Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2024. Т. 28, № 3. С. 543–561
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu2052
EDN: KRCTOC

УДК 539.3

Способ определения параметров электрического сигнала для управления вынужденными установившимися колебаниями электровязкоупругих тел. Приложение к активному демпфированию колебаний

Н. В. Севодина, Н. А. Юрлова, Д. А. Ошмарин

Институт механики сплошных сред УрО РАН,
Россия, 614018, Пермь, ул. Академика Королева, 1.

Аннотация

При реализации активной стратегии управления динамическим поведением конструкций, в состав которых входят элементы, выполненные из пьезоэлектрических материалов, как правило, используют два пьезоэлемента, один из которых выступает в роли сенсора, а другой – актуатора. При этом проблема заключается в определении величины управляющего сигнала, подаваемого на актуатор, и аппаратной реализации необходимого закона управления. В связи с необходимостью формирования сложных электрических цепей, представляющих собой блок управления, привлекательным становится предварительное моделирование механического отклика на тот или иной управляющий сигнал.

В настоящей работе подход, позволяющий на основе решения задачи о собственных колебаниях электровязкоупругой конструкции получить аналитические выражения для определения величины электрического потенциала, генерируемого в момент резонанса на электродированной поверхности пьезоэлемента при его деформировании на рассматриваемой моде при вынужденных установившихся колебаниях, распространен на случай использования двух пьезоэлементов, выполняющих функции сенсора и актуатора и располагающихся соответствующим образом на поверхности конструкции.

Механика деформируемого твердого тела
Научная статья

Образец для цитирования
Севодина Н. В., Юрлова Н. А., Ошмарин Д. А. Способ определения параметров электрического сигнала для управления вынужденными установившимися колебаниями электровязкоупругих тел. Приложение к активному демпфированию колебаний // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2024. Т. 28, № 3. С. 543–561. EDN: KRCTOC. DOI: 10.14498/vsgtu2052.

Сведения об авторах

Наталья Витальевна Севодина https://orcid.org/0000-0001-9374-7135
кандидат технических наук; научный сотрудник; отд. комплексных проблем механики деформируемых твердых тел; e-mail: natsev@icmm.ru

Наталия Алексеевна Юрлова https://orcid.org/0000-0003-3497-0358
кандидат физико-математических наук, доцент; старший научный сотрудник; e-mail: yurlova@icmm.ru

Дмитрий Александрович Ошмарин https://orcid.org/0000-0002-9898-4823
кандидат технических наук; научный сотрудник; отд. комплексных проблем механики деформируемых твердых тел; e-mail: oshmarin@icmm.ru

Выведены аналитические выражения для определения величины управляющего сигнала, который подается на актуатор и обеспечивает демпфирование заданной моды колебаний. Управляющий сигнал формируется путем преобразования сигнала, получаемого от сенсора.

Приемлемость предложенного подхода продемонстрирована на примере консольно защемленной пластинки, выполненной из вязкоупругого материала, механическое поведение которого описывается комплексными динамическими модулями. По обе стороны пластинки размещены пьезоэлементы, играющие роли сенсора и актуатора. Численная реализация предложенного подхода осуществляется методом конечных элементов с использованием пакета прикладных программ `ANSYS`. Продемонстрировано хорошее совпадение результатов, полученных по выведенным формулам, с результатами расчета в `ANSYS`. Предложенный подход позволяет существенно сократить временные и ресурсные затраты при математическом моделировании активного управления вынужденными установившимися колебаниями электровязкоупругих тел, определить условия, которым должны удовлетворять элементы блока управления при реализации активной стратегии управления динамическим поведением такого рода smart-систем.

Ключевые слова: электровязкоупругость, пьезоэлемент, вынужденные установившиеся колебания, собственные колебания, управление колебаниями, смещения, электрический потенциал, сенсор, актуатор.

Получение: 4 августа 2023 г. / Исправление: 17 сентября 2024 г. /
Принятие: 27 сентября 2024 г. / Публикация онлайн: 31 октября 2024 г.

1. Введение. Колебания при эксплуатации различных конструкций встречаются в огромном множестве ситуаций. При этом иногда они не создают никаких проблем и даже могут вызываться целенаправленно. Однако если они нежелательны, то могут создавать угрозу целостности и плановому функционированию технических объектов. От крупных сооружений, таких как здания и мосты, до небольших сложных систем, таких как беспилотные летательные аппараты и манипуляторы-роботы, — у всех у них нежелательные вибрации требуется тем или иным образом подавлять или демпфировать. Ситуации зачастую осложняются тем, что к ряду конструкций доступ человеку невозможен либо затруднен (космические, подводные и т.п.). При этом становится крайне важным обеспечение управления динамическим поведением таких систем способом, не нарушающим жесткие требования к их весу и габаритам.

Активно развивающиеся в последние годы smart-технологии позволяют эффективно решать проблемы управления механическим поведением такого рода инженерных объектов, например, демпфирование колебаний различной природы или управление геометрией, сбор энергии и так далее.

Smart-системы реализуют smart-технологии, поскольку обладают способностью адаптироваться к изменениям окружающей среды благодаря наличию чувствительных элементов, в качестве которых широко применяются пьезоэлектрические материалы. Они обычно состоят из основной конструкции, объединенной с датчиками и исполнительными механизмами, координируемыми контроллером, входящим в блок управления.

Основные стратегии управления колебаниями с применением пьезоэлектрических материалов можно разделить на активные, полуактивные и пассивные. Среди них активные способы управления, в которых пьезоэлектрические материалы используются в качестве как датчиков (сенсоров), так и исполнительных механизмов (актуаторов) [1–3], обладают преимуществами высокой эффективности и адаптивности к изменяющимся внешним условиям. Однако этот способ требует внешних энергозатрат, что приводит к усложнению реализации управления и специальных решений для обеспечения стабильности систем.

Реализация активной стратегии управления подразумевает использование как минимум двух пьезоэлементов, один из которых является сенсором, регистрирующим отклик конструкции на приложенную нагрузку, а второй — актуатором, формирующим локальное управляющее воздействие на конструкцию и требуемым образом влияющим на ее механическое поведение. В силу того, что прямой и обратный пьезоэффекты не являются взаимно обратимыми, для того чтобы подать на актуатор сигнал, необходимый, например, для восстановления исходной формы конструкции или демпфирования заданной моды колебаний, необходимо некоторым образом преобразовать сигнал, полученный с сенсора.

При реализации активных стратегий управления динамическим поведением smart-конструкций необходимо понимать, как механически отреагирует система на внешнее воздействие, чтобы определить параметры такого воздействия и затем применить их при конструировании исполнительных механизмов (актуаторов) для усиления или нивелирования такого отклика.

Внешние динамические воздействия при эксплуатации ряда конструкций зачастую моделируются как вынужденные установившиеся колебания, заданные моды которых, реализующиеся на определенных частотах, требуется демпфировать.

Как правило, при математическом моделировании демпфирующие свойства объектов оцениваются по величине амплитуды при резонансном режиме или по скорости переходных процессов. В первом случае решается задача о вынужденных установившихся колебаниях, во втором — динамическая задача с начальными условиями. Приложения этих задач для поиска оптимальных параметров рассматриваемых систем сопряжены с рядом проблем. В частности, для получения амплитуд при резонансных режимах на основе решения задачи о вынужденных установившихся колебаниях требуется многократное повторение вычислительной процедуры при различных частотах внешних воздействий. Кроме этого, при использовании задачи о вынужденных установившихся колебаниях или задачи с начальными условиями найденные оптимальные решения связаны с моделируемым вариантом нагружения исследуемой системы.

Практический интерес, в том числе для решения задач оптимизации, представляет постановка задачи о собственных колебаниях системы, позволяющая оценить демпфирующие свойства объекта вне зависимости от внешних силовых, кинематических и других факторов. Поэтому применение задачи о собственных колебаниях при решении такого рода задач является более эффективным. Это определяет привлекательность использования результатов решения задачи о собственных колебаниях электровязкоупругих систем в приложении к активному управлению их динамическим поведением в режиме вынужденных установившихся колебаний, а именно для поиска оптимальной величины потенциала, характеризующего управляющее электрическое воздействие, направленное на демпфирование заданных мод. Понимание того, каким должно быть управляющее электрическое воздействие, позволяет соответствующим образом реализовать на аппаратном уровне блок управления при реализации активного управления динамическим поведением smart-конструкций.

Для таких оценочных решений удобно применять простые аналитические выражения, которые затем могут быть уточнены проведением полномасштабных расчетов. Примером такого рода выражений могут служить формулы определения оптимальных параметров сопротивления и индуктивности резонансной шунтирующей цепи при реализации пассивной стратегии управления динамическим поведением конструкций, предложенные в [4].

Данная работа является продолжением идеи и ее реализации, предложенной в работе [5], суть которой состоит в том, что в момент резонанса при вынужденных гармонических колебаниях конструкции форма колебаний подобна собственной форме колебаний, полученной из решения задачи о собственных колебаниях. В результате некоторых математических преобразований исходных матричных уравнений получены аналитические формулы, которые связывают величины, являющиеся решением задачи о вынужденных колебаниях, с аналогичными величинами в собственных векторах, которые являются решением задачи о собственных колебаниях.

Здесь соотношения, полученные в [5], распространены на случай использования двух пьезоэлементов, выполняющих функции сенсора и актуатора, что позволяет реализовать активное управление динамическим поведением такого рода конструкций, заключающееся в том, что сигнал, регистрируемый на пьезоэлементе-сенсоре, усиливается в блоке управления и затем подается на пьезоэлемент-актуатор для демпфирования заданной моды колебаний. Поскольку в момент резонанса все величины имеют максимальные значения, рассматривается именно момент резонанса.

Применение результатов решения задачи о собственных колебаниях для получения величин, необходимых для управления вынужденными установившимися колебаниями конструкций, имеющих элементы, выполненные из пьезоэлектрических материалов, позволяет существенно сократить время, требуемое для проведения расчетов за счет исключения ряда повторяющихся вычислений. Полученные путем математического моделирования значения коэффициента усиления сигнала, а также потенциала, который должен быть подан на актуатор, позволяют сократить время на разработку блока управления на элементном уровне и программирование контроллеров, осуществляющих преобразование сигнала с сенсора.

2. Математическая формулировка. Рассматриваемые в качестве smart-конструкций объекты — кусочно-однородные электровязкоупругие тела, имеющие в своем составе элементы, выполненные из упругих, вязкоупругих, а также из пьезоэлектрических материалов, присоединенных к поверхности тела.

Математическая постановка задачи подробно приведена в работах [6, 7], поэтому здесь для краткости изложения опущена. Отметим лишь, что вариационное уравнение равновесия кусочно-однородных электровязкоупругих тел формулируется на основе принципа возможных перемещений, дифференциальных уравнений Максвелла в квазистатическом приближении и соотношений линейной теории вязкоупругости и имеет вид

$$\int_{V_1}(\sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij} - D_i\delta E_i + \rho_1\ddot{u}_i\delta u_i)dV + \int_{V_2}(\sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij} + \rho_2\ddot{u}_i\delta u_i)dV = \\ = \int_{S_q} q_e\delta\phi dS + \int_{S_\sigma} p_i\delta u_i dS. \quad (1)$$

При отсутствии внешних усилий уравнение (1) будет описывать собственные колебания электровязкоупругого тела:

$$\int_{V_1}(\sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij} - D_i\delta E_i + \rho_1\ddot{u}_i\delta u_i)dV + \int_{V_2}(\sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij} + \rho_2\ddot{u}_i\delta u_i)dV = 0.$$

Здесь приняты следующие обозначения [5]: σ_{ij}, ε_{ij} и u_i — компоненты тензоров напряжений Коши и линейных деформаций, а также векторы перемещений соответственно; ρ_1 и ρ_2 — удельные плотности электроупругого материала тела объема V_1 и вязкоупругого материала тела объема V_2; ϕ — электрический потенциал; D_i, E_i — компоненты векторов электрической индукции и напряженности электрического поля; φ — электрический потенциал; $V = V_1 + V_2$, при этом V_1 относится к его электроупругой, а V_2 — к вязкоупругой части; $S = S_u + S_\sigma + S_q + S_\varphi + S_{p0}$ — полная поверхность кусочно-однородного тела, ограничивающая объем V. При этом на частях поверхности, ограничивающей объем V_2, заданы перемещения u_i^0 (на S_u) и поверхностные усилия p_i (на S_σ); на частях поверхности, ограничивающей объем V_1, заданы поверхностная плотность зарядов q_s (на S_q) и электрический потенциал φ_0 (на S_φ).

Принято, что все части кусочно-однородного тела V идеально скреплены между собой. На электродированных поверхностях пьезоэлектрических частей выполняется условие потенциальности.

Связь между компонентами вектора перемещений и компонентами тензора деформаций описывается дифференциальными соотношениями Коши. Упругие части составного тела удовлетворяют закону Гука, материал пьезоэлектрических частей принят упругим, описывающие его физические соотношения учитывают связь между механическими и электрическими свойствами материала, вязкоупругое поведение соответствующих элементов тела описывается комплексными динамическими модулями в рамках линейной наследственной теории вязкоупругости [6, 8]. Принято, что составляющие комплексных динамических модулей вязкоупругого материала тела не зависят от частоты колебаний в пределах некоторого диапазона, ограниченного окрестностью рассматриваемой собственной или резонансной частоты [5]:

$$\tilde{G} = G_{\mathrm{Re}} + iG_{\mathrm{Im}} = G_{\mathrm{Re}}\Big(1 + i\frac{G_{\mathrm{Im}}}{G_{\mathrm{Re}}}\Big) = G_{\mathrm{Re}}(1 + i\eta_g),$$
$$\tilde{B} = B_{\mathrm{Re}} + iB_{\mathrm{Im}} = B_{\mathrm{Re}}\Big(1 + i\frac{B_{\mathrm{Im}}}{B_{\mathrm{Re}}}\Big) = B_{\mathrm{Re}}(1 + i\eta_b).$$

Здесь $\tilde{G}$, $\tilde{B}$ — комплексные динамические модули сдвига и объемного сжатия, в общем случае являющиеся функциями частоты колебаний Ω; η_g, η_b —

соответствующие тангенсы углов механических потерь; G_{Re}, B_{Re}, G_{Im}, B_{Im} — значения действительных и мнимых частей комплексных модулей соответственно [5].

При решении задач электровязкоупругости необходимо задать не только механические граничные условия, но и электрические. В качестве механических граничных условий приняты следующие:

$$u_i = u_i^0 \quad \text{на} \quad S_u, \qquad \sigma_{ij} n_j = p_i \quad \text{на} \quad S_\sigma.$$

Электрические граничные условия имеют вид

$$\int_{S_q} (\bar{n} \cdot \bar{D}) = -q_s \quad \text{на} \quad S_q, \qquad \phi = \phi_0 \quad \text{на} \quad S_\phi.$$

Потенциал ϕ определяется с точностью до аддитивной постоянной, поэтому принимается, что на участке поверхности S_ϕ задан нулевой потенциал, тогда ϕ_0 будет иметь смысл разности потенциалов. При этом рассмотрим ситуацию, когда граничные условия на пьезоэлементе соответствуют режиму холостого хода (open circuit — o/c). Как показано в работах [9–12], при этом условии пьезоэлемент проявляет более высокую жесткость, что способствует рассеянию потенциальной энергии системы. При этом электрические граничные условия примут вид

$$\int_{S_q} (\bar{n} \cdot \bar{D}) = 0 \quad \text{на} \quad S_q, \qquad \phi = \phi_0 \quad \text{на} \quad S_\phi.$$

Решение задачи о вынужденных установившихся колебаниях электровязкоупругого тела ищется в виде

$$\bar{u}(x,t) = \bar{u}_0(x) e^{-i\Omega t}, \quad x = (x_1, x_2, x_3),$$

а решение задачи о собственных колебаниях —

$$\bar{u}(x,t) = \bar{u}_0(x) \exp(-i\omega t), \quad x = (x_1, x_2, x_3). \tag{2}$$

Здесь $\bar{u}_0(x) = \{u_1(x), u_2(x), u_3(x), \varphi(x)\}$ — обобщенный вектор состояния, содержащий как компоненты механических перемещений u_1, u_2, u_3, так и компоненту электрического потенциала φ; ω — круговая комплексная собственная частота колебаний, $\omega = \omega_{\mathrm{Re}} + i\,\omega_{\mathrm{Im}}$, при этом ω_{Re} имеет смысл собственной частоты колебаний, а ω_{Im} характеризует скорость их затухания; Ω — круговая частота внешнего возбуждения [5].

Численная реализация осуществляется методом конечных элементов с использованием пакета прикладных программ `ANSYS`[1]. В работе [5] показано, что при использовании метода конечных элементов для численной реализации уравнение собственных колебаний в матричной форме принимает вид

$$\left(-\omega^2[M] + [K_p] + (1 + i\eta)[K_\nu]\right)\{\delta\} = 0. \tag{3}$$

Здесь $[K] = [K_p] + [K_\nu]$ — матрица жесткости составной конструкции, состоящей из основной конструкции, выполненной из вязкоупругого материала

[1] Лицензия Academic Research Mechanical and CFD № 1064623.

и упругого пьезоэлемента; $[K_p]$ — матрица жесткости упругого пьезоэлемента, $[K_\nu]$ — матрица жесткости вязкоупругого материала основной конструкции без учета вязкоупругих свойств; ω — круговая комплексная собственная частота колебаний; $\eta_g = \eta_b = \eta$ — тангенсы углов механических потерь сдвиговой и объемной частей комплексных динамических модулей, принятые равными друг другу; $\{\delta\} = \{u_i, \phi\}$ — вектор узловых переменных.

Для задачи вынужденных установившихся колебаний уравнение в матричной форме принимает вид

$$\big(-\Omega^2[M] + [K_p] + (1 + 2i\beta)[K_\nu]\big)\{\delta\}_{df} = \{F\},$$

где $\{\delta\}_{df}$ — вектор искомого решения, форма колебаний; $\{F\}$ — вектор внешней силовой нагрузки; $\beta = \eta/2$; Ω — круговая частота внешнего возбуждения.

В работе [5] предложен способ, основанный на математическом преобразовании конечно-элементных матричных уравнений собственных и вынужденных колебаний электровязкоупругих тел, который позволил получить аналитические выражения, связывающие величины, являющиеся решением задачи о вынужденных колебаниях, с аналогичными величинами в собственных векторах, являющихся решением задачи о собственных колебаниях.

Далее в качестве примера рассмотрим консольно защемленную прямоугольную пластину со следующими размерами: длина $l_1 = 500$ мм, ширина $b_1 = 60$ мм, толщина $h_1 = 2$ мм (рис. 1). На основе предложенного в [5] метода аналитические выражения для резонансного смещения $(U_z)_A$ точки слежения A и величины оптимального потенциала V^{opt}, который необходимо подать на единственный пьезоэлемент (играющий роли и сенсора, и актуатора) для демпфирования заданной моды колебаний, имеют вид

$$(U_z)_A = \alpha_{df}(U_0)_A = \frac{Q}{2\omega_{\mathrm{Re}}\omega_{\mathrm{Im}}}(U_0)_A,$$

$$V^{opt} = -\frac{Q}{2\omega_{\mathrm{Re}}\omega_{\mathrm{Im}}}\frac{(U_0)_A}{\gamma_u(\xi)}. \tag{4}$$

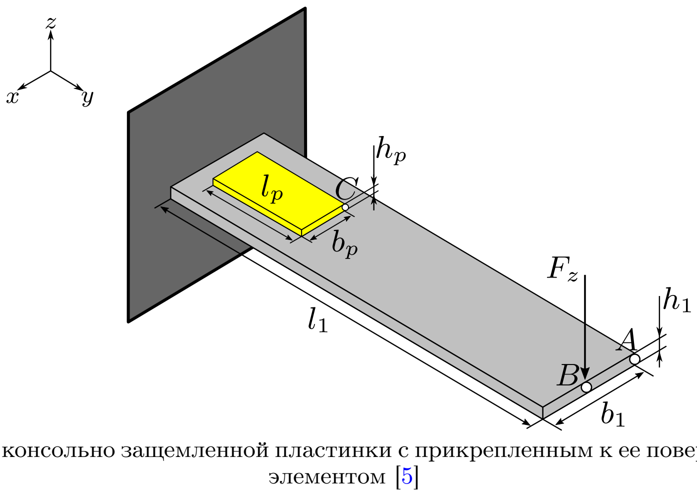

Рис. 1. Схема консольно защемленной пластинки с прикрепленным к ее поверхности пьезоэлементом [5]

[Figure 1. A schematic diagram of a cantilever-clamped plate with a piezoelement attached to its surface [5]]

Здесь приняты следующие обозначения:

– $(U_z)_A$ — смещения точки A в каком-либо направлении (u_x, u_y, u_z) (в данном примере — в направлении действия усилия F_z) в момент резонанса, вызванные действием гармонической силы $\vec{F} = \{0, 0, F_z\}$, приложенной в точке B (в соответствии с обозначениями на рис. 1);
– $(U_0)_A$ — смещение точки A в том же направлении, определенное из вектора собственной формы колебаний для рассматриваемой собственной частоты колебаний, близкой к исследуемому резонансу;
– $\alpha_{df} = Q/(2\omega_{\mathrm{Re}}\omega_{\mathrm{Im}})$ — коэффициент пропорциональности;
– Q — параметр, который при действии только силы $\vec{F} = \{0, 0, F_z\}$ определяется по формуле $Q = \{\bar{\delta}_0\}^\top\{F\} = F_z\{\bar{\delta}_0\}^\top\{\delta_F\}$, где $\{\delta_F\}$ — вектор, в котором отличны от нуля только те компоненты, которые соответствуют приложенной силе F_z; произведение $\{\bar{\delta}_0\}^\top\{\delta_F\}$ представляет собой величину смещения точки приложения силы (точки B) $(U_0)_B$ в направлении действия силы F_z, выбранного из вектора собственной формы колебаний;
– $\gamma_u(\xi) = \big(U_z(\xi)\big)_A\big|_{V^*=1}$ — коэффициент пропорциональности, который имеет смысл резонансного смещения точки слежения (точки A) при подаче на пьезоэлемент единичного потенциала при решении задачи о колебаниях системы под действием потенциала, подаваемого на электродированную поверхность пьезоэлемента и изменяющегося по гармоническому закону (параметрические колебания системы), и имеет размерность, определяемую отношением смещения к потенциалу [м/В];
– V^{opt} — величина потенциала, подаваемого на пьезоэлемент, оптимальная для демпфирования рассматриваемой моды колебаний в момент резонанса.

Использование найденных зависимостей позволило определить величину электрического потенциала на электродированной поверхности пьезоэлемента-сенсора, генерируемого при деформировании его на рассматриваемой моде при вынужденных установившихся колебаниях. При этом решать задачу о вынужденных установившихся колебаниях для диапазона частот в окрестности исследуемой резонансной частоты не требуется. Достаточно решить задачу о собственных колебаниях исследуемой системы (конструкция с пьезоэлементами), определить спектр собственных частот колебаний и соответствующие им собственные векторы. Алгоритм для получения величины потенциала, который необходимо подать на пьезоэлемент для демпфирования заданной моды колебаний, следующий [5].

1. Получить решение задачи модального анализа — собственную частоту и соответствующий ей вектор собственной формы колебаний, реализующиеся в заданном частотном диапазоне. Частотный диапазон задается из условия близости собственной частоты колебаний к резонансной частоте Ω исследуемой моды колебаний. Из этого вектора определяются величины $(U_0)_A$, $V_{o/c}$, а также параметр Q.
2. Решить задачу параметрических колебаний, вызываемых приложением единичного потенциала к пьезоэлементу $V^* = 1$ В, затем на АЧХ точки слежения найти величину ее смещения $\gamma_u(\xi) = \big(U_z(\xi)\big)_A\big|_{V^*=1}$ при исследуемом резонансе. Величины $\gamma_u(\xi)$ можно определять сразу для нескольких резонансных пиков (аналогично тому, как при решении мо-

дальной задачи можно сразу определить несколько собственных частот колебаний).

3. По формуле (4) рассчитать оптимальное значение подаваемого на пьезоэлемент потенциала V^{opt}, позволяющего демпфировать колебания рассматриваемой моды от действия возбуждающих усилий, реализующейся на резонансной частоте, близкой к собственной частоте колебаний.

Отметим, что если рассматриваются вынужденные установившиеся колебания конструкции в некотором диапазоне частот внешнего воздействия и при этом положение возбуждающей силы не меняется, то для определения оптимальных величин потенциала, который должен быть подан на пьезоэлемент для демпфирования различных возникающих в данном случае мод колебаний, никаких других задач, кроме задачи модального анализа для определения всех собственных частот и собственных векторов колебаний, входящих в заданный диапазон частот внешнего воздействия, а также задачи параметрических колебаний от действия единичного потенциала в заданном диапазоне частот внешнего воздействия, решать не требуется.

Принцип активного управления динамическим поведением конструкции в самом общем случае можно описать следующим образом: сигнал, получаемый с пьезоэлемента-сенсора, поступает в блок управления, в котором он усиливается, преобразуется требуемым образом и подается на пьезоэлемент-актуатор. Эффект от такого воздействия может оцениваться по новому сигналу, регистрируемому на пьезоэлементе-сенсоре. Поэтому важно иметь простые аналитические выражения для коэффициента преобразования сигнала в блоке управления (коэффициент усиления) с тем, чтобы анализировать реакцию объекта на управляющий сигнал и решать проблему компоновки блока управления на аппаратном уровне.

Под коэффициентом усиления k_V будем понимать величину, показывающую, во сколько раз необходимо усилить потенциал, регистрируемый на пьезоэлементе-сенсоре в момент резонанса V_{sen}, чтобы получить оптимальный потенциал, подаваемый на пьезоэлемент-актуатор V_{ac}^{opt} для демпфирования, соответствующей данному резонансу моды:

$$k_V = V_{ac}^{opt}/V_{sen}.$$

Для определения коэффициента усиления k_V воспользуемся следующим способом.

Сначала решается задача о собственных колебаниях конструкции, состоящей из вязкоупругого тела, на поверхности которого располагаются два пьезоэлемента — сенсор и актуатор, и для каждой рассматриваемой моды колебаний определяется собственный вектор, в котором есть и величина потенциала на пьезоэлементе-сенсоре $(V_{o/c})_{sen}$, и величина потенциала на пьезоэлементе-актуаторе $(V_{o/c})_{ac}$. Величины потенциалов на пьезоэлементах в момент резонанса на каждой рассматриваемой моде вынужденных колебаний определяются коэффициентом пропорциональности α_{df} [5].

При резонансе на пьезоэлементе-сенсоре генерируется потенциал V_{sen}, величина которого определяется формулой [5]

$$V_{sen} = \frac{Q}{2\omega_{\mathrm{Re}}\omega_{\mathrm{Im}}}(V_{o/c})_{sen}. \tag{5}$$

Величина же оптимального потенциала, который необходимо подать на актуатор $(V_{o/c})_{ac}$, определяется формулой (3).

Таким образом, окончательно коэффициент усиления определяется следующим образом:

$$k_V = \frac{V_{ac}^{opt}}{V_{sen}} = -\frac{(U_0)_A}{\gamma_u(\xi) \cdot (V_{o/c})_{sen}}. \tag{6}$$

Этот коэффициент не зависит от величины приложенной силы, возбуждающей вынужденные установившиеся колебания, и является характеристикой системы. Однако для каждой моды колебаний коэффициент имеет свое значение.

3. Численная иллюстрация. Как было продемонстрировано в [1], диапазон рабочих частот системы управления динамическим поведением конструкций ограничен точностью модели, так как всегда есть некоторая дестабилизация мод колебаний за пределами рассматриваемого диапазона. Уменьшение возмущенных отклонений внутри диапазона рабочих частот управляемой системы всегда компенсируется возрастанием отклонений за пределами этого диапазона. Одним из путей преодоления этой сложности является использование совместно размещенных пьезоэлектрических датчиков и актуаторов [1, 13, 14]. Такая конструкция позволяет спроектировать системы управления с гарантированной стабильностью, несмотря на наличие динамических возмущений вне рассматриваемого диапазона частот. Поэтому в большом числе работ принято, что пьезоэлементы присоединяются по обеим сторонам к поверхностям основной конструкции (здесь — пластинки) строго друг под другом. В [15, 16] подтверждено экспериментально, что такое расположение пьезоэлементов является оптимальным для реализации активного управления колебаниями конструкции. На основании этого в настоящей работе принято, что пьезоэлементы, выполняющие роль сенсора и актуатора, размещены таким же образом.

В качестве объекта исследования рассматривается консольно защемленная прямоугольная пластина, отличающаяся от представленной на рис. 1 тем, что к ее поверхности прикреплены два пьезоэлемента, расположенные так, как показано на рис. 2. Геометрические размеры пьезоэлементов следующие: длина $l_p = 50$ мм, ширина $b_p = 20$ мм и толщина $h_p = 0.3$ мм. Верхняя и нижняя поверхности пьезоэлементов электродированы. Центры масс пьезоэлементов смещены на 55 мм от заделки и расположены на продольной оси симметрии пластины.

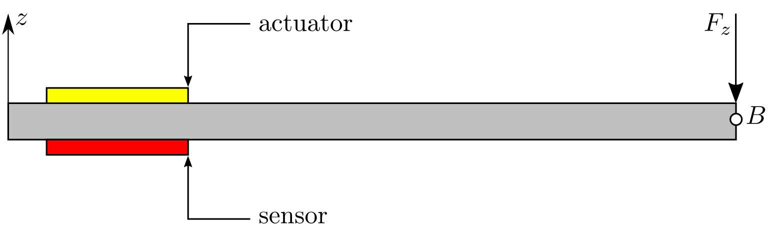

Рис. 2. Схема консольно защемленной пластинки с двумя пьезоэлементами — актуатором и сенсором

[Figure 2. A scheme of the cantilever-clamped plate with two piezoelectric elements — an actuator and a sensor]

Материал пластины обладает вязкоупругими свойствами, которые описываются частотно-независимыми комплексными динамическими модулями сдвига и объемного сжатия, действительные и мнимые компоненты которых следующие: $G_{\mathrm{Re}} = 6.71 \cdot 10^8$ Па, $B_{\mathrm{Re}} = 3.33 \cdot 10^{10}$ Па, $G_{\mathrm{Im}} = 6.71 \cdot 10^7$ Па, $B_{\mathrm{Im}} = 3.33 \cdot 10^9$ Па. Удельная плотность материала $\rho_{el} = 1190$ кг/м^3.

Пьезоэлементы выполнены из пьезокерамики ЦТС-19, поляризованной в направлении оси z, со следующими физико-механическими характеристиками: $C_{11} = C_{22} = 10.9 \cdot 10^{10}$ Па, $C_{13} = C_{23} = 5.4 \cdot 10^{10}$ Па, $C_{12} = 6.1 \cdot 10^{10}$ Па, $C_{33} = 9.3 \cdot 10^{10}$ Па, $C_{44} = C_{55} = C_{66} = 2.4 \cdot 10^{10}$ Па, $\beta_{31} = \beta_{23} = -4.9$ Кл/м^2, $\beta_{33} = -14.9$ Кл/м^2, $\beta_{51} = \beta_{42} = -10.6$ Кл/м^2, $e_{11} = e_{22} = 8.2 \cdot 10^{-9}$ Ф/м, $e_{33} = 8.4 \cdot 10^{-9}$ Ф/м, $\rho_p = 7500$ кг/м^3, которые являются компонентами матрицы $[D_2]$, представленой в работе [6].

Определим собственные частоты колебаний рассматриваемой системы. Тип первых пяти мод колебаний и собственные частоты, на которых они реализуются, приведены в табл. 1.

Вся конструкция совершает вынужденные установившиеся колебания под действием силы $\vec{F} = \{0, 0, F_z\}$, изменяющейся по гармоническому закону и приложенной в центре торцевой части пластинки (точке B), как показано на рис. 2. Принято, что $F_z = -0.02$ Н.

В режиме вынужденных установившихся колебаний наиболее энергоемкими и реализующимися при таком внешнем воздействии являются первые две изгибные моды колебаний, которые и будем рассматривать в дальнейшем. Комплексные собственные частоты при граничных условиях холостого хода на пьезоэлементах, соответствующие этим модам, следующие:

$$\omega_1^{o/c} = 2.102 + i\,0.200, \quad \omega_2^{o/c} = 12.944 + i\,1.220.$$

При выбранном расположении, одинаковых размерах и физико-механических характеристиках пьезоэлементов в собственном векторе величина потенциала на поверхности второго пьезоэлемента (сенсора) V_{sen} равна величине потенциала на поверхности первого пьезоэлемента (актуатора) V_{ac}:

$$|V_{ac}| = |V_{sen}|.$$

При действии на конструкцию только внешней гармонической силы, возбуждающей вынужденные установившиеся колебания, величины потенциалов, возникающих на поверхностях пьезоэлементов, также равны между собой.

Таблица 1

Собственные частоты колебаний пластинки с двумя пьезоэлементами
[Eigenfrequencies of the plate with two piezoelectric elements]

The number of the vibration mode, k	Eigenfrequency, $\omega_k^{o/c}$	Type of vibration mode
1	$2.102 + i\ 0.200$	bending
2	$12.944 + i\ 1.220$	bending
3	$28.312 + i\ 2.743$	torsional
4	$35.620 + i\ 3.326$	bending
5	$51.8198 + i\ 4.943$	planar

В соответствии с предлагаемым подходом находим собственные векторы колебаний, т.е. формы колебаний соответствующих изгибных мод. Далее из найденных векторов определяем значения смещений $(U_0)_A$ в рассматриваемой точке A, значения смещений $(U_0)_B$ в точке приложения силы (в точке B), величины потенциалов на поверхности первого пьезоэлемента-актуатора V_{ac} как значения соответствующих узловых неизвестных в собственном векторе. Затем по формулам (4)–(6) рассчитываем величины оптимального потенциала на актуаторе V_{ac}^{opt} и резонансного потенциала на сенсоре V_{sen}^{opt}, а также коэффициент усиления сигнала k_V, получаемого с сенсора, для подачи его на актуатор.

Для сравнения полученных результатов проводим аналогичные расчеты в `ANSYS`.

На рис. 3 приведены полученные в первой серии расчетов амплитудно-частотные характеристики (АЧХ) потенциала V_{sen}, регистрируемого на сенсоре в области первого (a) и второго (b) резонансов, который подается в блок управления, а также смещения $|(U_z)_A|_F$ точки A пластинки, совершающей вынужденные установившиеся колебания под действием приложенной возмущающей силы F_z, в области первого (c) и второго (d) резонансов (синие линии).

Вторая серия расчетов — поиск оптимальной величины потенциала, который должен быть подан на пьезоэлемент-актуатор для того, чтобы величина резонансного смещения точки A была минимальной. В этом случае для поиска оптимального значения использовался метод сканирования. Данный подход был реализован следующим образом. Сначала берется максимально широкий диапазон изменения подаваемого на пьезоэлемент-актуатор потенциала с достаточно крупным шагом, и для каждого значения электрического потенциала решается задача о вынужденных установившихся колебаниях. На основе полученных результатов строится зависимость смещения $(U_z)_A$ точки A от величины подаваемого потенциала на пьезоэлемент-актуатор V_{ac}. Границы области изменения кривизны графика данной зависимости и определяют границы диапазона изменения потенциала для следующей серии расчетов с меньшим шагом. Так повторяется до тех пор, пока требуемое значение потенциала не отыщется с требуемой точностью (в рамках данного исследования — с точностью до 10^{-2}).

Следует отметить, что в этой серии расчетов необходимо учитывать знак прикладываемого потенциала, так как заранее знак потенциала, оптимального для демпфирования выбранной моды колебаний, неизвестен [5].

На рис. 4 приведены графики таких зависимостей в окрестности оптимального значения потенциала. Нужно отметить, что графики приведены только для случая $V_{ac} < 0$, поскольку для $V_{ac} > 0$ наблюдается только рост смещения с ростом его величины, что согласовывается с результатами, приведенными в [17]. Минимальное значение смещения и определяет величину оптимального значения потенциала, который необходим для демпфирования выбранной моды колебаний.

В третьей серии расчетов задача о вынужденных установившихся колебаниях решалась для случая силового внешнего воздействия с одновременной подачей на актуатор управляющего потенциала V_{ac}^{opt}, оптимального по величине, для демпфирования соответствующей моды колебаний. Полученные

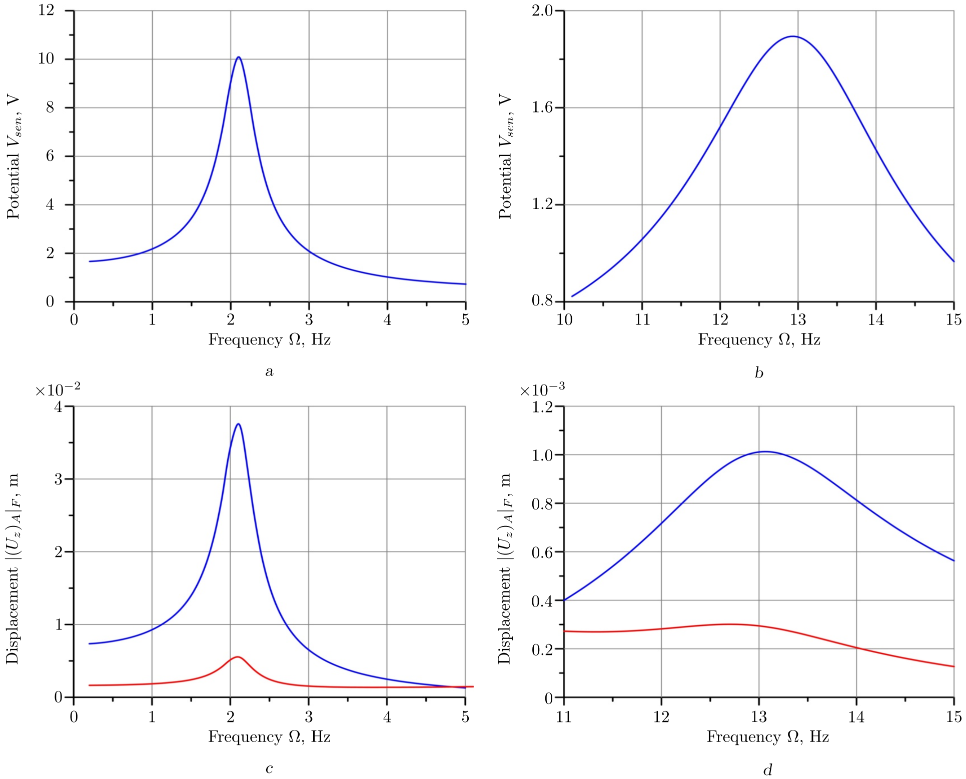

Рис. 3. Амплитудно-частотные характеристики потенциала V_{sens}, регистрируемого на сенсоре в области первого (a) и второго (b) резонансов, который подается в блок управления, и смещения $|(U_z)_A|_F$ точки A пластинки, совершающей вынужденные установившиеся колебания под действием приложенной возмущающей силы F_z, в области первого (c) и второго (d) резонансов (синие линии), и при подаче на актуатор управляющего потенциала, оптимального по величине V_{ac}^{opt} (красные линии)

[Figure 3. The amplitude-frequency characteristics of the potential V_{sens} recorded on the sensor in the region of the first (a) and second (b) resonances, which is input to the control unit, and the displacement $|(U_z)_A|_F$ of point A of the plate, which undergoes forced steady-state vibrations under the influence of the applied disturbing force F_z, in the regions of the first (c) and second (d) resonances (blue lines), and when applying the optimal control potential V_{ac}^{opt} (red lines) to the actuator]

для такого случая АЧХ смещения $(U_z)_A$ точки A на рис. 3, c, d обозначены красной линией.

В табл. 2 приведены результаты решения задач о собственных и о параметрических колебаниях, данные, полученные с помощью предлагаемого подхода, и серии расчетов задачи о вынужденных колебаниях в `ANSYS`. Если принять величины параметров, определенные при помощи решения цикла задач о вынужденных установившихся колебаниях в `ANSYS`, за истинные, то для первых двух рассматриваемых изгибных мод колебаний погрешность определения смещения точки A по предложенным формулам не превышает 3.5 %, а по величине оптимального потенциала и коэффициенту усиления — 5 %.

Анализируя полученные результаты, приходим к выводу, что после подачи управляющего сигнала на пьезоэлемент-актуатор по величине смещений точки наблюдения на первых двух модах колебаний можно констатировать

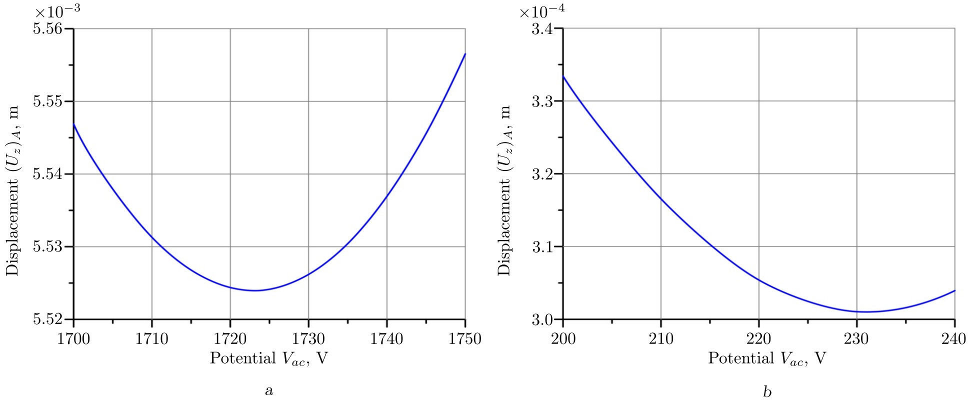

Рис. 4. Амплитудно-частотные характеристики смещения $(U_z)_A$ точки A в области первого (a) и второго (b) резонансов в зависимости от величины подаваемого на актуатор управляющего потенциала V_{ac}

[Figure 4. The amplitude-frequency characteristics of the displacement $(U_z)_A$ at point A in the region of the first (a) and second (b) resonances as a function of the magnitude of the control potential V_{ac} applied to the actuator]

существенное снижение их амплитуды, то есть демпфирование (на первой моде — в 6.7 раз, на второй — в 3.33 раза).

Заключение. В настоящей работе способ, позволяющий на основе решения задачи о собственных колебаниях электровязкоупругой конструкции получить аналитические выражения для определения величины электрического потенциала, генерируемого на электродированной поверхности пьезоэлемента при его деформировании на рассматриваемой моде, реализующейся на частоте, приводящей при вынужденных установившихся колебаниях к возникновению резонанса, предложенный в [5], распространен на случай использования двух пьезоэлементов, выполняющих функции сенсора и актуатора, расположенных друг напротив друга по разные стороны конструкции.

Получены аналитические выражения, позволяющие определить величину управляющего сигнала для демпфирования заданной моды колебаний и коэффициента усиления сигнала, регистрируемого на сенсоре и подаваемого на актуатор.

Приемлемость предложенного подхода продемонстрирована совпадением результатов, полученных с помощью предложенных формул и с использованием `ANSYS`. Полученные результаты показали, что погрешность определения смещения точки A по предложенным формулам не превышает 3.5 %, а по величинам потенциала и коэффициенту усиления — 5 %.

Это позволяет с приемлемой точностью понять требования, которые должны быть предъявлены к элементам блока управления при реализации активной стратегии демпфирования колебаний smart-систем, формируемым присоединением к основной конструкции пьезоэлементов, выполняющих роль сенсора и актуатора.

Таблица 2

Данные решения задачи о собственных колебаниях и результаты решения серии задач о вынужденных установившихся колебаниях для пластинки с двумя пьезоэлементами [The solutions to the problem of natural vibrations and the results of solving a series of problems on forced steady-state vibrations for a plate with two piezoelectric elements]

	1st mode	2nd mode
Parametric vibrations		
$\gamma_u(\xi)$, m/V	$-3.532 \cdot 10^{-6}$	$-9.697 \cdot 10^{-3}$
Natural vibration		
$(U_0)_A$, m	$7.896 - i\,0.0069$	$-7.813 + i\,0.022$
$(U_0)_B$, m	$7.896 + i\,0.0069$	$7.813 - i\,0.022$
V_{sen}, V	$2099.110 + i\,45.475$	$15030.87 + i\,192.696$
Forced steady-state vibration $\lvert(U_z)_A\rvert_F$, m		
Proposed method	$3.756 \cdot 10^{-2}$	$9.799 \cdot 10^{-4}$
ANSYS	$3.760 \cdot 10^{-2}$	$1.013 \cdot 10^{-3}$
Difference, %	0.106	3.267
Optimal potential V^{opt}, V		
Proposed method	-1753.431	242.34
ANSYS	-1723.250	231.00
Difference, %	1.75	4.91
$\lvert(U_z)_A\rvert_{V^{opt}}$, m		
ANSYS	$5.52 \cdot 10^{-3}$	$3.01 \cdot 10^{-4}$
Potential on the sensor under the action of force $V_{sen}\rvert_F$, V		
Proposed method	-9.987	1.885
ANSYS	-10.092	1.884
Difference, %	1.04	0.05
Gain factors k_V		
Proposed method	175.566	128.560
ANSYS	170.754	122.611
Difference, %	2.82	4.85

Конкурирующие интересы. Конфликты интересов отсутствуют.

Авторский вклад и ответственность. Все авторы принимали участие в разработке концепции статьи и в написании рукописи. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (тема № 124020700047-3 «Комплексные исследования в задачах деформационного мониторинга, аэроупругости, интеллектуальных конструкций, термомеханики»).

Библиографический список

1. Preumont A. *Vibration Control of Active Structures: An Introduction.* Dordrecht: Springer, 2011. xx+436 pp. DOI: https://doi.org/10.1007/978-94-007-2033-6.
2. Lu F., Liu Y., Chen W., et al. Radial disturbance compensation device of cylindrical cantilever beam using embedded piezoelectric ceramics with bending mode // *Mech. Syst. Signal*

Proc., 2022. vol. 172, 109009. DOI: https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2022.109009.
3. Zhu X., Chen Z., Jiao Y. Optimizations of distributed dynamic vibration absorbers for suppressing vibrations in plates // *J. Low Freq. Noise, Vibr. Active Contr.*, 2018. vol. 37, no. 4. pp. 1188–1200. DOI: https://doi.org/10.1177/1461348418794563.
4. Hagood N., Von Flotow A. Damping of structural vibrations with piezoelectric materials and passive electrical networks // *J. Sound Vibr.*, 1991. vol. 146, no. 2. pp. 243–268. DOI: https://doi.org/10.1016/0022-460X(91)90762-9.
5. Севодина Н. В., Ошмарин Д. А., Юрлова Н. А. Способ определения параметров электрического сигнала для управления вынужденными установившимися колебаниями электровязкоупругих тел. Математические соотношения // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2023. Т. 27, № 4. С. 679–703. EDN: GHEHRB. DOI: https://doi.org/10.14498/vsgtu2025.
6. Матвеенко В. П., Ошмарин Д. А., Севодина Н. В., Юрлова Н. А. Задача о собственных колебаниях электровязкоупругих тел с внешними электрическими цепями и конечно-элементные соотношения для ее численной реализации // *Вычисл. мех. сплош. сред*, 2016. Т. 9, № 4. С. 476–485. EDN: XDDTUB. DOI: https://doi.org/10.7242/1999-6691/2016.9.4.40.
7. Matveenko V. P., Iurlova N. A., Oshmarin D. A., Sevodina N. V. Analysis of dissipative properties of electro-viscoelastic bodies with shunting circuits on the basis of numerical modelling of natural vibrations // *Acta Mech.*, 2023. vol. 234. pp. 261–276. DOI: https://doi.org/10.1007/s00707-022-03193-8.
8. Matveenko V. P., Kligman E. P. Natural vibration problem of viscoelastic solids as applied to optimization of dissipative properties of constructions // *J. Vibr. Control*, 1997. vol. 3, no. 1. pp. 87–102. EDN: LEKWMP. DOI: https://doi.org/10.1177/107754639700300106.
9. Clark W.W. Vibration control with state-switched piezoelectric materials // *J. Intel. Mat. Syst. Struct.*, 2000. vol. 11, no. 4. pp. 263–271. DOI: https://doi.org/10.1106/18ce-77k4-dymg-rkbb.
10. Qureshi E.M., Shen X., Chen J. Vibration control laws via shunted piezoelectric transducers: A review // *Int. J. Aeronaut. Space Sci.*, 2014. vol. 15, no. 1. pp. 1–19. DOI: https://doi.org/10.5139/IJASS.2014.15.1.1.
11. Richard C., Guyomar D., Audigier D., Ching G. Semi-passive damping using continuous switching of a piezoelectric device // *Proc. SPIE*, 1999. vol. 3672. pp. 104–111. DOI: https://doi.org/10.1117/12.349773.
12. Ramaratnam A., Jalili N. A switched stiffness approach for structural vibration control: Theory and real time implementation // *J. Sound Vibr.*, 2006. vol. 291, no. 1–2. pp. 259–274. DOI: https://doi.org/10.1016/j.jsv.2005.06.012.
13. Wang Q., Wang C.M. Optimal placement and size of piezoelectric patches on beams from the controllability perspective // *Smart Mater. Struct.*, 2000. Т. 9, № 4. С. 558–567. DOI: https://doi.org/10.1088/0964-1726/9/4/320.
14. Prakash B., Yasin M.Y., Khan A.H., et al. Optimal location and geometry of sensors and actuators for active vibration control of smart composite beams // *Australian J. Mech. Engng.*, 2022. vol. 20, no. 4. pp. 981–999. DOI: https://doi.org/10.1080/14484846.2020.1767834.
15. Alam N.M., Rahman N. Active vibration control of a piezoelectric beam using PID controller: Experimental study // *Latin Amer. J. Solids Struct.*, 2012. Т. 9, № 6. С. 657–673. DOI: https://doi.org/10.1590/S1679-78252012000600003.
16. Williams D., Haddad K.H, Jiffri S., Yang C. Active vibration control using piezoelectric actuators employing practical components // *J. Vibr. Control*, 2019. vol. 25, no. 21–22. pp. 2784–2798. DOI: https://doi.org/10.1177/1077546319870933.
17. Юрлова Н. А., Ошмарин Д. А., Севодина Н. В. Численный анализ вынужденных установившихся колебаний электровязкоупругой системы при совместном воздействии механических и электрических нагрузок // *Вестн. Пермского нац. иссл. политехн. ун-та. Механика*, 2022. № 4. С. 67–79. EDN: JVSTMA. DOI: https://doi.org/10.15593/perm.mech/2022.4.07.

Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2024, vol. 28, no. 3, pp. 543–561
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu2052

MSC: 74S05

Method for determining the parameters of an electrical signal for controlling forced steady-state vibrations of electroviscoelastic bodies. Application to active vibration damping

N. V. Sevodina, N. A. Iurlova, D. A. Oshmarin

Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS,
1, Academician Korolev str., Perm, 614018, Russian Federation.

Abstract

As a rule, two piezoelectric elements are used in case of implementing an active strategy for controlling the dynamic behavior of structures that include elements made of piezoelectric materials. One of them acts as a sensor and the other one acts as an actuator. In this case, the key problem is in determining the magnitude of the control signal applied to the actuator, and the hardware implementation of the established control law. Due to the need of constructing of complex electrical circuits representing a control unit, preliminary modeling of the mechanical response to a particular control signal becomes attractive. In this paper, the earlier developed approach was extended to the case of using two piezoelectric elements that perform the functions of a sensor and an actuator, and are located accordingly on the surface of the structure.

This approach allows us to obtain expressions for determining the magnitude of the electric potential generated at the moment of resonance on the electroded surface of a piezoelectric element when it is deformed at the vibration mode under consideration in case of forced steady-state vibrations. All the derivations are performed on the basis of solving the problem of natural vibrations of an electro-viscoelastic structure.

Mechanics of Solids
Research Article

Please cite this article in press as:
Sevodina N. V., Iurlova N. A., Oshmarin D. A. Method for determining the parameters of an electrical signal for controlling forced steady-state vibrations of electroviscoelastic bodies. Application to active vibration damping , *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2024, vol. 28, no. 3, pp. 543–561. EDN: KRCTOC. DOI: 10.14498/vsgtu2052 (In Russian).

Authors' Details:

Natalya V. Sevodina https://orcid.org/0000-0001-9374-7135
Cand. Techn. Sci.; Researcher; Dept. of Complex Problems of Deformable Solids Mechanics; e-mail: natsev@icmm.ru

Nataliya A. Iurlova https://orcid.org/0000-0003-3497-0358
Cand. Phys.& Math. Sci., Associate Professor; Senior Researcher; e-mail: yurlova@icmm.ru

Dmitrii A. Oshmarin https://orcid.org/0000-0002-9898-4823
Cand. Techn. Sci.; Researcher; Dept. of Complex Problems of Deformable Solids Mechanics; e-mail: oshmarin@icmm.ru

Analytical expressions are derived to determine the magnitude of the control signal which is applied to the actuator and provides damping of a given vibration mode. The control signal is generated by converting the signal received from the sensor.

The applicability of the proposed approach is demonstrated at the example of a cantilever plate made of viscoelastic material, the mechanical behavior of which is described by complex dynamic moduli. Piezoelectric elements acting as a sensor and an actuator are placed on both sides of the plate. Numerical implementation of the proposed approach is carried out based on the finite element method using the `ANSYS` application software package. A good concordance of the results obtained by the derived formulas with the results of the calculation in `ANSYS` is demonstrated. The proposed approach makes it possible to significantly reduce time and resource costs in case of mathematical modeling of active control of forced steady-state vibrations of electro-viscoelastic bodies, to determine the conditions that the elements of the control unit must satisfy when implementing an active strategy for controlling the dynamic behavior of such smart systems.

Keywords: electroviscoelasticity, piezoelectric element, forced steady-state vibrations, natural vibrations, vibration control, displacements, electric potential, sensor, actuator.

Received: 4th August, 2023 / Revised: 17th September, 2024 /
Accepted: 27th September, 2024 / First online: 31st October, 2024

Competing interests. Authors have no competing interests.

Authors' contributions and responsibilities. All authors participated in developing the concept of the article and in writing the manuscript. The authors take full responsibility for submitting the final manuscript for publication. The final version of the manuscript was approved by all authors.

Funding. The work was carried out within the framework of the state assignment of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (topic no. 124020700047-3 "Comprehensive research in problems of deformation monitoring, aeroelasticity, intelligent structures, thermomechanics").

References

1. Preumont A. *Vibration Control of Active Structures: An Introduction.* Dordrecht, Springer, 2011, xx+436 pp. DOI: https://doi.org/10.1007/978-94-007-2033-6.
2. Lu F., Liu Y., Chen W., et al. Radial disturbance compensation device of cylindrical cantilever beam using embedded piezoelectric ceramics with bending mode, *Mech. Syst. Signal Proc.*, 2022, vol. 172, 109009. DOI: https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2022.109009.
3. Zhu X., Chen Z., Jiao Y. Optimizations of distributed dynamic vibration absorbers for suppressing vibrations in plates, *J. Low Freq. Noise, Vibr. Active Contr.*, 2018, vol. 37, no. 4, pp. 1188–1200. DOI: https://doi.org/10.1177/1461348418794563.
4. Hagood N., Von Flotow A. Damping of structural vibrations with piezoelectric materials and passive electrical networks, *J. Sound Vibr.*, 1991, vol. 146, no. 2, pp. 243–268. DOI: https://doi.org/10.1016/0022-460X(91)90762-9.
5. Sevodina N. V., Oshmarin D. A., Iurlova N. A. Method for determining the parameters of an electrical signal for controlling forced steady-state vibrations of electroviscoelastic bodies. Mathematical relations, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2023, vol. 27, no. 4, pp. 679–703 (In Russian). EDN: GHEHRB. DOI: https://doi.org/10.14498/vsgtu2025.

6. Matveenko V. P., Oshmarin D. A., Sevodina N. V., Iurlova N. A. Problem on natural vibrations of electroviscoelastic bodies with external electric circuits and finite element relations for its implementation, *Comput. Cont. Mech.*, 2016, vol. 9, no. 4, pp. 476–485 (In Russian). EDN: XDDTUB. DOI: https://doi.org/10.7242/1999-6691/2016.9.4.40.
7. Matveenko V. P., Iurlova N. A., Oshmarin D. A., Sevodina N. V. Analysis of dissipative properties of electro-viscoelastic bodies with shunting circuits on the basis of numerical modelling of natural vibrations, *Acta Mech.*, 2023, vol. 234, pp. 261–276. DOI: https://doi.org/10.1007/s00707-022-03193-8.
8. Matveenko V. P., Kligman E. P. Natural vibration problem of viscoelastic solids as applied to optimization of dissipative properties of constructions, *J. Vibr. Control*, 1997, vol. 3, no. 1, pp. 87–102. EDN: LEKWMP. DOI: https://doi.org/10.1177/107754639700300106.
9. Clark W.W. Vibration control with state-switched piezoelectric materials, *J. Intel. Mat. Syst. Struct.*, 2000, vol. 11, no. 4, pp. 263–271. DOI: https://doi.org/10.1106/18ce-77k4-dymg-rkbb.
10. Qureshi E.M., Shen X., Chen J. Vibration control laws via shunted piezoelectric transducers: A review, *Int. J. Aeronaut. Space Sci.*, 2014, vol. 15, no. 1, pp. 1–19. DOI: https://doi.org/10.5139/IJASS.2014.15.1.1.
11. Richard C., Guyomar D., Audigier D., Ching G. Semi-passive damping using continuous switching of a piezoelectric device, *Proc. SPIE*, 1999, vol. 3672, pp. 104–111. DOI: https://doi.org/10.1117/12.349773.
12. Ramaratnam A., Jalili N. A switched stiffness approach for structural vibration control: Theory and real time implementation, *J. Sound Vibr.*, 2006, vol. 291, no. 1–2, pp. 259–274. DOI: https://doi.org/10.1016/j.jsv.2005.06.012.
13. Wang Q., Wang C.M. Optimal placement and size of piezoelectric patches on beams from the controllability perspective, *Smart Mater. Struct.*, 2000, T. 9, № 4, C. 558–567. DOI: https://doi.org/10.1088/0964-1726/9/4/320.
14. Prakash B., Yasin M.Y., Khan A.H., et al. Optimal location and geometry of sensors and actuators for active vibration control of smart composite beams, *Australian J. Mech. Engng.*, 2022, vol. 20, no. 4, pp. 981–999. DOI: https://doi.org/10.1080/14484846.2020.1767834.
15. Alam N.M., Rahman N. Active vibration control of a piezoelectric beam using PID controller: Experimental study, *Latin Amer. J. Solids Struct.*, 2012, T. 9, № 6, C. 657–673. DOI: https://doi.org/10.1590/S1679-78252012000600003.
16. Williams D., Haddad K.H, Jiffri S., Yang C. Active vibration control using piezoelectric actuators employing practical components, *J. Vibr. Control*, 2019, vol. 25, no. 21–22, pp. 2784–2798. DOI: https://doi.org/10.1177/1077546319870933.
17. Iurlova N. A., Oshmarin D. A., Sevodina N. V. A numerical analysis of forced steady-state vibrations of an electro-viscoelastic system in case of a joint impact of electrical and mechanical loads, *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2022, no. 4, pp. 67–79 (In Russian). EDN: JVSTMA. DOI: https://doi.org/10.15593/perm.mech/2022.4.07.