Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2024. Т. 28, № 1. С. 171–185
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu2030
EDN: DTEVGQ

УДК 517.951

Решение одной краевой задачи для уравнения третьего порядка с переменными коэффициентами

Ю. П. Апаков[1,2]***, Р. А. Умаров***[2]

[1] Институт математики имени В.И. Романовского АН Республики Узбекистан, Узбекистан, 100174, Ташкент, ул. Университетская, 46.
[2] Наманганский инженерно-строительный институт, Узбекистан, 160100, Наманган, ул. Ислама Каримова, 12.

Аннотация

В прямоугольной области рассматривается вторая краевая задача для неоднородного дифференциального уравнения в частных производных третьего порядка с кратными характеристиками и с переменными коэффициентами. Единственность решения поставленной задачи доказана методом интегралов энергии. Для случая нарушения условий теоремы единственности построен контрпример.

Решение задачи ищется в виде произведения двух функций $X(x)$ и $Y(y)$ с использованием метода разделения переменных. Для определения $Y(y)$ получено обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка с двумя граничными условиями на границах сегмента $[0, q]$. Для этой задачи найдены собственные значения и соответствующие им собственные функции при $n = 0$ и $n \in \mathbb{N}$. Для определения $X(x)$ получено обыкновенное дифференциальное уравнение третьего порядка с тремя граничными условиями на границах сегмента $[0, p]$. Решение указанной задачи построено методом функции Грина. Отдельная функция Грина была построена для $n = 0$ и отдельная функция Грина для случая, когда n натуральное. Проверено, что найденные функции Грина удовлетворяют граничным условиям и свойствам функции Грина. Решение для $X(x)$ выписано через построенную функцию Грина.

После некоторых преобразований получено интегральное уравнение Фредгольма второго рода, решение которого выписано через резольвенту. Получены оценки резольвенты и функции Грина. Доказана равномерная сходимость решения и возможность его почленного дифференцирования при некоторых условиях на заданные функции. Сходимость

Дифференциальные уравнения и математическая физика
Краткое сообщение

Образец для цитирования
Апаков Ю. П., Умаров Р. А. Решение одной краевой задачи для уравнения третьего порядка с переменными коэффициентами // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2024. Т. 28, № 1. С. 171–185. EDN: DTEVGQ. DOI: 10.14498/vsgtu2030.

Сведения об авторах

Юсуфжон Пулатович Апаков https://orcid.org/0000-0001-8805-8917
доктор физико-математических наук, профессор; ведущий научный сотрудник; Наманганское отделение[1]; профессор; каф. высшей математики[2]; e-mail: yusupjonapakov@gmail.com
Рахматилла Акрамович Умаров https://orcid.org/0009-0004-4778-4444
PhD докторант; каф. высшей математики[2]; e-mail: r.umarov1975@mail.ru

производной третьего порядка решения по переменной x доказывается с помощью неравенств Коши–Буняковского и Бесселя. При обосновании равномерной сходимости решения доказывается отсутствие “малого знаменателя”.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение, третий порядок, кратные характеристики, вторая краевая задача, регулярное решение, единственность, существование, функция Грина.

Получение: 7 июня 2023 г. / Исправление: 7 февраля 2024 г. / Принятие: 4 марта 2024 г. / Публикация онлайн: 6 августа 2024 г.

По аналогии с работами [1, 2] в области $D = \{(x, y) : 0 < x < p, 0 < y < q\}$ рассмотрим уравнение третьего порядка вида

$$U_{xxx} - U_{yy} + A_1(x)U_{xx} + A_2(x)U_x + A_3(x)U + A_4U_y = g_1(x, y), \tag{1}$$

где p, q, $A_4 \in \mathbb{R}$; $A_1(x)$, $A_2(x)$, $A_3(x)$, $g_1(x, y)$ — заданные достаточно гладкие функции.

Заменой

$$U(x, y) = u(x, y) \exp\left(-\frac{1}{3}\int_0^x A_1(\xi)d\xi + \frac{A_4}{2}y\right)$$

уравнение (1) можно привести к виду

$$L[u] = u_{xxx} - u_{yy} + a_1(x)u_x + a_2(x)u = g(x, y), \tag{2}$$

где

$$a_1(x) = -A_1'(x) - \frac{1}{3}A_1^2(x) + A_2(x),$$
$$a_2(x) = -\frac{1}{3}A_1''(x) + \frac{2}{27}A_1^3(x) - \frac{1}{3}A_1(x)A_2(x) + A_3(x) + \frac{A_4^2}{4},$$
$$g(x, y) = g_1(x, y) \exp\left(\frac{1}{3}\int_0^x A_1(\xi)d\xi - \frac{A_4}{2}y\right).$$

Задача B_2. *Найти функцию $u(x, y)$ из класса $C^{3,2}_{x,y}(D) \cap C^{2,1}_{x,y}(\overline{D})$, удовлетворяющую уравнению (2) и следующим краевым условиям:*

$$u_y(x, 0) = 0, \quad u_y(x, q) = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant p, \tag{3}$$
$$u(0, y) = \psi_1(y), \quad u_x(p, y) = \psi_2(y), \quad u_{xx}(p, y) = \psi_3(y), \quad 0 \leqslant y \leqslant q, \tag{4}$$

где $\psi_1(y)$, $\psi_2(y)$, $\psi_3(y)$, $g(x, y)$ — достаточно гладкие заданные функции.

Теорема 1. *Если задача B_2 имеет решение, то при выполнении условий $a_1(p) \geqslant 0$, $a_2(x) - \frac{1}{2}a_1'(x) \geqslant 0$, $a_1'(x)$, $a_2(x) \in C[0, p]$, $x \in [0, p]$, оно единственно.*

Доказательство. Предположим обратное. Пусть задача B_2 имеет два решения $u_1(x, y)$ и $u_2(x, y)$. Тогда функция $u(x, y) = u_1(x, y) - u_2(x, y)$

удовлетворяет однородному уравнению (2) с однородными краевыми условиями. Докажем, что $u(x,y) \equiv 0$ в $\overline{D}$.

В области D справедливо тождество

$$uL[u] = uu_{xxx} - uu_{yy} + a_1(x)uu_x + a_2(x)u^2 \equiv 0.$$

Интегрируя это тождество по области D и учитывая однородные краевые условия, получим

$$\frac{1}{2}\int_0^q a_1(p)u^2(p,y)dy + \frac{1}{2}\int_0^q u_x^2(0,y)dy + \\ + \iint\limits_D u_y^2 dxdy + \iint\limits_D \Big(a_2(x) - \frac{1}{2}a_1'(x)\Big)u^2 dxdy \equiv 0.$$

Если $a_2(x) - \frac{1}{2}a_1'(x) > 0$, то из четвертого слагаемого получим, что $u(x,y) \equiv 0$, $(x,y) \in \overline{D}$. Если $a_2(x) - \frac{1}{2}a_1'(x) \geqslant 0$, $a_1(p) > 0$, то из первого и третьего слагаемых имеем $u(p,y) = 0$, $u_y(x,y) = 0$. Отсюда следует, что $u(x,y) = f(x)$, $f(p) = 0$.

Подставив полученное в уравнение (2) и учитывая краевые условия (4), имеем задачу

$$\begin{cases} f'''(x) + a_1(x)f'(x) + a_2(x)f(x) = 0, \\ f(p) = f'(p) = f''(p) = 0. \end{cases}$$

Линейное однородное уравнение имеет общее решение в виде

$$f(x) = C_1X_1(x) + C_2X_2(x) + C_3X_3(x),$$

где $X_1(x)$, $X_2(x)$, $X_3(x)$ — линейно независимые решения. Для нахождения C_1, C_2, C_3 воспользуемся краевыми условиями и получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} C_1X_1(p) + C_2X_2(p) + C_3X_3(p) = 0, \\ C_1X_1'(p) + C_2X_2'(p) + C_3X_3'(p) = 0, \\ C_1X_1''(p) + C_2X_2''(p) + C_3X_3''(p) = 0. \end{cases}$$

Определитель этой системы есть определитель Вронского и поэтому отличен от нуля. Значит $C_1 = C_2 = C_3 = 0$ и отсюда $f(x) \equiv 0$, тогда $u(x,y) \equiv 0$.

При $a_1(x) \equiv 0$, $a_2(x) \equiv 0$, $x \in [0,p]$ легко можно показать, что $u(x,y) \equiv 0$. Теорема 1 доказана. □

Замечание. Отметим, что при нарушении условия теоремы 1 однородная задача B_2 для однородного уравнения (2) может иметь нетривиальные решения. Например, можно легко убедиться, что при $p = 1$, $q = \pi$, $a_1(x) = 0$, $a_2(x) = -(\mu^3 + 1) < 0$, где $\mu > 0$ — решение уравнения

$$e^{-3\mu/2} - 2\sin\Big(\frac{\sqrt{3}}{2}\mu - \frac{\pi}{2}\Big) = 0,$$

задача

$$\begin{cases} u_{xxx}(x,y) - (\mu^3 + 1)u(x,y) - u_{yy}(x,y) = 0, \\ u_y(x,0) = u_y(x,\pi) = 0, \quad u(0,y) = u_x(1,y) = u_{xx}(1,y) = 0 \end{cases}$$

имеет нетривиальное решение вида

$$u(x,y) = \Big[e^{\mu x}\sin\Big(\frac{\sqrt{3}}{2}\mu - \frac{\pi}{3}\Big) - e^{-\mu x/2}\sin\Big(\frac{\sqrt{3}}{2}\mu(1-x) - \frac{\pi}{3}\Big) + \\ + e^{\mu(3-x)/2}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\mu x\Big]\cos y.$$

Отсюда следует, что если a_2 является параметром разделения, то при $a_2 \geqslant 0$ задача корректно поставлена, а при $a_2 < 0$ задача поставлена некорректно, т.е. существует спектр.

Теорема 2. *Пусть выполняются следующие условия:*

1) $a_1(p) = 0$, $a_1(x)$, $a_2(x) \in C^2[0,p]$;
2) $C < \min\Big\{\dfrac{\lambda_1^2}{Kp(1+\lambda_1)}, \dfrac{2}{p^3+2p^2}\Big\}$;
3) $\psi_i(y) \in C^3[0,q]$, $\psi_i'(0) = \psi_i'(q) = 0$, $i = \overline{1,3}$;
4) $\dfrac{\partial^3 g(x,y)}{\partial x \partial y^2} \in C[\overline{D}]$, $g_y(x,0) = g_y(x,q) = 0$, $0 \leqslant x \leqslant p$.

Тогда решение задачи B_2 существует. Здесь

$$C = \max\big\{|a_1(x)|, |a_1'(x) - a_2(x)|,\ x \in [0,p]\big\},$$

$$\lambda_1 = \sqrt[3]{\Big(\frac{\pi}{q}\Big)^2}, \quad K = \frac{4}{3}\Big[1 - \exp\Big(-\frac{2\sqrt{3}\pi}{3}\Big)\Big]^{-1}.$$

Доказательство. Рассмотрим следующую задачу Штурма—Лиувилля:

$$\begin{cases} Y''(y) + \lambda^3 Y(y) = 0, \\ Y'(0) = Y'(q) = 0. \end{cases} \tag{5}$$

Известно, что нетривиальное решение задачи (5) существует только при

$$\lambda^3 = \lambda_n^3 = \Big(\frac{\pi n}{q}\Big)^2, \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Числа λ_n являются собственными значениями задачи (5), а соответствующие им собственные функции имеют вид

$$Y_0(y) = \frac{1}{\sqrt{q}},\ \ n = 0; \quad Y_n(y) = \sqrt{\frac{2}{q}}\cos\frac{\pi n y}{q},\ \ n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Собственные функции $Y_n(y)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, образуют полную ортонормированную систему в $L_2(0,q)$, поэтому функцию $g(x,y)$ можно разложить в ряд Фурье:

$$g(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x) Y_n(y),$$

где $g_n(x) = \displaystyle\int_0^q g(x,\eta) Y_n(\eta) d\eta$.

Решение задачи B_2 ищем в виде

$$u(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}X_n(x)Y_n(y). \tag{6}$$

Формально считая, что (6) удовлетворяет уравнению (2), и подставляя (6) в (2), с учетом граничных условий (4) получим задачу

$$\begin{cases} X_n'''+a_1(x)X_n'+a_2(x)X_n+\lambda_n^3X_n=g_n(x),\\ X_n(0)=\psi_{1n},\quad X_n'(p)=\psi_{2n},\quad X_n''(p)=\psi_3n, \end{cases} \tag{7}$$

где $\psi_{in}=\displaystyle\int_0^q\psi_i(\eta)Y_n(\eta)d\eta,\ i=\overline{1,3}$.

Задачу (7) решаем с помощью функции Грина, для построения которой сначала обнулим краевые условия.

Введем обозначение

$$V_n(x)=X_n(x)-\rho_n(x), \tag{8}$$

где

$$\rho_n(x)=\psi_{1n}+x\psi_{2n}+\frac{x^2-2xp}{2}\psi_{3n}. \tag{9}$$

Подставляя (8), (9) в (7), получим задачу

$$\begin{cases} V_n'''+\lambda_n^3V_n=\lambda_n^3f_n(x)-a_1V_n'-a_2V_n,\\ V_n(0)=V_n'(p)=V_n''(p)=0, \end{cases} \tag{10}$$

где

$$f_n(x)=-\Big(\frac{a_2(x)}{\lambda_n^3}+1\Big)\psi_{1n}-\Big(\frac{xa_2(x)+a_1(x)}{\lambda_n^3}+x\Big)\psi_{2n}-$$
$$-\Big(\frac{xa_1(x)-pa_1(x)-xa_2(x)p}{\lambda_n^3}+\frac{a_2(x)}{\lambda_n^3}x^2+\frac{1}{2}x^2-px\Big)\psi_{3n}+\frac{g_n(x)}{\lambda_n^3}.$$

Задача (10) при $\lambda_0=0$ имеет вид

$$\begin{cases} V_0'''=f_0(x)-a_1(x)V_0'-a_2(x)V_0,\\ V_0(0)=V_0'(p)=V_0''(p)=0, \end{cases} \tag{11}$$

где

$$f_0(x)=g_0(x)-\psi_{10}a_2(x)+\big(-a_1(x)-xa_2(x)\big)\psi_{20}+$$
$$+\Big(-xa_1(x)+pa_1(x)-\frac{1}{2}x^2a_2(x)+pxa_2(x)\Big)\psi_{20}.$$

Задача (11) эквивалентна интегральному уравнению вида

$$V_0(x) = \int_0^p G_0(x,\xi) f_n(\xi) d\xi - \int_0^p a_1(\xi) G_0(x,\xi) V_0'(\xi) d\xi - \\ - \int_0^p a_2(\xi) G_0(x,\xi) V_0(\xi) d\xi. \quad (12)$$

Здесь

$$G_0(x,\xi) = \begin{cases} G_{10}(x,\xi), & 0 \leqslant x \leqslant \xi, \\ G_{20}(x,\xi), & \xi \leqslant x \leqslant p \end{cases} \quad (13)$$

— функция Грина для задачи (11); $G_{10}(x,\xi) = -\frac{1}{2}x^2 + \xi x$, $G_{20}(x,\xi) = \frac{1}{2}\xi^2$.

Интегрируя по частям второй интеграл в (12) и вводя обозначения

$$\alpha_0(x) = \int_0^p G_0(x,\xi) f_0(\xi) d\xi,$$
$$\overline{G}_0(x,\xi) = \big(a_1'(\xi) - a_2(\xi)\big) G_0(x,\xi) + a_1(\xi) G_{0\xi}(x,\xi),$$

получим

$$V_0(x) = \alpha_0(x) + \int_0^p \overline{G}_0(x,\xi) V_0(\xi) d\xi. \quad (14)$$

Уравнение (14) является интегральным уравнением Фредгольма второго рода, которое будем решать методом итераций:

$$V_m(x) = \alpha_0(x) + \int_0^p \overline{G}_0(x,\xi) V_{m-1}(\xi) d\xi, \quad m = 1, 2, 3, \ldots; \quad V_0(x) = \alpha_0(x).$$

Первое приближение имеет вид

$$V_1(x) = \alpha_0(x) + \int_0^p \overline{G}_0(x,\xi) \alpha_0(\xi) d\xi;$$

второе приближение имеет вид

$$V_2(x) = \alpha_0(x) + \int_0^p \big(\overline{G}_0(x,\xi) + \overline{G}_1(x,\xi)\big) \alpha_0(\xi) d\xi,$$

где

$$\overline{G}_1(x,\xi) = \int_0^p \overline{G}_0(x,s) \overline{G}_0(s,\xi) ds.$$

Если продолжить процесс бесконечно, то получим

$$V_0(x) = \alpha_0(x) + \int_0^p \left(\overline{G}_0(x,\xi) + \sum_{m=1}^{\infty} \overline{G}_m(x,\xi) \right) \alpha_0(\xi) d\xi,$$

где

$$\overline{G}_m(x,\xi) = \int_0^p \overline{G}_0(x,s) \overline{G}_{m-1}(s,\xi) ds, \quad m = 1, 2, 3, \ldots.$$

Если формально считать, что ряд

$$R_0(x,\xi) = \overline{G}_0(x,\xi) + \sum_{m=1}^{\infty} \overline{G}_m(x,\xi)$$

сходится, то решение уравнения (14) получим в виде

$$V_0(x) = \alpha_0(x) + \int_0^p R_0(x,\xi)\alpha_0(\xi)d\xi.$$

Значит решение задачи (10) имеет вид

$$u_0(x,y) = X_0(x)Y_0(y) = \frac{1}{\sqrt{q}}\big(V_0(x) + \rho_0(x)\big). \tag{15}$$

Оценим полученное решение. В дальнейшем максимальное значение всех найденных в оценках положительных известных постоянных будем обозначать одной буквой M.

Сначала найдем оценку для (13):

$$|G_0(x,\xi)| \leqslant \frac{1}{2}p^2, \quad |G_{0\xi}(x,\xi)| \leqslant p.$$

Тогда

$$|\overline{G}_0(x,\xi)| \leqslant C\Big|\frac{1}{2}p^2 + p\Big| \leqslant \frac{1}{p}(J_0 p),$$

где $J_0 = C\big|\frac{1}{2}p^2 + p\big|$.

Для оценки резольвенты $R_0(x,\xi)$ имеем

$$|R_0(x,\xi)| \leqslant |\overline{G}_0(x,\xi)| + |\overline{G}_1(x,\xi)| + \cdots + |\overline{G}_m(x,\xi)| + \cdots .$$

Найдем мажорирующий ряд:

$$|\overline{G}_m(x,\xi)| \leqslant \int_0^p |\overline{G}_0(x,s)|\,|\overline{G}_{m-1}(s,\xi)|ds \leqslant \frac{1}{p}(J_0 p)^{m+1}, \quad m = 1,2,3,\ldots .$$

В итоге мажорантный ряд имеет вид $\dfrac{1}{p}\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}(J_0 p)^m$.

Условие 2 теоремы 2 можно записать в виде

$$C < \frac{2}{p^3 + 2p^2} \quad \Rightarrow \quad C\Big|\frac{1}{2}p^2 + p\Big| < \frac{1}{p},$$

отсюда $J_0 p < 1$. Тогда мажорирующий ряд является суммой членов бесконечной убывающей геометрической прогрессии. В этом случае резольвента равномерно сходится и ее оценка имеет вид

$$|R_0(x,\xi)| \leqslant \frac{J_0}{1 - J_0 p} \leqslant M.$$

Отсюда $\alpha_0(x)$ и $V_0(x)$ имеют следующие оценки:

$$|\alpha_0(x)| \leqslant \int_0^p |G_0(x,\xi)|\,|g_0(\xi)|d\xi \leqslant M,$$
$$|V_0(x)| \leqslant |\alpha_0(x)| + \int_0^p |R_0(x,\xi)|\,|\alpha_0(\xi)|d\xi \leqslant M.$$

Тогда
$$|u_0(x)| \leqslant M, \quad |u_0'''(x)| \leqslant M.$$

Решение задачи (10) при $n \in \mathbb{N}$ ищем следующим образом:

$$V_n(x) = \lambda_n^3 \int_0^p G_n(x,\xi) f_n(\xi) d\xi - \int_0^p G_n(x,\xi) a_1(\xi) V_n'(\xi) d\xi - \\ - \int_0^p G_n(x,\xi) a_2(\xi) V_n(\xi) d\xi, \quad (16)$$

где
$$G_n(x,\xi) = \begin{cases} G_{1n}(x,\xi), & 0 \leqslant x \leqslant \xi, \\ G_{2n}(x,\xi), & \xi \leqslant x \leqslant p \end{cases} \quad (17)$$

— функция Грина задачи (10). Здесь

$$G_{1n}(x,\xi) = \frac{1}{\sqrt{3}\lambda_n^2\Delta}\Big[-e^{\lambda_n(p-x-\frac{\xi}{2})}\sin\Big(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_n\xi + \frac{\pi}{6}\Big) - e^{\lambda_n(\xi-x-\frac{p}{2})}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_n p + \\ + e^{\lambda_n(\xi+\frac{x}{2}-\frac{p}{2})}\cos\Big(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_n(x-p)\Big) + e^{\lambda_n(p+\frac{x}{2}-\frac{\xi}{2})}\sin\Big(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_n(\xi-x) + \frac{\pi}{6}\Big) - \\ - 2e^{-\lambda_n(\frac{\xi}{2}+\frac{p}{2}-\frac{x}{2})}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_n x\cos\Big(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_n(\xi-p) + \frac{\pi}{6}\Big)\Big],$$

$$G_{2n}(x,\xi) = \frac{1}{\sqrt{3}\lambda_n^2\Delta}\Big[1 - 2e^{-\frac{3\lambda_n\xi}{2}}\sin\Big(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_n\xi + \frac{\pi}{6}\Big)\Big] \times \\ \times \Big[\frac{1}{2}e^{\lambda_n(\xi+p-x)} + e^{\lambda_n(\xi-\frac{p}{2}+\frac{x}{2})}\cos\Big(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_n(x-p)\Big)\Big];$$

$$\Delta = \frac{\sqrt{3}}{2}e^{\lambda_n p}\overline{\Delta}, \quad \overline{\Delta} = 1 + 2e^{-\frac{3\lambda_n p}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_n p.$$

Покажем, что $\Delta \neq 0$. Для этого рассмотрим следующую функцию:

$$\overline{\Delta}(t) = 1 + 2e^{-\sqrt{3}t}\cos t, \quad t = \frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_n p.$$

Значения критических точек этой функции запишутся в виде

$$t_k = \frac{2\pi}{3} + \pi k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Величина $\overline{\Delta}(t)$ принимает минимальное значение только при $k=0$. Тогда

$$\overline{\Delta} \geqslant 1 - \exp\Big(-\frac{2\sqrt{3}\pi}{3}\Big) > 0.$$

Это доказывает отсутствие «малого знаменателя», отсюда $\Delta \neq 0$.

Интегрируя по частям второй интеграл в (16) и учитывая условие 1 теоремы 2, имеем

$$V_n(x) = \lambda_n^3 \int_0^p G_n(x,\xi) f_n(\xi) d\xi + \\ + \int_0^p \Big(\frac{\partial G_n(x,\xi)}{\partial \xi} a_1(\xi) + G_n(x,\xi)\big(a_1'(\xi) - a_2(\xi)\big)\Big) V_n(\xi) d\xi. \quad (18)$$

Для удобства введем следующие обозначения:

$$V_{0n}(x) = \lambda_n^3 \int_0^p G_n(x,\xi) f_n(\xi) d\xi,$$

$$\overline{G}_n(x,\xi) = \frac{\partial G_n(x,\xi)}{\partial \xi} a_1(\xi) + G_n(x,\xi)\big(a_1'(\xi) - a_2(\xi)\big).$$

Тогда (18) примет вид

$$V_n(x) = V_{0n}(x) + \int_0^p \overline{G}_n(x,\xi) V_n(\xi) d\xi. \quad (19)$$

Уравнение (19) является интегральным уравнением Фредгольма второго рода, решение которого запишем с помощью резольвенты в виде

$$V_n(x) = V_{0n}(x) + \int_0^p R_n(x,\xi) V_{0n}(\xi) d\xi, \quad (20)$$

где резольвента имеет вид

$$R_n(x,\xi) = \overline{G}_n(x,\xi) + \sum_{m=1}^{\infty} \overline{G}_{mn}(x,\xi);$$

$$\overline{G}_{mn}(x,\xi) = \int_0^p \overline{G}_n(x,s) \overline{G}_{(m-1)n}(s,\xi) ds, \quad m = 1,2,3,\dots; \quad \overline{G}_{0n}(x,s) = \overline{G}_n(x,s).$$

В силу формулы (6) с учетом (8), (15) и (20) решение задачи B_2 запишется в виде

$$u(x,y) = u_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \big(V_n(x) + \rho_n(x)\big) Y_n(y).$$

Учитывая условие 3 теоремы 2 и интегрируя по частям ψ_{in} три раза, получим оценку

$$|\psi_{in}| \leqslant \Big(\frac{q}{\pi}\Big)^3 \frac{|\Psi_{in}|}{n^3}, \quad i = \overline{1,3}, \quad (21)$$

где $\Psi_{in} = \sqrt{\dfrac{2}{q}} \displaystyle\int_0^q \psi_i'''(\eta) \sin \frac{\pi n}{q} \eta d\eta$.

Интегрируя функцию $g_n(x)$ по частям два раза, учитывая условие 4 теоремы 2 и вводя обозначение $F_n(x) = \displaystyle\int_0^q g_{\eta\eta}(x,\eta) Y_n(\eta) d\eta$, получим

$$g_n(x) = \left(\frac{q}{\pi n}\right)^2 F_n(x).$$

Отсюда имеем оценку

$$|g_n(x)| \leqslant M \frac{|F_n(x)|}{n^2}. \tag{22}$$

Учитывая оценки (21), (22), получим

$$|f_n(x)| \leqslant \frac{M}{n^3} \Big(|\Psi_{1n}| + |\Psi_{2n}| + |\Psi_{3n}| + \frac{|F_n(x)|}{n} \Big).$$

Аналогично имеем

$$|f_n'(x)| \leqslant \frac{M}{n^3} \Big(|\Psi_{1n}| + |\Psi_{2n}| + |\Psi_{3n}| + \frac{|F_n'(x)|}{n} \Big). \tag{23}$$

Из (17) получим следующие оценки:

$$|G_n(x,\xi)| \leqslant \frac{K}{\lambda_n^2}, \qquad \left| \frac{\partial G_n(x,\xi)}{\partial \xi} \right| \leqslant \frac{K}{\lambda_n}. \tag{24}$$

Используя оценки (24), получим оценку для $\overline{G}_n(x,\xi)$ в виде

$$|\overline{G}_n| \leqslant |a_1(\xi)| \left| \frac{\partial G_n(x,\xi)}{\partial \xi} \right| + |a_1'(\xi) - a_2(\xi)| \, |G_n| \leqslant \Big(\frac{1}{\lambda_n} + \frac{1}{\lambda_n^2} \Big) KC.$$

Оценим резольвенту:

$$|R_n(x,\xi)| \leqslant |\overline{G}_{0n}(x,\xi)| + |\overline{G}_{1n}(x,\xi)| + |\overline{G}_{2n}(x,\xi)| + \cdots + |\overline{G}_{mn}(x,\xi)| + \cdots .$$

Для правой части этого неравенства составим мажорирующий ряд. Вводя обозначение

$$J_1 = \Big(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_1^2} \Big) KC,$$

находим

$$|\overline{G}_{1n}(x,\xi)| \leqslant |\overline{G}_n(x,\xi)| \leqslant KC \Big(\frac{1}{\lambda_n} + \frac{1}{\lambda_n^2} \Big) \leqslant J_1,$$

$$|\overline{G}_{mn}(x,\xi)| \leqslant \int_0^p |\overline{G}_{1n}(x,s)| \, |\overline{G}_{(m-1)n}(s,\xi)| ds \leqslant J_1^m p^{m-1}, \quad m = 2,3,4,\ldots .$$

Тогда мажорирующий ряд имеет вид $\dfrac{1}{p} \displaystyle\sum_{m=1}^{\infty} (J_1 p)^m$.

Условие 2 теоремы 2 можно записать в виде

$$C < \frac{\lambda_1^2}{Kp(1+\lambda_1)} \quad \Rightarrow \quad \Big(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_1^2}\Big) KC < \frac{1}{p},$$

отсюда

$$J_1 p < 1.$$

Тогда мажорирующий ряд является суммой членов бесконечной убывающей геометрической прогрессии. В этом случае резольвента равномерно сходится и оценка имеет вид

$$|R(x,\xi)| \leqslant \frac{J_1}{1 - J_1 p} \leqslant M. \tag{25}$$

В каждом из интервалов $0 \leqslant \xi < x$ и $x < \xi \leqslant p$ функция $G_n(x,\xi) = -\frac{1}{\lambda_n^3} G_{n\xi\xi\xi}(x,\xi)$, рассматриваемая как функция от переменной ξ, является решением уравнения

$$G_{n\xi\xi\xi}(x,\xi) + \lambda_n^3 G_n(x,\xi) = 0.$$

Подставляя $G_n(x,\xi)$ в $V_{0n}(x)$, имеем

$$V_{0n}(x) = -\int_0^x G_{2n\xi\xi\xi}(x,\xi) f_n(\xi) d\xi - \int_x^p G_{1n\xi\xi\xi}(x,\xi) f_n(\xi) d\xi.$$

Интегрируя по частям $V_{0n}(x)$ один раз и учитывая равенство $G_{1n\xi\xi}(x,x) - G_{2n\xi\xi}(x,x) = 1$, находим

$$V_{0n}(x) = f_n(x) + G_{2n\xi\xi}(x,0) f_n(0) - \int_0^p G_{n\xi\xi}(x,\xi) f_n'(\xi) d\xi.$$

Учитывая оценки

$$|G_{2n\xi\xi}(x,0)| \leqslant K, \quad |G_{1n\xi\xi}(x,p)| \leqslant K = \mathrm{const},$$

получаем

$$|V_{0n}(x)| \leqslant \frac{M}{n^3}\big(|\Psi_{1n}| + |\Psi_{2n}| + |\Psi_{3n}|\big) + \frac{1}{n^4}\big(|F_n(x)| + |F_n(0)| + |F_n'(x)|\big). \tag{26}$$

Из (25) и (26) получим оценку

$$|V_n(x)| \leqslant \frac{M}{n^3} \sum_{i=1}^{3} |\Psi_{in}| + \frac{1}{n^4}\big(|F_n(x)| + |F_n(0)| + |F_n(p)| + 1\big).$$

Учитывая оценку

$$|\rho_n(x)| \leqslant \frac{M}{n^3}\big(|\Psi_{1n}| + |\Psi_{2n}| + |\Psi_{3n}|\big),$$

имеем

$$|u(x,y)| \leqslant |u_0(x)| + \sum_{n=1}^{\infty}\big(|V_n(x)| + |\rho_n(x)|\big) \leqslant$$
$$\leqslant M + M\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{3}|\Psi_{in}| + \frac{1}{n^4}\big(|F_n(x)| + |F_n(0)| + |F_n(p)| + 1\big) < \infty.$$

Покажем сходимость $u_{xxx}(x,y)$. После некоторых вычислений находим $V_n'''(x)$ в следующем виде:

$$V_n'''(x) = \lambda_n^3 f_n(x) - a_1(x)\left(V_{0n}'(x) + \int_0^p R_{nx}(x,\xi)V_{0n}(\xi)d\xi\right) -$$
$$- a_2(x)\left(V_{0n}(x) + \int_0^p R_n(x,\xi)V_{0n}(\xi)d\xi\right) -$$
$$- \lambda_n^3\left(V_{0n}(x) + \int_0^p R_n(x,\xi)V_{0n}(\xi)d\xi\right).$$

Используя оценку (23) и свойства функции Грина, находим

$$|V_{0n}'(x)| \leqslant \frac{M}{n^{7/3}}\left(|\Psi_{1n}| + |\Psi_{2n}| + |\Psi_{3n}| + \frac{|F_n(0)|}{n} + 1\right), \quad |R_{nx}(x,\xi)| \leqslant n^{2/3}M.$$

Далее имеем

$$|V_n'''(x)| \leqslant \frac{M}{n}\sum_{i=1}^{3}|\Psi_{in}| + \frac{M}{n^2}\big(|F_n(x)| + |F_n(0)| + |F_n(p)| + 1\big).$$

Отсюда

$$|u_{xxx}(x,y)| \leqslant M + M\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\big(|\Psi_{1n}| + |\Psi_{2n}| + |\Psi_{3n}|\big) +$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\big(|F_n(x)| + |F_n(0)| + |F_n(p)| + 1\big).$$

Используя неравенства Коши—Буняковского и Бесселя, имеем

$$|u_{xxx}(x,y)| \leqslant M + M\left(\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}|\Psi_{1n}|^2} + \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}|\Psi_{2n}|^2} + \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}|\Psi_{3n}|^2}\right)\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}} +$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\big(|F_n(x)| + |F_n(0)| + |F_n(p)| + 1\big) \leqslant$$
$$\leqslant M + M\sqrt{\frac{\pi^2}{6}}\big(\|\psi_1'''\|_{L_2(0,q)} + \|\psi_2'''\|_{L_2(0,q)} + \|\psi_3'''\|_{L_2(0,q)}\big) +$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\big(|F_n(x)| + |F_n(0)| + |F_n(p)| + 1\big) < \infty.$$

Здесь
$$\sum_{n=1}^{\infty}|\Psi_{in}|^2 \leqslant \|\psi_i'''\|^2_{L_2(0,q)}, \quad i=\overline{1,3}; \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$

Учитывая неравенство
$$|u_{yy}(x,y)| \leqslant |u_{xxx}(x,y)| + |a_1|\,|u_x(x,y)| + |a_2|\,|u(x,y)|,$$
можно заключить, что и u_{yy} тоже сходится.

Решение задачи B_2 можно записать в явном виде:
$$u(x,y)=\frac{1}{\sqrt{q}}\left(\int_0^p G_0(x,\xi)f_0(\xi)d\xi+\int_0^p R_0(x,\xi)\int_0^p G_0(x,s)f_0(s)dsd\xi+\rho_0(x)\right)+$$
$$+\sqrt{\frac{2}{q}}\sum_{n=1}^{\infty}\Bigg(\lambda_n^3\int_0^p G_n(x,\xi)f_n(\xi)d\xi+$$
$$+\lambda_n^3\int_0^p R_n(x,\xi)\int_0^p G_n(x,s)f_n(s)dsd\xi+\rho_n(x)\Bigg)\cos\frac{\pi n}{q}y.$$
Таким образом, теорема 2 доказана. □

Заключение. В прямоугольной области рассмотрена начально-граничная задача для неоднородного дифференциального уравнения в частных производных третьего порядка с кратными характеристиками и с переменными коэффициентами. Единственность решения доказана методом интегралов энергии. Для случая нарушения условий теоремы единственности приведен контрпример. Решение поставленной задачи построено методом функции Грина. Доказана абсолютная и равномерная сходимость данного решения и его производных, входящих в уравнение в замыкании области рассмотрения уравнения.

Конкурирующие интересы. Заявляем, что в отношении авторства и публикации этой статьи конфликта интересов не имеем.

Авторский вклад и ответственность. Все авторы принимали участие в разработке концепции статьи и в написании рукописи. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Исследование выполнялось без финансирования.

Благодарность. Выражаем глубокую благодарность академику Ш. А. Алимову за ценные советы при выполнении этого исследования.

Библиографический список

1. Апаков Ю. П., Умаров Р. А. Решение первой краевой задачи для уравнения третьего порядка с младшими членами, методом построения функции Грина // *Вестник Ошского государственного университета*, 2022. №1. С. 73–92. DOI: https://doi.org/10.52754/16947452_2022_1_73.
2. Апаков Ю. П., Хамитов А. А. О разрешимости краевой задачи для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками в трехмерном пространстве в полуограниченной области // *Вестник Ошского государственного университета. Математика. Физика. Техника*, 2023. Т. 1, №2. С. 13–23. DOI: https://doi.org/10.52754/16948645_2023_1_13.

Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2024, vol. 28, no. 1, pp. 171–185
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu2030

MSC: 35G15

The solution to a boundary value problem for a third-order equation with variable coefficients

Yu. P. Apakov[1,2]**, *R. A. Umarov***[2]

[1] V.I. Romanovskiy Institute of Mathematics
of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan,
46, University st., Tashkent, 100174, Uzbekistan.
[2] Namangan Engineering-Construction Institute,
12, Islam Karimov st., Namangan, 160103, Uzbekistan.

Abstract

In a rectangular domain, the second boundary value problem for a nonhomogeneous third-order partial differential equation with multiple characteristics and variable coefficients is considered. The uniqueness of the solution to the given problem is proved using the energy integral method. For the case where the conditions of the uniqueness theorem are violated, a counterexample is constructed.

The solution to the problem is sought in the form of a product of two functions $X(x)$ and $Y(y)$ using the separation of variables method. An ordinary differential equation of the second order with two boundary conditions on the boundaries of the segment $[0,q]$ is obtained for determining $Y(y)$. For this problem, the eigenvalues and the corresponding eigenfunctions are found for $n=0$ and $n\in\mathbb{N}$. An ordinary differential equation of the third order with three boundary conditions on the boundaries of the segment $[0,p]$ is obtained for determining $X(x)$. The solution to this problem is constructed using the Green's function method. A separate Green's function was built for $n=0$ and another for the case when n is a natural number. It is verified that the found Green's functions satisfy the boundary conditions and properties of the Green's function. The solution for $X(x)$ is expressed through the constructed Green's function.

After some transformations, a Fredholm integral equation of the second kind is obtained, and its solution is written in terms of the resolvent. Estimates for the resolvent and the Green's function are derived. Uniform

Differential Equations and Mathematical Physics
Short Communication

Please cite this article in press as:
Apakov Yu. P., Umarov R. A. The solution to a boundary value problem for a third-order equation with variable coefficients, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2024, vol. 28, no. 1, pp. 171–185. EDN: DTEVGQ. DOI: 10.14498/vsgtu2030 (In Russian).

Authors' Details:
Yusufjon P. Apakov https://orcid.org/0000-0001-8805-8917
Cand. Phys. & Math. Sci., Associate Professor; Leading Researcher; Namangan Branch[1]; Professor; Dept. of Higher Mathematics[2]; e-mail: yusupjonapakov@gmail.com
Raxmatilla A. Umarov https://orcid.org/0009-0004-4778-4444
PhD Doctoral Student; Dept. of Higher Mathematics[2]; e-mail: r.umarov1975@mail.ru

convergence of the solution is proven, along with the possibility of term-by-term differentiation under certain conditions on the given functions. The convergence of the third-order derivative of the solution with respect to the variable x is established using Cauchy–Schwarz and Bessel inequalities. In justifying the uniform convergence of the solution, the absence of a "small denominator" is proven.

Keywords: differential equation, third order, multiple characteristics, second boundary value problem, regular solution, uniqueness, existence, Green's function.

Received: 7th June, 2023 / Revised: 7th February, 2024 /
Accepted: 4th March, 2024 / First online: 6th August, 2024

Competing interests. The authors declare that they have no competing interests.

Authors' contributions and responsibilities. All authors participated in the development of the article's concept and in writing the manuscript. The authors bear full responsibility for providing the final manuscript for publication. The final version of the manuscript was approved by all authors.

Funding. The research was conducted without funding.

Acknowledgments. We express our deep gratitude to Academician Sh. A. Alimov for the valuable advice provided during the course of this research.

References

1. Apakov Yu. P., Umarov R. A. Solution of the first boundary problem for a third order equation with minor terms, a method for constructing the Green's function, *Bulletin of Osh State University*, 2022, no. 1, pp. 73–92 (In Russian). DOI: https://doi.org/10.52754/16947452_2022_1_73.
2. Apakov Yu. P., Hamitov A. A. On solvability of the boundary value problem posed for an equation with the third order multiple characteristics in a semi-bounded domain in three dimensional space, *Journal of Osh State University. Mathematics. Physics. Technical Sciences*, vol. 1, no. 2, pp. 13–23 (In Russian). DOI: https://doi.org/10.52754/16948645_2023_1_13.