Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2021. Т. 25, № 1. С. 7–20
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1777

Дифференциальные уравнения и математическая физика

УДК 517.956.6

Об одной задаче для уравнения параболо-гиперболического типа дробного порядка с нелинейной нагруженной частью

© *О. Х. Абдуллаев*

Институт математики имени В. И. Романовского
Академии наук Республики Узбекистан,
Узбекистан, 100174, Ташкент, ул. Университетская, 4-а.

Аннотация

Работа посвящена доказательству единственности и существования решения нелокальной задачи с интегральным условием склеивания для уравнения параболо-гиперболического типа с дробной производной Капуто и с нагруженным нелинейным оператором. С использованием метода интегралов энергии доказана единственность решения, а существование решения доказано методом интегральных уравнений.

Ключевые слова: нагруженное уравнение, параболо-гиперболический тип, производная Капуто, нелинейные интегральные уравнения, интегральное условие склеивания, единственность и существование решения.

Получение: 31 марта 2020 г. / Исправление: 13 февраля 2021 г. /
Принятие: 10 марта 2021 г. / Публикация онлайн: 31 марта 2021 г.

Научная статья

Образец для цитирования

Абдуллаев О. Х. Об одной задаче для уравнения параболо-гиперболического типа дробного порядка с нелинейной нагруженной частью // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2021. Т. 25, № 1. С. 7–20. https://doi.org/10.14498/vsgtu1777.

Сведения об авторе

Обиджон Хайруллаевич Абдуллаев https://orcid.org/0000-0001-8503-1268
кандидат физико-математических наук, доцент; докторант; отд. дифференциальных уравнений и их применения; e-mail: obidjon.mth@gmail.com

Введение. При интенсивных исследованиях проблем оптимального управления агроэкономической системой регулирования меток грунтовых вод и влажности почвы возникла необходимость исследовать краевые задачи для нагруженных уравнений в частных производных (см. [1, 2] и ссылки в них). Сходные результаты по теории краевых задач для нагруженных уравнений параболического, параболо-гиперболического и эллиптико-гиперболического типов были опубликованы в [3–5].

Наряду с теорией нагруженных уравнений теория краевых задач для уравнения смешанного типа дробного порядка также является одним из интенсивно развивающихся направлений исследования уравнений в частных производных. Следует отметить, что локальные и нелокальные задачи для уравнений параболо-гиперболического типа, включающие различные интегро-дифференциальные операторы дробного порядка, исследовались многими авторами (см. работы [6–8] и ссылки в них).

В качестве продолжения этого направления в данной работе мы рассмотрим следующее уравнение параболо-гиперболического типа дробного порядка, включающее нелинейный нагруженный член:

$$f(x) = \begin{cases} u_{xx} - {}_C D_{0y}^{\alpha} u + a_1(x) u^{p_1}(x,0), & y > 0, \\ u_{xx} - u_{yy} + a_2(x) u^{p_2}(x,0), & y < 0, \end{cases} \tag{1}$$

где

$$_C D_{0y}^{\alpha} f(y) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^y (y-t)^{-\alpha} f'(t) dt, \quad 0 < \alpha < 1, \tag{2}$$

$a_i(x)$ — заданные функции; $p_i > 0$, $0 < \alpha < 1$ — константы, $i = 1, 2$.

Имеются немногочисленные работы (см. [9, 10] и ссылки в них), в которых исследуются локальные и нелокальные задачи для уравнений параболо-гиперболического типа с оператором Капуто (без нагруженной части). Кроме того, аналогичные задачи рассматривались для нагруженных уравнений параболического типа, след решения которых включается в интегро-дифференциальные операторы дробного порядка Римана—Лиувилля, Эрдейи—Кобера и др. [11–13]. Хотелось бы отметить, что уравнения в приведенных выше работах имеют только линейные нагруженные члены.

Основная цель данной работы — доказать существование и единственность решения нелокальной задачи с интегральным условием склеивания для уравнения (1).

1. Постановка задачи. Пусть Ω — область, ограниченная отрезками

$$A_1A_2 = \{(x,y) : x = 1, 0 < y < h\}, \quad B_1B_2 = \{(x,y) : x = 0, 0 < y < h\},$$

$$B_2A_2 = \{(x,y) : y = h, 0 < x < 1\}$$

при $y > 0$, и характеристиками

$$A_1C : x - y = 1, \quad B_1C : x + y = 0$$

уравнения (1) при $y < 0$, где $A_1(1,0)$, $A_2(1,h)$, $B_1(0,0)$, $B_2(0,h)$ и $C(1/2, -1/2)$.

Введем следующие обозначения:

$$\Omega^+ = \Omega \cap (y > 0), \quad \Omega^- = \Omega \cap (y < 0),$$

$$I_1 = \{x : 0 < x < 1/2\}, \quad I_2 = \{x : 1/2 < x < 1\}.$$

Задача NL. *Требуется найти функцию $f(x)$ и решение $u(x,y)$ уравнения (1) из класса функций*

$$W = \{u(x,y) : u(x,y) \in C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega^-);\ u_{xx} \in C(\Omega^+);\\ {}_C D_{0y}^{\alpha} u \in C(\Omega^+);\ u(x,y) \in C^1(\bar{\Omega}^- \setminus A_1B_1)\},$$

удовлетворяющие краевым условиям

$$u(x,y)\big|_{A_1A_2} = \varphi_1(y), \quad u(x,y)\big|_{B_1B_2} = \varphi_2(y), \quad 0 \leqslant y \leqslant h; \tag{3}$$

$$\frac{d}{dx} u(\theta(x)) = b_1(x)u_y(x,0) + b_2(x)u_x(x,0) + b_3(x)u(x,0) + b_4(x),\ 0 < x < 1; \tag{4}$$

$$u_n(x,y)\big|_{B_1C} = \psi_1(x),\ 0 \leqslant x \leqslant 1/2; \quad u_n(x,y)\big|_{A_1C} = \psi_2(x),\ 1/2 \leqslant x \leqslant 1 \tag{5}$$

и интегральному условию склеивания

$$\lim_{y \to +0} y^{1-\alpha} u_y(x,y) = \lambda_1(x)u_y(x,-0) + \lambda_2(x)u_x(x,-0) +\\ + \lambda_3(x) \int_0^x r(t)u(t,0)\,dt + \lambda_4(x)u(x,0) + \lambda_5(x), \quad 0 < x < 1, \tag{6}$$

где $\theta(x) = \theta(x/2, -x/2)$ и $\varphi_i(y)$, $\psi_i(x)$, $b_j(x)$, $\lambda_k(x)$ — заданные функции ($i = 1,2$; $j = \overline{1,4}$; $k = \overline{1,5}$), причем

$$\psi_1(1/2) = \psi_2(1/2), \quad \sum_{j=1}^{3} b_j^2(x) \neq 0 \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{4} \lambda_k^2(x) \neq 0.$$

2. Необходимые функциональные соотношения. Введем обозначения

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & 0 \leqslant x \leqslant 1/2, \\ f_2(x), & 1/2 \leqslant x \leqslant 1, \end{cases} \tag{7}$$

$$u(x,0) = \tau(x),\ 0 \leqslant x \leqslant 1; \quad u_y(x,-0) = \nu^-(x),\ 0 < x < 1, \tag{8}$$

причем $f_1(1/2) = f_2(1/2)$.

Отметим, что общее решение уравнения (1) в области Ω^- с учетом (7) имеет вид

$$u(x,y) = F_1(x+y) + F_2(x-y) + \omega(x), \tag{9}$$

где

$$\omega(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^x (x-t)\big(f_1(t) - a_2(t)\tau^{p_2}(t)\big)\,dt + c_1 x, & 0 \leqslant x \leqslant 1/2, \\ \displaystyle\int_x^1 (t-x)\big(f_2(t) - a_2(t)\tau^{p_2}(t)\big)\,dt + c_2(1-x), & 1/2 \leqslant x \leqslant 1, \end{cases} \tag{10}$$

c_1 и c_2 — произвольные постоянные.

Функция $\omega(x)$ должна быть дважды непрерывно дифференцируемой при $0<x<1$. Это требование приводит к следующим значениям c_1 и c_2:

$$c_1=\int_0^{1/2}(t-1)\big(f_1(t)-a_2(t)\tau^{p_2}(t)\big)\,dt+\int_{1/2}^{1}(t-1)\big(f_2(t)-a_2(t)\tau^{p_2}(t)\big)\,dt,$$
$$c_2=-\int_0^{1/2}t\big(f_1(t)-a_2(t)\tau^{p_2}(t)\big)\,dt-\int_{1/2}^{1}t\big(f_2(t)-a_2(t)\tau^{p_2}(t)\big)\,dt.$$

Воспользуемся условием (5) и, учитывая обозначение (8), из (9) найдем

$$F_1(x)=\tau(x)-F_2(x)-\omega(x), \tag{11}$$
$$F_1'(x)=\nu(x)+F_2'(x), \tag{12}$$
$$2F_1'(0)+\int_0^x\big(f_1(t)-a_2(t)\tau^{p_2}(t)\big)\,dt=\sqrt{2}\psi_1(x), \tag{13}$$
$$-2F_2'(1)+\int_x^1\big(f_2(t)-a_2(t)\tau^{p_2}(t)\big)dt=\sqrt{2}\psi_2(x). \tag{14}$$

Таким образом, учитывая (11) и (12), из (9) решение задачи NL в области Ω^- можем представить в виде

$$\begin{aligned}u(x,y)=\frac{1}{2}\big(\tau(x-y)+\tau(x+y)\big)-\frac{1}{2}\big(\omega(x-y)+\omega(x+y)\big)-\\ -\frac{1}{2}\int_{x+y}^{x-y}\nu(t)\,dt+\omega(x).\end{aligned} \tag{15}$$

Используя условие (4), из (15) дифференцированием (13) и (14) по x находим

$$\begin{aligned}\big(2b_1(x)+1\big)\nu^-(x)=\big(1-2b_2(x)\big)\tau'(x)-2b_3(x)\tau(x)-\\ -2b_4(x)+\omega'(x/2)-\omega'(x),\quad 0<x<1,\end{aligned} \tag{16}$$

и

$$f_j(x)-a_2(x)\tau^{p_2}(x)=(-1)^{j-1}\sqrt{2}\psi_j'(x)\ \ (j=1,2). \tag{17}$$

Следовательно, из (10), учитывая (17), находим $\omega(x)$ в явном виде:

$$\omega(x)=\begin{cases}\sqrt{2}\int_0^x\psi_1(t)\,dt-\sqrt{2}x\Big(\psi_1(1/2)+\\ \qquad+\int_0^{1/2}\psi_1(t)\,dt-\int_{1/2}^1\psi_2(t)dt\Big),\quad 0\leqslant x\leqslant 1/2,\\ \sqrt{2}\int_x^1\psi_2(t)dt-\sqrt{2}(1-x)\Big(\psi_2(1/2)-\\ \qquad-\int_0^{1/2}\psi_1(t)\,dt+\int_{1/2}^1\psi_2(t)\,dt\Big),\quad 1/2\leqslant x\leqslant 1.\end{cases} \tag{18}$$

Учитывая обозначение (8), соотношение

$$\lim_{y\to+0}y^{1-\alpha}u_y(x,y)=\nu^+(x)$$

и условие склеивания (6), находим

$$\nu^+(x) = \lambda_1(x)\nu^-(x) + \lambda_2(x)\tau'(x) + \\ + \lambda_3(x)\int_0^x r(t)\tau(t)\,dt + \lambda_4(x)\tau(x) + \lambda_5(x), \quad 0 < x < 1. \quad (19)$$

Далее из уравнения (1) при $y \to +0$, учитывая (2), (19) и

$$\lim_{y\to 0} D_{0y}^{\alpha-1} f(y) = \Gamma(\alpha) \lim_{y\to 0} y^{1-\alpha} f(y),$$

находим

$$\tau''(x) - \Gamma(\alpha)\lambda_1(x)\nu^-(x) - \Gamma(\alpha)\lambda_2(x)\tau'(x) - \\ - \Gamma(\alpha)\lambda_3(x)\int_0^x r(t)\tau(t)\,dt - \Gamma(\alpha)\lambda_4(x)\tau(x) - \\ - \Gamma(\alpha)\lambda_5(x) - f(x) + a_1(x)\tau^{p_1}(x) = 0, \quad 0 < x < 1. \quad (20)$$

3. Единственность задачи NL.

Теорема 1. *Пусть $p_j = 2n-1$, $n = 1, 2, \ldots$, $j = 1, 2$, и для заданных функций имеют место условия*

$$2b_1(x) + 1 \neq 0, \quad A'(x) + 2B(x) + \lambda_2'(x) - 2\lambda_4(x) \leqslant 0; \quad (21)$$

$$\left(\frac{\lambda_3(x)}{r(x)}\right)' \leqslant 0, \quad \frac{\lambda_3(1)}{r(1)} \geqslant 0, \quad a_1(x) \leqslant 0, \quad a_2(x) \geqslant 0, \quad (22)$$

где

$$A(x) = \frac{\lambda_1(x)(1 - 2b_2(x))}{1 + 2b_1(x)}, \quad B(x) = \frac{2\lambda_1(x)b_3(x)}{1 + 2b_1(x)}.$$

Тогда решение $u(x, y)$ задачи NL единственно.

Доказательство. Пусть $\psi_j(x) \equiv b_4(x) \equiv 0$ $(j = 1, 2)$. Тогда из (18) имеем $\omega(x) = 0$. Следовательно, из (16) при $2b_1(x) + 1 \neq 0$ находим

$$\nu^-(x) = \frac{1 - 2b_2(x)}{1 + 2b_1(x)}\tau'(x) - \frac{2b_3(x)}{2b_1(x) + 1}\tau(x). \quad (23)$$

Далее, полагая $\lambda_5(x) \equiv 0$ и умножая уравнение (20) на $\tau(x)$, интегрируя его от 0 до 1, с учетом (17) получим

$$\int_0^1 \tau''(x)\tau(x)\,dx - \Gamma(\alpha)\int_0^1 \lambda_1(x)\tau(x)\nu^-(x)\,dx - \Gamma(\alpha)\int_0^1 \lambda_2(x)\tau(x)\tau'(x)\,dx - \\ - \Gamma(\alpha)\int_0^1 \lambda_3(x)\tau(x)\,dx \int_0^x r(t)\tau(t)\,dt - \Gamma(\alpha)\int_0^1 \tau^2(x)\lambda_4(x)\,dx + \\ + \int_0^1 (a_1(x)\tau^{p_1}(x) - a_2(x)\tau^{p_2}(x))\tau(x)\,dx = 0. \quad (24)$$

Подставляя (23) в уравнение (24) и учитывая

$$\tau(0)=\varphi_2(0)=0,\quad \tau(1)=\varphi_1(0)=0,$$

имеем

$$-\int_0^1 \tau'^2(x)\,dx+\frac{\Gamma(\alpha)}{2}\int_0^1 A'(x)\tau^2(x)\,dx+\Gamma(\alpha)\int_0^1 B(x)\tau^2(x)\,dx+$$
$$+\frac{\Gamma(\alpha)}{2}\int_0^1 {\lambda_2}'(x)\tau^2(x)\,dx-\Gamma(\alpha)\int_0^1 \lambda_4(x)\tau^2(x)\,dx-$$
$$-\frac{\Gamma(\alpha)\lambda_3(1)}{2r(1)}\left(\int_0^1 r(x)\tau(x)\,dx\right)^2+\frac{\Gamma(\alpha)}{2}\int_0^1\left(\frac{\lambda_3(x)}{r(x)}\right)'\left(\int_0^x r(t)\tau(t)\,dt\right)^2dx+$$
$$+\int_0^1 a_1(x)\tau^{p_1+1}(x)\,dx-\int_0^1 a_2(x)\tau^{p_2+1}(x)\,dx. \quad (25)$$

В силу условий теоремы 1 из (25), учитывая $\tau(0)=\tau(1)=0$, заключаем, что $\tau(x)=0$. Таким образом, при нулевых данных (т.е. при $\psi_j(x)=b_4(x)=0$, $j=1,2$) получим, что $\omega(x)=0$ и $u(x,0)=\tau(x)=0$, т.е. нелинейные нагруженные части уравнения (1) обнуляются. Далее из (23) получим $\nu^-(x)=0$. Следовательно, в силу решения первой краевой задачи для уравнения (1) в области Ω^+ (см. [14]) и из решения задачи Коши в области Ω^- получим $u(x,y)\equiv 0$ в замкнутых областях $\bar{\Omega}^+$ и $\bar{\Omega}^-$. $\square$

Замечание 1. Если $2b_1(x)+1=0$, $2b_2(x)-1\neq 0$, $x\in[0,1]$, то, учитывая (18), из (16) получим линейное дифференциальное уравнение первого порядка относительно $\tau(x)$.

Заметим, что получаемое дифференциальное уравнение имеет единственное решение с учетом условий $\tau(0)=\varphi_2(0)$ (или $\tau(1)=\varphi_1(0)$). Следовательно, однозначное решение исследуемой задачи определяется в области Ω^+ как решение первой краевой задачи для уравнения (1) [8, 12]. Далее из решения первой краевой задачи с учетом

$$\lim_{y\to+0} y^{1-\alpha}u_y(x,y)=\nu^+(x)$$

и условия склеивания (6) находим $\nu^-(x)$ при $\lambda_1(x)\neq 0$. Решение задачи NL в области Ω^- построим как решение задачи Коши.

Замечание 2. Если $2b_1(x)+1=2b_2(x)-1=0$, $b_3(x)\neq 0$, $x\in[0,1]$, то однозначная разрешимость исследуемой задачи следует из однозначного определения $\tau(x)$ из (16).

Итак, пусть $2b_1(x)+1=0$, $2b_2(x)-1=0$ (или $2b_2(x)-1\neq 0$) и $b_3(x)\neq 0$. Тогда исследуемая задача однозначно разрешима при $\lambda_1(x)\neq 0$.

4. Существование решения задачи NL.

Теорема 2. *Если выполнены условия* (21), (22) *и*

$$\varphi_i(y)\in C[0,h]\cap C^1(0,h),\ \ \psi_i(x)\in C(\bar{I}_i)\cap C^1(I_i)a_i(x)\in C[0,1]\ \ (i{=}1,2), \quad (26)$$
$$b_j(x),\ \lambda_k(x)\in C[0,1]\cap C^1(0,1)\quad (j=\overline{1,4},\ \ k=\overline{1,5}), \quad (27)$$

то решение задачи NL существует.

Доказательство. Решение уравнения (см. уравнение (20))

$$\tau''(x) = F(x), \quad 0 < x < 1,$$

удовлетворяющее условиям $\tau(1) = \varphi_1(0)$, $\tau(0) = \varphi_2(0)$, имеет вид

$$\tau(x) = \int_0^x (x-t)F(t)\,dt - x\int_0^1 (1-t)F(t)\,dt + \\ + (1-x)\varphi_2(0) + x\varphi_1(0), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \quad (28)$$

где

$$F(x) = \Gamma(\alpha)(\lambda_4(x) - B(x))\tau(x) + \Gamma(\alpha)(A(x) + \lambda_2(x))\tau'(x) + \\ + \Gamma(\alpha)\lambda_3(x)\int_0^x r(t)\tau(t)\,dt + f(x) - a_1(x)\tau^{p_1}(x) + \\ + \Gamma(\alpha)C(x)\big(\omega'(x/2) - \omega'(x) - 2b_4(x)\big) + \Gamma(\alpha)\lambda_5(x), \quad (29)$$

$$C(x) = \frac{\lambda_1(x)}{1 + 2b_1(x)}.$$

Подставляя (29) в уравнение (28), после несложных упрощений получим интегральное уравнение Фредгольма второго рода:

$$\tau(x) = \int_0^1 K(x,t)\tau(t)\,dt + \Phi(x,\tau(x)), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \quad (30)$$

где

$$K(x,t) = \begin{cases} K_1(x,t), & 0 \leqslant t \leqslant x, \\ K_2(x,t), & x \leqslant t \leqslant 1, \end{cases} \quad (31)$$

$$K_1(x,t) = \Gamma(\alpha)t(x-1)\big(\lambda_4(t) - B(t)\big) - \Gamma(\alpha)(x-1)\big(t\lambda_2(t) + tA(t)\big)' + \\ + \Gamma(\alpha)r(t)\int_t^x (x-z)\lambda_3(z)\,dz - \Gamma(\alpha)r(t)\int_t^1 x(1-z)\lambda_3(z)\,dz,$$

$$K_2(x,t) = \Gamma(\alpha)x\big[(1-t)\big(\lambda_2(t) + A(t)\big)\big]' - \Gamma(\alpha)x(1-t)\big(\lambda_4(t) - B(t)\big) - \\ - \Gamma(\alpha)r(t)\int_t^1 x(1-z)\lambda_3(z)\,dz,$$

$$\Phi(x,\tau(x)) = \int_0^x (x-t)\big(a_2(t)\tau^{p_2}(t) - a_1(t)\tau^{p_1}(t)\big)\,dt - \\ - x\int_0^1 (1-t)\big(a_2(t)\tau^{p_2}(t) - a_1(t)\tau^{p_1}(t)\big)\,dt + F_1(x), \quad (32)$$

$$F_1(x)=\Gamma(\alpha)\int_0^x (x-t)C(t)\big(\omega'(t/2)-\omega'(t)-2b_4(t)\big)\,dt+\Gamma(\alpha)\int_0^x (x-t)\lambda_5(t)dt-$$
$$-\Gamma(\alpha)x\int_0^1 (1-t)C(t)\big(\omega'(t/2)-\omega'(t)-2b_4(t)\big)\,dt-$$
$$-\Gamma(\alpha)x\int_0^1 (1-t)\lambda_5(t)\,dt+\Gamma(\alpha)\int_0^x (x-t)\psi(t)\,dt-$$
$$-\Gamma(\alpha)x\int_0^1 (1-t)\psi(t)\,dt+(1-x)\varphi_2(0)+x\varphi_1(0),$$

$$\psi(x)=\begin{cases}\sqrt{2}\psi_1(x), & 0\leqslant x\leqslant 1/2,\\ -\sqrt{2}\psi_2(x), & 1/2\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$$

Из (31), (32) с учетом класса заданных функций можно убедиться, что $|K(x,y)|\leqslant \text{const}$, $|\Phi(x,\tau(x))|\leqslant \text{const}$. Далее в силу теории интегральных уравнений Фредгольма и единственности решения исследуемой задачи заключаем, что интегральное уравнение (30) имеет единственное решение в классе $C[0,1]\cap C^2(0,1)$. Это решение записываем через резольвенту $R(x,t)$ ядра $K(x,t)$:

$$\tau(x)=\int_0^1 R(x,t)\Phi(t,\tau(t))\,dt+\Phi(x,\tau(x)). \tag{33}$$

Подставляя (32) в решение (33), получим нелинейное интегральное уравнение

$$\tau(x)=\int_0^1 \big(a_2(t)\tau^{p_2}(t)-a_1(t)\tau^{p_1}(t)\big)K^*(x,t)\,dt+F_2(x), \tag{34}$$

$$K^*(x,t)=\begin{cases}\displaystyle\int_t^1 R(x,z)(z-t)\,dz-(1-t)\int_0^1 tR(x,t)\,dt+t(x-1), & 0\leqslant t\leqslant x,\\ \displaystyle\int_t^1 R(x,z)(z-t)\,dz-(1-t)\int_0^1 tR(x,t)\,dt+x(t-1), & x\leqslant t\leqslant 1,\end{cases}$$

$$F_2(x)=\int_0^1 R(x,t)F_1(t)\,dt+F_1(x).$$

Разрешимость интегрального уравнения (34) доказываем методом последовательных приближений. Предполагая $\tau_0(x)=F_2(x)$, из рекуррентной формулы

$$\tau_n(x)=\int_0^1 \big(a_2(t)\tau_{n-1}^{p_2}(t)-a_1(t)\tau_{n-1}^{p_1}(t)\big)K^*(x,t)\,dt+F_2(x)$$

составим функциональную последовательность $\{\tau_n(x)\}$.

Пусть для произвольной функции

$$g(x)\in C[0,1]\cap C^2(0,1)$$

и

$$G(x,t)\in C([0,1]\times[0,1])\cap C^{2,0}((0,1)\times(0,1))$$

рассматривается следующая норма:

$$\|g(x)\|_C = \max\left\{|g(x)| : x \in [0,1]\right\},$$

$$\|G(x,t)\|_C = \max\left\{|G(x,t)| : (x,t) \in [0,1] \times [0,1]\right\}.$$

Тогда, учитывая

$$\|K^*(x,t)\|_C \leqslant M, \quad \|a_j(x)\|_C \leqslant m_j, \ j=1,2, \quad \|F_2(x)\|_C \leqslant m_3$$

(см. (26) и (27)), где M, m_1, m_2, $m_3 > 0$, получим

$$\|\tau_1(x) - \tau_0(x)\|_C \leqslant m^* M |m_1 + m_2|, \tag{35}$$

где $m^* = \max\{m_3^{p_1}; m_3^{p_2}\}$.

Далее, учитывая неравенство

$$|g_2^p(x) - g_1^p(x)| \leqslant cp|g_2(x) - g_1(x)|,$$

где $c = \max\left\{|g_1^{p-1}(x)|, |g_2^{p-1}(x)|\right\} > 0$ — константа, для непрерывно-дифференцируемых функций получим

$$\|\tau_2(x) - \tau_1(x)\|_C \leqslant cpM|m_1 + m_2| \, \|\tau_1(x) - \tau_0(x)\|_C,$$

где $p = \max\{p_1; p_2\}$. Окончательно имеем:

$$\|\tau_n(x) - \tau_{n-1}(x)\|_C \leqslant cpM|m_1 + m_2| \, \|\tau_{n-1}(x) - \tau_{n-2}(x)\|_C. \tag{36}$$

Пусть $cpM|m_1 + m_2| < 1$, тогда из оценки (36) следует, что оператор в правой части (34) является сжимающим. Из оценок (35) и (36) заключаем, что для оператора (34) существует единственная неподвижная точка. Следовательно, интегральное уравнение (34) имеет единственное решение в классе $C[0,1] \cap C^2(0,1)$.

Замечание 3. В силу теории интегральных уравнений Фредгольма с учетом единственности решения задачи NL следует заключить, что функциональная последовательность $\{\tau_n(x)\}$ имеет единственную предельную функцию $\tau(x)$, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} \tau_n(x) = \tau(x)$.

После определения $\tau(x)$ из (16) находим $\nu(x)$. Далее, учитывая (18), решение исследуемой задачи в области Ω^- определяем из (15), а в области — Ω^+ как решение первой краевой задачи для уравнения (1), которое имеет вид [12, 14]:

$$u(x,y) = \int_0^y G_\xi(x,y,0,\eta)\varphi_2(\eta)\,d\eta - \int_0^y G_\xi(x,y,1,\eta)\varphi_1(\eta)\,d\eta +$$
$$+ \int_0^1 G_0(x-\xi,y)\tau(\xi)\,d\xi + \int_0^y \int_0^1 G(x,y,\xi,\eta)\big(f(\xi) - a_1(\xi)\tau^{p_1}(\xi)\big)\,d\xi\,d\eta,$$

где

$$G_0(x-\xi,y) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^y (y-\eta)^{-\alpha} G(x,\eta,\xi,0)\,d\eta,$$

$$G(x,y,\xi,\eta)=\frac{(y-\eta)^{\alpha/2-1}}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\Big[e^{1,\alpha/2}_{1,\alpha/2}\Big(-\frac{|x-\xi+2n\|}{(y-\eta)^{\alpha/2}}\Big)-\\ -e^{1,\alpha/2}_{1,\alpha/2}\Big(-\frac{|x+\xi+2n|}{(y-\eta)^{\alpha/2}}\Big)\Big]$$

— функция Грина первой краевой задачи для уравнения (1) в области Ω^+ [6],

$$e^{1,\delta}_{1,\delta}(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!\Gamma(\delta-\delta n)}$$

— функция типа Райта [14], $f(x)$ — определяется из (17). □

Замечание 4. Пусть $b_j(x)\equiv 0$, $\lambda_k(x)\equiv 0$ ($j=\overline{1,3}$, $k=\overline{2,5}$) и $\lambda_1(x)=1$. Тогда задача NL является локальной задачей (т. е. аналогом задачи Трикоми) с непрерывным условием склеивания. Отметим, что полученные результаты остаются верными и в этом случае.

Конкурирующие интересы. Я заявляю об отсутствии явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

Авторский вклад и ответственность. Я несу полную ответственность за предоставление окончательной версии рукописи в печать. Окончательная версия рукописи мною одобрена

Финансирование. Исследование выполнялось без финансирования.

Библиографический список

1. Нахушев А. М. *Дробное исчисление и его применение.* М.: Физматлит, 2003. 272 с.
2. Нахушев А. М. *Нагруженные уравнения и их применения.* М.: Наука, 2012. 232 с.
3. Сабитов К. Б. Начально-граничная задача для параболо-гиперболического уравнения с нагруженными слагаемыми // *Изв. вузов. Матем.*, 2015. № 6. С. 31–42.
4. Мелишева Е. П. Задача Дирихле для нагруженного уравнения Лаврентьева–Бицадзе // *Вестн. СамГУ. Естественнонаучн. сер.*, 2010. № 6(80). С. 39–47.
5. Абдуллаев О. Х. Нелокальная задача для нагруженного уравнения смешанного типа с интегральным оператором // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2016. Т. 20, № 2. С. 220–240. https://doi.org/10.14498/vsgtu1485.
6. Псху А. В. Фундаментальное решение диффузионно-волнового уравнения дробного порядка // *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2009. Т. 73, № 2. С. 141–182. https://doi.org/10.4213/im2429.
7. Kilbas A. A. Repin O. A An analog of the Tricomi problem for a mixed type equation with a partial fractional derivative // *Fract. Calc. Appl. Anal.*, 2010. vol. 13, no. 1. pp. 69–84. https://eudml.org/doc/219592.
8. Kadirkulov B. J. Boundary problems for mixed parabolic-hyperbolic equations with two lines of changing type and fractional derivative // *Electronic Journal of Differential Equations*, 2014. vol. 2014, no. 57. pp. 1–7.
9. Салахитдинов М. С., Каримов Э Т. Об одной нелокальной задаче с условиями сопряжения интегрального вида для параболо-гиперболического уравнения с оператором Капуто // *Докл. Акад. наук респ. Узбек.*, 2014. № 4. С. 6–9.
10. Berdyshev A. S., Cabada A., Karimov E. T. On a non-local boundary problem for a parabolic-hyperbolic equation involving a Riemann–Liouville fractional differential operator // *Nonlinear Anal. Theory, Methods and Appl.*, 2012. vol. 75, no. 6. pp. 3268–3273. https://doi.org/10.1016/j.na.2011.12.033.

11. Sadarangani K., Abdullaev O. K. A non-local problem with discontinuous matching condition for loaded mixed type equation involving the Caputo fractional derivative // *Adv. Differ. Equ.*, 2016. vol. 2016, 241. https://doi.org/10.1186/s13662-016-0969-1.
12. Abdullaev O. Kh. Analog of the Gellerstedt problem for the mixed type equation with integral-differential operators of fractional order // *Uzbek. Math. J.*, 2019. no. 3. pp. 4–18. https://doi.org/10.29229/uzmj.2019-3-1.
13. Abdullaev O. K. On the problem for a mixed-type degenerate equation with Caputo and Erdélyi–Kober pperators of fractional order // *Ukr. Math. J.*, 2019. vol. 71, no. 6. pp. 825–842. https://doi.org/10.1007/s11253-019-01682-z.
14. Псху А. В. *Уравнения в частных производных дробного порядка.* М.: Наука, 2005. 200 с.

Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2021, vol. 25, no. 1, pp. 7–20
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1777

MSC: 34K37, 35R11, 35M10

On a problem for the parabolic-hyperbolic type equation of fractional order with non-linear loaded term

© ***O. Kh. Abdullayev***

V. I. Romanovskiy Institute of Mathematics,
Uzbekistan Academy of Science,
4-a, Universitetskaya st., Tashkent, 100174, Uzbekistan.

Abstract

We study the existence and uniqueness of solution of the non-local problem for the parabolic-hyperbolic type equation with non linear loaded term involving Caputo derivative

$$f(x) = \begin{cases} u_{xx} - {}_C D_{0y}^{\alpha} u + a_1(x) u^{p_1}(x,0), & y > 0, \\ u_{xx} - u_{yy} + a_2(x) u^{p_2}(x,0), & y < 0, \end{cases}$$

where

$${}_C D_{0y}^{\alpha} f(y) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^y (y-t)^{-\alpha} f'(t)\,dt, \quad 0 < \alpha < 1,$$

$a_i(x)$ are given functions, p_i, $\alpha = \mathrm{const}$, besides $p_i > 0$ $(i = 1, 2)$, $0 < \alpha < 1$ in the domain Ω bounded with segments:

$$A_1A_2 = \{(x,y) : x = 1, 0 < y < h\}, \quad B_1B_2 = \{(x,y) : x = 0, 0 < y < h\},$$

$$B_2A_2 = \{(x,y) : y = h, 0 < x < 1\}$$

at the $y > 0$, and characteristics:

$$A_1C : x - y = 1, \quad B_1C : x + y = 0$$

of the considered equation at $y < 0$, where $A_1(1,0)$, $A_2(1,h)$, $B_1(0,0)$, $B_2(0,h)$, and $C(1/2, -1/2)$.

Uniqueness of solution of the investigated problem was proved by an integral of energy. The existence of solution of the problem was proved by the method of integral equations. The theory of the second kind Fredholm type integral equations and the successive approximations method were widely used. We notice, that boundary value problems for the mixed type equations of fractional order with non linear loaded term have not been investigated.

Research Article

Please cite this article in press as:
Abdullayev O. Kh. On a problem for the parabolic-hyperbolic type equation of fractional order with non-linear loaded term, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2021, vol. 25, no. 1, pp. 7–20. https://doi.org/10.14498/vsgtu1777 (In Russian).

Author's Details:
Obidjon Kh. Abdullayev https://orcid.org/0000-0001-8503-1268
Cand. Phys. & Math. Sci.; Associate Professor; Doctoral Student; Dept. of Differential Equations and Their Application; e-mail: obidjon.mth@gmail.com

Keywords: loaded equation, parabolic-hyperbolic type, Caputo fractional derivative, nonlinear integral equation, integral gluing condition, existence and uniqueness of solution.

Received: 31st March, 2020 / Revised: 13th February, 2021 / Accepted: 10th March, 2021 / First online: 31st March, 2021

Competing interests. I declare that I have no apparent or potential conflicts of interest related to the publication of this article.

Authors' contributions and responsibilities. I take full responsibility for submitting the final manuscript in print. I approved the final version of the manuscript.

Funding. This research received no specific grant from any funding agency in the public, commercial, or not-for-profit sectors.

References

1. Nakhushev A. M. *Drobnoe ischislenie i ego primenenie* [Fractional Calculus and Its Applications]. Moscow, Fizmatlit, 2003, 272 pp. (In Russian)
2. Nakhushev A. M. *Nagruzhennye uravneniia i ikh primeneniia* [Loaded Equations and Their Applications]. Moscow, Nauka, 2012, 232 pp. (In Russian)
3. Sabitov K. B. Initial-boundary problem for parabolic-hyperbolic equation with loaded summands, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2015, vol. 59, no. 6, pp. 23–33. https://doi.org/10.3103/S1066369X15060055.
4. Melisheva E. P. Dirichlet problem for loaded equation of Lavrentiev–Bizadze, *Vestn. Samar. Gos. Univ., Estestvennonauchn. Ser.*, 2010, no. 6(80), pp. 39–47 (In Russian).
5. Abdullayev O. Kh. A non-local problem for a loaded mixed-type equation with a integral operator, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2016, vol. 20, no. 2, pp. 220–240 (In Russian). https://doi.org/10.14498/vsgtu1485.
6. Pskhu A. V. The fundamental solution of a diffusion-wave equation of fractional order, *Izv. Math.*, 2009, vol. 73, no. 2, pp. 351–392. https://doi.org/10.1070/IM2009v073n02ABEH002450.
7. Kilbas A. A. Repin O. A An analog of the Tricomi problem for a mixed type equation with a partial fractional derivative, *Fract. Calc. Appl. Anal.*, 2010, vol. 13, no. 1, pp. 69–84. https://eudml.org/doc/219592.
8. Kadirkulov B. J. Boundary problems for mixed parabolic-hyperbolic equations with two lines of changing type and fractional derivative, *Electronic Journal of Differential Equations*, 2014, vol. 2014, no. 57, pp. 1–7.
9. Salakhitdinov M. S. Karimov E. T. On a nonlocal problem with gluing condition of integral form for parabolic-hyperbolic equation with Caputo operator, *Dokl. Akad. Nauk Resp. Uzbekistan*, 2014, no. 4, pp. 6–9 (In Russian).
10. Berdyshev A. S., Cabada A., Karimov E. T. On a non-local boundary problem for a parabolic-hyperbolic equation involving a Riemann–Liouville fractional differential operator, *Nonlinear Anal. Theory, Methods and Appl.*, 2012, vol. 75, no. 6, pp. 3268–3273. https://doi.org/10.1016/j.na.2011.12.033.
11. Sadarangani K., Abdullaev O. K. A non-local problem with discontinuous matching condition for loaded mixed type equation involving the Caputo fractional derivative, *Adv. Differ. Equ.*, 2016, vol. 2016, 241. https://doi.org/10.1186/s13662-016-0969-1.
12. Abdullaev O. Kh. Analog of the Gellerstedt problem for the mixed type equation with integral-differential operators of fractional order, *Uzbek. Math. J.*, 2019, no. 3, pp. 4–18. https://doi.org/10.29229/uzmj.2019-3-1.

13. Abdullaev O. K. On the problem for a mixed-type degenerate equation with Caputo and Erdélyi–Kober pperators of fractional order, *Ukr. Math. J.*, 2019, vol. 71, no. 6, pp. 825–842. https://doi.org/10.1007/s11253-019-01682-z.
14. Pskhu A. V. *Uravneniia v chastnykh proizvodnykh drobnogo poriadka* [Fractional Partial Differential Equations]. Moscow, Nauka, 2005, 200 pp. (In Russian)