными динамическими модулями сдвига и объемного сжатия, действительные и мнимые компоненты которых следующие: $G_{\text{Re}} = 6.71 \cdot 10^8$ Па, $B_{\text{Re}} = 3.33 \cdot 10^{10}$ Па, $G_{\text{Im}} = 6.71 \cdot 10^7$ Па, $B_{\text{Im}} = 3.33 \cdot 10^9$ Па. Удельная плотность материала $\rho_{el} = 1190$ кг/м³. Пьезоэлемент выполнен из пьезокерамики ЦТС-19, поляризованной в направлении оси z , с физико-механическими характеристиками в соответствии с приведенными в работе [25].

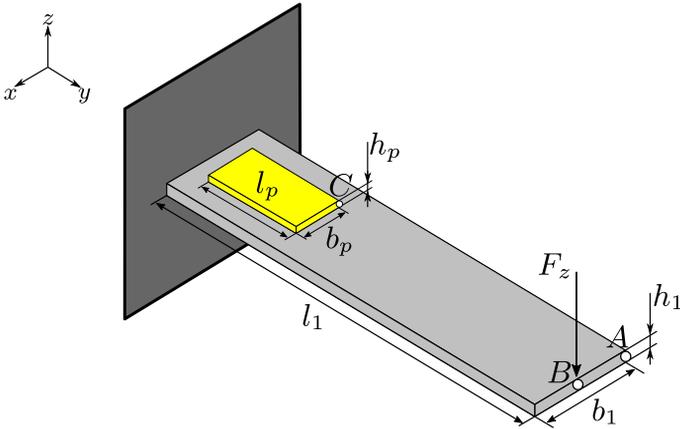


Рис. 1. Схема консольно защемленной пластинки с прикрепленным к ее поверхности пьезоэлементом

[Figure 1. A schematic diagram of a cantilever-clamped plate with a piezoelement attached to its surface]

Решим задачу о собственных колебаниях рассматриваемой системы и ограничимся первыми двумя собственными частотами колебаний:

$$\begin{aligned}\omega_1^{o/c} &= \omega_{\text{Re}1} + i\omega_{\text{Im}1} = 1.96 + i 0.19, \\ \omega_2^{o/c} &= \omega_{\text{Re}2} + i\omega_{\text{Im}2} = 12.01 + i 1.15,\end{aligned}$$

входящими в диапазон частот от 0 до 20 Гц, в котором реализуются две изгибные моды колебаний, определяемые двумя собственными векторами. Будем считать этот частотный диапазон заданным.

Далее для пластинки с пьезоэлементом рассмотрим задачу о вынужденных установившихся колебаниях, возбуждаемых с частотой Ω действием осевой гармонической силы $\vec{F} = \{0, 0, F_z\}$, приложенной к точке B (рис. 1). При значениях Ω в диапазоне от 1.9 до 2 Гц (окрестность первой собственной частоты) и от 12.0 до 12.2 Гц (окрестность второй собственной частоты) на АЧХ модуля смещения точки слежения A и АЧХ модуля потенциала V на электродированной поверхности пьезоэлемента реализуются два резонанса. При этом при колебаниях системы с частотой Ω , соответствующей окрестности первой собственной частоты колебаний, возбуждающая сила принималась $F_z = -0.02$ Н, а второй $F_z = -0.735$ Н. Различные значения возбуждающего усилия приняты для обеспечения сопоставимого уровня смещений точки слежения A на разных резонансных частотах.

На рис. 2 приведены АЧХ смещения $(U_z)_A$ точки A, а на рис. 3 — потенциала V в диапазоне частот первого и второго резонансов.

Далее определим все параметры, входящие в формулы (15) и (16). Отметим, что при задании нагрузки только в осевом направлении F_z параметр Q определяется по формуле $Q = \{\bar{\delta}_0\}^T \{F\} = F_z \{\bar{\delta}_0\}^T \{\delta_F\}$. Отметим, что $\{\delta_F\}$ — вектор, в котором отличны от нуля только те компоненты, которые соответствуют приложенной силе F_z . Произведение $\{\bar{\delta}_0\}^T \{\delta_F\}$ представляет собой величину смещения $(U_0)_B$ в направлении действия приложенной силы F_z , выбранного из вектора собственной формы колебаний. Таким образом,

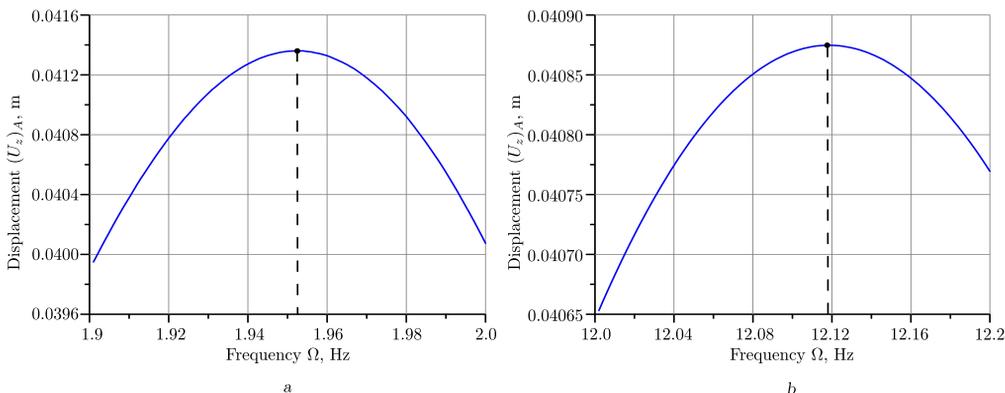


Рис. 2. Амплитудно-частотные характеристики смещения $(U_z)_A$ точки A в диапазоне частот первого (а) и второго (б) резонансов

[Figure 2. Frequency response of the displacement $(U_z)_A$ of the point A in the frequency range of the first (a) and second (b) resonances]

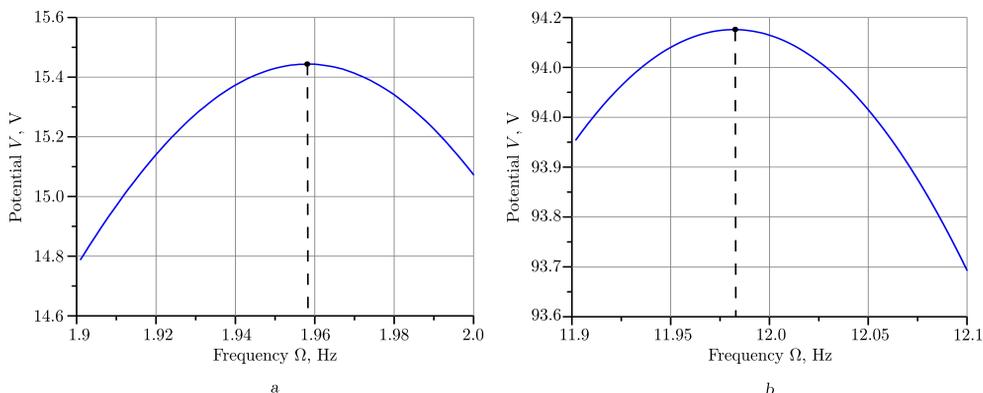


Рис. 3. Амплитудно-частотные характеристики потенциала V в диапазоне частот первого (а) и второго (б) резонансов

[Figure 3. Frequency response of the potential V in the frequency range of the first (a) and second (b) resonances]

$Q = \{\bar{\delta}_0\}^T F_z \{\delta_F\} = F_z (U_0)_B$. В соответствии с этим выражения (15), (16) примут следующий вид:

$$V^* = \alpha_{df} V_{o/c} = \frac{Q}{(\omega^{o/c})^2 - \Omega^2} V_{o/c} = F_z \frac{(U_0)_B}{(\omega^{o/c})^2 - \Omega^2} V_{o/c} = F_z \frac{(U_0)_B}{2\omega_{\text{Re}}\omega_{\text{Im}}} V_{o/c}, \quad (18)$$

$$\begin{aligned} (U_z)_A &= \alpha_{df} (U_{z0})_A = \frac{Q}{(\omega^{o/c})^2 - \Omega^2} (U_{z0})_A = \\ &= F_z \frac{(U_0)_B}{(\omega^{o/c})^2 - \Omega^2} (U_{z0})_A = F_z \frac{(U_0)_B}{2\omega_{\text{Re}}\omega_{\text{Im}}} (U_{z0})_A. \end{aligned} \quad (19)$$

В табл. 1 для рассматриваемых мод колебаний системы приведены все исходные данные (параметры, полученные на основе собственных векторов), результаты решения задачи о вынужденных установившихся колебаниях и соответствующие значения величин, полученных с использованием формул (18),

(19). Отметим, что данные, полученные из собственных векторов колебания, не имеют размерности, так как являются относительными величинами, имеющими смысл коэффициента пропорциональности между приложенным воздействием и откликом системы. Различие в значениях оцениваемых параметров при сравнении величин определялось по их модулям и не превышало 3.5 %.

Таблица 1

Сравнение результатов, полученных численным решением задач о собственных колебаниях и о вынужденных установившихся колебаниях, с полученными по формулам (15), (16) [Comparison of the results obtained by numerical solution of natural and forced steady-state vibration problems with those obtained by Eqs. (15), (16)]

Data for calculations	1st mode	2nd mode
Natural vibration		
Displacement $(U_0)_A$ (dimensionless quantity)	7.756	-7.6598
Displacement $(U_0)_B$ (dimensionless quantity)	7.756	-7.6617
Potential $V_{o/c}$ (dimensionless quantity)	2855.42	18144.32
Forced steady-state vibration		
Exciting force F_z , N	-0.02	-0.74
Displacement $(U_z)_A$ by Eq. (16), m	0.0413	-0.0395
Displacement $(U_z)_A$ by ANSYS, m	0.0413	-0.0409
Difference, %	0.0	3.42
Potential V^* by Eq. (15), V	15.21	93.615
Potential V^* by ANSYS, V	15.44	93.517
Difference, %	1.29	0.10

Полученные результаты демонстрируют, что на основе соотношений (15), (16) можно подобрать величины механической и электрической нагрузок, при которых изгибная деформация конструкции при вынужденных установившихся колебаниях будет иметь заданную величину. Другими словами, задавая величину коэффициента пропорциональности α_{df} как $\alpha_{df} = U_A/U_0$ (U_A — требуемая величина смещения точки слежения A ; U_0 — величина смещения этой точки, определяемого собственным вектором, получаемым при решении задачи о собственных колебаниях), можно найти значение силы или электрического потенциала, которые нужно приложить, чтобы получить требуемое смещение U_A .

4. Алгоритм определения величины потенциала, обеспечивающего демпфирование заданной моды колебаний. Применение пьезоэлемента в составе системы позволяет реализовать управление ее механическим поведением, основанное на использовании обратного пьезоэффекта, суть которого состоит в том, что если на электродированную поверхность пьезоэлемента подать электрический потенциал (электрическое нагружение), то пьезоэлемент деформируется, изменяя при этом полную деформацию всей системы.

Определим оптимальные величины потенциалов, которые необходимо подать на свободную электродированную поверхность пьезоэлемента для того, чтобы демпфировать первые две изгибные моды колебаний пластинки с пьезоэлементом, V^{opt} , на основе решения задачи о вынужденных установившихся колебаниях.

Для этого понадобятся резонансные величины смещения точки A при действии силы $\vec{F} = \{0, 0, F_z\}$, изменяющейся по гармоническому закону с частотой Ω при отсутствии потенциала на пьезоэлементе, которые приведены в табл. 1.

Решить поставленную задачу можно двумя способами.

Первый способ состоит в следующем. Необходимо получить решения серии задач о вынужденных установившихся колебаниях системы, находящейся под действием заданного силового возбуждения, дополнительно прикладывая к электродированной поверхности пьезоэлемента различный по величине потенциал из заранее неизвестного диапазона его изменения, фиксируя на АЧХ величину смещения точки слежения A в моменты резонанса $(U_z)_A$.

Минимальное по величине смещение этой серии расчетов будет определять искомую величину оптимального потенциала V^{opt} . В данных расчетах необходимо учитывать в математическом представлении потенциала его знак «+» или «-».

На рис. 4 приведено изменение величины смещения точки A в момент резонанса в зависимости от величины потенциала V^* , подаваемого на пьезоэлемент, с учетом его знака. Так, для демпфирования первой моды колебаний знак оптимального потенциала должен быть «-», а для демпфирования второй моды — «+».

Второй способ определения величины оптимального потенциала основан на результатах, представленных в работе [29], которые показали, что минимальная величина механического отклика системы при одновременном действии двух нагружающих факторов (механического — усилие и электрического — потенциал) наблюдается в случае, когда величина механического отклика системы при действии только механической нагрузки совпадает с величиной механического отклика при действии только электрической нагрузки, и эти нагрузки действуют в противофазе. Это условие можно записать в виде

$$(U_z)_A|_{F=F_z} = -(U_z)_A|_{V=V^{opt}}. \quad (20)$$

Чтобы удовлетворить данному условию, при поиске величины оптимального потенциала необходимо помимо решения задачи о вынужденных колебаниях системы под действием только заданного усилия (первая задача) также решить серию задач о вынужденных установившихся колебаниях системы под действием только приложенного к электродированной поверхности потенциала, изменяющегося в некотором заранее неизвестном диапазоне с учетом изменения знака (вторая задача), а затем определить то значение потенциала, при котором отклик в первой задаче равен отклику во второй задаче, но имеет противоположный знак.

Для поиска величины оптимального потенциала воспользуемся условием (20). Запишем смещение, которое в задаче о вынужденных установившихся колебаниях определяется по формуле (19) в виде

$$(U_z)_A = \alpha_{df}(U_0)_A = \frac{Q}{2\omega_{\text{Re}}\omega_{\text{Im}}}(U_0)_A. \quad (21)$$

Задача о колебаниях системы под действием потенциала, подаваемого на электродированную поверхность пьезоэлемента и изменяющегося по гармо-

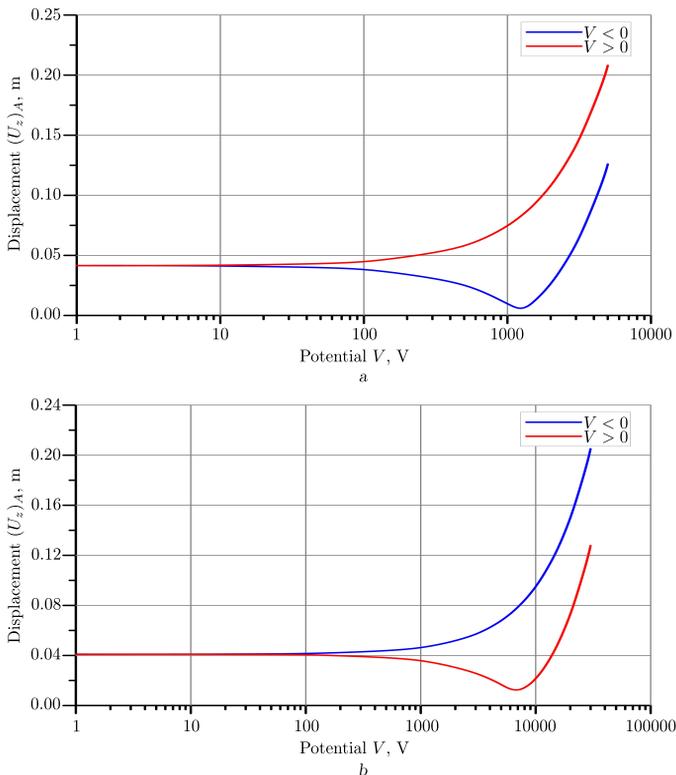


Рис. 4. Влияние потенциала V^* , подаваемого на электродированную поверхность пьезоэлемента, на смещение $|(U_z)_A|$ при первом (а) и втором (б) резонансах при вынужденных установившихся колебаниях системы

[Figure 4. The influence of the potential V^* supplied to the electroded surface of a piezoelectric element on the displacement $|(U_z)_A|$ at the first (a) and second (b) resonances during forced steady-state vibrations of the system]

ническому закону, относится к параметрическим колебаниям, поскольку изменение потенциала — это изменение внутреннего параметра системы. Обозначим его ξ .

Так как рассматривается линейная постановка задачи, выражение для смещения точки слежения A системы, совершающей параметрические колебания под действием заданного потенциала V_z , можно записать в виде

$$(U_z(\xi))_A|_{V^*=V_z} = V_z \gamma_u(\xi). \tag{22}$$

Здесь $\gamma_u(\xi) = (U_z(\xi))_A|_{V^*=1}$ — коэффициент пропорциональности, который имеет смысл резонансного смещения точки слежения при подаче на пьезоэлемент единичного потенциала в задаче параметрических колебаний системы.

В отличие от задачи о вынужденных установившихся колебаниях, в которой значения смещений точек системы определяются не только величиной возбуждающих усилий, но и местом их приложения и направлением действия, при параметрических колебаниях, вызванных действием потенциала, подаваемого на пьезоэлемент, параметр, определяющий смещения точек системы, только один — величина потенциала с учетом его знака.

Запишем уравнение (20) с учетом (21) и (22). Здесь величина потенциала на электродированной поверхности пьезоэлемента будет иметь смысл оптимальной величины V^{opt} для демпфирования рассматриваемой моды колебаний:

$$V^{opt} = -\frac{Q}{2\omega_{\text{Re}}\omega_{\text{Im}}} \frac{(U_0)_A}{\gamma_u(\xi)}. \quad (23)$$

Таким образом, алгоритм для получения величины потенциала, который необходимо подать на пьезоэлемент для демпфирования заданной моды колебаний, следующий.

1. Получить решение задачи модального анализа — собственную частоту и соответствующий ей вектор собственной формы колебаний, реализующиеся в заданном частотном диапазоне. Частотный диапазон задается из условия близости собственной частоты колебаний к резонансной частоте Ω исследуемой моды колебаний. Из этого вектора определяются $(U_0)_A$, V_{qc} , а также параметр Q .
2. Решить задачу параметрических колебаний, вызываемых приложением единичного потенциала к пьезоэлементу $V^* = 1$, затем на АЧХ точки слежения найти величину ее смещения $\gamma_u(\xi) = (U_z(\xi))_A|_{V^*=1}$ в момент исследуемого резонанса. Величины $\gamma_u(\xi)$ можно определять сразу для нескольких резонансных пиков (аналогично тому, что при решении модальной задачи можно сразу определить несколько собственных частот колебаний).
3. По формуле (23) рассчитать оптимальное значение подаваемого на пьезоэлемент потенциала V^{opt} , позволяющего демпфировать колебания рассматриваемой моды от действия возбуждающих усилий, реализующейся на резонансной частоте, близкой к собственной частоте колебаний.

Отметим, что если рассматриваются вынужденные установившиеся колебания конструкции в некотором диапазоне частот внешнего воздействия и при этом положение возбуждающей силы не меняется, то для определения оптимальных величин потенциала, который должен быть подан на пьезоэлемент для демпфирования различных возникающих в данном случае мод колебаний, никаких других задач, кроме задачи модального анализа для определения всех собственных частот и собственных векторов колебаний, входящих в заданный диапазон частот внешнего воздействия, а также задачи параметрических колебаний от действия единичного потенциала в заданном диапазоне частот внешнего воздействия, решать не требуется.

Для подтверждения предлагаемого алгоритма проведем сравнение полученных на его основе величин оптимального потенциала с результатами решения серии задач о вынужденных установившихся колебаниях рассматриваемой пластинки с пьезоэлементом, полученными по первому способу.

Поскольку в данном случае возбуждение колебаний осуществляется единственной силой $\vec{F} = \{0, 0, F_z\}$, выражение (23) запишется в виде

$$V_z = -F_z \frac{(U_0)_B}{2\omega_{\text{Re}}\omega_{\text{Im}}} \frac{(U_0)_A}{\gamma_u(\xi)}. \quad (24)$$

Результаты решения задачи параметрических колебаний и полученные при решении серии задач о вынужденных установившихся колебаниях и при

Исходные данные и результаты определения оптимального потенциала для демпфирования первых двух мод колебаний системы [Initial data and results of determining the optimal potential for damping the first two modes of system vibrations]

Таблица 2

Data for calculations	1st mode	2nd mode
Parametric vibration		
$\gamma_{\xi_{\omega}} = U _{V^*=1}$	$3.317 \cdot 10^{-5} + i 3.741 \cdot 10^{-6}$	$5.486 \cdot 10^{-6} - i 6.719 \cdot 10^{-7}$
Forced steady-state vibration		
Exciting force F_z , N	-0.02	-0.74
Displacement $ (U_z)A _{V^{opt}}$ by Eq. (21), m	$5.964 \cdot 10^{-3}$	$1.261 \cdot 10^{-2}$
Displacement $ (U_z)A _{V^{opt}}$ by ANSYS, m	$5.962 \cdot 10^{-3}$	$1.245 \cdot 10^{-2}$
Difference, %	0.03	1.27
Potential $ V^{opt} $ by Eq. (23), kV	-1.237	7.150
Potential $ V^{opt} $ by ANSYS, kV	-1.230	6.900
Difference, %	0.08	3.62

помощи формулы (23) данные для первых двух изгибных мод колебаний пластинки с пьезоэлементом приведены в табл. 2. Также в табл. 2 приведены результаты сравнения смещений точки A , полученные решением задачи о вынужденных установившихся колебаниях системы под действием указанных сил при подаче на пьезоэлемент потенциала, найденного при решении серии задач по первому способу, и потенциала, найденного по предлагаемому алгоритму по формуле (24).

При погрешности определения величины оптимального потенциала, необходимого для демпфирования второго резонанса, не более 4 %, погрешность определения величины смещения составляет не более 1.5 %.

Заключение. При решении задач, связанных с поиском резонансных значений физических величин при вынужденных установившихся колебаниях, приходится многократно повторять вычислительные процедуры, затраты на которые существенно возрастают при решении связанных задач электровязкоупругости, с целью реализации активного управления динамическим поведением такого рода конструкций.

В рамках данной работы предложен способ, основанный на математическом преобразовании конечно-элементных матричных уравнений собственных и вынужденных колебаний электровязкоупругих тел и позволивший получить аналитические выражения, которые связывают величины, являющиеся решением задачи о вынужденных колебаниях, с аналогичными величинами в собственных векторах, являющихся решением задачи о собственных колебаниях. К таким величинам относятся смещения узлов и потенциал на электродированной поверхности пьезоэлемента.

Использование найденных зависимостей позволило определить величину электрического потенциала на электродированной поверхности пьезоэлемента, генерируемого при деформировании его на рассматриваемой моде при вынужденных установившихся колебаниях. При этом не требуется решать задачу о вынужденных установившихся колебаниях для диапазона частот в окрестности исследуемой резонансной частоты. Достаточно решить задачу о собственных колебаниях исследуемой системы (конструкция с пьезоэлементом), определить спектр собственных частот колебаний и соответствующие им собственные векторы.

Данные соотношения подтверждены численно с использованием пакета прикладных программ конечно-элементного анализа ANSYS на примере колебаний консольно заземленной вязкоупругой пластинки с прикрепленным к ее поверхности пьезоэлементом. Продемонстрирована эффективность применения полученных аналитических выражений, которые могут являться основой для разработки алгоритмов решения задач активного управления динамическим поведением электровязкоупругих конструкций.

Конкурирующие интересы. Конфликты интересов отсутствуют.

Авторский вклад и ответственность. Все авторы принимали участие в разработке концепции статьи и в написании рукописи. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (тема № АААА–А19–119012290100–8 «Механика интеллектуальных конструкций»).

Библиографический список

1. Park G., Sausse M., Inman D. J., Main J. A. Vibration testing and finite element analysis of inflatable structures // *AIAA J.*, 2003. vol. 41, no. 8. pp. 1556–1566. DOI: <https://doi.org/10.2514/2.2107>.
2. Nye T. W., Manning R. A., Qassim K. Performance of active vibration control technology: the АСТЕХ flight experiments // *Smart Mater. Struct.*, 1999. vol. 8, no. 6. pp. 767–780. DOI: <https://doi.org/10.1088/0964-1726/8/6/306>.
3. Denoyer K. K., Erwin R. S., Ninneman R. R. Advanced smart structures flight experiments for precision spacecraft // *Acta Astronautica*, 2000. vol. 47, no. 2–9. pp. 389–397. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0094-5765\(00\)00080-1](https://doi.org/10.1016/S0094-5765(00)00080-1).
4. Makhtoumi M. Active vibration control of launch vehicle on satellite using piezoelectric stack actuator // *J. Space Technol.*, 2018. vol. 8, no. 1. pp. 1–11, arXiv: 1903.07396 [physics.space-ph].
5. Kajiwara I., Uchiyama T., Arisaka T. Vibration control of hard disk drive with smart structure technology for improving servo performance / *Motion and Vibration Control*. Dordrecht: Springer, 2009. pp. 165–176. DOI: https://doi.org/10.1007/978-1-4020-9438-5_17.
6. Tani J., Takagi T., Qiu J. Intelligent material systems: Application of functional materials // *Appl. Mech. Rev.*, 1998. vol. 51, no. 8. pp. 505–521. DOI: <https://doi.org/10.1115/1.3099019>.
7. Sobczyk M., Wiesenhütter S., Noennig J. R., Wallmersperger T. Smart materials in architecture for actuator and sensor applications: A review // *J. Intelligent Mater. Syst. Struct.*, 2022. vol. 33, no. 3. pp. 379–399. DOI: <https://doi.org/10.1177/1045389X211027954>.
8. Chen C., Sharafi A., Sun J. A high density piezoelectric energy harvesting device from highway traffic – Design analysis and laboratory validation // *Applied Energy*, 2020. vol. 269, 115073. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.apenergy.2020.115073>.
9. Yang K., Zhu J., Wu M., Zhang W. Integrated optimization of actuators and structural topology of piezoelectric composite structures for static shape control // *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 2018. vol. 334. pp. 440–469. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cma.2018.01.021>.
10. Ayres J. W., Rogers C. A., Chaudhry Z. A. Qualitative health monitoring of a steel bridge joint via piezoelectric actuator/sensor patches // *Proc SPIE*, 2019. vol. 2719, Smart Structures and Materials 1996: Smart Systems for Bridges, Structures, and Highways (22 April 1996). pp. 123–131. DOI: <https://doi.org/10.1117/12.238831>.
11. Marakakis K., Tairidis G. K., Koutsianitis P., Stavroulakis G. E. Shunt piezoelectric systems for noise and vibration control: A Review // *Front. Built Environ.*, 2019. vol. 5, 64. DOI: <https://doi.org/10.3389/fbuil.2019.00064>.
12. Moheimani S. O. R., Vautier B. J. G. Resonant control of structural vibration using charge-driven piezoelectric actuators // *IEEE Trans. Contr. Sys. Technol.*, 2005. T. 13, № 6. C. 1021–1035. DOI: <https://doi.org/10.1109/TCST.2005.857407>.
13. Alkhatib R., Golnaraghi M. F. Active structural vibration control: A Review // *The Shock and Vibration Digest*, 2003. vol. 35, no. 5. pp. 367–383. DOI: <https://doi.org/10.1177/05831024030355002>.
14. Fisco N. R., Adeli H. Smart structures: Part I — Active and semi-active control // *Scientia Iranica*, 2011. vol. 18, no. 3. pp. 275–284. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.scient.2011.05.034>.
15. Fuller C. R., Elliot S. J., Nelson P. A. *Active Control of Vibration*. London: Academic Press, 1997. xii+332 pp. DOI: <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-269440-0.X5000-6>.
16. Preumont A. *Vibration Control of Active Structures: An Introduction*. Dordrecht: Springer, 2011. xx+436 pp. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-94-007-2033-6>.

17. Aktas K. G., Esen I. State-space modeling and active vibration control of smart flexible cantilever beam with the use of finite element method // *Eng. Technol. Appl. Sci. Res.*, 2020. vol. 10, no. 6. pp. 6549–6556. DOI: <https://doi.org/10.48084/etasr.3949>.
18. Preumont A. Active damping, vibration isolation, and shape control of space structures: A tutorial // *Actuators*, 2016. vol. 12, no. 3. pp. 122–147. DOI: <https://doi.org/10.3390/act12030122>.
19. Ding B., Li Y., Xiao X., Tang Y. Optimized PID tracking control for piezoelectric actuators based on the Bouc–Wen model / *2016 IEEE International Conference on Robotics and Biomimetics (ROBIO)*. Qingdao, China. pp. 1576–1581. DOI: <https://doi.org/10.1109/ROBIO.2016.7866552>.
20. Sareban M. Evaluation of Three Common Algorithms for Structure Active Control // *Eng. Technol. Appl. Sci. Res.*, 2017. vol. 7, no. 3. pp. 1638–1646. DOI: <https://doi.org/10.48084/etasr.1150>.
21. Płaczek M. The study of a control signal's phase shift influence on the efficiency of a system for active vibration damping based on MFC piezoelectric transducers // *MATEC Web Conf.*, 2020. vol. 318, 01005. DOI: <https://doi.org/10.1051/mateconf/202031801005>.
22. Fisco N. R., Adeli H. Smart structures: Part II — Hybrid control systems and control strategies // *Scientia Iranica*, 2011. vol. 18, no. 3. pp. 285–295. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.scient.2011.05.035>.
23. Kumar R., Singh S. P., Chandrawat H. N. MIMO adaptive vibration control of smart structures with quickly varying parameters: Neural networks vs classical control approach // *J. Sound Vibration*, 2023. vol. 307, no. 3-5. pp. 639–661. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2007.06.028>.
24. Matveenko V. P., Iurlova N. A., Oshmarin D. A., Sevodina N. V. Analysis of dissipative properties of electro-viscoelastic bodies with shunting circuits on the basis of numerical modelling of natural vibrations // *Acta Mech.*, 2023. vol. 234, no. 1. pp. 261–276. EDN: [GMVYZG](https://doi.org/10.1007/s00707-022-03193-8). DOI: <https://doi.org/10.1007/s00707-022-03193-8>.
25. Матвеевко В. П., Ошмарин Д. А., Севодина Н. В., Юрлова Н. А. Задача о собственных колебаниях электровязкоупругих тел с внешними электрическими цепями и конечно-элементные соотношения для ее численной реализации // *Вычислительная механика сплошных сред*, 2016. Т. 9, № 4. С. 476–485. EDN: [XDDTUB](https://doi.org/10.7242/1999-6691/2016.9.4.40). DOI: <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2016.9.4.40>.
26. Kligman E. P., Matveenko V. P. Vibration problem of viscoelastic solids as applied to optimization of dissipative properties of constructions // *J. Vibration Control*, 1997. vol. 3, no. 1. pp. 87–102. EDN: [LEKWMP](https://doi.org/10.1177/107754639700300107). DOI: <https://doi.org/10.1177/107754639700300107>.
27. Клигман Е. П., Матвеевко В. П., Севодина Н. В. Определение собственных колебаний кусочно-однородных вязкоупругих тел с использованием пакета ANSYS // *Вычислительная механика сплошных сред*, 2010. Т. 3, № 2. С. 46–54. EDN: [NTJWSX](https://doi.org/10.7242/1999-6691/2010.3.2.16). DOI: <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2010.3.2.16>.
28. *ANSYS, Release 2022 R1 Documentation*. Canonsburg, 2022.
29. Юрлова Н. А., Ошмарин Д. А., Севодина Н. В. Численный анализ вынужденных установившихся колебаний электровязкоупругой системы при совместном воздействии механических и электрических нагрузок // *Вестн. Пермского нац. иссл. политехн. ун-та. Механика*, 2022. № 4. С. 67–79. EDN: [VSTMA](https://doi.org/10.15593/perm.mech/2022.4.07). DOI: <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2022.4.07>.

MSC: 74S05

Method for determining the parameters of an electrical signal for controlling forced steady-state vibrations of electroviscoelastic bodies. Mathematical relations

*N. V. Sevodina, N. A. Iurlova, D. A. Oshmarin*Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS,
1, Academician Korolev str., Perm, 614013, Russian Federation.

Abstract

This paper presents a method for determining the magnitude of the electric potential generated on the electroded surface of a piezoelectric element, which is part of a piece-wise homogeneous electroviscoelastic structure, necessary for the formation of a control action when actively controlling its dynamic behavior in the mode of forced steady-state vibrations in order to minimize the amplitude of vibrations at the selected resonant frequency. By mathematical transformations of the equations describing the intrinsic and forced vibrations of such electroviscoelastic bodies, the relations expressing the relationship between the values of the displacement of the nodes and the electric potential on the electroded surface of the piezoelectric element are derived. These formulas allow us to determine the magnitude of the potential that must be applied to the piezoelectric element in order to best dampen a given vibration mode of the structure. As a result of numerical experiments obtained by using the ANSYS finite element analysis software package, and the usability of the results of solving the problem of natural vibrations to find the optimal value of the potential characterizing the control electrical action aimed at damping the specified modes in the mode of forced steady-state vibrations is confirmed. The effectiveness of the obtained analytical dependencies is demonstrated by the example of a cantilevered viscoelastic plate with a piezoelectric element located on its surface. The proposed

Mechanics of Solids

Research Article

© Authors, 2023

© Samara State Technical University, 2023 (Compilation, Design, and Layout)

 The content is published under the terms of the [Creative Commons Attribution 4.0 International License](http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Sevodina N. V., Iurlova N. A., Oshmarin D. A. Method for determining the parameters of an electrical signal for controlling forced steady-state vibrations of electroviscoelastic bodies. Mathematical relations, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2023, vol. 27, no. 4, pp. 679–703. EDN: [GHEHRB](#). DOI: [10.14498/vsgtu2025](https://doi.org/10.14498/vsgtu2025) (In Russian).

Authors' Details:

Natalya V. Sevodina  <https://orcid.org/0000-0001-9374-7135>Cand. Techn. Sci.; Researcher; Dept. of Complex Problems of Deformable Solids Mechanics;
e-mail: natsev@icmm.ru*Nataliya A. Iurlova*  <https://orcid.org/0000-0003-3497-0358>Cand. Phys. & Math. Sci., Associate Professor; Senior Researcher; e-mail: yurlova@icmm.ru*Dmitrii A. Oshmarin*  <https://orcid.org/0000-0002-9898-4823>Cand. Techn. Sci.; Researcher; Dept. of Complex Problems of Deformable Solids Mechanics;
e-mail: oshmarin@icmm.ru

approach makes it possible to significantly reduce time and resource costs of the mathematical modeling of active control of forced steady-state oscillations of electroviscoelastic bodies, to determine the requirements for the hardware implementation of actuators and controllers of the control unit of such smart-systems.

Keywords: electroviscoelasticity, piezoelectric element, forced steady-state vibrations, natural vibrations, vibration control, displacements, electric potential.

Received: 25th May, 2023 / Revised: 17th November, 2023 /

Accepted: 13th December, 2023 / First online: 27th December, 2023

Competing interests. Authors have no competing interests.

Authors' contributions and responsibilities. All authors participated in developing the concept of the article and in writing the manuscript. The authors take full responsibility for submitting the final manuscript for publication. The final version of the manuscript was approved by all authors.

Funding. The work was carried out within the framework of the state assignment of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (topic no. AAAA19-119012290100-8 “Mechanics of intelligent structures”).

References

1. Park G., Sausse M., Inman D. J., Main J. A. Vibration testing and finite element analysis of inflatable structures, *AIAA J.*, 2003, vol. 41, no. 8, pp. 1556–1566. DOI: <https://doi.org/10.2514/2.2107>.
2. Nye T. W., Manning R. A., Qassim K. Performance of active vibration control technology: the ACTEX flight experiments, *Smart Mater. Struct.*, 1999, vol. 8, no. 6, pp. 767–780. DOI: <https://doi.org/10.1088/0964-1726/8/6/306>.
3. Denoyer K. K., Erwin R. S., Ninneman R. R. Advanced smart structures flight experiments for precision spacecraft, *Acta Astronautica*, 2000, vol. 47, no. 2–9, pp. 389–397. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0094-5765\(00\)00080-1](https://doi.org/10.1016/S0094-5765(00)00080-1).
4. Makhtoumi M. Active vibration control of launch vehicle on satellite using piezoelectric stack actuator, *J. Space Technol.*, 2018, vol. 8, no. 1, pp. 1–11, arXiv:1903.07396 [physics.space-ph].
5. Kajiwara I., Uchiyama T., Arisaka T. Vibration control of hard disk drive with smart structure technology for improving servo performance, In: *Motion and Vibration Control*. Dordrecht, Springer, 2009, pp. 165–176. DOI: https://doi.org/10.1007/978-1-4020-9438-5_17.
6. Tani J., Takagi T., Qiu J. Intelligent material systems: Application of functional materials, *Appl. Mech. Rev.*, 1998, vol. 51, no. 8, pp. 505–521. DOI: <https://doi.org/10.1115/1.3099019>.
7. Sobczyk M., Wiesenhütter S., Noennig J. R., Wallmersperger T. Smart materials in architecture for actuator and sensor applications: A review, *J. Intelligent Mater. Syst. Struct.*, 2022, vol. 33, no. 3, pp. 379–399. DOI: <https://doi.org/10.1177/1045389X211027954>.
8. Chen C., Sharafi A., Sun J. A high density piezoelectric energy harvesting device from highway traffic – Design analysis and laboratory validation, *Applied Energy*, 2020, vol. 269, 115073. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.apenergy.2020.115073>.
9. Yang K., Zhu J., Wu M., Zhang W. Integrated optimization of actuators and structural topology of piezoelectric composite structures for static shape control, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 2018, vol. 334, pp. 440–469. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cma.2018.01.021>.

10. Ayres J. W., Rogers C. A., Chaudhry Z. A. Qualitative health monitoring of a steel bridge joint via piezoelectric actuator/sensor patches, *Proc SPIE*, 2019, vol. 2719, Smart Structures and Materials 1996: Smart Systems for Bridges, Structures, and Highways (22 April 1996), pp. 123–131. DOI: <https://doi.org/10.1117/12.238831>.
11. Marakakis K., Tairidis G. K., Koutsianitis P., Stavroulakis G. E. Shunt piezoelectric systems for noise and vibration control: A Review, *Front. Built Environ.*, 2019, vol. 5, 64. DOI: <https://doi.org/10.3389/fbuil.2019.00064>.
12. Moheimani S. O. R., Vautier B. J. G. Resonant control of structural vibration using charge-driven piezoelectric actuators, *IEEE Trans. Contr. Sys. Technol.*, 2005, T. 13, № 6, C. 1021–1035. DOI: <https://doi.org/10.1109/TCST.2005.857407>.
13. Alkhatib R., Golnaraghi M. F. Active structural vibration control: A Review, *The Shock and Vibration Digest*, 2003, vol. 35, no. 5, pp. 367–383. DOI: <https://doi.org/10.1177/05831024030355002>.
14. Fisco N. R., Adeli H. Smart structures: Part I — Active and semi-active control, *Scientia Iranica*, 2011, vol. 18, no. 3, pp. 275–284. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.scient.2011.05.034>.
15. Fuller C. R., Elliot S. J., Nelson P. A. *Active Control of Vibration*. London, Academic Press, 1997, xii+332 pp. DOI: <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-269440-0.X5000-6>.
16. Preumont A. *Vibration Control of Active Structures: An Introduction*. Dordrecht, Springer, 2011, xx+436 pp. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-94-007-2033-6>.
17. Aktas K. G., Esen I. State-space modeling and active vibration control of smart flexible cantilever beam with the use of finite element method, *Eng. Technol. Appl. Sci. Res.*, 2020, vol. 10, no. 6, pp. 6549–6556. DOI: <https://doi.org/10.48084/etasr.3949>.
18. Preumont A. Active damping, vibration isolation, and shape control of space structures: A tutorial, *Actuators*, 2016, vol. 12, no. 3, pp. 122–147. DOI: <https://doi.org/10.3390/act12030122>.
19. Ding B., Li Y., Xiao X., Tang Y. Optimized PID tracking control for piezoelectric actuators based on the Bouc–Wen model, In: *2016 IEEE International Conference on Robotics and Biomimetics (ROBIO)*. Qingdao, China, pp. 1576–1581. DOI: <https://doi.org/10.1109/ROBIO.2016.7866552>.
20. Sareban M. Evaluation of Three Common Algorithms for Structure Active Control, *Eng. Technol. Appl. Sci. Res.*, 2017, vol. 7, no. 3, pp. 1638–1646. DOI: <https://doi.org/10.48084/etasr.1150>.
21. Płaczek M. The study of a control signal’s phase shift influence on the efficiency of a system for active vibration damping based on MFC piezoelectric transducers, *MATEC Web Conf.*, 2020, vol. 318, 01005. DOI: <https://doi.org/10.1051/mateconf/202031801005>.
22. Fisco N. R., Adeli H. Smart structures: Part II — Hybrid control systems and control strategies, *Scientia Iranica*, 2011, vol. 18, no. 3, pp. 285–295. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.scient.2011.05.035>.
23. Kumar R., Singh S. P., Chandrawat H. N. MIMO adaptive vibration control of smart structures with quickly varying parameters: Neural networks vs classical control approach, *J. Sound Vibration*, 2023, vol. 307, no. 3-5, pp. 639–661. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2007.06.028>.
24. Matveenko V. P., Iurlova N. A., Oshmarin D. A., Sevodina N. V. Analysis of dissipative properties of electro-viscoelastic bodies with shunting circuits on the basis of numerical modelling of natural vibrations, *Acta Mech.*, 2023, vol. 234, no. 1, pp. 261–276. EDN: [GMVYZG](https://doi.org/10.1007/s00707-022-03193-8). DOI: <https://doi.org/10.1007/s00707-022-03193-8>.
25. Matveenko V. P., Oshmarin D. A., Sevodina N. V., Iurlova N. A. Problem on natural vibrations of electroviscoelastic bodies with external electric circuits and finite element relations for its implementation, *Computational Continuum Mechanics*, 2016, vol. 9, no. 4, pp. 476–485 (In Russian). EDN: [XDDTUB](https://doi.org/10.7242/1999-6691/2016.9.4.40). DOI: <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2016.9.4.40>.

26. Kligman E. P., Matveenko V. P. Vibration problem of viscoelastic solids as applied to optimization of dissipative properties of constructions, *J. Vibration Control*, 1997, vol. 3, no. 1, pp. 87–102. EDN: LEKWMP. DOI: <https://doi.org/10.1177/107754639700300107>.
27. Kligman E. P., Matveenko V. P., Sevodina N. V. Determination of natural oscillations of piece-wise homogeneous viscoelastic bodies using the ANSYS package, *Computational Continuum Mechanics*, 2010, vol. 3, no. 2, pp. 46–54 (In Russian). EDN: NTJWSX. DOI: <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2010.3.2.16>.
28. ANSYS, *Release 2022 R1 Documentation*. Canonsburg, 2022.
29. Iurlova N. A., Oshmarin D. A., Sevodina N. V. A numerical analysis of forced steady-state vibrations of an electro-viscoelastic system in case of a joint impact of electrical and mechanical loads, *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2022, no. 4, pp. 67–79 (In Russian). EDN: VSTMA. DOI: <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2022.4.07>.