Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2024. Т. 28, № 2. С. 367–377
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu2057
EDN: UNNXFS

УДК 517.58

Некоторые интегральные преобразования одной функции Фокса с четырьмя параметрами

Ф. Г. Хуштова

Институт прикладной математики и автоматизации –
филиал федерального государственного бюджетного научного учреждения
«Федеральный научный центр «Кабардино-Балкарский научный центр
Российской академии наук»,
Россия, 360000, Нальчик, ул. Шортанова, 89 А.

Аннотация

Рассматривается функция Фокса с четырьмя параметрами, которая возникает в теории вырождающихся дифференциальных уравнений с частными производными дробного порядка. В терминах указанной функции были ранее записаны явные решения первой и второй краевых задач в полуполосе для уравнения с оператором Бесселя, действующим по пространственной переменной, и дробной производной по времени.

Для рассматриваемой функции в случае зависимости двух параметров из четырех в работе получена формула преобразования Лапласа, которая выражается через специальную функцию Макдональда. Также получены формулы интегральных преобразований, выражающиеся через обобщенную функцию Райта и более общую H-функцию Фокса.

Вспомогательным средством для доказательства полученных формул является интеграл Меллина–Барнса, с помощью которого записывается рассматриваемая специальная функция. Сходимость несобственных интегралов при этом следует из асимптотических оценок, также приведенных в работе.

Показано, что при частных значениях из формулы преобразования Лапласа следуют известные формулы преобразований экспоненциальной функции и функции Райта со степенными множителями.

Ключевые слова: функция Фокса, функция Макдональда, функция Райта, оператор Бесселя, дробная производная, интегральные преобразования, преобразование Лапласа.

Получение: 15 августа 2023 г. / Исправление: 21 декабря 2023 г. / Принятие: 29 января 2024 г. / Публикация онлайн: 10 октября 2024 г.

Дифференциальные уравнения и математическая физика
Краткое сообщение

Образец для цитирования
Хуштова Ф. Г. Некоторые интегральные преобразования одной функции Фокса с четырьмя параметрами // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2024. Т. 28, № 2. С. 367–377. EDN: UNNXFS. DOI: 10.14498/vsgtu2057.

Сведения об авторе

Фатима Гидовна Хуштова https://orcid.org/0000-0003-4088-3621
кандидат физико-математических наук; научный сотрудник; отдел дробного исчисления;
e-mail: khushtova@yandex.ru

Введение. Пусть $0 < \rho \leqslant 2$, μ, σ и $\nu \in \mathbb{C}$, $(\sigma+\nu)/2 \notin \mathbb{Z}$. Рассмотрим функцию

$$\mathcal{J}_{\nu}^{\rho,\mu,\sigma}(z) = H_{2,3}^{2,1}\left[\frac{z^2}{4}\,\middle|\,\begin{matrix}(1-\sigma/2,1),\ (\mu-\rho\sigma/2,\rho)\\ (\nu/2,1),\ (1-\sigma/2,1),\ (-\nu/2,1)\end{matrix}\right], \tag{1}$$

где $H_{2,3}^{2,1}[\cdots]$ — *H-функция Фокса* [1–3].

Функция (1) возникает в теории вырождающихся дифференциальных уравнений с частными производными дробного порядка. В частности, в терминах функции (1) записываются решения некоторых краевых задач для дифференциального уравнения

$$B_x u(x,y) - D_{0y}^{\alpha} u(x,y) = 0, \tag{2}$$

где

$$B_x u = x^{-b}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^b \frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

— оператор Бесселя, $|b| < 1$, D_{0y}^{α} — оператор дробного дифференцирования в смысле Римана—Лиувилля порядка α, $0 < \alpha \leqslant 1$ [4, § 0.1]. Например, решение первой краевой задачи (задачи Дирихле) для уравнения (2) в полуполосе $\Omega = \{(x,y) : 0 < x < \infty, 0 < y < T\}$

$$\lim_{y\to 0} y^{1-\alpha} u(x,y) = 0, \quad 0 < x < \infty,$$

$$u(0,y) = \tau(y), \quad 0 < y < T,$$

имеет вид [5]

$$u(x,y) = \int_0^y K_1(x, y-\eta)\tau(\eta)d\eta,$$

где

$$K_1(x,y) = \frac{x^{\beta} y^{-\alpha\beta/2-1}}{2^{\beta}\Gamma(\beta)} \mathcal{J}_{\beta}^{\alpha,\alpha,2+\beta}(xy^{-\alpha/2}), \quad \beta = (1-b)/2,$$

$\Gamma(\beta)$ — гамма-функция Эйлера [6, § 1], [7, § 1.1, форм. (1)].

Решение второй краевой задачи (задачи Неймана) в области Ω

$$\lim_{y\to 0} y^{1-\alpha} u(x,y) = 0, \quad 0 < x < \infty,$$

$$\lim_{x\to 0} x^b u_x(x,y) = \nu(y), \quad 0 < y < T,$$

имеет вид [8]

$$u(x,y) = \int_0^y K_2(x, y-\eta)\tau(\eta)d\eta,$$

где

$$K_2(x,y) = -\frac{x^{\beta} y^{\alpha\beta/2-1}}{2^{1-\beta}\Gamma(1-\beta)} \mathcal{J}_{-\beta}^{\alpha,\alpha,2-\beta}(xy^{-\alpha/2}).$$

Некоторые свойства функции (1), такие как представление через контурный интеграл, асимптотические свойства, формулы дифференцирования и интегрирования, рекуррентные соотношения, рассмотрены в работах [9–13]. Отметим при этом, что основные свойства функции (1), такие как, например, представление через контурный интеграл Меллина—Барнса, асимптотические свойства, разложение в степенные ряды, следуют из свойств более общей H-функции. Некоторые интегральные преобразования H-функции Фокса исследованы в работах [1–3].

Среди более поздних работ, посвященных интегральным преобразованиям с различными специальными функциями гипергеометрического типа в ядрах, отметим, например, работы [14–23].

В работах [24–26] развиты методы операторов преобразования для эллиптических и параболических уравнений с операторами Бесселя.

1. Вспомогательные сведения. Далее в работе

$$K_\nu(z) = \frac{1}{4\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\Gamma\left(\nu/2+s\right)\Gamma\left(-\nu/2+s\right)\left(\frac{z}{2}\right)^{-2s}ds, \quad \gamma > |\mathrm{Re}\,\nu|/2, \tag{3}$$

— *функция Макдональда* [27, § 5.7], [28, § 6, форм. (6.36)];

$$\phi\left(\rho,\delta;z\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{\,k}}{k!\,\Gamma(\rho k+\delta)}, \quad \rho > -1,$$

— *функция Райта* [29, 30];

$${}_p\Psi_q\left[\, z \,\middle|\, \begin{matrix}(a_p,\, A_p)\\(b_q,\, B_q)\end{matrix}\,\right] = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\Gamma\left(s\right)\prod\limits_{j=1}^{p}\Gamma\left(a_j-A_j s\right)}{\prod\limits_{j=1}^{q}\Gamma\left(b_j-B_j s\right)}(-z)^{-s}ds. \tag{4}$$

— *обобщенная функция Райта* [3, § 1.8, форм. (1.140)], $p,\ q = 0,1,2,\ldots,$ $p^2+q^2\neq 0$, $a_i, b_j\in\mathbb{C}$, $A_i,\ B_j\in\mathbb{R}$ $(a_i, b_j\neq 0; i=1,2,\ldots,p; j=1,2,\ldots,q)$.

Функция (1) может быть представлена с помощью интеграла Меллина—Барнса [11]:

$$\mathcal{J}_\nu^{\rho,\mu,\sigma}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{L_{i\infty}}\Theta(s)\Big(\frac{z}{2}\Big)^{-2s}ds, \quad z\in\mathbb{C}, \tag{5}$$

где $L_{i\infty} = (\omega - i\infty, \omega + i\infty)$, $\omega_1 < \omega < \omega_2$, $\omega_1 = -\min\{\mathrm{Re}\,\nu/2,\ 1-\mathrm{Re}\,\sigma/2\}$, $\omega_2 = \mathrm{Re}\,\sigma/2$,

$$\Theta(s) = \frac{\Gamma\left(\nu/2+s\right)\Gamma\left(1-\sigma/2+s\right)\Gamma\left(\sigma/2-s\right)}{\Gamma\left(\mu-\rho\,\sigma/2+\rho\, s\right)\Gamma\left(1+\nu/2-s\right)}.$$

Для функции (1) справедливы асимптотические разложения [11]

$$\mathcal{J}_\nu^{\rho,\mu,\sigma}(z) = a_0\Big(\frac{z}{2}\Big)^{\nu} + b_0\Big(\frac{z}{2}\Big)^{2-\sigma} + o(z^{\delta}), \quad z\to 0, \tag{6}$$

где $\delta = \min\{\operatorname{Re}\nu, 2-\operatorname{Re}\sigma\}$,

$$a_0 = \frac{\Gamma\left(1-(\nu+\sigma)/2\right)\Gamma\left((\nu+\sigma)/2\right)}{\Gamma\left(\mu-\rho(\nu+\sigma)/2\right)\Gamma\left(1+\nu\right)}, \quad b_0 = \frac{\Gamma\left((\nu+\sigma)/2-1\right)}{\Gamma\left(\mu-\rho\right)\Gamma\left(2+(\nu-\sigma)/2\right)},$$

и

$$\mathcal{J}_{\nu}^{\rho,\mu,\sigma}(z) = c_0\left(\frac{z}{2}\right)^{-\sigma} + o(z^{-\sigma}), \quad z\to\infty, \tag{7}$$

где

$$c_0 = \frac{\Gamma\left((\nu+\sigma)/2\right)}{\Gamma\left(\mu\right)\Gamma\left(1+(\nu-\sigma)/2\right)}.$$

Также далее понадобятся частные случаи:

$$\mathcal{J}_{\nu}^{1,1,2+\nu}(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu}\exp\left(-\frac{z^2}{4}\right), \tag{8}$$

$$\sqrt{z}\,\mathcal{J}_{-1/2}^{2\rho,\mu+\rho,3/2}(z) = \sqrt{2\pi}\,\phi(-\rho,\mu;-z). \tag{9}$$

2. Основные результаты. Докажем следующие формулы.

2.1. *Для любого* $\operatorname{Re}\mu>0$ *имеет место равенство*

$$\int_0^{\infty} e^{-t}t^{\mu-\rho-\rho\,\nu/2-1}\mathcal{J}_{\nu}^{\rho,\mu,\nu+2}(zt^{-\rho/2})\,dt = 2K_{\nu}(z). \tag{10}$$

Доказательство. Сходимость интеграла в (10) следует из (6) и (7). Согласно (5) можем записать

$$\mathcal{J}_{\nu}^{\rho,\mu,\nu+2}(zt^{-\rho/2}) = \frac{1}{2\pi i}\int_{L_1}\Theta_1(s)\left(\frac{zt^{-\rho/2}}{2}\right)^{-2s}ds,$$

где

$$\Theta_1(s) = \frac{\Gamma\left(\nu/2+s\right)\Gamma\left(-\nu/2+s\right)}{\Gamma\left(\mu-\rho-\rho\,\nu/2+\rho s\right)}, \tag{11}$$

$$L_1 = (\omega-i\infty,\omega+i\infty), \quad \omega>|\operatorname{Re}\nu|/2.$$

Тогда левая часть (10) запишется в виде

$$\int_0^{\infty} e^{-t}t^{\mu-\rho-\rho\,\nu/2-1}\mathcal{J}_{\nu}^{\rho,\mu,\nu+2}(zt^{-\rho/2})\,dt =$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{\infty} e^{-t}t^{\mu-\rho-\rho\,\nu/2-1}\int_{L_1}\Theta_1(s)\left(\frac{zt^{-\rho/2}}{2}\right)^{-2s}ds\,dt. \tag{12}$$

Меняя в (12) порядок интегрирования, получим

$$\int_0^{\infty} e^{-t}t^{\mu-\rho-\rho\,\nu/2-1}\mathcal{J}_{\nu}^{\rho,\mu,\nu+2}(zt^{-\rho/2})\,dt =$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{L_1}\Theta_1(s)\left(\frac{z}{2}\right)^{-2s}\int_0^{\infty} e^{-t}t^{\mu-\rho-\rho\,\nu/2+\rho s-1}dt\,ds. \tag{13}$$

Согласно формуле [31, форм. 2.3.3.1]

$$\int_0^\infty t^{a-1} e^{-pt^b} dt = b^{-1} p^{-a/b} \Gamma(a/b), \quad b,\ \operatorname{Re} a,\ \operatorname{Re} p > 0, \tag{14}$$

внутренний интеграл в (13) равен

$$\int_0^\infty e^{-t} t^{\mu-\rho-\rho\nu/2+\rho s-1} dt = \Gamma\left(\mu-\rho-\rho\nu/2+\rho s\right).$$

Подставляя найденное значение в (13) и учитывая представления (11) и (3), приходим к (10).

В терминах преобразования Лапласа формулу (10) можно записать в виде

$$\int_0^\infty e^{-pt} t^{\mu-\rho-\rho\nu/2-1} \mathcal{J}_\nu^{\rho,\mu,\nu+2}(t^{-\rho/2})\, dt = \\ = 2p^{\rho-\mu+\rho\nu/2} K_\nu(p^{\rho/2}), \quad \operatorname{Re} p > 0. \tag{15}$$

При $\rho = \mu = 1$ из (8) и (15) получим формулу

$$\int_0^\infty t^{-\nu-1} e^{-pt-1/(4t)} dt = 2^{\nu+1} p^{\nu/2} K_\nu(\sqrt{p}), \quad \operatorname{Re} p > 0,$$

которая совпадает с приведенной в [31, форм. 2.3.16.1].

Из (15) при $\rho = 2\beta$, $\mu = \beta+\delta$, $\nu = -1/2$ с учетом представлений (9) и

$$K_{\pm 1/2}(z) = \sqrt{\pi/(2z)}\, e^{-z}$$

получим формулу

$$\int_0^\infty e^{-pt} t^{\delta-1} \phi(-\beta,\delta;-t^{-\beta}) dt = p^{-\delta} e^{-p^\beta}, \quad \operatorname{Re} p > 0,$$

которая совпадает с приведенной в [32, § 3.2, форм. (3.2.7)]. □

2.2. *Пусть выполняется одно из условий*: $-1 < \operatorname{Re}\nu < 2 - \operatorname{Re}\sigma$ *либо* $2 - \operatorname{Re}\nu < \operatorname{Re}\sigma < 4 + \operatorname{Re}\nu$. *Тогда для* $\operatorname{Re} z > 0$ *имеет место формула*

$$\int_0^\infty e^{-zt^2/4} t^{\nu+1} \mathcal{J}_\nu^{\rho,\mu,\sigma}(t)\, dt = \\ = 2^{\nu+1} z^{(\sigma-\nu)/2-1} {}_2\Psi_1 \left[z \,\middle|\, \begin{matrix} \left((\sigma+\nu)/2, 1\right),\ (1,1) \\ (\mu,\rho) \end{matrix} \right]. \tag{16}$$

Доказательство. Сходимость интеграла в (16) следует из (6) и (7). Из интегрального представления (5) имеем

$$\int_0^\infty e^{-zt^2/4} t^{\nu+1} \mathcal{J}_\nu^{\rho,\mu,\sigma}(t)\, dt = \frac{1}{2\pi i} \int_L 2^{2s} \Theta(s) \int_0^\infty t^{\nu+1-2s} e^{-zt^2/4} dt\, ds. \tag{17}$$

Из формулы (14) имеем

$$\int_0^\infty t^{\nu+1-2s}e^{-zt^2/4}dt = 2^{\nu-2s+1}\Gamma\left(1+\nu/2-s\right)z^{s-\nu/2-1}.$$

Подставляя найденное значение в (17), находим

$$\int_0^\infty e^{-zt^2/4}t^{\nu+1}\mathcal{J}_\nu^{\rho,\mu,\sigma}(t)\,dt = 2^{\nu+1}z^{-\nu/2-1}\frac{1}{2\pi i}\int_L \Theta_1(s)z^s\,ds,$$

где $\Theta_1(s) = \dfrac{\Gamma\left(\nu/2+s\right)\Gamma\left(1-\sigma/2+s\right)\Gamma\left(\sigma/2-s\right)}{\Gamma\left(\mu-\rho\,\sigma/2+\rho\,s\right)}.$

Сделаем замену $\tau = \sigma/2 - s$. Получим

$$\int_0^\infty e^{-zt^2/4}t^{\nu+1}\mathcal{J}_\nu^{\rho,\mu,\sigma}(t)\,dt = 2^{\nu+1}z^{(\sigma-\nu)/2-1}\frac{1}{2\pi i}\int_{L_2}\Theta_2(\tau)z^{-\tau}\,d\tau, \tag{18}$$

где

$$L_2 = (\omega - i\infty, \omega + i\infty), \quad 0 < \omega < \min\{\mathrm{Re}\,(\sigma+\nu)/2, 1\},$$

$$\Theta_2(\tau) = \frac{\Gamma((\sigma+\nu)/2-\tau)\Gamma(1-\tau)\Gamma(\tau)}{\Gamma(\mu-\rho\,\tau)}.$$

Сравнивая правую часть (18) с представлением (4), приходим к (16). □

2.3. *Пусть выполняется одно из условий*: $-\mathrm{Re}\,\alpha < \mathrm{Re}\,\nu < 2 - \mathrm{Re}\,\sigma$ *либо* $2 - \mathrm{Re}\,\nu < \mathrm{Re}\,\sigma < 2 + \mathrm{Re}\,\alpha$. *Тогда для* $\mathrm{Re}\,z > 0$ *имеет место формула*

$$\int_0^\infty e^{-t/z}t^{\alpha-1}\mathcal{J}_\nu^{\rho,\mu,\sigma}(t)\,dt = \\ = z^\alpha H_{3,3}^{2,2}\left[\frac{z^2}{4}\,\middle|\,\begin{matrix}\big(1-\alpha,2\big),\ \big(1-\sigma/2,1\big),\ \big(\mu-\rho\,\sigma/2,\rho\big)\\ \big(\nu/2,1\big),\ \big(1-\sigma/2,1\big),\ \big(-\nu/2,1\big)\end{matrix}\right]. \tag{19}$$

Доказательство. Сходимость интеграла в (19) следует из (6) и (7). Из интегрального представления (5) имеем

$$\int_0^\infty e^{-t/z}t^{\alpha-1}\mathcal{J}_\nu^{\rho,\mu,\sigma}(t)\,dt = \frac{1}{2\pi i}\int_L 2^{2s}\Theta(s)\int_0^\infty t^{\alpha-2s-1}e^{-t/z}dt\,ds. \tag{20}$$

Из формулы (14) имеем

$$\int_0^\infty t^{\alpha-2s-1}e^{-t/z}dt = \Gamma(\alpha-2s)z^{\alpha-2s}.$$

Подставляя найденное значение в (20), получаем

$$\int_0^\infty e^{-t/z}t^{\alpha-1}\mathcal{J}_\nu^{\rho,\mu,\sigma}(t)\,dt = \frac{z^\alpha}{2\pi i}\int_L \Theta_2(s)\left(\frac{z}{2}\right)^{-2s}ds, \tag{21}$$

где

$$\Theta_2(s) = \frac{\Gamma(\nu/2+s)\Gamma(1-\sigma/2+s)\Gamma(\sigma/2-s)\Gamma(\alpha-2s)}{\Gamma(\mu-\rho\,\sigma/2+\rho\,s)\Gamma(1+\nu/2-s)}.$$

Сравнивая правую часть (21) с представлением H-функции Фокса [1, форм. 8.3.1.1], [3, § 1.2, форм. (1.2)], приходим к (19). □

Заключение. В работе получены некоторые интегральные преобразования специальной функции Фокса, которая зависит от четырех параметров. Рассматриваемая функция представляет интерес в связи с ее применением в теории вырождающихся дифференциальных уравнений в частных производных. Показано, что результаты рассматриваемых интегральных преобразований можно записать в терминах известных специальных функций.

Конкурирующие интересы. Конкурирующих интересов не имею.

Авторский вклад и ответственность. Я несу полную ответственность за предоставление окончательной версии рукописи в печать. Окончательная версия рукописи мною одобрена.

Финансирование. Исследование выполнялось без финансирования.

Библиографический список

1. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. *Интегралы и ряды.* Т. 3: Дополнительные главы. М.: Физматлит, 2003. 708 с.
2. Kilbas A. A., Saigo M. *H-Transforms. Theory and Applications* / Analytical Methods and Special Functions. vol. 9. Boca Raton, FL: Chapman & Hall/CRC, 2004. xii+389 pp.
3. Mathai A. M., Saxena R. K., Haubold H. J. *The H-Function. Theory and Applications.* Dordrecht: Springer, 2010. xiv+268 pp. DOI: https://doi.org/10.1007/978-1-4419-0916-9.
4. Нахушев А. М. *Дробное исчисление и его применение.* М.: Физматлит, 2003. 271 с.
5. Хуштова Ф. Г. Первая краевая задача в полуполосе для уравнения параболического типа с оператором Бесселя и производной Римана–Лиувилля // *Матем. заметки*, 2016. Т. 99, № 6. С. 921–928. EDN: WGAQIH. DOI: https://doi.org/10.4213/mzm10759.
6. Кузнецов Д. С. *Специальные функции.* М.: Высш. шк., 1962. 248 с.
7. Бейтмен Г., Эрдейи А. *Высшие трансцендентные функции.* Т. 1: Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. М.: Наука, 1965. 294 с.
8. Хуштова Ф. Г. Вторая краевая задача в полуполосе для уравнения параболического типа с оператором Бесселя и частной производной Римана–Лиувилля // *Матем. заметки*, 2018. Т. 103, № 3. С. 460–470. EDN: YSWJYG. DOI: https://doi.org/10.4213/mzm10986.
9. Хуштова Ф. Г. Формулы дифференцирования и формула автотрансформации для одного частного случая функции Фокса // *Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук*, 2020. Т. 20, № 4. С. 15–18. EDN: DKAMMT. DOI: https://doi.org/10.47928/1726-9946-2020-20-4-15-18.
10. Хуштова Ф. Г. О некоторых свойствах одной специальной функции // *Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук*, 2022. Т. 22, № 2. С. 34–40. EDN: LITQCZ. DOI: https://doi.org/10.47928/1726-9946-2022-22-2-34-40.
11. Хуштова Ф. Г. Об интегральном представлении Меллина–Барнса одной специальной функции // *Известия Кабардино-Балкарского научного центра РАН*, 2022. № 6. С. 19–27. EDN: TXVTRD. DOI: https://doi.org/10.35330/1991-6639-2022-6-110-19-27.
12. Хуштова Ф. Г. Некоторые формулы дробного интегрирования от одной функции Фокса с четырьмя параметрами // *Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук*, 2022. Т. 22, № 4. С. 29–38. EDN: NUYVKX. DOI: https://doi.org/10.47928/1726-9946-2022-22-4-29-38.
13. Хуштова Ф. Г. К свойствам одной функции Фокса // *Вестн. КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*, 2023. Т. 42, № 1. С. 140–149. EDN: FXXPSA. DOI: https://doi.org/10.26117/2079-6641-2023-42-1-140-149.
14. Ворошилов А. А. Дробное дифференцирование типа Эрдейи–Кобера Н-функции Фокса // *Вестн. Гродненск. гос. ун-та им. Янки Купалы. Сер. 2. Мат. Физ. Информ., вычисл. техн. и управл.*, 2012. Т. 2, № 129. С. 11–20. EDN: TSVCDL.

15. Авсиевич А. В., Авсиевич В. В. Преобразование Лапласа в системах автоматического управления дробного порядка // *Наука и образование транспорту*, 2013. №1. С. 195–199. EDN: SJGJKR.
16. Авсиевич А. В. Преобразование Лапласа специальных функций Райта // *Вестник транспорта Поволжья*, 2013. №6. С. 50–52. EDN: RVKGWX.
17. Заикина С. М. Обобщённое интегральное преобразование Лапласа и его применение к решению некоторых интегральных уравнений // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2014. №1. С. 19–24. EDN: TFGEOL. DOI: https://doi.org/10.14498/vsgtu1265.
18. Qureshi M. I., Kabra D. K., Baboo M. S. Laplace transforms of multiple hypergeometric functions using Mellin–Barnes type contour integration // *Asia Pac. J. Math.*, 2015. vol. 2, no. 2. pp. 94–107.
19. Скоромник О. В. Интегральные преобразования с вырожденной гипергеометрической функцией Куммера и нормированной функцией Бесселя в ядрах и интегральные уравнения первого рода в пространстве суммируемых функций // *Вестн. Полоцкого гос. ун-та. Сер. С. Фундамент. науки*, 2016. №12. С. 104–110. EDN: XRFOMX.
20. Karp D., Prilepkina E. G. Applications of the Stieltjes and Laplace transform representations of the hypergeometric functions // *Integral Transforms Spec. Funct.*, 2017. vol. 28, no. 10. pp. 710–731. DOI: https://doi.org/10.1080/10652469.2017.1351964.
21. Скоромник О. В. Двумерное интегральное преобразование с модифицированной H-функцией в пространстве суммируемых функций // *Вестн. Полоцкого гос. ун-та. Сер. С. Фундамент. науки*, 2018. №4. С. 187–193. EDN: UXBAMJ.
22. Папкович М. В., Скоромник О. В. Двумерное интегральное преобразование с G-функцией Мейера в ядре в пространстве суммируемых функций // *Вестн. Полоцкого гос. ун-та. Сер. С. Фундамент. науки*, 2019. №4. С. 131–136. EDN: HFPVNO.
23. Mohammed A. O., Rakha M. A., Awad M. M., Rathie A. K. On several new Laplace transforms of generalized hypergeometric functions ${}_2F_2(x)$ // *Bol. Soc. Parana. Mat.* (3), 2021. vol. 39, no. 4. pp. 97–109. DOI: https://doi.org/10.5269/bspm.42207.
24. Катрахов В. В., Ситник С. М. Метод операторов преобразования и краевые задачи для сингулярных эллиптических уравнений // *Современная математика. Фундаментальные направления*, 2018. Т. 64, №2. С. 211–426. EDN: AXVBAI. DOI: https://doi.org/10.22363/2413-3639-2018-64-2-211-426.
25. Ситник С. М., Шишкина Э. Л. *Метод операторов преобразования для дифференциальных уравнений с операторами Бесселя*. М.: Физматлит, 2019. 221 с. EDN: YGUEZW.
26. *Transmutation Operators and Applications* / Trends in Mathematics / eds. V. V. Kravchenko, S. M. Sitnik. Cham: Birkhäuser, 2020. xvii+686 pp. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-030-35914-0.
27. Лебедев Н. Н. *Специальные функции и их приложения*. М.: Физматлит, 1963. 358 с.
28. Маричев О. И. *Метод вычисления интегралов от специальных функций (теория и таблицы формул)*. Мн.: Наука и техника, 1978. 312 с.
29. Wright E. M. On the coefficients of power series having exponential singularities // *J. Lond. Math. Soc.*, 1933. vol. s1-8, no. 1. pp. 71–79. DOI: https://doi.org/10.1112/jlms/s1-8.1.71.
30. Wright E. M. The generalized Bessel function of order greater than one // *Q. J. Math.*, 1940. vol. os-11, no. 1. pp. 36–48. DOI: https://doi.org/10.1093/qmath/os-11.1.36.
31. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. *Интегралы и ряды*. Т. 1: Элементарные функции. М.: Физматлит, 2002. 632 с.
32. Псху А. В. *Уравнения в частных производных дробного порядка*. М.: Наука, 2005. 199 с. EDN: QJPLZX.

Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2024, vol. 28, no. 2, pp. 367–377
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu2057

MSC: 33C60, 33E50, 35R11

Some integral transformations of a Fox function with four parameters

F. G. Khushtova

Institute of Applied Mathematics and Automation
of Kabardin-Balkar Scientific Centre of RAS,
89 A, Shortanov st., Nalchik, 360000, Russian Federation.

Abstract

The study examines the Fox function with four parameters, which arises in the theory of degenerate differential equations with partial derivatives of fractional order. In terms of this function, explicit solutions to the first and second boundary value problems in a half-space were previously derived for the equation with the Bessel operator acting on the spatial variable and a fractional derivative with respect to time.

For the function under consideration, when two of the four parameters are dependent, a Laplace transform formula has been obtained, expressed in terms of the special MacDonald function. Additionally, integral transformation formulas have been derived, expressed through the generalized Wright function and the more general H-function of Fox.

An auxiliary tool for proving the obtained formulas is the Mellin–Barnes integral, which is used to express the special function under consideration. The convergence of the improper integrals follows from the asymptotic estimates also provided in the work.

It is shown that for specific values from the Laplace transform formula, known transformation formulas for the exponential function and the Wright function with power multipliers follow.

Keywords: Fox function, Macdonald function, Wright function, Bessel operator, fractional derivative, integral transformations, Laplace transform.

Received: 15th August, 2023 / Revised: 21st December, 2023 /
Accepted: 29th January, 2024 / First online: 10th October, 2024

Differential Equations and Mathematical Physics
Short Communication

Please cite this article in press as:
Khushtova F. G. Some integral transformations of a Fox function with four parameters, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2024, vol. 28, no. 2, pp. 367–377. EDN: UNNXFS. DOI: 10.14498/vsgtu2057 (In Russian).

Author's Details:
Fatima G. Khushtova https://orcid.org/0000-0003-4088-3621
Cand. Phys. & Math. Sci.; Researcher; Dept. of Fractional Calculus;
e-mail: khushtova@yandex.ru

Competing interests. I have no competing interests.

Authors' contributions and responsibilities. I take full responsibility for providing the final version of the manuscript for publication. The final version of the manuscript has been approved by me.

Funding. The research was conducted without funding.

References

1. Prudnikov A. P., Brychkov Yu. A., Marichev O. I. *Integrals and Series*, vol. 3, More Special Functions. New York, Gordon and Breach Science Publ., 1990, 800 pp.
2. Kilbas A. A., Saigo M. *H-Transforms. Theory and Applications*, Analytical Methods and Special Functions, vol. 9. Boca Raton, FL, Chapman & Hall/CRC, 2004, xii+389 pp.
3. Mathai A. M., Saxena R. K., Haubold H. J. *The H-Function. Theory and Applications*. Dordrecht, Springer, 2010, xiv+268 pp. DOI: https://doi.org/10.1007/978-1-4419-0916-9.
4. Nakhushev A. M. *Drobnoe ischislenie i ego primenenie* [Fractional Calculus and Its Applications]. Moscow, Fizmatlit, 2003, 271 pp. (In Russian)
5. Khushtova F. G. First boundary-value problem in the half-strip for a parabolic-type equation with Bessel 0perator and Riemann–Liouville derivative, *Math. Notes*, 2016, vol. 99, no. 6, pp. 916–923. EDN: WPITGJ. DOI: https://doi.org/10.1134/S0001434616050308.
6. Kuznetsov D. S. *Spetsial'nye funktsii* [Special Functions]. Moscow, Vyssh. Shk., 1962, 248 pp. (In Russian)
7. Erdélyi A, Magnus W., Oberhettinger F., Tricomi F. G. *Higher Transcendental Functions*, vol. I, Bateman Manuscript Project. New York, McGraw-Hill Book Co., 1953, xxvi+302 pp.
8. Khushtova F. G. The second boundary-value problem in a half-strip for a parabolic-type equation with Bessel operator and Riemann–Liouville partial derivative, *Math. Notes*, 2018, vol. 103, no. 3, pp. 474–482. EDN: XXXDBZ. DOI: https://doi.org/10.1134/S0001434618030136.
9. Khushtova F. G. Differentiation formulas and the autotransformation formula for one particular case of the Fox function, *Dokl. Adygsk. (Cherkessk.) Mezhdun. Akad. Nauk*, 2020, vol. 20, no. 4, pp. 15–18 (In Russian). EDN: DKAMMT. DOI: https://doi.org/10.47928/1726-9946-2020-20-4-15-18.
10. Khushtova F. G. On some properties of one special function, *Dokl. Adygsk. (Cherkessk.) Mezhdun. Akad. Nauk*, 2022, vol. 22, no. 2, pp. 34–40 (In Russian). EDN: LITQCZ. DOI: https://doi.org/10.47928/1726-9946-2022-22-2-34-40.
11. Khushtova F. G. On the Mellin–Barnes integral representation of one special function, *Izv. Kabard.-Balkarsk. Nauchn. Tsentra RAN*, 2022, no. 6, pp. 19–27 (In Russian). EDN: TXVTRD. DOI: https://doi.org/10.35330/1991-6639-2022-6-110-19-27.
12. Khushtova F. G. On some formulas for fractional integration of one Fox function with four parameters, *Dokl. Adygsk. (Cherkessk.) Mezhdun. Akad. Nauk*, 2022, vol. 22, no. 4, pp. 29–38 (In Russian). EDN: NUYVKX. DOI: https://doi.org/10.47928/1726-9946-2022-22-4-29-38.
13. Khushtova F. G. To the properties of one Fox function, *Vestn. KRAUNC. Fiz.-Mat. Nauki*, 2023, vol. 42, no. 1, pp. 140–149 (In Russian). EDN: FXXPSA. DOI: https://doi.org/10.26117/2079-6641-2023-42-1-140-149.
14. Voroshilov A. A. Erdélyi–Kober type fractional differentiation of the Fox H-function, *Vestn. Grodnensk. Gos. Univ. im. Yanki Kupaly. Ser. 2. Mat. Fiz. Inform., Vychisl. Tekhn. Upravl.*, 2012, vol. 2, no. 129, pp. 11–20 (In Russian). EDN: TSVCDL.
15. Avsievich A. V., Avsievich V. V. Laplace transform in fractional order automatic control systems, *Nauka Obrazov. Transp.*, 2013, no. 1, pp. 195–199 (In Russian). EDN: SJGJKR.
16. Avsievich A. V. The Laplace transform of special Wright functions, *Vestn. Transp. Povolzh.*, 2013, no. 6, pp. 50–52 (In Russian). EDN: RVKGWX.
17. Zaikina S. M. Generalized integral Laplace transform and its application to solving some integral equations, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara

State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2014, no. 1, pp. 19–24 (In Russian). EDN: TFGEOL. DOI: https://doi.org/10.14498/vsgtu1265.

18. Qureshi M. I., Kabra D. K., Baboo M. S. Laplace transforms of multiple hypergeometric functions using Mellin–Barnes type contour integration, *Asia Pac. J. Math.*, 2015, vol. 2, no. 2, pp. 94–107.
19. Skoromnik O. V. Integral transforms with the confluent hyperdeometric function of Kummer and the cut Bessel function in the kernels and integral equations of the first kind in the space of summable functions, *Vestn. Polotsk. Gosud. Univ. Ser. C. Fundament. Nauki*, 2016, no. 12, pp. 104–110 (In Russian). EDN: XRFOMX.
20. Karp D., Prilepkina E. G. Applications of the Stieltjes and Laplace transform representations of the hypergeometric functions, *Integral Transforms Spec. Funct.*, 2017, vol. 28, no. 10, pp. 710–731. DOI: https://doi.org/10.1080/10652469.2017.1351964.
21. Skoromnik O. V. Two-dimentional integral transform with the H-function in the kernel in the space of summable functions, *Vestn. Polotsk. Gosud. Univ. Ser. C. Fundament. Nauki*, 2018, no. 4, pp. 187–193 (In Russian). EDN: UXBAMJ.
22. Papkovich M. V., Skoromnik O. V. Two-dimentional integral transform with the meijer G-function in the kernel in the space of summable functions, *Vestn. Polotsk. Gosud. Univ. Ser. C. Fundament. Nauki*, 2019, no. 4, pp. 131–136 (In Russian). EDN: HFPVNO.
23. Mohammed A. O., Rakha M. A., Awad M. M., Rathie A. K. On several new Laplace transforms of generalized hypergeometric functions ${}_2F_2(x)$, *Bol. Soc. Parana. Mat.* (3), 2021, vol. 39, no. 4, pp. 97–109. DOI: https://doi.org/10.5269/bspm.42207.
24. Katrakhov V. V., Sitnik S. M. The transmutation method and boundary-value problems for singular elliptic equations, *Contemporary Mathematics. Fundamental Directions*, 2018, vol. 64, no. 2, pp. 211–426 (In Russian). EDN: AXVBAI. DOI: https://doi.org/10.22363/2413-3639-2018-64-2-211-426.
25. Sitnik S. M., Shishkina E. L. *Metod operatorov preobrazovaniia dlia differentsial'nykh uravnenii s operatorami Besselia* [Method of Transformation Operators for Differential Equations with Bessel Operators]. Moscow, Fizmatlit, 2019, 224 pp. (In Russian). EDN: YGUEZW.
26. *Transmutation Operators and Applications*, Trends in Mathematics, eds. V. V. Kravchenko, S. M. Sitnik. Cham, Birkhäuser, 2020, xvii+686 pp. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-030-35914-0.
27. Lebedev N. N. *Special Functions and Their Applications*. Englewood Cliffs, N.J., Prentice Hall, 1965, xii+308 pp.
28. Marichev O. I. *Handbook of Integral Transforms of Higher Transcendental Functions: Theory and Algorithmic Tables*, Ellis Horwood Series in Mathematics and its Applications. Chichester, Ellis Horwood Limited, 1983, 336 pp.
29. Wright E. M. On the coefficients of power series having exponential singularities, *J. Lond. Math. Soc.*, 1933, vol. s1-8, no. 1, pp. 71–79. DOI: https://doi.org/10.1112/jlms/s1-8.1.71.
30. Wright E. M. The generalized Bessel function of order greater than one, *Q. J. Math.*, 1940, vol. os-11, no. 1, pp. 36–48. DOI: https://doi.org/10.1093/qmath/os-11.1.36.
31. Prudnikov A. P., Brychkov Yu. A., Marichev O. I. *Integrals and Series*, vol. 1, Elementary Functions. New York-London, Gordon and Breach Science Publishers, 1986, 798 pp.
32. Pskhu A. V. *Uravneniia v chastnykh proizvodnykh drobnogo poriadka* [Fractional Partial Differential Equations]. Moscow, Nauka, 2005, 199 pp. (In Russian). EDN: QJPLZX.