



УДК 539.3

Упругопластический анализ вращающегося полого цилиндра, жестко посаженного на вал, при наличии температурного градиента

А. Н. Прокудин

Институт машиноведения и металлургии
Хабаровского федерального исследовательского центра ДВО РАН
Россия, 681005, Комсомольск-на-Амуре, ул. Металлургов, 1.

Аннотация

Получено точное решение задачи об упругопластическом деформировании вращающегося цилиндра, жестко посаженного на вал, при наличии температурного градиента между внутренней и внешней поверхностями. Постановка задачи основана на теории малых деформаций, условии пластичности Треска, ассоциированном с ним законе пластического течения и законе линейного изотропного упрочнения.

Предполагается, что в цилиндре присутствует стационарный пологий температурный градиент между внутренней и внешней поверхностями. Механические и теплофизические параметры материала приняты независимыми от температуры. Проведенный анализ ограничен стадией активного нагружения.

Установлено, что в общем случае в цилиндре возможно появление шести пластических областей, соответствующих различным ребрам и граням поверхности текучести Треска, а эволюция пластического течения имеет качественные отличия от изотермического случая. Для каждой пластической области найдено точное решение определяющей системы уравнений. Результаты расчетов показали, что присутствие градиента температуры может приводить к значительному повышению абсолютной величины напряжений и пластических деформаций в цилиндре и снижению критических скоростей вращения, соответствующих началу пластического течения и полному переходу цилиндра в пластическое состояние.

Ключевые слова: вращающийся цилиндр, жесткое включение, упругопластичность, линейное упрочнение, температурные напряжения.

Получение: 31 июля 2023 г. / Исправление: 21 сентября 2024 г. /

Принятие: 27 сентября 2024 г. / Публикация онлайн: 21 октября 2024 г.

Механика деформируемого твердого тела

Научная статья

© Коллектив авторов, 2024

© СамГТУ, 2024 (составление, дизайн, макет)

 Контент публикуется на условиях лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru) (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Образец для цитирования

Прокудин А. Н. Упругопластический анализ вращающегося полого цилиндра, жестко посаженного на вал, при наличии температурного градиента // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2024. Т. 28, № 3. С. 462–488. EDN: RQASZT. DOI: [10.14498/vsgtu2050](https://doi.org/10.14498/vsgtu2050).

Сведения об авторе

Александр Николаевич Прокудин  <https://orcid.org/0000-0002-5156-424X>

кандидат технических наук; ведущий научный сотрудник; лаб. проблем создания и обработки материалов и изделий; e-mail: sunbeam_85@mail.ru

Введение. Вращающиеся цилиндры и диски являются важным структурным компонентом многих машин и механизмов. В научной литературе опубликовано множество работ, посвященных расчету прочности и напряженно-деформированного состояния сплошных и полых цилиндров под действием центробежных сил, и интерес российских и зарубежных исследователей к этому направлению остается стабильно высоким. Упругопластический анализ позволяет более точно оценить максимальную скорость вращения цилиндров по сравнению с теорией упругости. Кроме того, расчет недавно предложенной технологии ротационного автофретирования возможен только в рамках теории упругопластичности.

В первом приближении материал цилиндра может рассматриваться как идеальное упругопластическое тело. В рамках такой модели получены аналитические решения упругопластической задачи для сплошного [1–3], полого цилиндра [4–6], а также цилиндра с жестким включением [7] и жесткой внешней стенкой [8]. Остаточные напряжения в цилиндре после его предварительного вращения изучались в работах [6–9] для различных граничных условий. Постановка задач в [1–9] основана на условии пластичности Треска и ассоциированном с ним законе течения. Кроме того, использовалось условие максимальных приведенных напряжений [10–12] и общее кусочно-линейное условие пластичности [13]. Установлено, что напряженно-деформированное состояние во вращающемся цилиндре существенно зависит от граничных и торцевых условий, а также от выбора пластического потенциала.

Реальное поведение материала более адекватно описывают модели изотропного и кинематического упрочнения. В работе [14] на основе условия Треска, теории пластического течения и закона линейного изотропного упрочнения получено аналитическое решение упругопластической задачи во вращающемся сплошном цилиндре. Процесс автофретирования полого цилиндра с закрепленными торцами изучался в работах [15, 16], в которых среди прочего рассматривалось влияние кинематического упрочнения (эффект Баушингера) на распределение остаточных напряжений после предварительного пластического деформирования. Деформационная теория пластичности, условие пластичности Мизеса и закон Свифта использовались для расчета упругопластического отклика [17] и остаточных напряжений [18] во вращающемся сплошном и полом цилиндрах. Авторы [17, 18] разработали численный алгоритм решения на основе метода стрельбы. Работа [19] посвящена расчету вращающегося полого цилиндра из нелинейно упрочняемого материала; постановка задачи основывалась на условии Треска, ассоциированном законе течения и степенном законе упрочнения; для ряда частных случаев степенного параметра получено аналитическое решение. Авторами [20] предложена комбинированная модель изотропно-кинематического упрочнения, параметры которой зависят от величины предварительно накопленной пластической деформации; построенная модель и условие пластичности Треска использовались для расчета ротационного автофретирования полых заготовок с закрепленными торцами. Следует отметить, что упрочнение оказывает существенное влияние на упругопластический отклик вращающегося цилиндра, в особенности на распределение остаточных напряжений.

Одним из способов повышения несущей способности конструкции и снижения ее веса является использование функционально-градиентных материа-

лов. Упругопластический анализ вращающихся полых неоднородных цилиндров с закрепленными торцами представлен в работах [21–23]. Результаты получены на основе условия пластичности Треска, материал цилиндров принимался идеальным, для механических свойств материала использовалась степенная зависимость от радиальной координаты. Вращающийся сплошной функционально-градиентный цилиндр из нелинейно упрочняемого материала изучался в работе [24]. Анализ основан на деформационной теории пластичности, условии пластичности Мизеса и законе упрочнения Свифта. Для модуля Юнга, предела текучести, коэффициента Пуассона и плотности материала использовалась квадратичная зависимость от радиальной координаты. Полученные результаты [21–24] показывают, что неоднородность материала оказывает существенное влияние на напряженное состояние в цилиндре. Более того, подходящим выбором распределений механических свойств материала можно значительно повысить максимальную скорость вращения цилиндра. Влияние размерного эффекта на упругопластический отклик вращающегося полого цилиндра из функционально-градиентного материала изучалось в работе [25] на основе градиентной теории пластичности деформационного типа, условия Мизеса и закона линейного изотропного упрочнения. Установлено, что градиентная теория пластичности предсказывает замедление пластического течения в цилиндре по сравнению с классическими решениями, однако этот эффект проявляется только в микромасштабе, для цилиндров с внутренним радиусом свыше 500 мкм разница между градиентной и классической теориями практически отсутствует.

В ходе эксплуатации вращающиеся элементы механизмов могут подвергаться температурному воздействию. В работах [26, 27] изучалось упругопластическое деформирование полого цилиндра при наличии стационарного температурного градиента, вызванного разницей температур на внутренней и внешней поверхностях, в несвязной постановке. Пластические деформации вычислялись на основе условия Треска, ассоциированного закона течения и модели линейного изотропного упрочнения. Механические и теплофизические параметры материала предполагались не зависящими от температуры. В работах [26, 27] установлено, что температурное поле оказывает существенное влияние на напряженно-деформированное состояние вращающегося цилиндра. В частности, в [26] отмечено, что присутствие положительного градиента температуры приводит к существенному уменьшению скорости начала пластического течения и незначительному увеличению скорости, соответствующей полному переходу цилиндра в пластическое состояние. В то же время цилиндр, предварительно нагруженный отрицательным температурным градиентом практически до предела текучести, способен выдерживать значительные скорости вращения до зарождения пластического течения [27]. Влияние нестационарного температурного поля на упругопластическое деформирование вращающегося сплошного цилиндра рассматривалось в работе [28]. Авторы использовали условие Треска и модель идеального материала, предел текучести которого линейно уменьшается с ростом температуры. Предполагалось, что температура внешней поверхности вначале возрастает до максимальной, затем сохраняет постоянное значение, после чего снижается до исходной. Установлено, что достаточный нагрев внешней поверхности может привести к зарождению пластического течения, даже если скорость

вращения цилиндра не превосходит предельную упругую скорость вращения. Интересно отметить, что пластическое течение появляется уже после того, как температура внешней поверхности начала снижаться. Этот эффект, по всей видимости, объясняется неоднородностью температурного поля и механических свойств цилиндра.

Упругопластическое деформирование полых цилиндров из функционально-градиентных материалов при одновременном воздействии внутреннего давления, центробежных и температурных сил исследовалось в работах [29, 30] на основе условия Треска и ассоциированного закона течения. Авторы использовали степенной закон распределения для всех параметров материала за исключением коэффициента Пуассона. Установлено, что неоднородность свойств материала оказывает значительное влияние на напряженно-деформированное состояние цилиндра и эволюцию пластического течения в нем. Влияние температурного поля на упругопластические деформации конструкции, состоящей из полого вала и предварительно посаженной на него трубы, изучалось в работе [31]. Показано, что использование неоднородного материала трубы позволяет значительно сократить вес трубы при сохранении эксплуатационных характеристик. Термоупругопластическое деформирование двухслойных и многослойных композитных вращающихся труб из неоднородных материалов изучалось в работах [32, 33].

Проведенный обзор показал, что расчет вращающихся цилиндров привлекает значительное внимание исследователей. Как правило, рассматривается сплошной либо полый цилиндр, а другие типы граничных условий, например, цилиндр с жестким включением изучаются значительно реже. Ранее такая задача решалась только в изотермической постановке [7, 11]. Также следует отметить работы, в которых исследовалось упругопластическое деформирование вращающегося диска с жестким включением [34, 35], в том числе и при наличии температурного поля [36, 37]. Настоящая работа призвана заполнить имеющийся пробел в научной литературе и посвящена термоупругопластическому анализу вращающегося цилиндра, жестко посаженного на вал.

1. Постановка задачи. Изучается полый цилиндр, жестко посаженный на вал. Для решения используется цилиндрическая система координат (r, θ, z) . Цилиндр вращается вокруг собственной оси с угловой скоростью ω , которая медленно возрастает со временем, что позволяет пренебречь угловым ускорением. Также в цилиндре присутствует неравномерное стационарное температурное поле, вызванное разностью температур на внутренней и внешней поверхностях. Предполагается, что цилиндр находится в состоянии плоской деформации и сохраняет осевую симметрию в процессе деформирования. При таких ограничениях точки цилиндра движутся только в радиальном направлении и u_r является единственным ненулевым перемещением. Для удобства введены следующие безразмерные переменные:

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{r_{in}}{r_{out}}, & \beta &= \frac{r}{r_{out}}, & \Omega &= \frac{\rho r_{out}^2}{\sigma_0} \omega^2, & \bar{\sigma}_{ij} &= \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_0}, \\ \bar{\sigma}_y &= \frac{\sigma_y}{\sigma_0}, & \bar{H} &= \frac{H}{E}, & \bar{u} &= \frac{E}{\sigma_0} \frac{u_r}{r_{out}}, & \bar{\varepsilon}_{ij} &= \frac{E}{\sigma_0} \varepsilon_{ij}, \\ \bar{\varepsilon}_{ij}^e &= \frac{E}{\sigma_0} \varepsilon_{ij}^e, & \bar{\varepsilon}_{ij}^p &= \frac{E}{\sigma_0} \varepsilon_{ij}^p, & \bar{T} &= \frac{T}{T_0} - 1, & \bar{\alpha} &= \frac{ET_0}{\sigma_0} \alpha. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь r_{in} , r_{out} — внутренний/внешний радиусы цилиндра; ρ — плотность; σ_0 , σ_y — начальный/актуальный предел текучести при одноосном растяжении-сжатии; σ_{ij} — напряжения; H — параметр, характеризующий изотропное упрочнение материала; E — модуль Юнга; ε_{ij} , ε_{ij}^e , ε_{ij}^p — полные, упругие и пластические деформации соответственно; T — температура; T_0 — отсчетная температура; α — коэффициент линейного теплового расширения. Механические и теплофизические параметры материала предполагаются не зависящими от температуры. Материал цилиндра принят однородным и изотропным. Параметр нагружения Ω для удобства называется скоростью вращения. Далее во всех формулах, если не указано иное, используются переменные (1), а знак подчеркивания для краткости опущен.

При сформулированных выше допущениях касательные напряжения в цилиндре отсутствуют, а единственное уравнение равновесия имеет вид

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial \beta} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{\beta} = -\Omega\beta. \quad (2)$$

Предполагается, что максимальная скорость вращения не слишком высока и геометрически линейная теория справедлива с необходимой степенью точности. Кинематические соотношения запишутся следующим образом:

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u}{\partial \beta}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u}{\beta}, \quad \varepsilon_{zz} = 0. \quad (3)$$

Полные деформации представляют собой сумму упругих, пластических и температурных деформаций

$$\varepsilon_{rr} = \varepsilon_{rr}^e + \varepsilon_{rr}^p + \varepsilon_{rr}^t, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \varepsilon_{\theta\theta}^e + \varepsilon_{\theta\theta}^p + \varepsilon_{\theta\theta}^t, \quad \varepsilon_{zz} = \varepsilon_{zz}^e + \varepsilon_{zz}^p + \varepsilon_{zz}^t. \quad (4)$$

Связь между напряжениями и упругими деформациями имеет вид

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{1}{(1+\nu)(1-2\nu)} ((1-\nu)\varepsilon_{rr}^e + \nu\varepsilon_{\theta\theta}^e + \nu\varepsilon_{zz}^e - (1+\nu)\alpha T), \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{1}{(1+\nu)(1-2\nu)} (\nu\varepsilon_{rr}^e + (1-\nu)\varepsilon_{\theta\theta}^e + \nu\varepsilon_{zz}^e - (1+\nu)\alpha T), \\ \sigma_{zz} &= \nu(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}) - \alpha T. \end{aligned} \quad (5)$$

В (5) ν обозначает коэффициент Пуассона.

В качестве условия пластичности используется условие Треска:

$$\max(|\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}|, |\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{zz}|, |\sigma_{zz} - \sigma_{rr}|) = \sigma_y, \quad (6)$$

где предел текучести определяется линейным законом упрочнения

$$\sigma_y = 1 + H\varepsilon_{eq}^p. \quad (7)$$

Здесь ε_{eq}^p — эквивалентная пластическая деформация.

Пластическая составляющая деформации вычисляется в соответствии с ассоциированным законом пластического течения:

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{df}{d\sigma_{ij}}, \quad (8)$$

где ε_{ij}^p — приращения пластических деформаций; $d\lambda$ — положительный множитель; f — пластический потенциал, соответствующий условию (6).

Если напряженное состояние в пластической области соответствует ребру условия Треска (6), то вместо закона (8) используется его обобщение [38]:

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda_1 \frac{df_1}{d\sigma_{ij}} + d\lambda_2 \frac{df_2}{d\sigma_{ij}}, \quad (9)$$

где $d\lambda_1$ и $d\lambda_2$ — положительные множители; f_1 и f_2 — пластические потенциалы, соответствующие граням условия (6), на пересечении которых лежит рассматриваемое ребро.

Приращение пластической деформации $d\varepsilon_{eq}^p$ определяется законом

$$\sigma_y d\varepsilon_{eq}^p = \sigma_{rr} d\varepsilon_{rr}^p + \sigma_{\theta\theta} d\varepsilon_{\theta\theta}^p + \sigma_{zz} d\varepsilon_{zz}^p. \quad (10)$$

Граничные условия задачи задаются следующим образом:

$$u(\delta) = 0, \quad \sigma_{rr}(1) = 0. \quad (11)$$

В свою очередь, граничные условия по температуре имеют вид

$$T(\delta) = T_{in}, \quad T(1) = T_{out}, \quad T_{out} \geq T_{in}. \quad (12)$$

Решая стационарное уравнение теплопроводности с учетом граничных условий (12), нетрудно получить распределение температуры в цилиндре

$$T(\beta) = T_{in} + \Delta T \left(1 - \frac{\ln \beta}{\ln \delta} \right), \quad (13)$$

где $\Delta T = T_{out} - T_{in}$.

2. Начальное упругое равновесие и зарождение пластического течения. Рассмотрим напряженное состояние в цилиндре до наступления в нем пластического течения ($\varepsilon_{ij}^p = 0$). Соотношения (5) в условиях плоской деформации ($\varepsilon_{zz} = 0$) примут вид

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{1}{(1+\nu)(1-2\nu)} ((1-\nu)\varepsilon_{rr} + \nu\varepsilon_{\theta\theta} - (1+\nu)\alpha T), \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{1}{(1+\nu)(1-2\nu)} (\nu\varepsilon_{rr} + (1-\nu)\varepsilon_{\theta\theta} - (1+\nu)\alpha T), \\ \sigma_{zz} &= \nu(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}) - \alpha T. \end{aligned}$$

Уравнение равновесия (2) с учетом предыдущих соотношений запишется следующим образом:

$$u'' + u'\beta^{-1} - u\beta^{-2} = -\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{(1-\nu)}\Omega\beta + \frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha T'.$$

Здесь и далее штрих обозначает производную по координате β . Решая полученное уравнение, найдем упругое решение для произвольного температурного распределения:

$$\begin{aligned} u &= \bar{d}_1 \beta^{-1} + \bar{d}_2 \beta - \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{8(1-\nu)} \Omega \beta^3 + \frac{(1+\nu)}{(1-\nu)} \alpha \beta^{-1} \int_{\delta}^{\beta} \beta T d\beta, \\ \sigma_{rr} &= -d_1 \beta^{-2} + d_2 - \frac{(3-2\nu)}{8(1-\nu)} \Omega \beta^2 - \frac{\alpha}{(1-\nu)} \beta^{-2} \int_{\delta}^{\beta} \beta T d\beta, \\ \sigma_{\theta\theta} &= d_1 \beta^{-2} + d_2 - \frac{(1+2\nu)}{8(1-\nu)} \Omega \beta^2 - \frac{\alpha T(\beta)}{(1-\nu)} + \frac{\alpha}{(1-\nu)} \beta^{-2} \int_{\delta}^{\beta} \beta T d\beta, \\ \bar{d}_1 &= (1+\nu) d_1, \quad \bar{d}_2 = (1+\nu)(1-2\nu) d_2, \end{aligned} \quad (14)$$

где d_1, d_2 — константы интегрирования.

Далее предполагается, что $T_{in} = 0$ (температура на внутренней поверхности совпадает с отсчетной), тогда $\Delta T = T_{out}$. Определенный интеграл, входящий в решение (14), с учетом (13) вычисляется следующим образом:

$$\int_{\delta}^{\beta} \beta T d\beta = \frac{\beta^2 - 2\beta^2 \ln \beta - \delta^2}{4 \ln \delta} \Delta T + \frac{\beta^2 \Delta T}{2}.$$

Константы d_1, d_2 вычисляются из граничных условий (11):

$$\begin{aligned} d_1 &= -\frac{\delta^2(1-2\nu)(3-2\nu-\delta^2)}{4d} \Omega - \frac{\alpha \delta^2}{d \ln \delta} (1-\nu + (1-2\nu) \ln \delta) \Delta T, \\ d_2 &= \frac{3-2\nu + (1-2\nu)\delta^4}{8d} \Omega + \frac{1-\delta^2 + 2 \ln \delta}{4d \ln \delta} \Delta T, \\ d &= (1-\nu)(1 + (1-2\nu)\delta^2). \end{aligned} \quad (15)$$

Найдем значение температурного градиента ΔT_p , соответствующее началу пластического течения, в отсутствие центробежных сил ($\Omega = 0$). Во-первых, докажем, что $\sigma_{rr} > \sigma_{\theta\theta}$. Рассмотрим разность

$$\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} = -\frac{\alpha(\beta^2 - \delta^2 + \delta^2(1-2\nu)(\beta^2 - 2 \ln \delta - 1))}{2\beta^2(1-\nu)(1 + (1-2\nu)\delta^2) \ln \delta} \Delta T.$$

Эта величина положительна, поскольку $\beta^2 - 2 \ln \delta - 1 \geq \delta^2 - \ln \delta^2 - 1 > 0$. Аналогичным образом можно доказать, что $\sigma_{\theta\theta} \geq \sigma_{zz}$, причем равенство достигается только на внутренней поверхности $\beta = \delta$. Из вышеизложенного следует, что напряженное состояние в цилиндре удовлетворяет неравенству $\sigma_{rr} > \sigma_{\theta\theta} \geq \sigma_{zz}$. Теперь необходимо найти точку, в которой разность $\sigma_{rr} - \sigma_{zz}$ достигает наибольшего значения. Приравняем к нулю производную $\partial(\sigma_{rr} - \sigma_{zz})/\partial\beta$:

$$-\alpha \frac{2\delta^2((1-\nu) + (1-2\nu) \ln \delta) + (1 + \delta^2(1-2\nu))\beta^2}{2\beta^3(1-\nu)(1 + \delta^2(1-2\nu)) \ln \delta} \Delta T = 0.$$

Приведенное выше уравнение имеет решение для значения β , удовлетворяющего соотношению

$$\beta^2 = -\frac{2\delta^2((1-\nu) + (1-2\nu)\ln\delta)}{1 + \delta^2(1-2\nu)}.$$

Нетрудно убедиться, что это значение β является минимумом функции $\sigma_{rr} - \sigma_{zz}$. Если указанная точка принадлежит отрезку $[\delta, 1]$, то тогда разность $\sigma_{rr} - \sigma_{zz}$ достигает наибольшего значения на одной из боковых поверхностей цилиндра. В противном случае наибольшее значение — на внешней поверхности цилиндра. Рассмотрим значения $\sigma_{rr} - \sigma_{zz}$ на боковых поверхностях и заметим, что

$$\begin{aligned} (\sigma_{rr} - \sigma_{zz})|_{\beta=1} - (\sigma_{rr} - \sigma_{zz})|_{\beta=\delta} &= \\ &= -\alpha \frac{(1-\delta^2)(1-\nu) - 2(\nu + (1-2\nu)\delta^2)\ln\delta}{2(1-\nu)(1+\delta^2(1-2\nu))\ln\delta} \Delta T > 0, \end{aligned}$$

откуда следует, что разность $\sigma_{rr} - \sigma_{zz}$ имеет большее значение на поверхности $\beta = 1$. Таким образом, при воздействии только температурного градиента пластическое течение зарождается на внешней поверхности цилиндра при $\beta = 1$, а соответствующее значение градиента ΔT_p можно найти из (14) и (15):

$$\Delta T_p = \alpha \frac{2(1-\nu)(1+\delta^2(1-2\nu))\ln\delta}{2(1-\nu+\delta^2(1-2\nu))\ln\delta - \nu(1-\delta^2)}. \quad (16)$$

Далее предполагается, что действия лишь температурного градиента недостаточно для начала течения, т.е. $\Delta T < \Delta T_p$.

Рассмотрим общий случай $\Omega > 0$. В упругом состоянии поле напряжений в цилиндре представляет собой сумму механических и температурных напряжений. В работе [7] показано, что в изотермическом случае цилиндр состоит из трех областей, напряжения в которых удовлетворяют следующим неравенствам (в порядке их расположения в цилиндре):

$$\sigma_{rr} > \sigma_{\theta\theta} \geq \sigma_{zz}, \quad \sigma_{\theta\theta} \geq \sigma_{rr} \geq \sigma_{zz}, \quad \sigma_{\theta\theta} \geq \sigma_{zz} > \sigma_{rr}.$$

С другой стороны, выше было доказано, что температурные напряжения всегда удовлетворяют неравенству $\sigma_{rr} > \sigma_{\theta\theta} \geq \sigma_{zz}$. Очевидно, что при одновременном температурном и механическом воздействии цилиндр в общем случае также состоит из трех указанных выше областей, а с увеличением градиента температуры ΔT в цилиндре последовательно исчезают третья и вторая области. Поэтому условие пластичности Треска (6) может выполняться в одной из следующих форм:

$$\sigma_{rr} - \sigma_{zz} = 1, \quad \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{zz} = 1, \quad \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr} = 1.$$

Определение скорости Ω_p начала пластического течения и соответствующей радиальной координаты сводится к вычислению наибольшего значения каждой из перечисленных выше функций. К сожалению, строгое решение этой

задачи является достаточно сложным и громоздким в силу большого количества параметров и необходимости решать трансцендентные уравнения. Разумеется, для известных значений параметров данная задача может быть решена численно.

Далее покажем, что при определенных условиях пластическое течение в цилиндре всегда начинается в соответствии с уравнением $\sigma_{rr} - \sigma_{zz} = 1$. Во-первых, рассмотрим выражение

$$\begin{aligned} (\sigma_{rr} - \sigma_{zz})|_{\beta=\delta} - (\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr}) &= \\ &= \frac{(1-2\nu)(3-2\nu-\delta^2-(1+(1-2\nu)\delta^2)\beta^2)}{4\beta^2(1-\nu)(1+(1-2\nu)\delta^2)}(\delta^2+\beta^2)\Omega - \\ &\quad - \alpha \frac{\nu(\delta^2+\beta^2)-\delta^2+(1-2\nu)(\delta^2\beta^2-(\delta^2+\beta^2)\ln\delta)}{\beta^2(1-\nu)(1+(1-2\nu)\delta^2)\ln\delta} \Delta T. \end{aligned}$$

Так как предыдущее выражение положительно, условие $\sigma_{rr} - \sigma_{zz} = 1$ выполнится на внутренней поверхности раньше, чем где-либо в цилиндре выполнится условие $\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr} = 1$. Далее предположим, что на внутренней поверхности цилиндра $\beta = \delta$ выполнилось условие $\sigma_{rr} - \sigma_{zz} = 1$. Соответствующая скорость вращения равна

$$\begin{aligned} \Omega_* &= \frac{4(1-\nu)(1+(1-2\nu)\delta^2)}{(1-2\nu)S} - \frac{2\alpha(1-\delta^2+2\ln\delta)}{S\ln\delta} \Delta T, \\ S &= (1-\delta^2)(3-2\nu+(1-2\nu)\delta^2). \end{aligned} \quad (17)$$

Заметим, что Ω_* убывает с увеличением температуры ΔT . Оценим сверху разность напряжений $\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{zz}$. Рассмотрим по отдельности механическую и температурную составляющие напряжений, для которых будем использовать верхние индексы m и t соответственно. В дальнейших рассуждениях используется ряд производных, вычисление которых для краткости пропущено. Используя соотношения (14) и (15), нетрудно убедиться, что разность $\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{zz}$ возрастает с увеличением скорости вращения Ω , максимальное значение которой, в свою очередь, достигается при $\Delta T = 0$. Отсюда следует, что механические напряжения удовлетворяют неравенству

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta\theta}^m - \sigma_{zz}^m &\leq (\sigma_{\theta\theta}^m - \sigma_{zz}^m)|_{\Omega=\Omega_*, \Delta T=0} = \\ &= \frac{(\beta^2 - \delta^2)(3 - 2\nu - \delta^2 - \beta^2(1 + (1 - 2\nu)\delta^2))}{2\beta^2(1 - \delta^2)(3 - 2\nu + (1 - 2\nu)\delta^2)}. \end{aligned}$$

Далее, используя стандартные методы математического анализа, найдем наибольшее значение функции в правой части предыдущего неравенства и получим оценку

$$\sigma_{\theta\theta}^m - \sigma_{zz}^m \leq \frac{(1 + (1 - 2\nu)\delta^2) \left(\delta - \sqrt{\frac{3-2\nu-\delta^2}{1+(1-2\nu)\delta^2}} \right)^2}{2(1 - \delta^2)(3 - 2\nu + (1 - 2\nu)\delta^2)}. \quad (18)$$

Теперь рассмотрим температурную составляющую напряжений. Заметим, что разность $\sigma_{\theta\theta}^t - \sigma_{zz}^t$ растет с увеличением координаты β , следовательно,

$$\sigma_{\theta\theta}^t - \sigma_{zz}^t \leq (\sigma_{\theta\theta}^t - \sigma_{zz}^t)|_{\beta=1} = \alpha \Delta T \frac{1 - \delta^2 + 2 \ln \delta}{2(1 + \delta^2(1 - 2\nu)) \ln \delta}. \quad (19)$$

В итоге условие $\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{zz} < 1$ с помощью неравенств (18), (19) и выражения (16) для ΔT_p преобразуется к виду

$$\begin{aligned} & \frac{(1 + (1 - 2\nu)\delta^2) \left(\delta - \sqrt{\frac{3 - 2\nu - \delta^2}{1 + (1 - 2\nu)\delta^2}} \right)^2}{2(1 - \delta^2)(3 - 2\nu + (1 - 2\nu)\delta^2)} + \\ & + \frac{(1 - \nu)(1 - \delta^2 + 2 \ln \delta)}{2(1 - \nu + (1 - 2\nu)\delta^2) \ln \delta - \nu(1 - \delta^2)} < 1. \end{aligned} \quad (20)$$

Выполнение предыдущего неравенства гарантирует, что пластическое течение начнется в соответствии с условием $\sigma_{rr} - \sigma_{zz} = 1$. С помощью численных расчетов установлено, что при $\delta > 0.245$ неравенство (20) справедливо для любых $\nu > 0$ и $\Delta T < \Delta T_p$. Случай нарушения неравенства (20) подробно не рассматривается, но тестовые расчеты показали, что качественные отличия от нижеизложенного могут проявиться только при $\delta \approx 0$ и $\Delta T \approx \Delta T_p$.

3. Упругопластическое деформирование. В общем случае в цилиндре формируются 6 пластических областей, соответствующих разным граням и ребрам призмы Треска. На эволюцию пластического течения существенное влияние оказывают геометрические и механические параметры, а также величина температурного градиента. Далее предполагается, что параметры ν и δ удовлетворяют неравенству (20), а значит, условие Треска впервые выполняется в форме $\sigma_{rr} - \sigma_{zz} = 1$. Для не слишком высоких значений ΔT пластическое течение начинается на внутренней поверхности цилиндра, а соответствующую скорость Ω_p можно вычислить с помощью (17). В результате на внутренней поверхности цилиндра зарождаются пластические области I и II, напряженное состояние в которых удовлетворяет неравенствам $\sigma_{rr} > \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{zz}$ и $\sigma_{rr} > \sigma_{\theta\theta} > \sigma_{zz}$ соответственно. Разумеется, с увеличением скорости вращения размеры пластических областей увеличиваются, а границы между областями I и II и между областью II и упругой областью движутся в сторону внешней поверхности цилиндра. Далее, если $\nu < \nu_{tr}$, то при $\Omega = \Omega_1$ на внешней поверхности цилиндра зарождается пластическая область VI, соответствующая грани $\sigma_{\theta\theta} > \sigma_{zz} > \sigma_{rr}$ поверхности Треска (6). После этого при $\Omega = \Omega_2$ на упругопластической границе между областью II и упругой областью выполняется равенство $\sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta}$, в результате чего в указанной точке появляются пластические области III и IV, напряженное состояние в которых удовлетворяет неравенствам $\sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta} > \sigma_{zz}$ и $\sigma_{\theta\theta} > \sigma_{rr} > \sigma_{zz}$ соответственно. Наконец, при $\Omega = \Omega_{fp}$ упругая область между областями IV и VI исчезает, а на ее месте формируется пластическая область V, соответствующая ребру $\sigma_{\theta\theta} > \sigma_{rr} = \sigma_{zz}$ поверхности текучести Треска (6). Если же $\nu > \nu_{tr}$, то сначала при $\Omega = \Omega_1$ появляются пластические области III и IV. Далее при $\Omega = \Omega_2$ для $\Delta T < \Delta T_{tr}$ на внешней поверхности цилиндра

появляется пластическая область VI, а в случае $\Delta T \geq \Delta T_{tr}$ упругопластическая граница достигает внешней поверхности и весь цилиндр переходит в пластическое состояние. При скоростях выше Ω_{fp} цилиндр состоит из 6 пластических областей, границы между которыми меняют свое положение, при этом увеличиваются области, соответствующие ребрам призмы Треска. В настоящей работе предполагается, что $\Omega \leq \Omega_{fp}$.

Рассмотрим кратко случай, когда $\Delta T \approx \Delta T_p$. Условие $\sigma_{rr} - \sigma_{zz} = 1$ может впервые выполниться не на внутренней поверхности, а внутри цилиндра. Тогда скорость Ω_p и соответствующая координата могут быть найдены из численного решения оптимизационной задачи

$$\underset{\beta, \Omega}{\operatorname{argmin}} \Omega$$

при ограничениях $\Omega > 0$, $\beta \geq \delta$, $\beta \leq 1$, $\sigma_{rr}(\beta) - \sigma_{zz}(\beta) = 1$.

В результате внутри цилиндра формируется пластическая область II, которая с каждой стороны окружена упругими областями (константы интегрирования в которых, разумеется, различны). С увеличением скорости вращения условие пластичности $\sigma_{rr} - \sigma_{zz} = 1$ выполняется на внутренней поверхности, в результате чего в цилиндре появляются области I и II* (в этой области справедливы те же уравнения, что и в появившейся ранее области II, но константы интегрирования имеют другое значение). При определенной скорости вращения упругая область между областями II* и II исчезает, и указанные области сливаются в одну. В результате в цилиндре остаются пластические области I, II и упругая область, а последующая эволюция пластического течения следует рассмотренным выше закономерностям.

Далее найдем решение определяющей системы уравнений для каждой из пластических областей. Для констант интегрирования введены обозначения $c_1, c_2, \dots, c_{12}$. Решение (14) остается справедливым в упругой области, но константы d_1, d_2 необходимо определять отдельно для каждой стадии упругопластического деформирования.

Пластическая область I соответствует ребру призмы Треска, в котором справедливо неравенство $\sigma_{rr} > \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{zz}$, тогда условие пластичности Треска (6) с учетом (7) примет вид

$$\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{rr} - \sigma_{zz} = 1 + H\varepsilon_{eq}^p.$$

Из предыдущих соотношений с помощью (9) и (10) получим $\varepsilon_{rr}^p = -(\varepsilon_{\theta\theta}^p + \varepsilon_{zz}^p)$, $\varepsilon_{eq}^p = \varepsilon_{rr}^p$. Далее, используя закон Гука (5) и условие пластической несжимаемости, преобразуем условие пластичности к системе

$$\begin{aligned} (1 + H + H\nu)\varepsilon_{rr}^p - \varepsilon_{\theta\theta}^p &= \varepsilon_{rr} - \varepsilon_{\theta\theta} - (1 + \nu), \\ (2 + H + H\nu)\varepsilon_{rr}^p + \varepsilon_{\theta\theta}^p &= \varepsilon_{rr} - (1 + \nu), \end{aligned}$$

решая которую, найдем компоненты пластических деформаций:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr}^p &= \frac{2}{g_1}\varepsilon_{rr} - \frac{1}{g_1}\varepsilon_{\theta\theta} - \frac{2(1 + \nu)}{g_1}, \\ \varepsilon_{\theta\theta}^p &= -\frac{1}{g_1}\varepsilon_{rr} + \frac{g_1 + 1}{2g_1}\varepsilon_{\theta\theta} + \frac{1 + \nu}{g_1}, \end{aligned}$$

где $g_1 = 3 + 2(1 + \nu)H$. С учетом последних соотношений из закона Гука (5) найдем распределение напряжений:

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= \frac{1 + 2(1 - \nu)H}{(1 - 2\nu)g_1} \varepsilon_{rr} + \frac{1 + 2\nu H}{(1 - 2\nu)g_1} \varepsilon_{\theta\theta} - \frac{\alpha T}{1 - 2\nu} + \frac{2}{g_1}, \\ \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{zz} &= \frac{1 + 2\nu H}{(1 - 2\nu)g_1} \varepsilon_{rr} + \frac{1 + H}{(1 - 2\nu)g_1} \varepsilon_{\theta\theta} - \frac{\alpha T}{1 - 2\nu} - \frac{1}{g_1}.\end{aligned}$$

Далее преобразуем уравнение равновесия (2) с учетом полученных выше формул для напряжений к виду

$$\begin{aligned}u'' + u' \beta^{-1} - k_1 u \beta^{-2} &= -3h_1 \beta^{-1} - h_1 g_1 \Omega \beta + \frac{\alpha}{1 - 2\nu} h_1 g_1 T', \\ k_1 &= \frac{1 + H}{1 + 2(1 - \nu)H}, \quad h_1 = \frac{1 - 2\nu}{1 + 2(1 - \nu)H}.\end{aligned}$$

Решение этого уравнения с учетом (13) запишется следующим образом:

$$\begin{aligned}u &= c_1 \beta^{-\sqrt{k_1}} + c_2 \beta^{\sqrt{k_1}} - 3H^{-1} \beta - m_1 \Omega \beta^3 - n_1 \Delta T \beta, \\ m_1 &= \frac{1 - 2\nu}{8 + (17 - 18\nu)H} g_1, \quad n_1 = \frac{\alpha}{H(1 - 2\nu) \ln \delta} g_1.\end{aligned}$$

Рассмотрим **пластическую область II**, в которой напряженное состояние удовлетворяет неравенству $\sigma_{rr} > \sigma_{\theta\theta} > \sigma_{zz}$, а условие Треска (6) выполняется в следующем виде:

$$\sigma_{rr} - \sigma_{zz} = 1 + H \varepsilon_{eq}^p.$$

Из предыдущего условия вместе с (8) и (10) следует, что $\varepsilon_{eq}^p = \varepsilon_{rr}^p$, $\varepsilon_{zz}^p = -\varepsilon_{rr}^p$, $\varepsilon_{\theta\theta}^p = 0$. Далее закон Гука (5) примет вид

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= \frac{1}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} ((1 - \nu) \varepsilon_{rr} + \nu \varepsilon_{\theta\theta} - (1 - 2\nu) \varepsilon_{eq}^p - (1 + \nu) \bar{\alpha} \bar{T}), \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{1}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} (\nu \varepsilon_{rr} + (1 - \nu) \varepsilon_{\theta\theta} - (1 + \nu) \bar{\alpha} \bar{T}), \\ \sigma_{zz} &= \nu(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}) + \varepsilon_{eq}^p - \alpha T.\end{aligned}$$

С помощью полученных соотношений преобразуем условие пластичности и представим пластическую деформацию в виде

$$\varepsilon_{eq}^p = \frac{\varepsilon_{rr} - (1 + \nu)}{2 + (1 + \nu)H}.$$

Уравнение равновесия (2) с учетом закона Гука (5) и предыдущего соотношения запишется следующим образом:

$$\begin{aligned}u'' + u' \beta^{-1} - k_2 u \beta^{-2} &= -h_2 \beta^{-1} - h_2 g_2 \Omega \beta + \alpha \frac{h_2 g_2}{1 - 2\nu} T', \\ k_2 &= \frac{(1 - \nu) g_2}{1 + (1 - \nu^2)H}, \quad h_2 = \frac{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}{1 + (1 - \nu^2)H}, \quad g_2 = 2 + (1 + \nu)H.\end{aligned}$$

Используя (13), найдем решение приведенного выше уравнения:

$$u = c_3\beta^{-\sqrt{k_2}} + c_4\beta^{\sqrt{k_2}} + (1 + \nu)\beta - m_2\Omega\beta^3 + n_2\Delta T\beta,$$

$$m_2 = \frac{(1 + \nu)(1 - 2\nu)g_2}{7 + 2\nu + 8(1 - \nu^2)H}, \quad n_2 = \alpha \frac{(1 + \nu)g_2}{(1 - 2\nu)\ln \delta}.$$

В **пластической области III** справедливо неравенство $\sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta} > \sigma_{zz}$. Условие пластичности Треска (6) с учетом (7) запишется в виде

$$\sigma_{rr} - \sigma_{zz} = \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{zz} = 1 + H\varepsilon_{eq}^p.$$

Из предыдущих соотношений с помощью (9) и (10) получим $\varepsilon_{zz}^p = -(\varepsilon_{rr}^p + \varepsilon_{\theta\theta}^p)$, $\varepsilon_{eq}^p = -\varepsilon_{zz}^p$. Поскольку $\sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta}$, уравнение равновесия (2) легко интегрируется, в результате чего найдем

$$\sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta} = c_6 - \Omega\beta^2/2, \quad \sigma_{zz} = \sigma_{rr} - 1 + H\varepsilon_{zz}^p.$$

Далее преобразуем закон Гука (5) с помощью предыдущих соотношений:

$$\varepsilon_{zz}^p = 2(1 + \nu)\sigma_{rr} - \frac{1}{1 - 2\nu}\varepsilon_{rr} - \frac{1}{1 - 2\nu}\varepsilon_{\theta\theta} + 2\alpha \frac{1 + \nu}{1 - 2\nu},$$

$$\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta} = -\frac{(1 - 2\nu)(1 - (3 + 2H(1 + \nu))\sigma_{rr}) - \alpha(3 + 2H(1 + \nu))T}{1 + H}.$$

Используя (3) и (13), найдем решение второго из представленных выше уравнений относительно неизвестного перемещения в виде

$$u = \frac{c_5}{\beta} + \bar{c}_6\beta - \frac{1 - 2\nu}{8(1 + H)}g_3\Omega\beta^3 + \frac{\alpha}{4(1 + H)\ln \delta}g_3\Delta T(1 - 2\ln \beta)\beta,$$

$$\bar{c}_6 = \frac{1 - 2\nu}{2(1 + H)}\left(g_3\left(c_6 + \frac{\alpha\Delta T}{1 - 2\nu}\right) - 1\right), \quad g_3 = 3 + 2H(1 + \nu).$$

Оставшиеся компоненты пластических деформаций определяются из разделения деформаций (4) и закона, обратного к закону Гука (5):

$$\varepsilon_{rr}^p = \varepsilon_{rr} - (1 - 2\nu)\sigma_{rr} + \nu(H\varepsilon_{zz}^p - 1) - \alpha T,$$

$$\varepsilon_{\theta\theta}^p = \varepsilon_{\theta\theta} - (1 - 2\nu)\sigma_{rr} + \nu(H\varepsilon_{zz}^p - 1) - \alpha T.$$

Напряженное состояние в **пластической области IV** соответствует грани призмы Треска $\sigma_{\theta\theta} > \sigma_{rr} > \sigma_{zz}$, следовательно, условие пластичности (6) примет вид

$$\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{zz} = 1 + H\varepsilon_{eq}^p.$$

Из (8) и (10) следует $\varepsilon_{eq}^p = \varepsilon_{\theta\theta}^p$, $\varepsilon_{zz}^p = -\varepsilon_{\theta\theta}^p$, $\varepsilon_{rr}^p = 0$. Далее закон Гука (5) с учетом предыдущих соотношений преобразуется к следующему виду:

$$\sigma_{rr} = \frac{1}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}((1 - \nu)\varepsilon_{rr} + \nu\varepsilon_{\theta\theta} - (1 + \nu)\alpha T),$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{1}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}(\nu\varepsilon_{rr} + (1 - \nu)\varepsilon_{\theta\theta} - (1 - 2\nu)\varepsilon_{eq}^p - (1 + \nu)\alpha T),$$

$$\sigma_{zz} = \nu(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}) + \varepsilon_{eq}^p - \alpha T.$$

Из полученных выше соотношений и условия пластичности найдем

$$\varepsilon_{\theta\theta}^p = \frac{\varepsilon_{\theta\theta} - (1 + \nu)}{2 + (1 + \nu)H}.$$

Используя закон Гука (5) и последнее выражение, преобразуем уравнение равновесия (2):

$$u'' + u'\beta^{-1} - k_4 u \beta^{-2} = \frac{h_4}{g_4} \beta^{-1} - h_4 \Omega \beta + \alpha \frac{h_4}{1 - 2\nu} T',$$

$$k_4 = \frac{1 + (1 - \nu^2)H}{(1 - \nu)g_4}, \quad h_4 = \frac{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}{(1 - \nu)}, \quad g_4 = 2 + (1 + \nu)H.$$

Решение этого уравнения с учетом (13) запишется в виде

$$u = c_7 \beta^{-\sqrt{k_4}} + c_8 \beta^{\sqrt{k_4}} + (1 + \nu)\beta - m_4 \Omega \beta^3 - n_4 \Delta T \beta,$$

$$m_4 = \frac{(1 - 2\nu)(1 + \nu)}{17 - 18\nu + 8H(1 - \nu^2)} g_4, \quad n_4 = \frac{\alpha(1 + \nu)}{(1 - 2\nu) \ln \delta} g_4.$$

Пластическая область V соответствует ребру призмы Треска, напряженное состояние в котором удовлетворяет неравенству $\sigma_{\theta\theta} > \sigma_{rr} = \sigma_{zz}$. Условие пластичности примет вид

$$\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{zz} = \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr} = 1 + H\varepsilon_{eq}^p.$$

Из предыдущих соотношений с помощью (9) и (10) получим $\varepsilon_{\theta\theta}^p = -(\varepsilon_{rr}^p + \varepsilon_{zz}^p)$, $\varepsilon_{eq}^p = \varepsilon_{\theta\theta}^p$. По аналогии с пластической областью I получим систему линейных относительно неизвестных пластических деформаций:

$$-\varepsilon_{rr}^p + (1 + H + H\nu)\varepsilon_{\theta\theta}^p = -\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta} - (1 + \nu),$$

$$\varepsilon_{rr}^p + (2 + H + H\nu)\varepsilon_{\theta\theta}^p = \varepsilon_{\theta\theta} - (1 + \nu),$$

решение которой имеет вид

$$\varepsilon_{rr}^p = \frac{g_5 + 1}{2g_5} \varepsilon_{rr} - \frac{1}{g_5} \varepsilon_{\theta\theta} + \frac{1 + \nu}{g_5},$$

$$\varepsilon_{\theta\theta}^p = -\frac{1}{g_5} \varepsilon_{rr} + \frac{2}{g_5} \varepsilon_{\theta\theta} - \frac{2(1 + \nu)}{g_5},$$

где $g_5 = 3 + 2(1 + \nu)H$. Используя предыдущие выражения, преобразуем закон Гука (5) к виду

$$\sigma_{rr} = \sigma_{zz} = \frac{1 + H}{(1 - 2\nu)g_5} \varepsilon_{rr} + \frac{1 + 2\nu H}{(1 - 2\nu)g_5} \varepsilon_{\theta\theta} - \frac{\alpha T}{1 - 2\nu} - \frac{1}{g_5},$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{1 + 2\nu H}{(1 - 2\nu)g_5} \varepsilon_{rr} + \frac{1 + 2(1 - \nu)H}{(1 - 2\nu)g_5} \varepsilon_{\theta\theta} - \frac{\alpha T}{1 - 2\nu} + \frac{2}{g_5}.$$

Далее уравнение равновесия (2) с учетом приведенных выше соотношений запишется следующим образом:

$$u'' + u'\beta^{-1} - k_5 u \beta^{-2} = 3h_5 \beta^{-1} - h_5 g_5 \Omega \beta + \frac{\alpha h_5 g_5}{1 - 2\nu} T',$$

$$k_5 = \frac{1 + 2(1 - \nu)H}{1 + H}, \quad h_5 = \frac{1 - 2\nu}{1 + H},$$

а его решение с учетом распределения (13) примет вид

$$u = c_9 \beta^{-\sqrt{k_5}} + c_{10} \beta^{\sqrt{k_5}} - 3H^{-1} \beta - m_5 \Omega \beta^3 + n_5 \Delta T \beta,$$

$$m_5 = \frac{(1 - 2\nu)g_5}{8 + (7 + 2\nu)H}, \quad n_5 = \frac{\alpha g_5}{H(1 - 2\nu) \ln \delta}.$$

В **пластической области VI** напряжения удовлетворяют неравенству $\sigma_{\theta\theta} > \sigma_{zz} > \sigma_{rr}$, следовательно, условие Треска примет вид

$$\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr} = 1 + H\varepsilon_{eq}^p.$$

Из приведенного выше уравнения вместе с (8) и (10) следует, что $\varepsilon_{eq}^p = \varepsilon_{\theta\theta}^p$, $\varepsilon_{\theta\theta}^p = -\varepsilon_{rr}^p$, $\varepsilon_{zz}^p = 0$. Отсюда закон Гука (5) можно преобразовать к виду

$$\sigma_{rr} = \frac{1}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} ((1 - \nu)\varepsilon_{rr} + \nu\varepsilon_{\theta\theta} - (1 - 2\nu)\varepsilon_{eq}^p - (1 + \nu)\alpha T),$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{1}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} (\nu\varepsilon_{rr} + (1 - \nu)\varepsilon_{\theta\theta} + (1 - 2\nu)\varepsilon_{eq}^p - (1 + \nu)\alpha T),$$

$$\sigma_{zz} = \nu(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}) - \alpha T.$$

Из полученных выше соотношений и условия пластичности найдем

$$\varepsilon_{\theta\theta}^p = \frac{-\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta} - (1 + \nu)}{2 + H + H\nu}.$$

Используя закон Гука и выражение для пластической деформации, преобразуем уравнение равновесия (2) к виду

$$u'' + u'\beta^{-1} - u\beta^{-2} = 2h_6 \beta^{-1} - h_6 g_6 \Omega \beta + \alpha \frac{h_6 g_6}{1 - 2\nu} T',$$

$$h_6 = \frac{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}{1 + (1 - \nu^2)H}, \quad g_6 = 2 + H + H\nu.$$

Решение этого уравнения с учетом (13) имеет вид

$$u = c_{11} \beta^{-1} + c_{12} \beta + h_6 \beta \ln \beta - m_6 \Omega \beta^3 + n_6 \Delta T (1 - 2 \ln \beta) \beta,$$

$$m_6 = \frac{h_6 g_6}{8}, \quad n_6 = \frac{\alpha(1 + \nu)g_6}{4(1 + H(1 - \nu^2)) \ln \delta}.$$

4. Вычисление констант интегрирования и переходных скоростей. Процесс упругопластического деформирования разделяется на два или три интервала, в каждом из которых цилиндр состоит из нескольких пластических и упругой областей. Завершающим шагом решения является вычисление неизвестных констант интегрирования и координат границ между областями. С этой целью для каждого интервала формулируется система уравнений, состоящая из граничных условий задачи (11), а также трех условий непрерывности на каждой границе. Такая система является линейной относительно констант интегрирования и нелинейной относительно координат между областями. Часть уравнений системы решается в символьном виде относительно констант интегрирования. Данный шаг может занимать длительное время, однако его достаточно выполнить лишь один раз. Далее полученные выражения вместе с параметрами задачи подставляются в оставшиеся уравнения системы, которые решаются численно относительно неизвестных координат границ. Описанную процедуру удобно выполнять в системах компьютерной алгебры.

Рассмотрим первый интервал $\Omega_p \leq \Omega \leq \Omega_1$. Неизвестными величинами являются константы интегрирования c_1, c_2, c_3, c_4 в пластических областях I и II, d_1, d_2 в упругой области, а также координаты β_1 и β_2 границ между областями. Выражения для констант интегрирования можно получить из решения следующей системы линейных уравнений:

$$\begin{aligned} u^I(\delta) = 0, \quad u^I(\beta_1) = u^{II}(\beta_1), \quad \sigma_{rr}^I(\beta_1) = \sigma_{rr}^{II}(\beta_1), \\ p_{rr}^{II}(\beta_2) = 0, \quad \sigma_{rr}^{El}(\beta_2) - \sigma_{zz}^{El}(\beta_2) = 1, \quad \sigma_{rr}^{El}(1) = 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Здесь верхний индекс обозначает область, индекс El соответствует упругой области. Координаты β_1 и β_2 определяются численно из приведенной ниже системы (22) нелинейных уравнений с учетом решения системы (21), численных значений параметров задачи $\delta, \nu, H, \alpha, \Delta T$ и выбранного значения скорости вращения Ω :

$$\sigma_{zz}^I(\beta_1) = \sigma_{zz}^{II}(\beta_1), \quad u^{II}(\beta_2) = u^{El}(\beta_2). \quad (22)$$

Нетрудно убедиться в том, что уравнения (21) и (22) обеспечивают выполнение граничных условий, а также непрерывность всех искомых функций. Переходное значение коэффициента Пуассона ν_{tr} вычисляется с помощью уравнений (22) вместе со следующими условиями:

$$\sigma_{rr}^{II}(\beta_2) = \sigma_{\theta\theta}^{II}(\beta_2), \quad \sigma_{\theta\theta}^{El}(1) - \sigma_{rr}^{El}(1) = 1. \quad (23)$$

В полученной расширенной системе уравнений неизвестными являются $\beta_1, \beta_2, \nu_{tr}, \Omega$. Для вычисления переходной скорости Ω_1 к уравнениям (22) добавляется одно из уравнений (23) в зависимости от выполнения неравенства $\nu < \nu_{tr}$. Заметим, что ν_{tr} зависит от параметров $\delta, H, \alpha, \Delta T$.

На интервале $\Omega_1 \leq \Omega \leq \Omega_2$ цилиндр может состоять из трех или четырех пластических областей. В первом случае неизвестные константы интегрирования определяются из решения системы уравнений:

$$\begin{aligned} u^I(\delta) = 0, \quad u^I(\beta_1) = u^{II}(\beta_1), \quad \sigma_{rr}^I(\beta_1) = \sigma_{rr}^{II}(\beta_1), \\ p_{rr}^{II}(\beta_2) = 0, \quad \sigma_{rr}^{El}(\beta_2) - \sigma_{zz}^{El}(\beta_2) = 1, \\ \sigma_{\theta\theta}^{El}(\beta_3) - \sigma_{rr}^{El}(\beta_3) = 1, \quad p_{\theta\theta}^{VI}(\beta_3) = 0, \quad \sigma_{rr}^{VI}(1) = 0. \end{aligned}$$

В свою очередь, для вычисления границ используются уравнения

$$\sigma_{zz}^I(\beta_1) = \sigma_{zz}^{II}(\beta_1), \quad u^{II}(\beta_2) = u^{El}(\beta_2), \quad u^{El}(\beta_3) = u^{VI}(\beta_3). \quad (24)$$

Для определения переходной скорости Ω_2 уравнения (24) дополняются первым из условий (23). Если $\nu < \nu_{tr}$, то на втором интервале цилиндр состоит из четырех пластических областей. Константы интегрирования вычисляются из следующей системы уравнений

$$\begin{aligned} u^I(\delta) &= 0, \quad u^I(\beta_1) = u^{II}(\beta_1), \quad \sigma_{rr}^I(\beta_1) = \sigma_{rr}^{II}(\beta_1), \\ u^{II}(\beta_2) &= u^{III}(\beta_2), \quad \sigma_{rr}^{II}(\beta_2) = \sigma_{rr}^{III}(\beta_2), \\ \sigma_{rr}^{III}(\beta_3) &= \sigma_{rr}^{IV}(\beta_3), \quad \sigma_{zz}^{III}(\beta_3) = \sigma_{zz}^{IV}(\beta_3), \\ \sigma_{rr}^{IV}(\beta_4) &= \sigma_{rr}^{El}(\beta_4), \quad \sigma_{\theta\theta}^{El}(\beta_4) - \sigma_{zz}^{El}(\beta_4) = 1, \quad \sigma_{rr}^{El}(1) = 0. \end{aligned}$$

Координаты границ определяются численно с помощью системы

$$\begin{aligned} \sigma_{zz}^I(\beta_1) &= \sigma_{zz}^{II}(\beta_1), \quad \sigma_{zz}^{II}(\beta_2) = \sigma_{zz}^{III}(\beta_2), \\ u^{III}(\beta_3) &= u^{IV}(\beta_3), \quad u^{IV}(\beta_4) = u^{El}(\beta_4). \end{aligned} \quad (25)$$

Если $\Delta T = \Delta T_{tr}$, то пластическая область VI зарождается на внешней поверхности цилиндра в момент $\Omega = \Omega_{fp}$ перехода в состояние полной пластичности. Таким образом, для вычисления ΔT_{tr} дополним систему (25) следующими условиями:

$$\beta_4 = 1, \quad \sigma_{\theta\theta}^{El}(1) - \sigma_{rr}^{El}(1) = 1. \quad (26)$$

Заметим, что константы интегрирования в упругой области с учетом условия $\beta_4 = 1$ примут вид

$$d_1 = \frac{(4 - (1 - 2\nu)\Omega) \ln \delta - 2\alpha(1 + 2 \ln \delta) \Delta T_{tr}}{4(1 - \nu) \ln \delta}, \quad d_2 = \frac{2 + \Omega}{4 - 4\nu}.$$

В свою очередь, второе из условий (26) преобразуется следующим образом:

$$d_1 + \frac{(1 - 2\nu)\Omega \ln \delta + 2\alpha \Delta T_{tr}}{4(1 - \nu) \ln \delta} = 1.$$

Из двух последних соотношений нетрудно найти переходное значение градиента температуры:

$$\Delta T_{tr} = \frac{\nu}{\alpha}.$$

Если $\Delta T < \Delta T_{tr}$, то для вычисления Ω_2 система уравнений (25) дополняется вторым условием (26). В противном случае система уравнений (25) решается совместно с первым из уравнений (26) для определения Ω_{fp} . На третьем интервале $\Omega_2 \leq \Omega \leq \Omega_{fp}$ цилиндр состоит из 5 пластических областей. Необходимые системы уравнений на этом интервале формулируются аналогичным образом, а дополнительное условие для вычисления Ω_{fp} имеет вид $\beta_4 = \beta_5$.

5. Результаты. В качестве примера рассмотрим цилиндр, геометрический параметр которого равен $\delta = 0.25$. В качестве отсчетной температуры примем $T_0 = 300$ К. Цилиндр изготовлен из алюминиевого сплава со следующими значениями параметров: $E = 66$ ГПа, $\sigma_0 = 237$ МПа, $H = 6.195$ ГПа, $\alpha = 2.32 \cdot 10^{-5}$ К $^{-1}$, $\nu = 0.33$ [39]. Соответствующие безразмерные величины примут значения $\bar{H} = 0.094$, $\bar{\alpha} = 1.938$. Отсюда максимальное значение температурного градиента $\Delta T_p = 0.4388$; переходное значение температурного градиента $\Delta T_{tr} = 0.1703$. Также отметим, что неравенство (20) выполняется.

Численные зависимости скоростей вращения Ω_p и Ω_{fp} от градиента температуры ΔT представлены на рис. 1. Видно, что и Ω_p , и Ω_{fp} снижаются с увеличением ΔT от 0 до ΔT_p на 34% и 50% соответственно. Следует отметить, что в полном вращающемся цилиндре, боковые поверхности которого свободны от напряжений, наличие положительного температурного градиента также приводит к снижению Ω_p , однако умеренные значения градиента ΔT могут вызвать даже небольшое увеличение критической скорости Ω_{fp} [26]. Скорость начала пластического течения (рис. 1) следует линейной аналитической зависимости (17) практически для всех значений ΔT , лишь для $\Delta T \approx \Delta T_p$ у графика Ω_p появляется небольшой нелинейный участок. Зависимость $\Omega_{fp}(\Delta T)$ состоит из двух практически линейных участков, а для $\Delta T > \Delta T_{tr}$ скорость падения Ω_{fp} увеличивается. Интересно отметить, что для $\Delta T \approx \Delta T_p$ во всем цилиндре еще до начала пластического течения реализуется напряженное состояние, близкое к условию пластичности $\sigma_{rr} - \sigma_{zz} = 1$, откуда можно ожидать, что скорости Ω_p и Ω_{fp} будут практически равны. Однако, как показали расчеты, при таких условиях цилиндр способен выдерживать значительные скорости до полного перехода в пластическое состояние и в нем также появляются пластические области III и IV.

Перейдем к анализу напряженно-деформированного состояния. Не будем подробно останавливаться на каждой стадии процесса упругопластического деформирования. Рассмотрим влияние температурного градиента на распределение и величину напряжений и пластических деформаций в цилиндре. Для сравнения используются следующие значения температурного градиента: $\Delta T = 0.0$ (изотермический случай), $\Delta T = 0.2$, $\Delta T = 0.4$. На рис. 2 представлено распределение напряжений в цилиндре при скорости $\Omega = 2.709$. Данное значение скорости соответствует началу пластического течения в цилиндре при температурном градиенте $\Delta T = 0.4$. Разумеется, для значений градиента $\Delta T = 0.0$ и $\Delta T = 0.2$ цилиндр при такой скорости еще находится в упругом состоянии. Из рис. 2 видно, что наличие температурного градиента приводит к значительному повышению абсолютной величины напряжений во вращающемся цилиндре. Помимо этого происходит и качественное изменение напряженного состояния, в частности, при больших значениях градиента ΔT и скоростях, близких к Ω_p , во всем цилиндре реализуется неравенство $\sigma_{rr} > \sigma_{\theta\theta} > \sigma_{zz}$, однако при дальнейшем увеличении скорости вращения вблизи внешней поверхности цилиндра появится область, в которой $\sigma_{\theta\theta} > \sigma_{rr} > \sigma_{zz}$.

На рис. 3 представлено распределение напряжений и пластических деформаций в цилиндре при скорости $\Omega = 6.428$. Выбранное значение скорости соответствует полному переходу цилиндра в пластическое состояние для значения градиента $\Delta T = 0.4$. При $\Delta T = 0.0$ и $\Delta T = 0.2$ и указанном значении

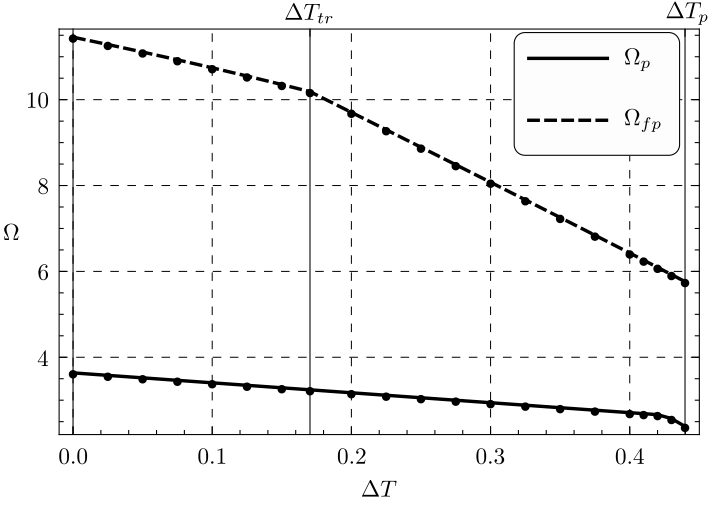


Рис. 1. Скорости начала пластического течения Ω_p и полного перехода в состояние пластичности Ω_{fp} в зависимости от температурного градиента ΔT
 [Figure 1. The elastic limit angular velocity Ω_p and the plastic limit angular velocity Ω_{fp} versus the temperature gradient ΔT]

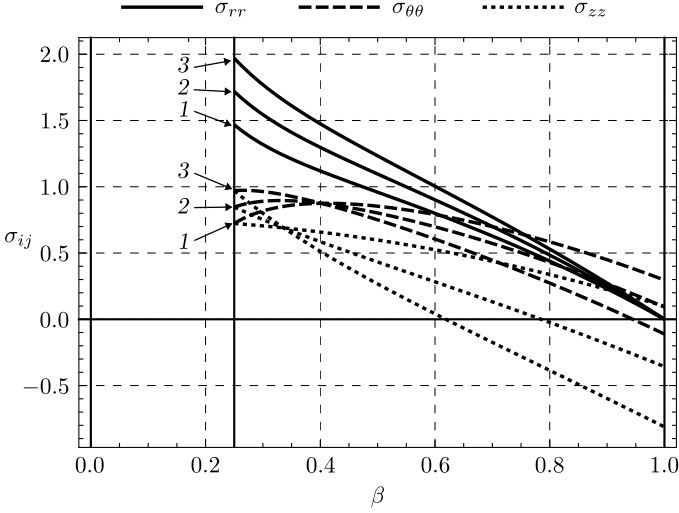


Рис. 2. Распределение упругих напряжений в цилиндре при $\Omega = 2.709$ для различных значений градиента температуры: 1 — $\Delta T = 0.0$, 2 — $\Delta T = 0.2$, 3 — $\Delta T = 0.4$

[Figure 2. Elastic stresses distribution in the cylinder at $\Omega = 2.709$ for different values of the temperature gradient: 1 — $\Delta T = 0.0$, 2 — $\Delta T = 0.2$, 3 — $\Delta T = 0.4$]

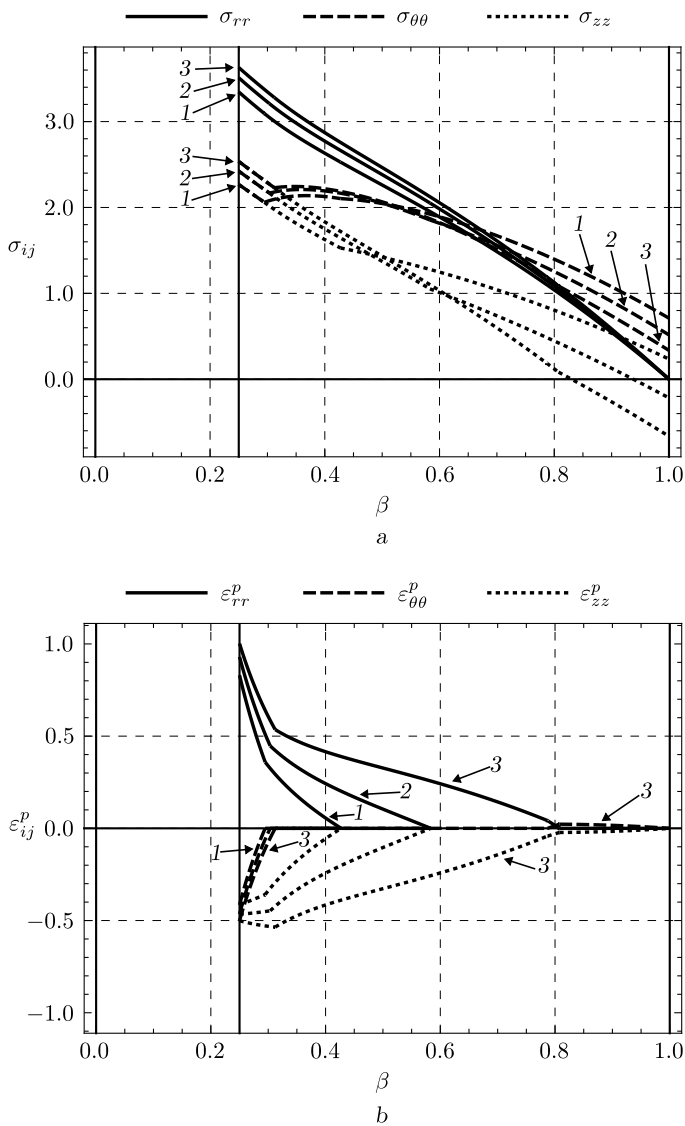


Рис. 3. Распределение напряжений (а) и пластических деформаций (b) при $\Omega = 6.428$ для различных значений градиента температуры: 1 — $\Delta T = 0.0$, 2 — $\Delta T = 0.2$, 3 — $\Delta T = 0.4$

[Figure 3. Stresses (a) and plastic strains (b) distribution at $\Omega = 6.428$ for different values of the temperature gradient: 1 — $\Delta T = 0.0$, 2 — $\Delta T = 0.2$, 3 — $\Delta T = 0.4$]

скорости в цилиндре еще присутствует область чисто упругого деформирования. Сравнивая рис. 2 и 3, отметим, что с ростом скорости вращения напряжения в цилиндре, разумеется, также возрастают. Из рис. 3 видим, что температурный градиент значительно ускоряет распространение пластического течения. Кроме того, как и в чисто упругом состоянии, абсолютная величина напряжений и пластических деформаций существенно возрастает с увеличением температурного градиента. Для достаточно больших значений температурного градиента и скоростей вращения вблизи внешней поверхности цилиндра появляется область отрицательных осевых напряжений, в то время как в изотермическом случае все напряжения в течение процесса остаются положительными.

Закключение. В настоящей работе получено точное решение задачи об упругопластическом деформировании вращающегося цилиндра с жестким включением при наличии температурного градиента между внутренней и внешней поверхностями. Установлено, что температурный градиент приводит к значительному снижению скорости начала пластического течения, а само течение может возникнуть внутри цилиндра, а не на внутренней боковой поверхности, как и в изотермическом случае. Критическая скорость вращения, соответствующая полному переходу цилиндра в пластическое состояние, также заметно снижается с увеличением температурного градиента. Кроме того, наличие градиента температуры приводит к увеличению абсолютной величины напряжений и пластических деформаций в цилиндре. Для дальнейших исследований представляет интерес термоупругопластический анализ вращающегося цилиндра из материала, чьи механические и теплофизические параметры зависят от температуры.

Конкурирующие интересы. Конкурирующих интересов не имею.

Авторский вклад и ответственность. Я несу полную ответственность за предоставление окончательной версии рукописи в печать. Окончательная версия рукописи мною одобрена.

Финансирование. Работа выполнена в рамках госзадания ХФИЦ ДВО РАН.

Библиографический список

1. Gamer U., Sayir M. Elastic-plastic stress distribution in a rotating solid shaft // *ZAMM, Z. Angew. Math. Mech.*, 1984. vol. 35. pp. 601–617. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00952107>.
2. Gamer U., Mack W., Varga I. Rotating elastic-plastic solid shaft with fixed ends // *Int. J. Eng. Sci.*, 1997. vol. 35, no. 3. pp. 253–267. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0020-7225\(96\)00085-7](https://doi.org/10.1016/S0020-7225(96)00085-7).
3. Mack W. The rotating elastic-plastic solid shaft with free ends // *Techn. Mech.*, 1991. vol. 12, no. 2. pp. 119–124.
4. Gamer U., Lance R. H. Stress distribution in a rotating elastic-plastic tube // *Acta Mech.*, 1983. vol. 50. pp. 1–8. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01170437>.
5. Mack W. Rotating elastic-plastic tube with free ends // *Int. J. Solids Struct.*, 1991. vol. 27, no. 11. pp. 1461–1476. DOI: [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(91\)90042-E](https://doi.org/10.1016/0020-7683(91)90042-E).
6. Kamal S. M., Perl M., Bharali D. Generalized plane strain study of rotational autofrettage of thick-walled cylinders — Part I: Theoretical analysis // *J. Pressure Vessel Technol.*, 2019. vol. 141, no. 5, 051201. DOI: <https://doi.org/10.1115/1.4043591>.
7. Prokudin A. N. Exact elastoplastic analysis of a rotating cylinder with a rigid inclusion

- under mechanical loading and unloading // *ZAMM, Z. Angew. Math. Mech.*, 2020. vol. 100, no. 3, e201900213. DOI: <https://doi.org/10.1002/zamm.201900213>.
8. Прокудин А. Н., Фирсов С. В. Упругопластическое деформирование вращающегося полого цилиндра с жестким внешним покрытием // *Вестн. ПНИПУ. Механика*, 2019. №4. С. 120–135. EDN: VUXFSF. DOI: <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2019.4.12>.
 9. Lindner T., Mack W. Residual stresses in an elastic-plastic solid shaft with fixed ends after previous rotation // *ZAMM, Z. Angew. Math. Mech.*, 1998. vol. 78, no. 2. pp. 75–86. DOI: [https://doi.org/10.1002/\(SICI\)1521-4001\(199802\)78:2<75::AID-ZAMM75>3.0.CO;2-V](https://doi.org/10.1002/(SICI)1521-4001(199802)78:2<75::AID-ZAMM75>3.0.CO;2-V).
 10. Прокудин А. Н. Упругопластический анализ вращающегося сплошного цилиндра при условии максимальных приведенных напряжений // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2020. Т. 24, №1. С. 74–94. EDN: LJTYOU. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1737>.
 11. Prokudin A. N. Schmidt–Ishlinskii yield criterion and a rotating cylinder with a rigid inclusion // *J. Appl. Comput. Mech.*, 2021. vol. 7, no. 2. pp. 858–869. EDN: JNCMTU. DOI: <https://doi.org/10.22055/jacm.2020.35648.2704>.
 12. Прокудин А. Н., Фирсов С. В. Упругопластические деформации во вращающемся полом цилиндре с жестким внешним покрытием при условии максимальных приведенных напряжений // *Сиб. журн. индустр. матем.*, 2022. Т. 25, №2. С. 58–82. EDN: DALRRD. DOI: <https://doi.org/10.33048/SIBJIM.2022.25.205>.
 13. Прокудин А. Н., Буренин А. А. Анализ упругопластического деформирования вращающегося сплошного цилиндра при общем кусочно-линейном условии пластичности // *ПМТФ*, 2021. Т. 62, №5. С. 68–79. EDN: TBZEIN. DOI: <https://doi.org/10.15372/PMTF20210507>.
 14. Eraslan A. N. On the linearly hardening rotating solid shaft // *Eur. J. Mec. A – Solids*, 2003. vol. 22, no. 2. pp. 295–307. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0997-7538\(02\)00002-5](https://doi.org/10.1016/S0997-7538(02)00002-5).
 15. Zare H. R., Darijani H. A novel autofrettage method for strengthening and design of thick-walled cylinders // *Materials & Design*, 2019. vol. 105. pp. 366–374. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.matdes.2016.05.062>.
 16. Zare H. R., Darijani H. Strengthening and design of the linear hardening thick-walled cylinders using the new method of rotational autofrettage // *Int. J. Mech. Sci.*, 2017. vol. 124–125. pp. 1–8. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2017.02.015>.
 17. Eraslan A. N. Von Mises' yield criterion and nonlinearly hardening rotating shafts // *Acta Mech.*, 2004. vol. 168, no. 3–4. pp. 129–144. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00707-004-0088-z>.
 18. Eraslan A. N., Mack W. A computational procedure for estimating residual stresses and secondary plastic flow limits in nonlinearly strain hardening rotating shafts // *Forsch. Ingenieurwesen*, 2005. vol. 69. pp. 65–75. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10010-004-0138-7>.
 19. Prokudin A. N. Exact elastoplastic analysis of a rotating hollow cylinder made of power-law hardening material // *Mater. Phys. Mech.*, 2023. vol. 51, no. 2. pp. 96–111. EDN: FEBDDA. DOI: https://doi.org/10.18149/MPM.5122023_9.
 20. Akhavanfar S., Darijani H., Darijani F. Constitutive modeling of high strength steels; application to the analytically strengthening of thick-walled tubes using the rotational autofrettage // *Eng. Struct.*, 2023. vol. 278, 115516. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2022.115516>.
 21. Akis T., Eraslan A.N. Exact solution of rotating FGM shaft problem in the elastoplastic state of stress // *Arch. Appl. Mech.*, 2007. vol. 77, no. 10. pp. 745–765. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00419-007-0123-3>.
 22. Eraslan A. N., Akis T. The stress response of partially plastic rotating FGM hollow shafts: Analytical treatment for axially constrained ends // *Mech. Based Design Struct. Machines*, 2006. vol. 34, no. 3. pp. 241–260. DOI: <https://doi.org/10.1080/15397730600779285>.
 23. Nejad M. Z., Fatehi P. Exact elasto-plastic analysis of rotating thick-walled cylindrical pressure vessels made of functionally graded materials // *Int. J. Eng. Sci.*, 2015. vol. 86. pp. 26–43. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2014.10.002>.

24. Argeso H., Eraslan A. N. A computational study on functionally graded rotating solid shafts // *Int. J. Comput. Methods Eng. Sci. Mech.*, 2007. vol. 8, no. 6. pp. 391–399. DOI: <https://doi.org/10.1080/15502280701577842>.
25. Varmazyari S., Shokrollahi H. Analytical solution for strain gradient plasticity of rotating functionally graded thick cylinders // *Int. J. Appl. Mech.*, 2020. vol. 12, no. 07, 2050082. DOI: <https://doi.org/10.1142/S1758825120500829>.
26. Eraslan A. N., Arslan E., Mack W. The strain hardening rotating hollow shaft subject to a positive temperature gradient // *Acta Mech.*, 2007. vol. 194, no. 1–4. pp. 191–211. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00707-007-0456-6>.
27. Arslan E., Mack W., Eraslan A. N. The rotating elastic-plastic hollow shaft conveying a hot medium // *Forsch. Ingenieurwesen*, 2010. vol. 74. pp. 27–39. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10010-010-0113-4>.
28. Arslan E., Mack W., Eraslan A. N. Effect of a temperature cycle on a rotating elastic-plastic shaft // *Acta Mech.*, 2008. vol. 195, no. 1–4. pp. 129–140. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00707-007-0549-2>.
29. Nejad M. Z., Alamzadeh N., Hadi A. Thermoelastoplastic analysis of FGM rotating thick cylindrical pressure vessels in linear elastic-fully plastic condition // *Compos. B: Eng.*, 2018. vol. 154. pp. 410–422. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2018.09.022>.
30. Ebrahimi T., Nejad M. Z., Jahankoha H., Hadi A. Thermoelastoplastic response of FGM linearly hardening rotating thick cylindrical pressure vessels // *Steel Compos. Struct.*, 2021. vol. 38, no. 2. pp. 189–211. DOI: <https://doi.org/10.12989/scs.2021.38.2.189>.
31. Apatay T., Arslan E., Mack W. Effects of homogeneous and inhomogeneous heating on rotating shrink fits with annular inclusion and functionally graded hub // *J. Thermal Stresses*, 2019. vol. 42, no. 11. pp. 1458–1479. DOI: <https://doi.org/10.1080/01495739.2019.1638856>.
32. Hajisadeghian A., Masoumi A., Parvizi A. Analytical investigation of elastic and plastic behavior of rotating double-walled FGM-homogenous hollow shafts // *Arch. Appl. Mech.*, 2021. vol. 91. pp. 1343–1369. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00419-020-01826-9>.
33. Eldeeb A. M., Shabana Y. M., Elsawaf A. Investigation of the thermoelastoplastic behaviors of multilayer FGM cylinders // *Compos. Struct.*, 2021. vol. 276. pp. 114523. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2021.114523>.
34. Güven U. The fully plastic rotating disk with rigid inclusion // *ZAMM, Z. Angew. Math. Mech.*, 1997. vol. 77, no. 9. pp. 714–716. DOI: <https://doi.org/10.1002/zamm.19970770912>.
35. Güven U. Elastic-plastic rotating disk with rigid inclusion // *Mech. Struct. Machines*, 1999. vol. 27, no. 1. pp. 117–128. DOI: <https://doi.org/10.1080/08905459908915691>.
36. Parmaksizoglu C., Güven U. Plastic stress distribution in a rotating disk with rigid inclusion under a radial temperature gradient // *Mech. Struct. Machines*, 1998. vol. 26, no. 1. pp. 9–20. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00419-020-01826-9>.
37. Eraslan A. N., Akis T. On the elastic-plastic deformation of a rotating disk subjected to a radial temperature gradient // *Mech. Based Design Struct. Machines*, 2003. vol. 31, no. 4. pp. 529–561. DOI: <https://doi.org/10.1081/SME-120023170>.
38. Koiter W. T. Stress-strain relations, uniqueness and variational theorems for elastic-plastic materials with a singular yield surface // *Q. Appl. Math.*, 1953. vol. 11, no. 3. pp. 350–354. DOI: <https://doi.org/10.1090/qam/59769>.
39. Meng Q., Zhao J., Mu Zh., Zhai R., Yu G. Springback prediction of multiple reciprocating bending based on different hardening models // *J. Manufact. Proces.*, 2022. vol. 76. pp. 251–263. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jmapro.2022.01.070>.

MSC: 74C05, 74B05, 74G05

Elastoplastic analysis of a rotating hollow cylinder with a rigid shaft under temperature gradient

A. N. Prokudin

Institute of Machinery and Metallurgy,

Khabarovsk Federal Research Center, Far-East Branch of RAS,

1, Metallurgov st., Komsomolsk-on-Amur, 681005, Russian Federation.

Abstract

The article is devoted to thermoelastoplastic analysis of a rotating cylinder with a rigid shaft and fixed ends. The problem statement is based on the theory of infinitesimal deformations, the Tresca yield condition, the flow rule associated with it and the law of linear isotropic hardening.

It is assumed that the cylinder is subject to stationary positive temperature gradient between the inner and outer surfaces. The mechanical and thermophysical parameters of the material are assumed to be independent of temperature. The performed analysis is limited to the loading stage.

It is found that, in the general case, six plastic regions can appear in a cylinder, corresponding to different edges and faces of the Tresca hexagon, and the evolution of plastic flow has qualitative differences from the isothermal case. For each plastic region, an exact solution of the governing equations is found. It has been established that the temperature gradient leads to a significant increase in the absolute value of stresses and plastic deformations in the cylinder and a decrease in elastic and plastic limit angular velocities.

Keywords: rotating cylinder, rigid inclusion, elastoplasticity, linear hardening, thermal stresses.

Received: 31st July, 2023 / Revised: 21st September, 2024 /

Accepted: 27th September, 2024 / First online: 21st October, 2024

Competing interests. I have no competing interests.

Authors' contributions and responsibilities. I take full responsibility for providing the final version of the manuscript for publication. The final version of the manuscript has been approved by me.

Mechanics of Solids

Research Article

© Authors, 2024

© Samara State Technical University, 2024 (Compilation, Design, and Layout)

 The content is published under the terms of the [Creative Commons Attribution 4.0 International License](http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Prokudin A. N. Elastoplastic analysis of a rotating hollow cylinder with a rigid shaft under temperature gradient, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2024, vol. 28, no. 3, pp. 462–488. EDN: RQASZT. DOI: [10.14498/vsgtu2050](https://doi.org/10.14498/vsgtu2050) (In Russian).

Author's Details:

Aleksandr N. Prokudin  <https://orcid.org/0000-0002-5156-424X>

Cand. Tech. Sci.; Senior Researcher; Lab. of Problems of Materials and Products Construction and Processing; e-mail: sunbeam_85@mail.ru

Funding. The study was performed within the framework of the State Contract of the Khabarovsk Federal Research Center of the Far-East Branch of the Russian Academy of Sciences.

References

1. Gamer U., Sayir M. Elastic-plastic stress distribution in a rotating solid shaft, *ZAMM, Z. Angew. Math. Mech.*, 1984, vol. 35, pp. 601–617. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00952107>.
2. Gamer U., Mack W., Varga I. Rotating elastic-plastic solid shaft with fixed ends, *Int. J. Eng. Sci.*, 1997, vol. 35, no. 3, pp. 253–267. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0020-7225\(96\)00085-7](https://doi.org/10.1016/S0020-7225(96)00085-7).
3. Mack W. The rotating elastic-plastic solid shaft with free ends, *Techn. Mech.*, 1991, vol. 12, no. 2, pp. 119–124.
4. Gamer U., Lance R. H. Stress distribution in a rotating elastic-plastic tube, *Acta Mech.*, 1983, vol. 50, pp. 1–8. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01170437>.
5. Mack W. Rotating elastic-plastic tube with free ends, *Int. J. Solids Struct.*, 1991, vol. 27, no. 11, pp. 1461–1476. DOI: [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(91\)90042-E](https://doi.org/10.1016/0020-7683(91)90042-E).
6. Kamal S. M., Perl M., Bharali D. Generalized plane strain study of rotational autofrettage of thick-walled cylinders — Part I: Theoretical analysis, *J. Pressure Vessel Technol.*, 2019, vol. 141, no. 5, 051201. DOI: <https://doi.org/10.1115/1.4043591>.
7. Prokudin A. N. Exact elastoplastic analysis of a rotating cylinder with a rigid inclusion under mechanical loading and unloading, *ZAMM, Z. Angew. Math. Mech.*, 2020, vol. 100, no. 3, e201900213. DOI: <https://doi.org/10.1002/zamm.201900213>.
8. Prokudin A. N., Firsov S. V. Elastoplastic deformation of a rotating hollow cylinder with a rigid casing, *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2019, no. 4, pp. 120–135 (In Russian). EDN: VUXFSF. DOI: <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2019.4.12>.
9. Lindner T., Mack W. Residual stresses in an elastic-plastic solid shaft with fixed ends after previous rotation, *ZAMM, Z. Angew. Math. Mech.*, 1998, vol. 78, no. 2, pp. 75–86. DOI: [https://doi.org/10.1002/\(SICI\)1521-4001\(199802\)78:2<75::AID-ZAMM75>3.0.CO;2-V](https://doi.org/10.1002/(SICI)1521-4001(199802)78:2<75::AID-ZAMM75>3.0.CO;2-V).
10. Prokudin A. N. Elastic-plastic analysis of rotating solid shaft by maximum reduced stress yield criterion, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2020, vol. 24, no. 1, pp. 74–94 (In Russian). EDN: LJTYOU. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1737>.
11. Prokudin A. N. Schmidt–Ishlinskii yield criterion and a rotating cylinder with a rigid inclusion, *J. Appl. Comput. Mech.*, 2021, vol. 7, no. 2, pp. 858–869. EDN: JNCMTU. DOI: <https://doi.org/10.22055/jacm.2020.35648.2704>.
12. Prokudin A. N., Firsov S. V. Elastoplastic deformation of a rotating hollow cylinder with a rigid casing under maximum reduced stress yield, *J. Appl. Ind. Math.*, 2022, vol. 16, no. 2, pp. 313–332. EDN: KLJMPP. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1990478922020120>.
13. Prokudin A. N., Burenin A. A. Unified yield criterion and elastoplastic analysis of a rotating solid cylinder, *J. Appl. Mech. Techn. Phys.*, 2021, vol. 62, no. 5, pp. 760–770. EDN: CAKHOD. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0021894421050072>.
14. Eraslan A. N. On the linearly hardening rotating solid shaft, *Eur. J. Mec. A – Solids*, 2003, vol. 22, no. 2, pp. 295–307. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0997-7538\(02\)00002-5](https://doi.org/10.1016/S0997-7538(02)00002-5).
15. Zare H. R., Darijani H. A novel autofrettage method for strengthening and design of thick-walled cylinders, *Materials & Design*, 2019, vol. 105, pp. 366–374. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.matdes.2016.05.062>.
16. Zare H. R., Darijani H. Strengthening and design of the linear hardening thick-walled cylinders using the new method of rotational autofrettage, *Int. J. Mech. Sci.*, 2017, vol. 124–125, pp. 1–8. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2017.02.015>.

17. Eraslan A. N. Von Mises' yield criterion and nonlinearly hardening rotating shafts, *Acta Mech.*, 2004, vol.168, no.3–4, pp. 129–144. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00707-004-0088-z>.
18. Eraslan A. N., Mack W. A computational procedure for estimating residual stresses and secondary plastic flow limits in nonlinearly strain hardening rotating shafts, *Forsch. Ingenieurwesen*, 2005, vol. 69, pp. 65–75. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10010-004-0138-7>.
19. Prokudin A. N. Exact elastoplastic analysis of a rotating hollow cylinder made of power-law hardening material, *Mater. Phys. Mech.*, 2023, vol. 51, no. 2, pp. 96–111. EDN: FEBDDA. DOI: https://doi.org/10.18149/MPM.5122023_9.
20. Akhavanfar S., Darijani H., Darijani F. Constitutive modeling of high strength steels; application to the analytically strengthening of thick-walled tubes using the rotational autofretting, *Eng. Struct.*, 2023, vol. 278, 115516. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2022.115516>.
21. Akis T., Eraslan A.N. Exact solution of rotating FGM shaft problem in the elastoplastic state of stress, *Arch. Appl. Mech.*, 2007, vol. 77, no. 10, pp. 745–765. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00419-007-0123-3>.
22. Eraslan A. N., Akis T. The stress response of partially plastic rotating FGM hollow shafts: Analytical treatment for axially constrained ends, *Mech. Based Design Struct. Machines*, 2006, vol. 34, no. 3, pp. 241–260. DOI: <https://doi.org/10.1080/15397730600779285>.
23. Nejad M. Z., Fatehi P. Exact elasto-plastic analysis of rotating thick-walled cylindrical pressure vessels made of functionally graded materials, *Int. J. Eng. Sci.*, 2015, vol. 86, pp. 26–43. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2014.10.002>.
24. Argeso H., Eraslan A. N. A computational study on functionally graded rotating solid shafts, *Int. J. Comput. Methods Eng. Sci. Mech.*, 2007, vol. 8, no. 6, pp. 391–399. DOI: <https://doi.org/10.1080/15502280701577842>.
25. Varmazyari S., Shokrollahi H. Analytical solution for strain gradient plasticity of rotating functionally graded thick cylinders, *Int. J. Appl. Mech.*, 2020, vol. 12, no. 07, 2050082. DOI: <https://doi.org/10.1142/S1758825120500829>.
26. Eraslan A. N., Arslan E., Mack W. The strain hardening rotating hollow shaft subject to a positive temperature gradient, *Acta Mech.*, 2007, vol. 194, no. 1–4, pp. 191–211. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00707-007-0456-6>.
27. Arslan E., Mack W., Eraslan A. N. The rotating elastic-plastic hollow shaft conveying a hot medium, *Forsch. Ingenieurwesen*, 2010, vol. 74, pp. 27–39. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10010-010-0113-4>.
28. Arslan E., Mack W., Eraslan A. N. Effect of a temperature cycle on a rotating elastic-plastic shaft, *Acta Mech.*, 2008, vol. 195, no. 1–4, pp. 129–140. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00707-007-0549-2>.
29. Nejad M. Z., Alamzadeh N., Hadi A. Thermoelastoplastic analysis of FGM rotating thick cylindrical pressure vessels in linear elastic-fully plastic condition, *Compos. B: Eng.*, 2018, vol. 154, pp. 410–422. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2018.09.022>.
30. Ebrahimi T., Nejad M. Z., Jahankoha H., Hadi A. Thermoelastoplastic response of FGM linearly hardening rotating thick cylindrical pressure vessels, *Steel Compos. Struct.*, 2021, vol. 38, no. 2, pp. 189–211. DOI: <https://doi.org/10.12989/scs.2021.38.2.189>.
31. Apatay T., Arslan E., Mack W. Effects of homogeneous and inhomogeneous heating on rotating shrink fits with annular inclusion and functionally graded hub, *J. Thermal Stresses*, 2019, vol. 42, no. 11, pp. 1458–1479. DOI: <https://doi.org/10.1080/01495739.2019.1638856>.
32. Hajisadeghian A., Masoumi A., Parvizi A. Analytical investigation of elastic and plastic behavior of rotating double-walled FGM-homogenous hollow shafts, *Arch. Appl. Mech.*, 2021, vol. 91, pp. 1343–1369. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00419-020-01826-9>.
33. Eldeeb A. M., Shabana Y. M., Elsawaf A. Investigation of the thermoelastoplastic behaviors of multilayer FGM cylinders, *Compos. Struct.*, 2021, vol. 276, pp. 114523. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2021.114523>.

34. Güven U. The fully plastic rotating disk with rigid inclusion, *ZAMM, Z. Angew. Math. Mech.*, 1997, vol. 77, no. 9, pp. 714–716. DOI: <https://doi.org/10.1002/zamm.19970770912>.
35. Güven U. Elastic-plastic rotating disk with rigid inclusion, *Mech. Struct. Machines*, 1999, vol. 27, no. 1, pp. 117–128. DOI: <https://doi.org/10.1080/08905459908915691>.
36. Parmaksizoglu C., Güven U. Plastic stress distribution in a rotating disk with rigid inclusion under a radial temperature gradient, *Mech. Struct. Machines*, 1998, vol. 26, no. 1, pp. 9–20. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00419-020-01826-9>.
37. Eraslan A. N., Akis T. On the elastic-plastic deformation of a rotating disk subjected to a radial temperature gradient, *Mech. Based Design Struct. Machines*, 2003, vol. 31, no. 4, pp. 529–561. DOI: <https://doi.org/10.1081/SME-120023170>.
38. Koiter W. T. Stress-strain relations, uniqueness and variational theorems for elastic-plastic materials with a singular yield surface, *Q. Appl. Math.*, 1953, vol. 11, no. 3, pp. 350–354. DOI: <https://doi.org/10.1090/qam/59769>.
39. Meng Q., Zhao J., Mu Zh., Zhai R., Yu G. Springback prediction of multiple reciprocating bending based on different hardening models, *J. Manufact. Proces.*, 2022, vol. 76, pp. 251–263. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jmapro.2022.01.070>.