Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2024. Т. 28, № 2. С. 378–389
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu2061
EDN: WTKDQB

УДК 519.63:534.113

Идентификация параметров стержня с продольным прямоугольным пазом по двум спектрам собственных частот изгибных колебаний

И. М. Утяшев[1], ***А. Ф. Фатхелисламов***[2]

[1] Институт механики им. Р.Р. Мавлютова — обособленное структурное подразделение ФГБНУ УФИЦ РАН, Россия, 450054, Уфа, пр. Октября, 71.
[2] Уфимский университет науки и технологий, Россия, 450076, Уфа, ул. Заки Валиди, 32.

Аннотация

Рассмотрена коэффициентная обратная задача определения геометрических параметров продольного прямоугольного паза по собственным частотам изгибных колебаний прямоугольного стержня. Предполагается, что паз проходит не по всей длине, а от определенной точки до правого конца. Для решения задачи стержень с продольным пазом моделируется в виде двух стержней, причем первый не имеет паз, а второй имеет.

В месте соединения используются условия сопряжения, в которых приравниваются величины прогибов, углов поворота, изгибающие моменты и перерезывающие силы. Исследованы закономерности поведения собственных частот изгибных колебаний при изменении длины паза. Предложен метод решения, позволяющий определять искомые параметры по конечному числу собственных значений изгибных колебаний. Показано, что решение однозначно в случае использования частотных спектров относительно взаимно перпендикулярных осей.

Ключевые слова: изгибные колебания, собственная частота, продольный паз, обратная задача, момент инерции, оценка погрешности, прямоугольный стержень.

Получение: 8 сентября 2023 г. / Исправление: 31 октября 2023 г. / Принятие: 1 ноября 2023 г. / Публикация онлайн: 19 сентября 2024 г.

Механика деформируемого твердого тела
Краткое сообщение

Образец для цитирования
Утяшев И. М., Фатхелисламов А. Ф. Идентификация параметров стержня с продольным прямоугольным пазом по двум спектрам собственных частот изгибных колебаний // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2024. Т. 28, № 2. С. 378–389. EDN: WTKDQB. DOI: 10.14498/vsgtu2061.

Сведения об авторах

Ильнур Мирзович Утяшев https://orcid.org/0000-0002-2342-0492
кандидат физико-математических наук; научный сотрудник; лаб. механики твердого тела[1]; e-mail: utyashevim@mail.ru

Альфир Фирдависович Фатхелисламов https://orcid.org/0000-0002-8494-9592
старший преподаватель; каф. управления информационной безопасностью[2]; e-mail: alfir93@mail.ru

Введение. Изгибные колебания имеют огромное значение в различных областях науки и техники. В механике и инженерии они используются для анализа и проектирования различных конструкций, таких как мосты, здания, металлические конструкции и т.д. Изучение изгибных колебаний помогает проектировщикам и инженерам понимать, как конструкции будут себя вести в условиях механических нагрузок, вибраций и ветровых нагрузок. В физике изгибные колебания исследуются в рамках учения об упругих телах. Они играют важную роль в теории упругости и могут быть использованы для измерения механических свойств материалов. Изучение изгибных колебаний важно для понимания многих физических и инженерных систем и может приводить к созданию более эффективных и безопасных конструкций [1].

Собственные частоты колебаний играют существенную роль при детальном выявлении параметров изучаемого объекта, например дефектов. Например, в работах [2, 3] исследована эволюция характеристик собственных продольных колебаний круглого стержня при увеличении дефекта его поперечного сечения. В [4] рассматриваются собственные поперечные колебания стержня с поперечным сечением прямоугольной формы, имеющим постоянную высоту и переменную ширину, изменяющуюся по экспоненциальному закону. Исследованы собственные колебания стержня, защемленного на левом конце и шарнирно опертого на правом, а также защемленного на левом и правом концах. В [5] рассмотрен численный метод решения задачи изгибных колебаний стержня с переменным модулем Юнга. В отличие от [5] в настоящей работе приведен метод, позволяющий найти аналитическое решение, которое дает более точный результат. Работа [6] показывает, как, основываясь на моделировании дефекта сечения как известной функции, приближенно определяются основные параметры, его характеризующие, такие как местоположение и объем по двум низшим частотам колебаний свободного и консольно закрепленного стержней. С помощью численного моделирования показано, что для удовлетворительного определения свойств дефекта достаточно использовать несколько низших частот. В [7] проведено сравнение экспериментальных данных с различными теоретическими моделями для описания продольных колебаний стержня. В [8] исследуется поведение собственных частот изгибных колебаний стержня при изменении размера полости. Показано, как местоположение полости влияет на частотные характеристики колебаний. Доказано, что одного спектра частот изгибных колебаний еще недостаточно для идентификации местоположения и размеров полости. Для идентификации полости предложено использование собственных частот из двух спектров изгибных колебаний (относительно разных осей). Работа [9] посвящена идентификации длины продольного надреза по собственным частотам изгибных колебаний консольно закрепленного стержня. Показано, что задача имеет бесконечное количество решений, но в силу физической постановки можно выделить единственное решение, причем для решения задачи достаточно одной собственной частоты.

Обратные задачи идентификации таких дефектов, как трещина, имеют большую популярность [2, 3, 6, 10–17]. Поперечные раскрытые трещины, начиная с работ [10–12], как правило, моделируют условиями сопряжения пружины. В современной литературе предлагаются и другие условия сопряжения для описания поперечных дефектов [13–15]. Однако продольная трещина, которая в данной работе моделируется пазом, не может быть описана пружиной.

1. Прямая задача. Рассматривается однородный изотропный прямоугольный стержень длины $L = 1$ с продольным прямоугольным пазом, проходящий не по всей длине стержня, а от некоторой точки x_c до правого конца (см. рис. 1). Предполагается, что оси симметрии поперечного сечения участка стержня без паза и с пазом совпадают, а стержень заделан на обеих концах. Поперечное сечение имеет высоту H и ширину B. Прямоугольный паз имеет длину $l = L - x_c$, глубину h и ширину b. В случае малого b следует рассматривать прямоугольный паз как продольную трещину.

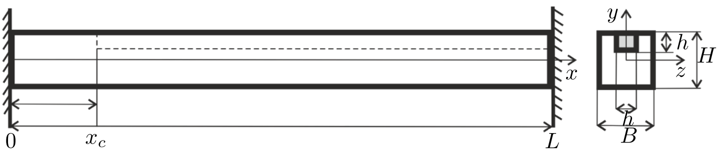

Рис. 1. Изображение стержня с продольным пазом
[Figure 1. Image of a rod with a longitudinal groove]

Требуется определить собственные частоты изгибных колебаний стержня относительно вертикальной оси Oy и горизонтальной оси Oz, установить зависимость размеров и места начала паза на эти частоты.

Рассмотрим колебания относительно вертикальной оси Oy. Изгибные колебания стержня с постоянным поперечным сечением F описываются уравнением [18]

$$EJ\frac{d^4U(x,t)}{dx^4} + \rho F\frac{d^2U(x,t)}{dt^2} = 0, \tag{1}$$

где $U(x,t)$ — поперечное смещение относительно оси Oy, E — модуль упругости, J — момент инерции поперечного сечения, ρ — плотность стержня.

Решение уравнения (1) ищем в виде $U(x,t) = y(x)\cos\omega t$, где ω — круговая частота. Тогда (1) сводится к уравнению

$$y^{(4)}(x) = s^4 y(x), \tag{2}$$

где $s^4 = \rho F\omega^2/(EJ)$. Поскольку стержень слева и справа от точки x_c имеет разную форму поперечного сечения, уравнения (2) слева и справа от точки x_c запишутся в следующей форме:

$$y_-^{(4)} = d_1^4\lambda^4 y_-, \quad y_+^{(4)} = d_2^4\lambda^4 y_+, \tag{3}$$

где $d_1^4 = F_-/J_{y-}$, $d_2^4 = F_+/J_{y+}$, $\lambda^4 = \rho\omega^2/E$; y_- — поперечное смещение левее точки x_c (участок стержня без паза), y_+ — правее точки x_c (с пазом).

Моменты инерции относительно оси Oy находим по формулам

$$J_{y+} = \frac{B^3H}{12} - \frac{b^3h}{12}, \quad J_{y-} = \frac{B^3H}{12}. \tag{4}$$

Условие сопряжения получим, приравняв в точке x_c поперечные смещения, углы поворота, изгибающие моменты и перерезывающие силы:

$$\begin{aligned} &y_-(x_c) = y_+(x_c), && y'_-(x_c) = y'_+(x_c), \\ &y''_-(x_c) = \frac{J_{y+}}{J_{y-}} y''_+(x_c), && y'''_-(x_c) = \frac{J_{y+}}{J_{y-}} y'''_+(x_c). \end{aligned} \tag{5}$$

Так как стержень заделан на левом и правом концах, краевые условия следующие:

$$y_-(0) = 0, \quad y'_-(0) = 0; \quad y_+(1) = 0, \quad y'_+(1) = 0. \tag{6}$$

Общее решение уравнений (3) примем в виде

$$\begin{aligned} y_- &= C_{11} y_{1-} + C_{12} y_{2-} + C_{13} y_{3-} + C_{14} y_{4-}, \\ y_+ &= C_{21} y_{1+} + C_{22} y_{2+} + C_{23} y_{3+} + C_{24} y_{4+}, \end{aligned} \tag{7}$$

где $y_{1-} = \cos(d_1\lambda x)$, $y_{2-} = \sin(d_1\lambda x)$, $y_{3-} = \cosh(d_1\lambda x)$, $y_{4-} = \sinh(d_1\lambda x)$, $y_{1+} = \cos(d_2\lambda x)$, $y_{2+} = \sin(d_2\lambda x)$, $y_{3+} = \cosh(d_2\lambda x)$, $y_{4+} = \sinh(d_2\lambda x)$.

Подставив (7) в (5), (6), получим систему, которая имеет нетривиальное решение относительно коэффициентов C_{ij} тогда и только тогда, когда определитель этой системы $\Delta(\lambda)$ равен нулю, вычисляя который, получим частотное уравнение относительно оси Oy:[1]

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda) = {} & \frac{1}{16\lambda^4 d_{y1}^4 J_{y-}^2 d_{y2}^4} \times \\ & \times (-2J_{y-}J_{y+} e^{-d_{y1}\lambda x_c} e^{d_{y1}\lambda x_c} e^{-d_{y2}\lambda x_x} e^{d_2\lambda x_c} \sin(d_{y2}\lambda)^2 d_{y1}^2 d_{y2}^2 - \cdots \\ & + J_{y+}^2 \sin(d_{y1}\lambda x_c)^2 \sin(d_{y2}\lambda x_c)^2 e^{-d_{y2}\lambda} e^{d_{y2}\lambda} d_{y2}^4) = 0. \end{aligned} \tag{8}$$

По горизонтальной оси Oz частотное уравнение получается аналогично, разница заключается только в моментах инерции:

$$J_{z+} = \frac{B^2H^4 - 4h(H^2 - 1.5Hh + h^2)HhB + b^2h^4}{12(HB - hb)}, \quad J_{z-} = \frac{BH^3}{12}. \tag{9}$$

1.1. Пример решения прямой задачи. Примем следующие входные данные: $H = B = 0.1$, $h = 0.01$, $b = 0.02$, $L = 1$, $x_c = 0.5$. При заданных параметрах моменты инерции (4), (9) относительно осей Oy и Oz, а также их отношения к площади сечения следующие:

$$\begin{aligned} &J_{y+} = 8.326666 \cdot 10^{-6}, && J_{y-} = 8.333333 \cdot 10^{-6}, \\ &J_{z+} = 7.918401 \cdot 10^{-6}, && J_{z-} = 8.333333 \cdot 10^{-6}; \\ &d_{y1} = 5.88566191, && d_{y2} = 5.85718206, \\ &d_{z1} = 5.88566191, && d_{z2} = 5.93126244. \end{aligned}$$

Используя эти значения, получаем частотные уравнения относительно осей Oy и Oz, из которых с помощью математического пакета `Maple` численно находим собственные значения изгибных колебаний:
$\lambda_{1y} = 0.80559430$, $\lambda_{2y} = 1.33754047$, $\lambda_{3y} = 1.87272027$ — относительно оси Oy;
$\lambda_{1z} = 0.80053059$, $\lambda_{2z} = 1.32919190$, $\lambda_{3z} = 1.86093715$ — относительно оси Oz.

[1] Из-за большого объема выражение приведено не полностью.

На рис. 2–4 приведены графические зависимости первых трех собственных значений стержня от длины паза. Рисунки показывают, что график собственных значений изгибных колебаний относительно оси Oy растет, а относительно оси Oz убывает по мере увеличения длины паза. Это обусловлено тем, что отношение изгибающих моментов и площади поперечного сечения относительно оси Oy растет с увеличением длины паза, а по оси Oz уменьшается. Видно, что первое собственное значение относительно оси Oy при длине паза от 0 до 0.4 и от 0.8 до 1 возрастает несущественно. Собственные значения относительно оси Oz значительно уменьшаются в значениях l от 0 до 0.1 и от 0.9 до 1. В остальных промежутках собственные значения уменьшаются без сильных отклонений. Из анализа графиков следует, что при решении

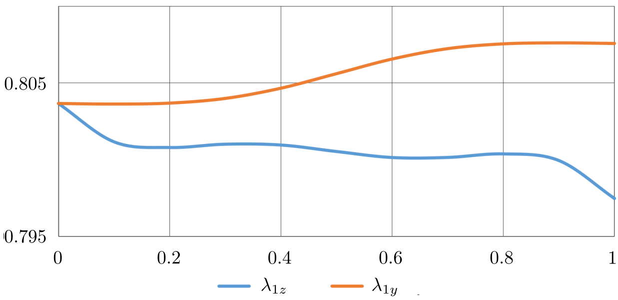

Рис. 2. Зависимость λ_1 от длины паза
[Figure 2. Dependence of λ_1 on the groove length]

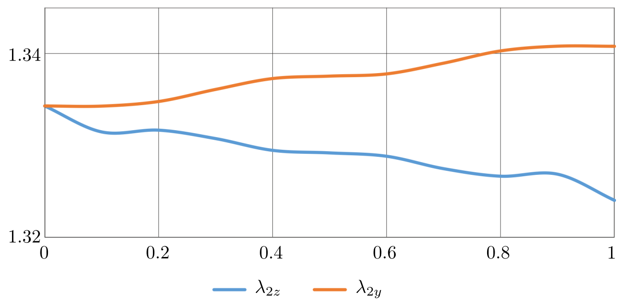

Рис. 3. Зависимость λ_2 от длины паза
[Figure 3. Dependence of λ_2 on the groove length]

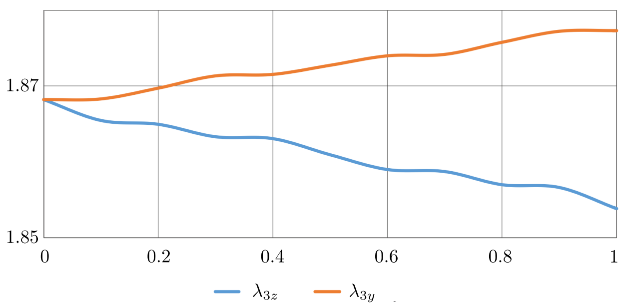

Рис. 4. Зависимость λ_3 от длины паза
[Figure 4. Dependence of λ_3 on the groove length]

обратных задач с использованием частот только из одного спектра могут возникнуть трудности. Например, при определенных длинах паза собственные значения меняются несущественно, что приводит к множеству вариантов решений обратной задачи.

2. Обратная задача. Рассмотрим пример решения обратной задачи. Пусть имеется прямоугольный стержень длины $L = 1$ с прямоугольным пазом l, проходящим не по всей длине. Требуется найти параметры паза по собственным частотам изгибных колебаний. Также необходимо определить наименьшее количество этих частот для решения задачи.

Для определения длины, ширины и глубины паза используем собственные значения с двух взаимно перпендикулярных осей Oy и Oz. Причем для более точного решения нужно использовать первые собственные значения, то есть с наименьшим порядковым номером. Данное требование вытекает из практических соображений, поскольку приборы для измерения частот наиболее точно определяют первые собственные частоты.

Возьмем три собственных значения колебания стержня относительно оси Oz, полученные в результате решения прямой задачи: $\lambda_{1z} = 0.80037439$, $\lambda_{2z} = 1.32665822$, $\lambda_{3z} = 1.85699429$. Подставляя их в частотное уравнение (8) в предположении, что ширина b, глубина h, начало паза x_c неизвестны, получим систему нелинейных уравнений относительно искомых параметров. Из физических соображений ищем вещественные значения $x_c \in [0, 1]$, $b \in [0, 0.1]$ и $h \in [0, 0.1]$. В табл. 1 приведен набор значений, полученных с помощью математического пакета `Maple`.

Для выявления единственного решения предлагается применить подход, предложенный авторами в работе [16], который заключается в том, что требуется решить несколько систем уравнений с числом уравнений, совпадающим с числом неизвестных, а затем найти пересечение этих решений. Сравнивая данные табл. 1, 2, видим, что одно решение является общим и это решение есть суть решения поставленной задачи (точное решение $b = 0.01$, $h = 0.01$, $x_c = 0.2$).

Для определения наименьшего количества собственных значений, требуемых для решения обратной задачи, возьмем по два собственных значения из спектров частот колебаний относительно взаимно перпендикулярных осей

Таблица 1

Набор решений обратной задачи для λ_{1z}, λ_{2z} и λ_{3z}
[A set of solutions to the inverse problem for λ_{1z}, λ_{2z}, and λ_{3z}]

no.	x_c	h	b
1	0.19999999	0.00999999	0.02000000
2	0.32114148	0.02823376	0.01738215
3	0.41343226	0.07987103	0.08653772

Таблица 2

Набор решений обратной задачи для λ_{1y}, λ_{2y} и λ_{3y}
[A set of solutions to the inverse problem for λ_{1y}, λ_{2y}, and λ_{3y}]

no.	x_c	h	b
1	0.19999999	0.00999999	0.02000000
2	0.47243139	0.01926569	0.09219030

Oy и Oz. В табл. 3 приведены результаты для случая, когда две собственные частоты взяты по оси Oz и одна по Oy, а в табл. 4 — для случая, когда две собственные частоты взяты по оси Oy и одна по Oz.

Таблица 3

Набор решений обратной задачи для λ_{1z}, λ_{2z} и λ_{1y}
[A set of solutions to the inverse problem for λ_{1z}, λ_{2z}, and λ_{1y}]

no.	x_c	h	b
1	0.18623568	0.00985498	0.02020706
2	0.20000000	0.01000000	0.01999999
3	0.39887811	0.09925593	0.09964666

Таблица 4

Набор решений обратной задачи для λ_{1y}, λ_{2y} и λ_{1z}
[A set of solutions to the inverse problem for λ_{1y}, λ_{2y}, and λ_{1z}]

no.	x_c	h	b
1	0.20000000	0.01000000	0.01999999
2	0.48204891	0.02422458	0.01478118

Из данных табл. 3, 4 видим, что искомое решение снова является общим. Отсюда следует вывод, что для однозначного нахождения параметров паза достаточно четырех собственных значений, два из которых взяты из спектра колебаний относительно оси Oy и два относительно оси Oz.

3. Оценка погрешности. Проведем вычислительный эксперимент по зашумлению входных данных аналогично работе [17]. Для оценки погрешности метода будем оценивать погрешность нахождения положения точки начала паза x_c. В качестве входных данных примем первое собственное значение, заданное в виде $\lambda j\gamma = \lambda_j(1+\gamma\psi_j)$, где λ_j — собственное значение, вычисленное с точностью до 8 значащих цифр; γ — амплитуда зашумления; ψ_j — случайная величина с равномерным законом распределения, определенная на отрезке $[-1, 1]$. Относительная погрешность приведенного в данной работе метода исследуется в зависимости от $\gamma = 10^{-n}$, $n = 3, \ldots, 9$.

В табл. 5 приведены результаты пяти экспериментов с различными ψ_j для x_c при каждом значении амплитуды γ. Значения ψ_j получены с помощью генератора случайных чисел математического пакета `Maple`. Для исключения

Таблица 5

Относительная погрешность нахождения точки начала паза x_c в зависимости от зашумления входных данных [The relative error in determining the starting point of the groove x_c depending on the noise in the input data]

γ	$\delta_{x_c}(\psi)$, %				
10^{-3}	13.401911	13.790595	14.779052	16.650421	13.790595
10^{-4}	1.043232	0.675387	0.661847	0.792041	1.165774
10^{-5}	0.021450	0.038733	0.068768	0.155276	0.119227
10^{-6}	0.001472	0.014118	0.014660	0.006625	0.014113
10^{-7}	0.000500	0.001080	0.001173	0.001131	0.000920
10^{-8}	0.000078	0.000076	0.000157	0.000133	0.000099
10^{-9}	0.000014	0.000030	0.000010	0.000013	0.000007

ложных решений поиск параметра x_c производится в более узком интервале: $x_c \in [0.45, 0.55]$. Из табл. 5 следует, что при погрешности входных данных не более $\gamma = 10^{-4}$ погрешность восстановления x_c менее двух процентов.

Заключение. Решены прямая и обратная задачи колебания прямоугольного стержня с продольным прямоугольным пазом, который проходит не по всей длине. Предложен метод моделирования, в котором стержень состоит из двух частей, где первая часть с пазом, а вторая без паза, части соединены с помощью условий сопряжения. Данный метод позволяет решить как прямую задачу, так и обратную. Анализ зависимости собственных частот изгибных колебаний от длины паза относительно разных осей показал, что собственные значения относительно одной оси растут, а относительно другой падают. Предложен метод решения обратной задачи, позволяющий определять искомые параметры по конечному числу собственных значений изгибных колебаний, взятых из двух спектров частот. Анализ графиков и примеры решения обратной задачи показали, что решение однозначно в случае использования первых частот из спектров относительно взаимно перпендикулярных осей. Из оценки погрешности следует, что при зашумлении входных данных не более 10^{-4} погрешность восстановления одного из коэффициентов составляет менее 2 %. Данный метод применим для идентификации продольных трещин, где трещина проходит не по всей длине стержня.

Конкурирующие интересы. Конфликта интересов не имеется.

Авторский вклад и ответственность. Каждый автор внес равный вклад в написание статьи. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23–21–00420, https://rscf.ru/project/23-21-00420/.

Библиографический список

1. Шакирзянов Р. А., Шакирзянов Ф. Р. *Динамика и устойчивость сооружений.* Москва: Ай Пи Ар Медиа, 2022. 119 с. DOI: https://doi.org/10.23682/116444.
2. Акуленко Л. Д., Байдулов В. Г., Георгиевский Д. В., Нестеров С. В. Эволюция собственных частот продольных колебаний стержня при увеличении дефекта поперечного сечения // *Изв. РАН. МТТ*, 2017. Т. 52, № 6. С. 136–144. EDN: ZVFRFB.
3. Нестеров С. В., Байдулов В. Г. Эволюция собственных частот и форм изгибных колебаний стержня при увеличении дефекта поперечного сечения // *Процессы в геосредах*, 2018. № 4. С. 1174–1179. EDN: YSJIJN.
4. Нусратуллина Л. Р., Павлов В. П. Поперечные колебания стержня с переменным сечением и вычисление его собственных частот и форм // *Информационные технологии. Проблемы и решения*, 2019. № 3. С. 37–42. EDN: LRPOQR.
5. Bukenov M., Ibrayev A., Zhussupova D., Azimova D. Numerical solution of a problem on bending oscillation of a rod // *Bulletin Karaganda Univ. Math.*, 2019. no. 2. pp. 32–36. EDN: AJRJBB. DOI: https://doi.org/10.31489/2017M2/32-36.
6. Акуленко Л. Д., Гавриков А. А., Нестеров С. В. Идентификация дефектов поперечного сечения стержня по собственным частотам и особенностям формы продольных колебаний // *Изв. РАН. МТТ*, 2019. № 6. С. 98–107. EDN: WCPKID. DOI: https://doi.org/10.1134/S0572329919060023.
7. Попов А. Л., Садовский С. А. О соответствии теоретических моделей продольных колебаний стержня с кольцевыми дефектами экспериментальным данным // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2021. Т. 25, № 1. С. 97–110. EDN: JXMCLM. DOI: https://doi.org/10.14498/vsgtu1827.

8. Ахтямов А. М., Саляхова Е. В. Всегда ли наличие полости в стержне меняет собственные частоты? // *Техническая акустика*, 2011. Т. 11, 7. EDN: ONGQLJ.
9. Утяшев И. М., Фатхелисламов А. Ф. Идентификация длины продольного надреза стержня по собственным частотам изгибных колебаний // *Системы управления и информационные технологии*, 2022. Т. 4, № 90. С. 19–22. EDN: FJCOQH. DOI: https://doi.org/10.36622/VSTU.2022.90.4.004.
10. Rice J. R., Levy N. The part-through surface crack in an elastic plate // *J. Appl. Mech.*, 1972. vol. 39, no. 1. pp. 185–194. DOI: https://doi.org/10.1115/1.3422609.
11. Freund L. B., Herrmann G. Dynamic fracture of a beam or plate in plane bending // *J. Appl. Mech.*, 1976. vol. 43, no. 1. pp. 112–116. DOI: https://doi.org/10.1115/1.3423760.
12. Narkis Y. Identification of crack location in vibrating simply-supported beames // *J. Sound Vibrations*, 1994. vol. 172, no. 4. pp. 549–558. DOI: https://doi.org/10.1006/jsvi.1994.1195.
13. Ахтямов А. М., Ильгамов М. А. Модель изгиба балки с надрезом: прямая и обратная задачи // *ПМТФ*, 2013. Т. 54, № 1. С. 152–162. EDN: UHSXNX.
14. Ватульян А. О., Осипов А. В. Поперечные колебания балки с локализованными неоднородностями // *Вестн. Донск. гос. техн. унив.*, 2012. Т. 12, № 8. С. 34–40. EDN: QADMKN.
15. Ильгамов М. А., Хакимов А. Г. Диагностика повреждений консольной балки с надрезом // *Дефектоскопия*, 2009. № 6. С. 83–89. EDN: MSRGER.
16. Ахтямов А. М., Урманчеев С. Ф. Определение параметров твердого тела, прикрепленного к одному из концов балки, по собственным частотам колебаний // *Сиб. журн. индустр. матем.*, 2008. Т. 11, № 4. С. 19–24.
17. Утяшев И. М., Ахтямов А. М. Определение граничных условий закрепления струн по собственным частотам колебаний в среде с переменным несимметричным коэффициентом упругости // *ПМТФ*, 2018. Т. 54, № 4. С. 204–211. EDN: XTUVQT. DOI: https://doi.org/10.15372/PMTF20180423.
18. *Вибрации в технике.* Т. 1: Колебания линейных систем / ред. В. В. Болотин. М.: Машиностроение, 1978. 352 с.

Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2024, vol. 28, no. 2, pp. 378–389
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu2061

MSC: 74J25

Identification of the parameters of a rod with a longitudinal rectangular groove using two spectra of natural frequencies of bending vibrations

I. M. Utyashev[1], *A. F. Fatkhelislamov*[2]

[1] Mavlyutov Institute of Mechanics, Ufa Centre RAS,
71, prosp. Oktyabrya, Ufa, 450054, Russian Federation.
[2] Ufa University of Science and Technology,
32, Zaki Validi st., Ufa, 450076, Russian Federation.

Abstract

The inverse coefficient problem involves determining the geometric parameters of a longitudinal rectangular groove based on the natural frequencies of the bending vibrations of a rectangular rod. It is assumed that the groove does not extend along the entire length of the rod, but rather from a certain point to the right end. To solve the problem, the rod with the longitudinal groove is modeled as two sections: the first section without a groove and the second section with a groove.

Mating conditions are applied at the connection point, where deflection values, rotation angles, bending moments, and shear forces are equated. The behavior of the natural frequencies of bending vibrations when changing the length of the groove was investigated. A solution method is proposed that allows for determining the required parameters based on a finite number of natural frequencies of bending vibrations. It is shown that the solution is unambiguous when using frequency spectra with respect to mutually perpendicular axes.

Keywords: bending vibrations, natural frequency, longitudinal groove, inverse problem, moment of inertia, error estimation, rectangular rod.

Received: 8th September, 2023 / Revised: 31st October, 2023 /
Accepted: 1st November, 2023 / First online: 19th September, 2024

Mechanics of Solids
Short Communication

Please cite this article in press as:
Utyashev I. M., Fatkhelislamov A. F. Identification of the parameters of a rod with a longitudinal rectangular groove using two spectra of natural frequencies of bending vibrations, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2024, vol. 28, no. 2, pp. 378–389. EDN: WTKDQB. DOI: 10.14498/vsgtu2061 (In Russian).

Authors' Details:
Ilnur M. Utyashev https://orcid.org/0000-0002-2342-0492
Cand. Phys. & Math. Sci.; Researcher; Lab. of Solid Mechanics[1]; e-mail: utyashevim@mail.ru
Alfir F. Fatkhelislamov https://orcid.org/0000-0002-8494-9592
Senior Lecturer; Dep. of Information Security Management[2]; e-mail: alfir93@mail.ru

Competing interests. We have no competing interests.

Authors' contributions and responsibilities. Each author contributed equally to the writing of the articles. The final version of the manuscript was approved by all authors.

Funding. The work was supported by the grant of the Russian Science Foundation no. 23–21–00420, https://rscf.ru/en/project/23-21-00420/.

References

1. Shakirzyanov R. A., Shakirzyanov F. R. *Dinamika i ustoichivost' sooruzhenii* [Dynamics and Stability of Structures]. Moscow, IP Ar Media, 2022, 119 pp (In Russian). DOI: https://doi.org/10.23682/116444
2. Akulenko L. D., Baidulov V. G., Georgievskii D. V., Nesterov S. V. Evolution of natural frequencies of longitudinal vibrations of a bar as its cross-section defect increases, *Mech. Solids*, 2017, vol. 52, no. 6, pp. 708–714. EDN: XYGSVN. DOI: https://doi.org/10.3103/S0025654417060103.
3. Nesterov S. V., Baidulov V. G. Evolution of natural frequencies and forms of flexural vibrations of the rod with the increase of the defect cross section, *Proc. Geosred.*, 2018, no. 4, pp. 1174–1179 (In Russian). EDN: YSJIJN.
4. Nusratullina L. R., Pavlov V. P. Transverse vibrations of a rod with variable cross section and calculating its natural frequencies and shapes, *Inform. Technol. Probl. Solutions*, 2019, no. 3, pp. 37–42 (In Russian). EDN: LRPOQR.
5. Bukenov M., Ibrayev A., Zhussupova D., Azimova D. Numerical solution of a problem on bending oscillation of a rod, *Bulletin Karaganda Univ. Math.*, 2019, no. 2, pp. 32–36. EDN: AJRJBB. DOI: https://doi.org/10.31489/2017M2/32-36.
6. Akulenko L. D., Gavrikov A. A., Nesterov S. V. Identification of cross-section defects of the rod by using eigenfrequencies and features of the shape of longitudinal oscillations, *Mech. Solids*, 2019, vol. 54, no. 8, pp. 1208–1215. EDN: GKJAEX. DOI: https://doi.org/10.3103/S0025654419080119.
7. Popov A. L., Sadovskiy S. A. On the conformity of theoretical models of longitudinal rod vibrations with ring defects experimental data, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2021, vol. 25, no. 1, pp. 97–110 (In Russian). EDN: JXMCLM. DOI: https://doi.org/10.14498/vsgtu1827.
8. Akhtyamov A. M., Salyakhova E. V. Does the presence of a cavity in the rod always change the natural frequencies?, *Techn. Acoustics*, 2011, vol. 11, 7 (In Russian). EDN: ONGQLJ.
9. Utyashev I.M., Fatkhelislamov A. F. Identification of the length of the longitudinal notch of the rod by the natural frequencies of bending vibrations, *Sist. Upravl. Inform. Tekhnol.*, 2022, vol. 4, no. 90, pp. 19–22 (In Russian). EDN: FJCOQH. DOI: https://doi.org/10.36622/VSTU.2022.90.4.004.
10. Rice J. R., Levy N. The part-through surface crack in an elastic plate, *J. Appl. Mech.*, 1972, vol. 39, no. 1, pp. 185–194. DOI: https://doi.org/10.1115/1.3422609.
11. Freund L. B., Herrmann G. Dynamic fracture of a beam or plate in plane bending, *J. Appl. Mech.*, 1976, vol. 43, no. 1, pp. 112–116. DOI: https://doi.org/10.1115/1.3423760.
12. Narkis Y. Identification of crack location in vibrating simply-supported beames, *J. Sound Vibrations*, 1994, vol. 172, no. 4, pp. 549–558. DOI: https://doi.org/10.1006/jsvi.1994.1195.
13. Akhtyamov A. M., Ilgamov M. A. Flexural model for a notched beam: Direct and inverse problems, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2013, vol. 54, no. 1, pp. 132–141. EDN: RFFRAF. DOI: https://doi.org/10.1134/S0021894413010161.
14. Vatulyan A. O., Osipov A. V. Transverse vibrations of beam with localized heterogeneities, *Vestn. Donsk. Gos. Tekhn. Univ.*, 2012, vol. 12, no. 8, pp. 34–40 (In Russian). EDN: QADMKN.
15. Il'gamov M.A., Khakimov A.G. Diagnosis of damage of a cantilever beam with a notch, *Russ. J. Nondestruct. Test*, 2009, vol. 45, no. 6, pp. 430–435. EDN: MWWMPV. DOI: https://doi.org/10.1134/S1061830909060072.

16. Akhtyamov A. M., Urmancheev C. F. Determination of the parameters of a rigid body clamped at an end of a beam from the natural frequencies of vibrations, *J. Appl. Ind. Math.*, 2010, vol. 4, no. 1, pp. 1–5. DOI: https://doi.org/10.1134/S1990478910010011.
17. Utyashev I. M., Akhtyamov A. M. Determination of the boundary conditions for string fastening using natural vibration frequencies in a medium with a variable asymmetric elasticity coefficient, *J. Appl. Mech. Techn. Phys.*, 2018, vol. 59, no. 4, pp. 755–761. EDN: YBIXLF. DOI: https://doi.org/10.1134/S0021894418040235.
18. *Vibratsii v tekhnike* [Vibrations in the Technics], vol. 1, Kolebaniia lineinykh sistem [Oscillations of Linear Systems], ed. V. V. Bolotin. Moscow, Mashinostroenie, 1978, 352 pp.