

# Механика деформируемого твёрдого тела



УДК 517.958:531–133

## Плоско-деформированное состояние равномерно кусочно-однородной плоскости с периодической системой полубесконечных межфазных трещин

© В. Н. Акопян, А. А. Григорян



Институт механики НАН Республики Армения,  
Республика Армения, 0019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24Б.

### Аннотация

Рассмотрено плоско-деформированное состояние равномерно кусочно-однородной плоскости, полученной при помощи поочередного соединения двух разнородных полос, которая по линиям стыков разнородных полос расслаблена периодической системой двух полубесконечных межфазных трещин и деформируется под воздействием нормальных нагрузок, приложенных к берегам трещин. Выделена базовая ячейка задачи в виде двухкомпонентной полосы и при помощи обобщенного преобразования Фурье получена определяющая система уравнений задачи в виде одного сингулярного интегрального уравнения второго рода относительно комплексной комбинации контактных напряжений в зоне стыка полос.

В частном случае путем устремления ширины полос к бесконечности получено определяющее уравнение задачи для двухкомпонентной плоскости из двух разнородных полуплоскостей с двумя полубесконечными межфазными трещинами и построено его точное решение. Получено также определяющее уравнение поставленной задачи в виде одного сингулярного интегрального уравнения первого рода относительно нормальных контактных напряжений еще в одном частном случае, когда все полосы изготовлены из одного и того же материала, т.е. в случае однородной плоскости, расслабленной периодической системой параллельных полубесконечных трещин.



### Научная статья

  Контент публикуется на условиях лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 International \(https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru)

### Образец для цитирования

Акопян В. Н., Григорян А. А. Плоско-деформированное состояние равномерно кусочно-однородной плоскости с периодической системой полубесконечных межфазных трещин // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2021. Т. 25, № 1. С. 67–82. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1816>.

### Сведения об авторах

*Ваграм Наслетникович Акопян*   <https://orcid.org/0000-0003-3684-9471>

доктор физико-математических наук, профессор; главный научный сотрудник; отд. теории упругости и вязкоупругости; e-mail: [vhakobyan@sci.am](mailto:vhakobyan@sci.am)

*Арам Арутюнович Григорян*  <https://orcid.org/0000-0001-7582-1960>

аспирант; младший научный сотрудник; отд. теории упругости и вязкоупругости; e-mail: [grigoryan.aram.4@gmail.com](mailto:grigoryan.aram.4@gmail.com)

В общем же случае определено поведение искомой функции в концевых точках интервала интегрирования и решение задачи численно-аналитическим методом механических квадратур сведено к решению системы алгебраических уравнений. Получены простые формулы для определения коэффициентов интенсивности напряжений,  $J$ -интеграла Черепанова–Райса и раскрытия трещин. Проведен численный расчет. Выявлены закономерности изменения контактных напряжений и интеграла Черепанова–Райса в концевых точках трещин в зависимости от упругих характеристик разнородных полос и геометрических параметров задачи.

**Ключевые слова:** периодическая задача, смешанная задача, кусочно-однородная плоскость, межфазные трещины.

Получение: 10 августа 2020 г. / Исправление: 29 января 2021 г. /

Принятие: 12 февраля 2021 г. / Публикация онлайн: 24 февраля 2021 г.

**Введение.** Определение локальных полей напряжений вокруг одинарно расположенных или периодически повторяющихся дефектов в однородных и составных массивных телах всегда было и остается одним из приоритетных направлений развития механики разрушения и смешанных задач теории упругости. Изучению этой проблемы и решению различных задач для упругих однородных и составных массивных тел с различными конечными и полубесконечными концентраторами напряжений типа трещин, штампов и включений посвящено много работ. Полученные в них многие основополагающие результаты приведены в монографиях [1–7] и в избранных трудах Г.Я. Попова [8]. Для кусочно-однородных равномерно слоистых тел с периодическими и двоякопериодическими внутренними или межфазными дефектами аналогичные исследования начали проводиться совсем недавно.

В работах [9–11] поставлены и методами разрывных решений и сингулярных интегральных уравнений построены замкнутые или эффективные решения ряда периодических и двоякопериодических антиплоских и плоских задач для кусочно-однородного, равномерно слоистого пространства с межфазными дефектами различного типа. Особо отметим работу [9], которая более тесно связана с рассматриваемой здесь задачей. Здесь построены разрывные решения уравнений теории упругости для кусочно-однородной равномерно слоистой плоскости с межфазными двоякопериодическими конечными дефектами и получены решения двух конкретных задач, когда дефекты представляют собой трещину и абсолютно жесткое включение. Укажем также на работу [11], где построены замкнутые решения двух антиплоских задач для кусочно-однородного равномерно слоистого пространства с периодической системой межфазных туннельных полубесконечных трещин.

**1. Постановка задачи и вывод определяющих уравнений.** Пусть кусочно-однородная плоскость, изготовленная при помощи поочередного соединения двух разнородных полос равной толщины  $2h$  с коэффициентами Ламэ  $\mu_1, \lambda_1$  и  $\mu_2, \lambda_2$  и находящаяся в плоско-деформированном состоянии, на линиях соединения полос  $y = 2nh, n \in \mathbb{Z}$ , по бесконечным отрезкам  $L = (-\infty, -a) \cup (a, \infty)$  расслаблена периодической системой параллельных полубесконечных трещин (рис. 1).

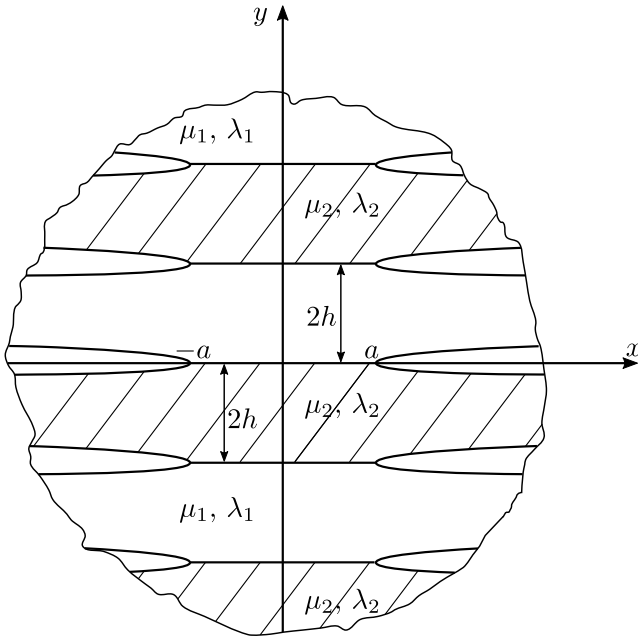


Рис. 1. Кусочно-однородная плоскость

[Figure 1. The piecewise-homogeneous plane with a periodic system of parallel semi-infinite cracks]

Будем полагать, что плоскость деформируется под воздействием одинаковых, самоуравновешенных распределенных нагрузок  $p(x)$ , действующих на берегах трещин и имеющих конечную результирующую  $P$ .

Необходимо построить решение поставленной задачи и изучить закономерности изменения контактных напряжений и коэффициентов интенсивности напряжений в концевых точках трещин в зависимости от соотношения упругих постоянных и геометрических характеристик разнородных полос.

При такой постановке задачи линии  $y = (2n + 1)h$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , являются линиями симметрии, вследствие чего напряженное состояние в составных полосах, находящихся между линиями симметрии  $y = (2n - 1)h$  и  $y = (2n + 1)h$ , будет одинаковым. Это означает, что для определения напряженно-деформированного состояния кусочно-однородной плоскости достаточно рассмотреть напряженно-деформированное состояние только двухкомпонентной полосы (базовой ячейки) между линиями симметрии  $y = \pm h$  (рис. 2).

Поставленная задача математически эквивалентна следующей граничной задаче для базовой ячейки:

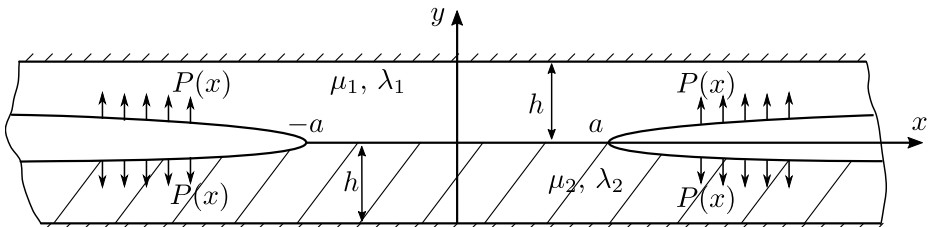


Рис. 2. Базовая ячейка [Figure 2. The basic calculation cell]

$$\begin{cases} v_j(x, (-1)^{j+1}h) = 0, & -\infty < x < \infty; j = 1, 2; \\ \tau_{yz}^{(j)}(x, (-1)^{j+1}h) = 0, & -\infty < x < \infty; j = 1, 2; \\ \sigma_y^{(j)}(x, 0) = -p(x), & |x| > a; j = 1, 2; \\ \tau_{xy}^{(j)}(x, 0) = 0, & |x| > a; j = 1, 2; \\ \tau_{xy}^{(1)}(x, 0) = \tau_{xy}^{(2)}(x, 0), & |x| < a; \\ \sigma_y^{(1)}(x, 0) = \sigma_y^{(2)}(x, 0), & |x| < a; \\ v_1(x, 0) = v_2(x, 0), & |x| < a; \\ u_1(x, 0) = u_2(x, 0), & |x| < a. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь  $u_j(x, y)$  и  $v_j(x, y)$ ,  $j = 1, 2$  — соответственно горизонтальные и вертикальные составляющие смещений точек разнородных полос, удовлетворяющие, каждая в своей области определения, уравнениям Ламэ и связанные с компонентами нормальных  $\sigma_y^{(j)}(x, y)$  и касательных  $\tau_{xy}^{(j)}(x, y)$  напряжений известными соотношениями [2].

Для решения поставленной задачи мысленно разделим базовую ячейку на две однородные полосы и введем в рассмотрение неизвестные нормальные и касательные контактные напряжения  $q(x)$  и  $\tau(x)$ , действующие в зонах контакта разнородных полос:

$$\begin{cases} \tau_{xy}^{(j)}(x, 0) = \tau(x), & |x| < a; j = 1, 2; \\ \sigma_y^{(j)}(x, 0) = q(x), & |x| < a; j = 1, 2. \end{cases} \quad (2)$$

Далее решим вспомогательные задачи для каждой из разнородных полос, занимающих соответственно области  $\{-\infty < x < \infty; 0 \leq y \leq h\}$  и  $\{-\infty < x < \infty; -h \leq y \leq 0\}$ , когда на лицевой линии первой полосы  $y = h$  и на лицевой линии второй полосы  $y = -h$  заданы условия симметрии, а на линии  $y = 0$  заданы напряжения, и определим смещения точек зоны контакта обеих полос через введенные неизвестные контактные напряжения  $q(x)$  и  $\tau(x)$ , т. е. решим граничную задачу (1), заменив последние четыре условия условиями (2) при каждом из значений  $j = 1, 2$ .

С этой целью, следуя [7], решения уравнений Ламэ представим в виде интегралов Фурье:

$$\begin{aligned} u_j(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [(A_j + iyB_j^*) \operatorname{ch}(sy) + (B_j + iyA_j^*) \operatorname{sh}(sy)] e^{-isx} ds, \\ v_j(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [(C_j - yA_j^*) \operatorname{ch}(sy) + (D_j - yB_j^*) \operatorname{sh}(sy)] e^{-isx} ds, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $A_j, B_j, C_j$  и  $D_j$  — неизвестные постоянные, подлежащие определению, а коэффициенты  $A_j^*$  и  $B_j^*$  определяются формулами

$$A_j^* = \frac{s}{\varkappa_j} (D_j - iA_j), \quad B_j^* = \frac{s}{\varkappa_j} (C_j - iB_j); \quad \varkappa_j = \frac{\lambda_j + 3\mu_j}{\lambda_j + \mu_j}, \quad j = 1, 2.$$

При этом напряжения записываются следующим образом:

$$\sigma_y^{(j)}(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ [\vartheta_2^{(j)} s D_j + \vartheta_1^{(j)} i s A_j - \mu_j s y B_j^*] \operatorname{ch}(s y) + [\vartheta_2^{(j)} s C_j + \vartheta_1^{(j)} i s B_j - \mu_j s y A_j^*] \operatorname{sh}(s y) \right\} e^{-i s x} ds,$$

$$\tau_{xy}^{(j)}(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ [\vartheta_2^{(j)} s B_j - \vartheta_1^{(j)} i s C_j + \mu_j i s y A_j^*] \operatorname{ch}(s y) + [\vartheta_2^{(j)} s A_j - \vartheta_1^{(j)} i s D_j + \mu_j i s y B_j^*] \operatorname{sh}(s y) \right\} e^{-i s x} ds; \quad (4)$$

$$\vartheta_1^{(j)} = \frac{\mu_j^2}{\lambda_j + 3\mu_j}, \quad \vartheta_2^{(j)} = \frac{(\lambda_j + 2\mu_j)\mu_j}{\lambda_j + 3\mu_j}, \quad j = 1, 2.$$

Используя представления (3) и (4), удовлетворим условиям указанных вспомогательных граничных задач и выразим неизвестные коэффициенты, входящие в эти представления, через трансформанты Фурье функций  $Q(x)$  и  $T(x)$ . Для постоянных  $A_j$  и  $C_j$  получим следующие выражения:

$$\begin{aligned} A_1 &= -\frac{\varkappa_1 \vartheta_1^{(1)}}{2is\mu_1^2} \left[ \frac{\operatorname{ch} \beta \operatorname{sh} \beta - \mu_1 \beta / \varkappa_1 \vartheta_1^{(1)}}{\operatorname{ch} \beta \operatorname{sh} \beta + \beta} \right] \bar{Q}(s) - \frac{\varkappa_1 \vartheta_2^{(1)} \operatorname{ch}^2 \beta}{2s\mu_1^2 (\operatorname{ch} \beta \operatorname{sh} \beta + \beta)} \bar{T}(s), \\ C_1 &= -\frac{\varkappa_1 \vartheta_2^{(1)} \operatorname{sh}^2 \beta}{2s\mu_1^2 (\operatorname{ch} \beta \operatorname{sh} \beta + \beta)} \bar{Q}(s) + \frac{\varkappa_1 \vartheta_1^{(1)}}{2is\mu_1^2} \left[ \frac{\operatorname{ch} \beta \operatorname{sh} \beta - \mu_1 \beta / \varkappa_1 \vartheta_1^{(1)}}{\operatorname{ch} \beta \operatorname{sh} \beta + \beta} \right] \bar{T}(s), \\ A_2 &= -\frac{\varkappa_2 \vartheta_1^{(2)}}{2is\mu_2^2} \left[ \frac{\operatorname{ch} \beta \operatorname{sh} \beta - \mu_2 \beta / \varkappa_2 \vartheta_1^{(2)}}{\operatorname{ch} \beta \operatorname{sh} \beta + \beta} \right] \bar{Q}(s) + \frac{\varkappa_2 \vartheta_2^{(2)} \operatorname{ch}^2 \beta}{2s\mu_2^2 (\operatorname{ch} \beta \operatorname{sh} \beta + \beta)} \bar{T}(s), \\ C_2 &= \frac{\varkappa_2 \vartheta_2^{(2)} \operatorname{sh}^2 \beta}{2s\mu_2^2 (\operatorname{ch} \beta \operatorname{sh} \beta + \beta)} \bar{Q}(s) + \frac{\varkappa_2 \vartheta_1^{(2)}}{2is\mu_2^2} \left[ \frac{\operatorname{ch} \beta \operatorname{sh} \beta - \mu_2 \beta / \varkappa_2 \vartheta_1^{(2)}}{\operatorname{ch} \beta \operatorname{sh} \beta + \beta} \right] \bar{T}(s). \end{aligned}$$

Остальные же постоянные даются формулами

$$\begin{aligned} B_j &= \frac{i\vartheta_1^{(j)}}{\vartheta_2^{(j)}} C_j + \frac{1}{2s\vartheta_2^{(j)}} \bar{T}(s), \quad A_j^* = -\frac{is}{\varkappa_j} \left( 1 + \frac{\vartheta_1^{(j)}}{\vartheta_2^{(j)}} \right) A_j + \frac{1}{2\varkappa_j \vartheta_2^{(j)}} \bar{Q}(s), \\ D_j &= -\frac{i\vartheta_1^{(j)}}{\vartheta_2^{(j)}} A_j + \frac{1}{2s\vartheta_2^{(j)}} \bar{Q}(s), \quad B_j^* = \frac{s}{\varkappa_j} \left( 1 + \frac{\vartheta_1^{(j)}}{\vartheta_2^{(j)}} \right) C_j + \frac{i}{2\varkappa_j \vartheta_2^{(j)}} \bar{Q}(s), \end{aligned}$$

где

$$Q(x) = \begin{cases} q(x), & |x| < a, \\ -p(x), & |x| > a, \end{cases} \quad T(x) = \begin{cases} \tau(x), & |x| < a, \\ 0, & |x| > a, \end{cases} \quad (5)$$

$$\bar{Q}(s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Q(x) e^{isx} dx, \quad \bar{T}(s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} T(x) e^{isx} dx, \quad \beta = hs.$$

Используя полученные выражения для коэффициентов  $A_j$  и  $C_j$ ,  $j = 1, 2$ , и значение интеграла [12]

$$\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sign}(s) e^{isx} ds = \frac{2i}{x},$$

определим производные от смещений точек зоны контакта разнородных полюсов ( $-\infty < x < \infty$ ,  $j = 1, 2$ ):

$$\begin{aligned}
 u'_j(x, 0) &= \frac{\varkappa_j \vartheta_1^{(j)}}{2\mu_j^2} Q(x) + (-1)^j \frac{\varkappa_j \vartheta_2^{(j)}}{2\pi\mu_j^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{T(s) ds}{s-x} - \\
 &\quad - \int_{-\infty}^{\infty} K_{11}^{(j)}(s-x) Q(s) ds + \int_{-\infty}^{\infty} K_{12}^{(j)}(s-x) T(s) ds, \\
 v'_j(x, 0) &= -\frac{\varkappa_j \vartheta_1^{(j)}}{2\mu_j^2} T(x) + (-1)^j \frac{\varkappa_j \vartheta_2^{(j)}}{2\pi\mu_j^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Q(s) ds}{s-x} - \\
 &\quad - \int_{-\infty}^{\infty} K_{21}^{(j)}(s-x) Q(s) ds + \int_{-\infty}^{\infty} K_{22}^{(j)}(s-x) T(s) ds.
 \end{aligned} \tag{6}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
 K_{11}^{(j)}(x) &= K_{22}^{(j)}(x) = \frac{1-\nu_j}{2\pi\mu_j} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\beta}{\operatorname{ch} \beta \operatorname{sh} \beta + \beta} e^{isx} ds, \\
 K_{12}^{(j)}(x) &= i(-1)^{j+1} \frac{1-\nu_j}{2\pi\mu_j} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-|\beta|} \operatorname{ch} \beta - |\beta|}{\operatorname{ch} \beta \operatorname{sh} \beta + \beta} e^{isx} ds, \\
 K_{21}^{(j)}(x) &= i(-1)^{j+1} \frac{1-\nu_j}{2\pi\mu_j} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-|\beta|} \operatorname{sh} |\beta| + |\beta|}{\operatorname{ch} \beta \operatorname{sh} \beta + \beta} e^{isx} ds.
 \end{aligned}$$

Теперь, используя соотношения (6), удовлетворим последним двум соотношениям (1). В итоге, учитывая (5), после некоторых несложных выкладок для определения контактных напряжений  $q(x)$  и  $\tau(x)$  получим следующую систему определяющих сингулярных интегральных уравнений ( $-a < x < a$ ):

$$\begin{aligned}
 Aq(x) - \frac{B}{\pi} \int_{-a}^a \frac{\tau(s) ds}{s-x} - \int_{-a}^a R_{11}(s-x) q(s) ds + \\
 + \int_{-a}^a R_{12}(s-x) \tau(s) ds = F_1(x), \\
 -A\tau(x) - \frac{B}{\pi} \int_{-a}^a \frac{q(s) ds}{s-x} - \int_{-a}^a R_{21}(s-x) q(s) ds + \\
 + \int_{-a}^a R_{22}(s-x) \tau(s) ds = F_2(x),
 \end{aligned} \tag{7}$$

где

$$\begin{aligned}
 R_{11}(x) &= R_{22}(x) = \frac{C}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\beta}{\operatorname{ch} \beta \operatorname{sh} \beta + \beta} e^{isx} ds, \\
 R_{12}(x) &= \frac{iB}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-|\beta|} \operatorname{ch} |\beta| - |\beta|}{\operatorname{ch} \beta \operatorname{sh} \beta + \beta} e^{isx} ds, \\
 R_{21}(x) &= \frac{iB}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-|\beta|} \operatorname{sh} |\beta| + |\beta|}{\operatorname{ch} \beta \operatorname{sh} \beta + \beta} e^{isx} ds;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F_1(x) &= f_1^{(2)}(x) - f_1^{(1)}(x), \quad F_2(x) = f_2^{(2)}(x) - f_2^{(1)}(x); \\
 A &= \frac{\varkappa_1 \vartheta_1^{(1)}}{2\mu_1^2} - \frac{\varkappa_2 \vartheta_1^{(2)}}{2\mu_2^2}, \quad B = \frac{\varkappa_1 \vartheta_2^{(1)}}{2\mu_1^2} + \frac{\varkappa_2 \vartheta_2^{(2)}}{2\mu_2^2}, \quad C = A + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\mu_1} - \frac{1}{\mu_2} \right); \\
 f_2^{(j)}(x) &= -\frac{(-1)^j \varkappa_j \vartheta_2^{(j)}}{2\pi\mu_j^2} \left( \int_{-\infty}^{-a} + \int_a^{\infty} \right) \frac{p(s)ds}{s-x} + \\
 &\quad + \left( \int_{-\infty}^{-a} + \int_a^{\infty} \right) K_{21}^{(j)}(s-x)p(s)ds, \\
 f_1^{(j)}(x) &= \left( \int_{-\infty}^{-a} + \int_a^{\infty} \right) K_{11}^{(j)}(s-x)p(s)ds, \quad j = 1, 2.
 \end{aligned}$$

Систему определяющих уравнений (7) нужно рассматривать вместе с условием равновесия верхней или нижней полуплоскости, которое при самоуравновешенных нагрузках можно представить в виде

$$\int_{-a}^a q(s)ds = \left( \int_{-\infty}^{-a} + \int_a^{\infty} \right) p(s)ds = P, \quad \int_{-a}^a \tau(s)ds = 0. \quad (8)$$

Таким образом, решение поставленной задачи свелось к решению определяющей системы (7) при условиях (8). Отметим, что когда все полосы изготовлены из одного и того же материала, т. е. в случае однородной плоскости с периодической системой параллельных полубесконечных трещин  $A = C = F_1(x) = 0$  и из первого уравнения (7) для определения касательных контактных напряжений приходим к однородному сингулярному интегральному уравнению первого рода при втором однородном условии (8). Откуда следует, что  $\tau(x) = 0$ . Для определения же нормальных контактных напряжений из второго уравнения (7) получим следующее сингулярное интегральное уравнение первого рода

$$\frac{B}{\pi} \int_{-a}^a \frac{q(s)ds}{s-x} + \int_{-a}^a R_{21}(s-x)q(s)ds = -F_2(x), \quad -a < x < a,$$

которое нужно рассматривать при первом условии (8). Отметим, что при помощи несложных математических выкладок из полученного уравнения нетрудно получить определяющее интегральное уравнение этой же задачи, приведенной в [1]. В общем случае, чтобы построить решение определяющей системы интегральных уравнений, из первого уравнения (7) вычтем второе уравнение, первоначально умножив его на мнимую единицу. В результате, введя комплексную комбинацию контактных напряжений  $\chi(x) = q(x) - i\tau(x)$ , приходим к следующему сингулярному интегральному уравнению второго рода:

$$\begin{aligned}
 A\chi(x) + \frac{B}{\pi i} \int_{-a}^a \frac{\chi(s)ds}{s-x} + \int_{-a}^a Q_{11}(s-x)\chi(s)ds + \\
 + \int_{-a}^a Q_{12}(s-x)\bar{\chi}(s)ds = F(x), \quad -a < x < a. \quad (9)
 \end{aligned}$$

При этом условия (7) примут вид

$$\int_{-a}^a \chi(s) ds = P. \quad (10)$$

Здесь

$$Q_{11}(x) = -R_{11}(x) + \frac{1}{2i} [R_{21}(x) - R_{12}(x)],$$

$$Q_{12}(x) = \frac{1}{2i} [R_{21}(x) + R_{12}(x)], \quad F(x) = F_1(x) + iF_2(x),$$

а черточка над знаком функций здесь и в дальнейшем будет обозначать комплексно-сопряженную величину этих функций.

**2. Составная плоскость с двумя полубесконечными межфазными трещинами.** Прежде чем перейти к решению определяющей системы (9) в общем случае, рассмотрим еще один частный случай поставленной задачи, когда ширина полос стремится к бесконечности, т. е. рассмотрим задачу о плоско-деформированном состоянии составной упругой плоскости из двух разнородных полуплоскостей, содержащей симметрично расположенные две межфазные полубесконечные трещины. Заметим, что указанная задача рассматривается впервые и представляет самостоятельный интерес. В этом случае регулярные части в уравнении (9) исчезают и мы приходим к следующему определяющему сингулярному интегральному уравнению:

$$A\chi(x) + \frac{B}{\pi i} \int_{-a}^a \frac{\chi(s) ds}{s-x} = F(x), \quad -a < x < a, \quad (11)$$

которое нужно решать при условиях (10).

Решение уравнения (11) при условиях (10) будет даваться формулой [11]

$$\chi(x) = \frac{1}{A(1-\alpha^2)} \left\{ F(x) - \frac{\alpha\omega(x)}{\pi i} \int_{-a}^a \frac{F(s) ds}{\omega(s)(s-x)} \right\} + \frac{P \sin(\pi\gamma_j)}{\pi} \omega(x), \quad -a < x < a,$$

где

$$\omega(x) = (x+a)^{-(1/2)-i\gamma} (a-x)^{-(1/2)+i\gamma}, \quad \alpha = \frac{B}{A}, \quad \gamma = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{\mu_1 + \varkappa_1 \mu_2}{\mu_2 + \varkappa_2 \mu_1}.$$

Вычислим коэффициенты интенсивности разрушающих напряжений и интеграл Черепанова—Райса в концевых точках трещины  $x = \pm a$ :

$$K[(-a)^j] = K_I[(-a)^j] - iK_{II}[(-a)^j] = \sqrt{2\pi} \lim_{x \rightarrow (-1)^j(a+0)} \omega^{-1}(x)\chi(x) =$$

$$= -\frac{\sqrt{2\pi}}{(1-\alpha^2)} \left\{ \frac{\alpha}{A\pi i} \int_{-a}^a \frac{F(s) ds}{\omega(s)(s-(-a)^j)} - \frac{\sin \pi\gamma}{\pi} P \right\}, \quad j = 1, 2.$$

Тогда интеграл Черепанова—Райса в концевых точках трещины будет даваться формулой [13]

$$J(\pm a) = \tilde{\mu}K(\pm a)\bar{K}(\pm a),$$



где

$$\tilde{\mu} = \frac{1}{2} \left( \frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2} \right) = \frac{B}{4}.$$

**3. Решение определяющего уравнения в общем случае.** Решение определяющего сингулярного интегрального уравнения (9) в общем случае будем строить методом механических квадратур. Для этого при помощи замены переменных  $\{x, s\} = \{a\eta, a\xi\}$  запишем уравнение (9) на интервале  $(-1, 1)$ :

$$\begin{aligned} \varphi(\eta) + \frac{\alpha}{\pi i} \int_{-1}^1 \frac{\varphi(\xi) d\xi}{\xi - \eta} + \int_{-1}^1 Q_{11}^*(\xi - \eta) \varphi(\xi) d\xi + \\ + \int_{-1}^1 Q_{12}^*(\xi - \eta) \bar{\varphi}(\xi) d\xi = F_*(\eta), \end{aligned} \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi(\eta) &= \frac{a}{P} \chi(a\eta), \quad F_*(\eta) = \frac{a}{PA} F(a\eta), \\ Q_{11}^*(\eta) &= \frac{a}{A} Q_{11}(a\eta) = \frac{1}{4\pi l A} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{B e^{-2|\beta|} + 2C\beta - 2B|\beta|}{\operatorname{ch} \beta \operatorname{sh} \beta + \beta} e^{i\beta\eta/l} d\beta, \\ Q_{12}^*(\eta) &= \frac{a}{A} Q_{12}(a\eta) = \frac{B}{4\pi l A} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\beta\eta/l} d\beta}{\operatorname{ch} \beta \operatorname{sh} \beta + \beta}, \quad l = h/a. \end{aligned}$$

Условие (10) при этом принимает вид

$$\int_{-1}^1 \varphi(\xi) d\xi = 1. \quad (13)$$

Учитывая регулярность функции  $Q_{ij}^*(\eta)$ , несложно установить, что искомая функция  $\varphi(\eta)$  в концевых точках интервала интегрирования имеет показательную особенность и ее можно представить в виде

$$\varphi(\eta) = \varphi^*(\eta) (1 + \eta)^{-(1/2) - i\gamma} (1 - \eta)^{-(1/2) + i\gamma},$$

где  $\varphi^*(\eta)$  — непрерывная функция, ограниченная вплоть до концов отрезка  $[-1, 1]$ . Подставляя значение функции  $\varphi^*(\eta)$  в (12) и (13) и используя соотношения, приведенные в [14], по стандартной процедуре, придем к системе алгебраических уравнений относительно значений  $\varphi^*(\xi_i)$ , где  $\xi_i$  — корни многочлена Якоби  $P_n^{(-(1/2)+i\gamma, -(1/2)-i\gamma)}(\xi_i) = 0$ .

После определения функции  $\varphi^*(\xi_i)$  нетрудно восстановить функцию  $\varphi(\eta)$ ,  $-1 < \eta < 1$ , тем самым определив комплексную комбинацию безразмерных контактных напряжений, действующих в зоне стыка разнородных полос. После чего довольно просто определить комплексные коэффициенты интенсивности разрушающих напряжений и, следовательно, известные  $J$ -интегралы Черепанова—Райса по формулам

$$\begin{aligned} K(\pm 1) &= K_I(\pm 1) - iK_{II}(\pm 1) = \\ &= \sqrt{2\pi} \lim_{x \rightarrow \pm 1 \mp 0} (1 \mp \eta)^{(1/2) \mp i\gamma} [\sigma_y^{(j)}(a\eta) - i\tau_{xy}^{(j)}(a\eta)] = \end{aligned}$$

$$= \frac{P\sqrt{2\pi}}{a} \lim_{x \rightarrow \pm 1 \mp 0} (1 \mp \eta)^{(1/2) \mp i\gamma} \varphi(\eta) = \frac{P\sqrt{2\pi}}{a} 2^{-(1/2) \mp i\gamma} \varphi^*(\pm 1),$$

$$J(\pm 1) = \tilde{\mu} K(\pm 1) \bar{K}(\pm 1) = \frac{\pi \tilde{\mu} P^2}{a^2} |\varphi^*(\pm 1)|^2.$$

Выпишем также формулу для определения раскрытия трещины. С этой целью, используя второе из соотношений (6), составим нормальную составляющую дислокаций смещений точек берегов полубесконечных трещин и, перейдя на интервал  $(-1, 1)$ , представим их при помощи функции  $\varphi(\eta)$  в следующем виде:

$$v'(a\eta) = v'_1(a\eta) - v'_2(a\eta) = -\frac{PB}{a} \left\{ \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\operatorname{Re} \varphi(\xi) d\xi}{\xi - \eta} + \int_{-1}^1 Q_1(\xi - \eta) \operatorname{Re} \varphi(\xi) d\xi + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 Q_2(\xi - \eta) \operatorname{Im} \varphi(\xi) d\xi \right\} - F_2(a\eta),$$

где

$$Q_1(\eta) = \frac{\pi a}{B} R_{21}(a\eta) = \frac{i}{2l} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-|\beta|} \operatorname{sh} |\beta| + |\beta|}{\operatorname{ch} \beta \operatorname{sh} \beta + \beta} e^{i\eta\beta/l} d\beta,$$

$$Q_2(\eta) = \frac{\pi a}{B} R_{22}(a\eta) = \frac{C}{2Bl} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\beta e^{i\beta\eta/l} d\beta}{\operatorname{ch} \beta \operatorname{sh} \beta + \beta}.$$

Тогда безразмерное раскрытие трещин, находящихся соответственно на интервалах  $(a, \infty)$  и  $(-\infty, -a)$ , можно определить по формулам:

$$v_*(\eta) = \frac{v(a\eta)}{a} = \int_1^{\eta} v'(a\xi) d\xi, \quad 1 < \eta < \infty,$$

$$v_*(\eta) = \frac{v(a\eta)}{a} = \int_{-1}^{\eta} v'(a\xi) d\xi, \quad -\infty < \eta < -1.$$

**4. Численные расчеты.** Проведен численный расчет и изучены закономерности изменения контактных напряжений, действующих в зонах контактов разнородных полос, и безразмерных интегралов Черепанова—Райса  $J_*(\pm a) = 10^2 \cdot (a/P) \cdot J(\pm 1)$  в концевых точках трещин в зависимости от соотношения  $\mu = \mu_1/\mu_2$  в случае фиксированных значений коэффициентов Пуассона  $\nu_j$ ,  $j = 1, 2$ , а также от изменения параметра  $l = h/a$ . При этом считается, что кусочно-однородная плоскость деформируется под воздействием симметрично расположенных относительно оси  $Oy$  сосредоточенных нагрузок величины  $P/2$ , т. е. принято  $(a/P) \cdot p(a\eta) = [\delta(\eta - b) + \delta(\eta + b)]/2$ ,  $b = \eta_0/a$ , где  $\eta_0$  — расстояние сосредоточенных нагрузок от начала координат и  $(P/a) \cdot \mu_2 = 0.1$ . Результаты численных расчетов приведены на рис. 3–6.

На рис. 3 приведены графики безразмерных контактных напряжений в зависимости от параметра  $\mu$  в случае, когда  $\nu_1 = 0.3$ ,  $\nu_2 = 0.25$ ,  $b = 2$  и  $l = 1$ . Они показывают, что нормальные контактные напряжения мало зависят от параметра  $\mu$  (графики при  $\mu = 1$  и  $\mu = 0.5$  практически совпадают), в то время как касательные контактные напряжения при приближении параметра  $\mu$  к единице стремятся к нулю.

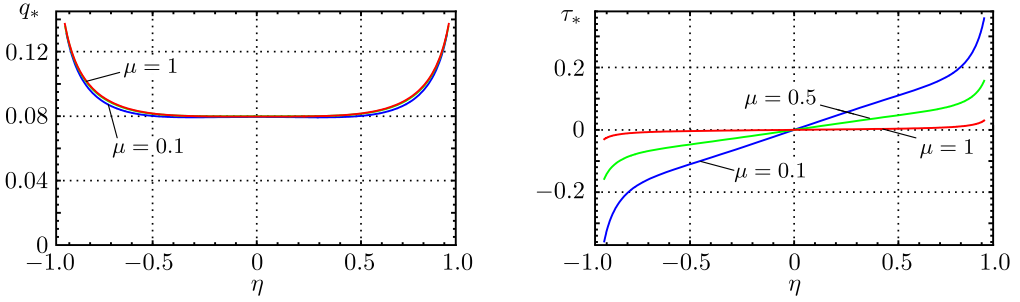


Рис. 3. Безразмерные контактные напряжения (при различных значениях параметра  $\mu$ ): слева — нормальные контактные напряжения, справа — тангенциальные контактные напряжения

[Figure 3. Dimensionless contact stresses when  $\nu_1 = 0.3$ ,  $\nu_2 = 0.25$ ,  $b = 2$ , and  $l = 1$  for different values of the parameter  $\mu$ : on the left — normal contact stresses; on the right — tangential contact stresses]

На рис. 4 приведены графики изменения значения интеграла Черепанова—Райса  $J_*(a) = J_*(-a)$  в конечных точках трещин в зависимости от параметра  $b$ , описывающего степень удаленности точек приложения внешней нагрузки от вершин трещин, в случае, когда  $\nu_1 = 0.3$ ,  $\nu_2 = 0.25$  и  $l = 1$  при некоторых значениях  $\mu$ . Из них видно, что при удалении точек приложения внешних нагрузок от конечных точек трещин интеграл Черепанова—Райса, монотонно убывая, стремится к определенному пределу. Причем чем модуль сдвига первой из полос больше, тем меньше значение интеграла Черепанова—Райса, т. е. меньше вероятность распространения трещины.

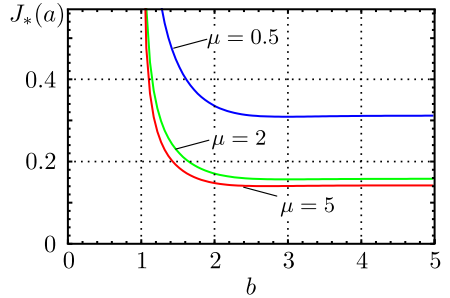


Рис. 4. Изменение интеграла  $J_*(a)$

[Figure 4. Variation of  $J$ -integral depending on the parameter  $b$  when  $\nu_1 = 0.3$ ,  $\nu_2 = 0.25$ ,  $l = 1$ ]

На рис. 5 приведены графики безразмерных контактных напряжений в зависимости от параметра  $l$  в случае, когда  $\mu = 2$ ,  $b = 2$ ,  $\nu_1 = 0.3$  и  $\nu_2 = 0.25$ . Они показывают, что при возрастании  $l$ , т. е. при увеличении ширины полосы, когда длина контактной зоны остается неизменной, нормальные контактные напряжения в средней части контактной зоны уменьшаются, а у конечных точек зоны контакта увеличиваются. Касательные же контактные напряжения при этом по абсолютной величине уменьшаются.

На рис. 6 приведены графики интеграла Черепанова—Райса  $J_*(a) = J_*(-a)$  в вершинах трещин в случае, когда  $\nu_1 = 0.3$ ,  $\nu_2 = 0.25$ ,  $b = 2$ : слева — в зависимости от параметра  $l$  при значениях параметра  $\mu = 0.5, 1$  и  $5$  и справа — в зависимости от параметра  $\mu$  при значениях параметра  $l = 0.5, 1$  и  $5$ .

Из рис. 6 слева следует, что при увеличении ширины полос интеграл  $J_*(\pm a)$  возрастает, стремясь к определенному пределу, соответствующему значению интеграла Черепанова—Райса в случае двухкомпонентной плоскости с двумя симметричными полубесконечными трещинами. При этом, как и выше, чем жестче первая из полос, тем меньше значение интеграла Черепанова—Райса.

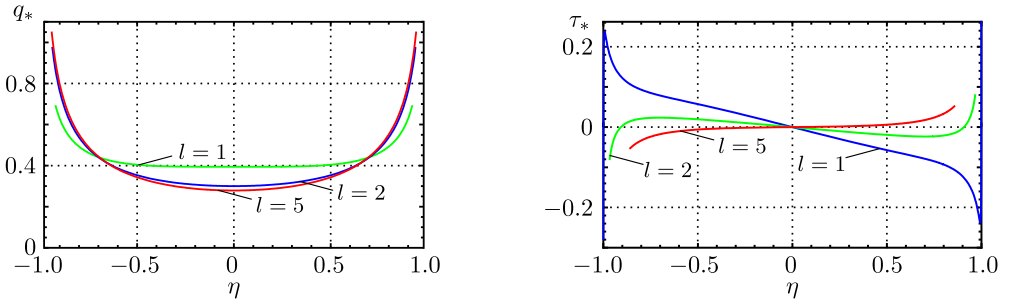


Рис. 5. Безразмерные контактные напряжения (при различных значениях параметра  $l$ ): слева — нормальные контактные напряжения, справа — тангенциальные контактные напряжения

[Figure 5. Dimensionless contact stresses when  $\mu = 2$ ,  $b = 2$ ,  $\nu_1 = 0.3$ , and  $\nu_2 = 0.25$  for different values of the parameter  $l$ : on the left — normal contact stresses; on the right — tangential contact stresses]

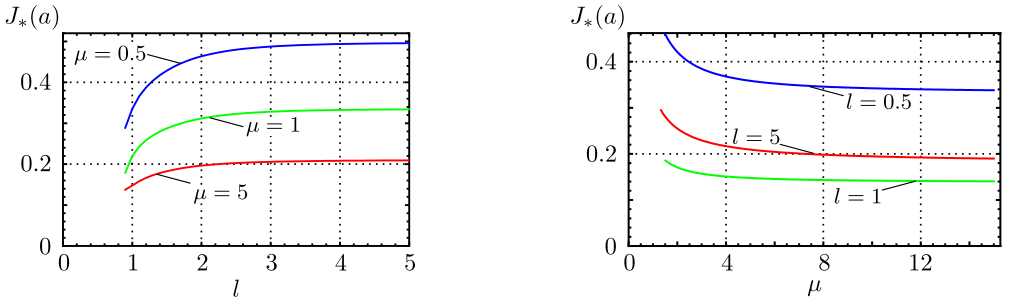


Рис. 6. Изменение интеграла  $J_*(a)$  [Figure 6. Variation of  $J$ -integral when  $\nu_1 = 0.3$ ,  $\nu_2 = 0.25$ ,  $b = 2$ : on the left — depending on the parameter  $l$ ; on the right — depending on the parameter  $\mu$ ]

Из рис. 6 справа следует, что при возрастании параметра  $\mu$  значение  $J$ -интеграла, монотонно убывая, стремится к постоянному значению, которое представляет из себя значение интеграла Черепанова—Райса в случае, когда первая из полос абсолютно жесткая.

**5. Заключение.** Таким образом, выведено определяющее уравнение плоской задачи теории упругости для равномерно кусочно-однородного пространства с периодической системой двух полубесконечных параллельных межфазных трещин в виде сингулярного интегрального уравнения второго рода относительно комплексной комбинации контактных напряжений, действующих в зонах стыка разнородных полос.

Выяснено поведение искомой функции в конечных точках интервалов интегрирования и построено решение определяющего уравнения численно-аналитическим методом механических квадратур. Получены простые формулы для определения комплексного коэффициента интенсивности разрушающих напряжений и  $J$ -интеграла Черепанова—Райса в конечных точках трещин.

При помощи численных расчетов изучено поведение контактных напряжений и  $J$ -интеграла в зависимости от физико-механических и геометрических характеристик задачи. Показано, что при выбранных параметрах увеличение жесткости одной из полос, когда жесткость второй полосы остается неизменной, значение  $J$ -интеграла стремится к определенной постоянной, со-

ответствующей значению интеграла Черепанова—Райса в случае, когда первая из полос абсолютно жесткая.

**Конкурирующие интересы.** Заявляем, что в отношении авторства и публикации этой статьи конфликта интересов не имеем.

**Авторский вклад и ответственность.** В.Н. Акопян — идея исследования, поиск методов решения, руководство и консультирование, чистовик рукописи. А.А. Григорян — анализ литературы, реализация алгоритмов на компьютере, расчеты и визуализация результатов, черновик рукописи. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

**Финансирование.** Исследование выполнялось без финансирования.

### Библиографический список

1. Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацышин А. П. *Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках*. Киев: Наукова думка, 1976. 443 с.
2. Мухелишвили Н. И. *Некоторые основные задачи математической теории упругости*. М.: Наука, 1966. 708 с.
3. *Развитие теории контактных задач в СССР* / ред. Л. А. Галин. М.: Наука, 1976. 493 с.
4. Попов Г. Я. *Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений*. М.: Наука, 1982. 344 с.
5. Бережницкий Л. Т., Панасюк В. В., Стащук Н. Г. *Взаимодействие жестких линейных включений и трещин в деформируемом теле*. Киев: Наукова думка, 1983. 288 с.
6. Барзокас Д. И., Фильштинский Л. А., Фильштинский М. Л. *Актуальные проблемы связанных физических полей в деформируемых телах*. Т. 1. М., Ижевск, 2010. 864 с.
7. Акопян В. Н. *Смешанные граничные задачи о взаимодействии сплошных деформируемых тел с концентраторами напряжений различных типов*. Ереван: Гитутюн, 2014. 322 с.
8. Попов Г. Я. *Избранные труды. В 2-х томах*. Одесса: ВМВ, 2007.
9. Акопян В. Н., Даштоян Л. Л. Разрывные решения дwoякопериодической задачи для кусочно-однородной плоскости с межфазными дефектами // *Мех. композ. матер.*, 2017. Т. 53, № 5. С. 863–879.
10. Nakobyan V. N., Sahakyan A. V., Aghayan K. L. Periodic problem for a plane composed of two-layer strips with a system of longitudinal internal inclusions and cracks / *Wave Dynamics, Mechanics and Physics of Microstructured Metamaterials*. vol. 109. Cham: Springer, 2019. pp. 11–22. [https://doi.org/10.1007/978-3-030-17470-5\\_2](https://doi.org/10.1007/978-3-030-17470-5_2).
11. Nakobyan V. N., Grigoryan A. H. Anti-plane stressed state uniformly piece-homogeneous space with a periodic system of parallel semi-infinite interfacial cracks // *J. Phys.: Conf. Ser.*, 2020. vol. 1474, 012017. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1474/1/012017>.
12. Брычков Ю. А., Прудников А. П. Интегральные преобразования обобщенных функций / *Итоги науки и техн. Сер. Мат. анализ*, Т. 20. М.: ВИНТИ, 1982. С. 78–115.
13. *Stress Intensity Factors Handbook*. vol. 1 / ed. Y. Murakami. Oxford: Pergamon, 1987.
14. Sahakyan A. V., Amirjanyan H. A. Method of mechanical quadratures for solving singular integral equations of various types // *J. Phys.: Conf. Ser.*, 2018. vol. 991, 012070. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/991/1/012070>.

MSC: 74A45

## Plane stress state of a uniformly piece-wise homogeneous plane with a periodic system of semi-infinite interphase cracks

© V. N. Hakobyan, A. A. Grigoryan

Institute of Mechanics, National Academy of Sciences of the Republic of Armenia,  
24B, Marshal Baghramyan ave., Yerevan, 0019, Republic of Armenia.


### Abstract

The plane stress state of a uniformly piecewise-homogeneous plane obtained by alternately joining two dissimilar strips is considered, which along the lines of joints of dissimilar strips is weakened by a periodic system of two semi-infinite interfacial cracks and is deformed using normal loads applied to the crack banks. The basic cell of the problem in the form of a two-component strip is considered and, using the generalized Fourier transform, a governing system of equations for the problem is obtained in the form of one singular integral equation of the second kind for a complex combination of contact stresses in the junction zone of the strips.

As a special case, tending the height of the strips to infinity, the governing equation of the problem for a two-component plane of two dissimilar half-planes with two semi-infinite interfacial cracks is obtained and its exact solution is constructed. The governing equation for the stated problem is also obtained in the form of one singular integral equation of the first kind with respect to normal contact stresses in another particular case, when all strips are made of the same material, i.e. in the case of a homogeneous plane, a weakened periodic system of parallel, two semi-infinite cracks.

In the general case, the behavior of the unknown function at the end points of the integration interval is determined and the solution of the problem by the numerical-analytical method of mechanical quadratures is reduced to solving a system of algebraic equations. Simple formulas are obtained to determine the intensity factors, the Cherepanov–Rice integral and crack opening. A numerical calculation has been performed. Regularities of changes in contact stresses and the Cherepanov–Rice integral at the end-points of cracks are revealed, depending on the elastic characteristics of heterogeneous strips and the geometric parameters of the problem.

### Research Article

 The content is published under the terms of the [Creative Commons Attribution 4.0 International License](http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

#### Please cite this article in press as:

Hakobyan V. N., Grigoryan A. A. Plane stress state of a uniformly piece-wise homogeneous plane with a periodic system of semi-infinite interphase cracks, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2021, vol. 25, no. 1, pp. 67–82. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1816> (In Russian).

#### Authors' Details:

Vahram N. Hakobyan  <https://orcid.org/0000-0003-3684-9471>

Dr. Phys. & Math. Sci., Professor; Chief Researcher; Dept. of Elasticity and Viscoelasticity;  
e-mail: [vhakobyan@sci.am](mailto:vhakobyan@sci.am)

Aram A. Grigoryan  <https://orcid.org/0000-0001-7582-1960>

Postgraduate Student; Junior Researcher; Dept. of Elasticity and Viscoelasticity;  
e-mail: [grigoryan.aram.4@gmail.com](mailto:grigoryan.aram.4@gmail.com)

**Keywords:** periodic problem, mixed boundary value problem, piece-wise homogeneous plane, interface cracks.

Received: 10<sup>th</sup> August, 2020 / Revised: 29<sup>th</sup> January, 2021 /

Accepted: 12<sup>th</sup> February, 2021 / First online: 24<sup>th</sup> February, 2021

---

**Competing interests.** We declare that we have no conflicts of interest in the authorship and publication of this article.

**Authors' contributions and responsibilities.** V.N. Hakobyan: Idea of study; Search for methods of solution; Supervision and consulting; Writing — review & editing. A.A. Grigoryan: Literature review; Implementation of the computer algorithms; Performing calculations and visualizing results; Writing — original draft. The authors are absolutely responsible for submitting the final manuscript in print. Each author has approved the final version of manuscript.

**Funding.** This research received no specific grant from any funding agency in the public, commercial, or not-for-profit sectors.

## References

1. Panasyuk V. V., Savruk M. P., Datsyshin A. P. *Raspredelenie napriazhenii okolo treshchin v plastinakh i obolochkakh* [Stress Distribution Around Cracks in Plates and Shells]. Kiev, Naukova Dumka, 1976, 443 pp. (In Russian)
2. Muskhelishvili N. I. *Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity*. Netherlands, Springer, 1977, xxxi+732 pp. <https://doi.org/10.1007/978-94-017-3034-1>
3. *Razvitie teorii kontaktnykh zadach v SSSR* [The Development of Theory of Contact Problems in USSR], ed. L. A. Galin. Moscow, Nauka, 1976, 493 pp. (In Russian)
4. Popov G. Ya. *Kontsentratsiia uprugikh napriazhenii voze shtampov, razrezov, tonkikh vkluchenii i podkrepleni* [Concentration of Elastic Stress around Stamps, Cuts, Thin Inclusions, and Reinforcements]. Moscow, Nauka, 1982, 344 pp. (In Russian)
5. Berezhnitskii L. T., Panasyuk V. V., Stashchuk N. G. *Vzaimodeistvie zhestkikh lineinykh vkluchenii i treshchin v deformiruемом теле* [The Interaction of Rigid Linear Inclusions and Cracks in a Deformable Body]. Kiev, Naukova Dumka, 1983, 288 pp. (In Russian)
6. Barzokas D. I., Fil'shtinskii L. A., Fil'shtinskii M. L. *Aktual'nye problemy svyazannykh fizicheskikh polei v deformiruemykh telakh* [Actual Problems of Coupled Physical Fields in Deformable Bodies], vol. 1. Moscow, Izhevsk, 2010, 864 pp. (In Russian)
7. Hakobyan V. N. *Smeshannyye granichnyye zadachi o vzaimodeistvii sploshnykh deformiruemykh tel s kontsentratorami napriazhenii razlichnykh tipov* [Mixed Boundary-Value Problems on the Interaction of Continuous Deformable Bodies with Stress Concentrators of Various Types]. Yerevan, Gitutiun, 2014, 322 pp. (In Russian)
8. Popov G. Ya. *Izbrannyye trudy* [Selected Works]. In 2 volumes. Odessa, VMV, 2007 (In Russian).
9. Hakobyan V. N., Dashtoyan L. L. Discontinuous solutions of a doubly periodic problem for a piecewise homogeneous plate with interphase defects, *Mech. Compos. Mater.*, 2017, vol. 53, no. 5, pp. 601–612. <https://doi.org/10.1007/s11029-017-9690-8>.
10. Hakobyan V. N., Sahakyan A. V., Aghayan K. L. Periodic problem for a plane composed of two-layer strips with a system of longitudinal internal inclusions and cracks, In: *Wave Dynamics, Mechanics and Physics of Microstructured Metamaterials*, vol. 109. Cham, Springer, 2019, pp. 11–22. [https://doi.org/10.1007/978-3-030-17470-5\\_2](https://doi.org/10.1007/978-3-030-17470-5_2).
11. Hakobyan V. N., Grigoryan A. H. Anti-plane stressed state uniformly piece-homogeneous space with a periodic system of parallel semi-infinite interfacial cracks, *J. Phys.: Conf. Ser.*, 2020, vol. 1474, 012017. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1474/1/012017>.

12. Brychkov Yu. A., Prudnikov A. P. Integral transforms of generalized functions, *J. Soviet Math.*, 1986, vol. 34, no. 3, pp. 1630–1655. <https://doi.org/10.1007/BF01262407>.
13. *Stress Intensity Factors Handbook*, vol. 1, ed. Y. Murakami. Oxford, Pergamon, 1987.
14. Sahakyan A. V., Amirjanyan H. A. Method of mechanical quadratures for solving singular integral equations of various types, *J. Phys.: Conf. Ser.*, 2018, vol. 991, 012070. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/991/1/012070>.