



УДК 539.31

Нестационарная функция прогиба для неограниченной анизотропной пластины


© А. О. Сердюк¹, Д. О. Сердюк¹, Г. В. Федотенков^{1,2}¹ Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Россия, 125993, Москва, Волоколамское шоссе, 4.² Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Научно-исследовательский институт механики, Россия, 119192, Москва, Мичуринский проспект, 1.

Аннотация

Работа посвящена исследованию нестационарных колебаний тонкой анизотропной неограниченной пластины Кирхгофа при воздействии на нее произвольных нестационарных нагрузок.

Подход к решению основан на принципе суперпозиции и методе функций влияния (функций Грина), суть которого заключается в связи искомого решения с нагрузкой при помощи интегрального оператора типа свертки по пространственным переменным и по времени. Ядром этого оператора является функция Грина для анизотропной пластины, которая представляет собой нормальные перемещения в ответ на воздействие единичной сосредоточенной нагрузки по координатам и времени, математически описываемой дельта-функциями Дирака. Для построения функции Грина использованы прямые и обратные интегральные преобразования Лапласа и Фурье. Обратное интегральное преобразование Лапласа найдено аналитически. Обратное двумерное интегральное преобразование Фурье найдено численно методом интегрирования быстро осциллирующих функций. Полученное фундаментальное решение позволило представить искомый нестационарный прогиб в виде тройной свертки по пространственным координатам и по времени функции Грина с функцией нестационарной нагрузки. Для вычисления интеграла свертки и построения искомого решения использован метод прямоугольников.


Научная статья


 Контент публикуется на условиях лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru) (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)


Образец для цитирования

Сердюк А. О., Сердюк Д. О., Федотенков Г. В. Нестационарная функция прогиба для неограниченной анизотропной пластины // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2021. Т. 25, № 1. С. 111–126. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1793>.

Сведения об авторах

Александр Олегович Сердюк  <https://orcid.org/0000-0002-2109-7900>
аспирант; каф. сопротивление материалов, динамика и прочность машин;
e-mail: serduksaha@yandex.ru

Дмитрий Олегович Сердюк  <https://orcid.org/0000-0003-0082-1856>
кандидат технических наук; доцент; каф. сопротивление материалов, динамика и прочность машин; e-mail: d_serduk55@gmail.com

Григорий Валерьевич Федотенков  <https://orcid.org/0000-0002-9556-7442>
кандидат физико-математических наук, доцент; доцент; каф. сопротивление материалов, динамика и прочность машин¹; ст. научный сотрудник; лаб. динамических испытаний²;
e-mail: greghome@mail.ru

Найденная функция прогиба позволяет исследовать пространственно-временное поведение изгибных нестационарных колебаний в неограниченной пластине Кирхгофа для различных вариантов симметрии упругой среды: анизотропная, ортотропная, трансверсально-изотропная и изотропная. Представлены примеры расчетов.

Ключевые слова: нестационарная динамика, анизотропный материал, функция Грина, нестационарный прогиб, пластина Кирхгофа, интегральные преобразования, квадратурные формулы, метод прямоугольников, быстро осциллирующие функции.

Получение: 28 июня 2020 г. / Исправление: 3 февраля 2021 г. /

Принятие: 8 февраля 2021 г. / Публикация онлайн: 12 февраля 2021 г.

Введение. Пластины представляют широкий класс конструктивных элементов в авиации, космонавтике, а также в общем машиностроении и строительстве в целом. Исследование их поведения в ответ на статические и динамические воздействия является неотъемлемым этапом проектирования. Наиболее трудоемким является исследование поведения конструкций при нестационарных динамических воздействиях, поскольку в этом случае присутствует существенная неоднородность по координатам и времени.

В [1] представлено аналитическое решение задачи об изгибных нестационарных колебаниях в изотропной неограниченной пластине Кирхгофа. Получено фундаментальное решение. Представлены пространственно-временные зависимости функции влияния для перемещения. В работе [2] рассматривается нестационарная динамическая задача для изотропной кольцевой пластины Тимошенко кусочно-переменной толщины. В работе [3] получены точные аналитические решения нестационарных задач для изотропных прямоугольных и круглых пластин типа Тимошенко при наиболее общих граничных условиях для широкого класса динамических нагрузок.

В работе [4] рассматривается задача о воздействии на тонкую неограниченную ортотропную пластину локальной динамической нагрузки, распределенной по круговой области. Построено фундаментальное решение, приведены численные результаты прогиба точки пластины, соответствующей центру площадки нагружения.

В работах [5–16] эффективно использован метод функций влияния применительно к решению различных нестационарных задач теории упругости и теории оболочек. Исследуются нестационарные контактные задачи для тонких цилиндрических, сферических оболочек и упругого полупространства. Исследуется нестационарная динамика анизотропных оболочек. Рассматривается случай нестационарного воздействия жесткого индентора на упругую полуплоскость.

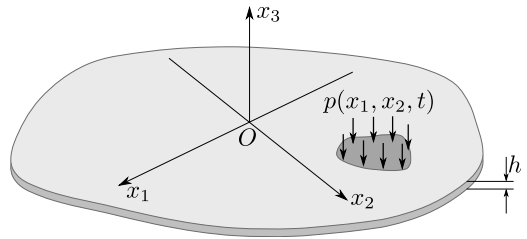
Вопросы, связанные с изгибными нестационарными колебаниями пластин, обладающих анизотропией, на данный момент являются наименее изученными. Данная работа посвящена построению нестационарной функции прогиба для анизотропной неограниченной пластины Кирхгофа, разработке и реализации метода решения задач о колебаниях анизотропных пластин при воздействии на них различных нестационарных нагрузок. В качестве примеров решены задачи о воздействии на пластину сосредоточенной и распределенной по прямоугольной области нестационарной нагрузки.

1. Постановка задачи. Объектом исследования является неограниченная тонкая пластина постоянной толщины h (см. рис. 1). Материал пластины принят упругим и анизотропным. Далее будем полагать, что тензор упругих постоянных среды обладает симметрией относительно срединной плоскости пластины.

В начальный момент времени принимаем, что пластина находится в невозмущенном состоянии. Затем к пластине прикладывается нестационарное давление $p(x_1, x_2, t)$, распределенное произвольно по пространственным координатам и произвольно зависящее от времени. Движение пластины рассматривается относительно декартовой системы координат $Ox_1x_2x_3$. Плоскость Ox_1x_2 совпадает со срединной плоскостью пластины.

Рис. 1. Неограниченная пластина под воздействием нестационарного давления

[Figure 1. An unlimited plate under unsteady pressure]



Постановка задачи включает в себя уравнения движения упругой пластины Кирхгофа, соответствующие геометрические и физические соотношения с учетом симметрии свойств материала исследуемой пластины [1, 17].

Материал анизотропной пластины Кирхгофа с учетом симметрии относительно срединной плоскости характеризуется шестью независимыми упругими постоянными C^{1111} , C^{1112} , C^{1122} , C^{1212} , C^{1222} , C^{2222} [19].

Уравнение движения анизотропной пластины Кирхгофа в перемещениях имеет вид [19, 20]

$$\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -ID(w) + p, \quad (1)$$

где

$$D(w) = C_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4} + C_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial x_2^4} + 2(C_{12} + 2C_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + 4C_{16} \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^3 \partial x_2} + 4C_{26} \frac{\partial^4 w}{\partial x_1 \partial x_2^3},$$

$$C_{11} = C^{1111}, C_{12} = C^{1122}, C_{16} = C^{1112}, C_{22} = C^{2222}, C_{26} = C^{2212}, C_{66} = C^{1212}, I = h^3/12.$$

Запишем уравнение движения в перемещениях (1) в безразмерной форме. Для этого введем систему безразмерных величин, которые обозначим штрихом:

$$w' = \frac{w}{L}, x'_1 = \frac{x_1}{L}, x'_2 = \frac{x_2}{L}, \tau = \frac{C_* t}{L}, C_* = \sqrt{\frac{C_{11}}{\rho}}, p' = \frac{pL}{\rho h C_*^2}, L = \frac{h}{2\sqrt{3}}. \quad (2)$$

В соотношениях (1), (2) τ — безразмерное время, L — характерный размер, C_* — характерная скорость, h — толщина, ρ — плотность, p — давление; x_1, x_2 — координаты.

Уравнение движения (1) в безразмерной форме записи примет вид (штрихи в безразмерных величинах опущены)

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} = -R(w) + p(x_1, x_2, \tau), \quad (3)$$

где

$$R(w) = \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4} + C_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x_2^4} + C_2 \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + C_3 \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^3 \partial x_2} + C_4 \frac{\partial^4 w}{\partial x_1 \partial x_2^3},$$

$$C_1 = \frac{C_{22}}{C_{11}}, \quad C_2 = \frac{2(C_{12} + 2C_{66})}{C_{11}}, \quad C_3 = \frac{4C_{16}}{C_{11}}, \quad C_4 = \frac{4C_{26}}{C_{11}}.$$

Уравнение (3) совместно с начальными условиями

$$w|_{\tau=0} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial \tau}|_{\tau=0} = 0 \quad (4)$$

образуют начальную задачу.

Цель исследования заключается в определении распределения нормальных перемещений $w(x_1, x_2, \tau)$ в ответ на воздействие нестационарной нагрузки $p(x_1, x_2, \tau)$.

2. Построение нестационарной функции прогиба. Решение начальной задачи (3), (4) может быть построено с помощью функции влияния (функции Грина) $G(x_1, x_2, \tau)$ [1, 19, 20]:

$$w(x_1, x_2, \tau) = G(x_1, x_2, \tau) *** p(x_1, x_2, \tau). \quad (5)$$

В (5) через * обозначены свертки по пространственным координатам x_1, x_2 и безразмерному времени τ .

Определим функцию влияния для прогиба пластины $G(x_1, x_2, \tau)$ как решение следующей задачи [19, 20]:

$$\frac{\partial^2 G(x_1, x_2, \tau)}{\partial \tau^2} = -R(G) + \delta(x_1, x_2)\delta(\tau), \quad (6)$$

$$G(x_1, x_2, \tau)|_{\tau=0} = 0, \quad \frac{\partial G(x_1, x_2, \tau)}{\partial \tau}|_{\tau=0} = 0.$$

В (6) $\delta(\cdot)$ — дельта-функция Дирака.

Для решения задачи (6) используем интегральные преобразования Лапласа по времени τ и двумерное преобразование Фурье по пространственным координатам x_1 и x_2 :

$$f^{LF} = \int_0^\infty d\tau \int_{-\infty}^\infty dx_1 \int_{-\infty}^\infty f(x_1, x_2, \tau) e^{-i(q_1 x_1 + q_2 x_2) + s\tau} dx_2.$$

Здесь и далее верхний индекс L у функции означает ее преобразование по Лапласу, а F — ее преобразование по Фурье; s — параметр преобразования Лапласа; q_1, q_2 — параметры преобразования Фурье.

Применяя к (6) интегральное преобразование Лапласа по времени и Фурье по пространственным координатам с учетом свойств интегральных преобразований дельта-функции [1], получим алгебраическое уравнение относительно изображения G^{LF} функции влияния в пространстве преобразований Фурье и Лапласа. Решив алгебраическое уравнение, получим изображение функции влияния:

$$G^{LF}(q_1, q_2, s) = \frac{1}{s^2 + P(q_1, q_2)}, \quad (7)$$

где

$$P(q_1, q_2) = q_1^3(q_1 + C_3q_2) + q_2^3(C_1q_2 + C_4q_1) + C_2q_1^2q_2^2.$$

Найдем оригинал функции влияния (7). Выполним обратное интегральное преобразование Лапласа с помощью таблиц [21]. В зависимости от сочетания упругих констант исследуемой анизотропной пластины оригинал по Лапласу может принимать следующий вид:

$$G^F(q_1, q_2, \tau) = \begin{cases} \frac{\sin(\sqrt{P(q_1, q_2)}\tau)}{\sqrt{P(q_1, q_2)}}, & P(q_1, q_2) > 0; \\ \tau, & P(q_1, q_2) = 0; \\ \frac{\text{sh}(\sqrt{P(q_1, q_2)}\tau)}{\sqrt{P(q_1, q_2)}}, & P(q_1, q_2) < 0. \end{cases} \quad (8)$$

Оригинал по Фурье функции влияния (8) в общем случае определяется по известной формуле обращения [1]

$$G(x_1, x_2, \tau) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G^F(q_1, q_2, \tau) e^{i(q_1x_1 + q_2x_2)} dq_1 dq_2. \quad (9)$$

Для построения оригинала по Фурье (9) будем использовать численный алгоритм интегрирования быстро осциллирующих функций [22], в результате чего оригинал функции влияния примет вид [19, 20]

$$\begin{aligned} G(x_1, x_2, \tau) &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-Q}^Q S(q_1, x_2, \tau) e^{iq_1x_1} dq_1 = \\ &= \frac{\Delta}{2} \left(e^{i(q_{1_{k+1}}x_1 + q_{1_k}x_1)/2} (D_1 S(q_{1_k}, x_2, \tau) + D_2 S(q_{1_{k+1}}, x_2, \tau)) \right), \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} S(q_1, x_2, \tau) &= \int_{-Q}^Q G^F(q_1, q_2, \tau) e^{iq_2x_2} dq_2 = \\ &= \frac{\Delta}{2} \left(e^{i(q_{2_{k+1}}x_2 + q_{2_k}x_2)/2} (D_1 G^F(q_1, q_{2_k}, \tau) + D_2 G^F(q_1, q_{2_{k+1}}, \tau)) \right), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{2Q}{N}, \quad m = \frac{\Delta}{2}, \quad D_{1,2} = \frac{\sin m}{m} \pm \frac{m \cos m - \sin m}{m^2} i, \\ q_{2_k} &= Q + k\Delta, \quad q_{2_{k+1}} = Q + (k+1)\Delta, \quad k = 0, \dots, N-1, \\ q_{1_k} &= Q + k\Delta, \quad q_{1_{k+1}} = Q + (k+1)\Delta, \quad k = 0, \dots, N-1. \end{aligned}$$

В случае воздействия на пластину сосредоточенной нагрузки по закону от времени $P(\tau)H(\tau)$ выражение для нагрузки $p(x_1, x_2, \tau)$ из (5) запишется так:

$$p(x_1, x_2, \tau) = P(\tau)H(\tau)\delta(x_1)\delta(x_2), \quad (11)$$

где $H(\tau)$ — функция Хэвисайда.

Тогда соотношение (5) с учетом (11) и свойств дельта-функции Дирака преобразуется к виду

$$w(x_1, x_2, \tau) = G(x_1, x_2, \tau) *** p(x_1, x_2, \tau) = \int_0^\tau G(x_1, x_2, \tau - t)P(t)dt. \quad (12)$$

Для вычисления интеграла в (12) используем метод прямоугольников [22]. Тогда приближенное выражение для искомой функции нестационарного прогиба примет вид

$$w(x_1, x_2, \tau) \approx \sum_{i=1}^n \frac{\tau}{n} G\left(x_1, x_2, \tau - \frac{\tau i}{n}\right) P\left(\frac{\tau i}{n}\right). \quad (13)$$

Также рассмотрим случай воздействия на пластину распределенной нагрузки

$$p(x_1, x_2, \tau) = P(\tau)H(\tau) \left[H\left(x_1 + \frac{a}{2}\right) - H\left(x_1 - \frac{a}{2}\right) \right] \times \\ \times \left[H\left(x_2 + \frac{b}{2}\right) - H\left(x_2 - \frac{b}{2}\right) \right], \quad (14)$$

что соответствует приложению к пластине давления, распределенного по области $D = \{(x_1, x_2) : -a/2 \leq x_1 \leq a/2, -b/2 \leq x_2 \leq b/2\}$ и изменяющегося во времени по закону $P(\tau)H(\tau)$.

Безразмерные нормальные перемещения пластины определяются по формуле (4) с учетом (14), в которой интеграл с учетом геометрии области D заменяется повторным интегралом:

$$w(x_1, x_2, \tau) = G(x_1, x_2, \tau) *** p(x_1, x_2, \tau) = \\ = \int_0^\tau dt \int_{-a/2}^{a/2} d\xi \int_{-b/2}^{b/2} G(x_1 - \xi, x_2 - \zeta, \tau - t) p(\xi, \zeta, t) d\zeta. \quad (15)$$

Для вычисления интеграла в (15) используем квадратурную формулу метода прямоугольников:

$$w(x_1, x_2, \tau) \approx \sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^m \sum_{k=1}^n \frac{a}{p} \frac{b}{m} \frac{\tau}{n} G_{ijk}(x_1, x_2, \tau) P\left(\frac{\tau}{n}k\right), \quad (16)$$

$$G_{ijk}(x_1, x_2, \tau) = G\left(x_1 - \frac{a}{p}i + \frac{a}{2}, x_2 - \frac{b}{m}j + \frac{b}{2}, \tau - \frac{\tau}{n}k\right).$$

В соотношениях (10), (13) и (16) $Q = 10$, $N = 125$, $p = 2$, $m = 2$, $n = 10$ приняты на основании оценки сходимости по норме Чебышева.

Соотношения (13) и (16) позволяют исследовать пространственно-временное поведение изгибных нестационарных колебаний в неограниченной пластине Кирхгофа. При этом найденная нестационарная функция прогиба (13) и (16) является универсальной по отношению к свойствам материала пластины, который может быть изотропным, трансверсально-изотропным, ортотропным или анизотропным.

3. Примеры расчетов. Оценим характер поведения изгибных нестационарных колебаний в неограниченной пластине для нескольких вариантов симметрии упругой среды: изотропной, ортотропной, анизотропной.

Для вычисления необходимых упругих постоянных C^{ijkl} , входящих в функции (13) и (16) через технические константы, воспользуемся связью матрицы упругих постоянных C с матрицей податливости D :

$$C = D^{-1} \quad (17)$$

где [23]

$$D = \begin{pmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\mu_{21}}{E_2} & -\frac{\mu_{31}}{E_3} & 0 & 0 & \frac{\kappa_{12.1}}{G_{12}} \\ \frac{-\mu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\mu_{32}}{E_3} & 0 & 0 & \frac{\kappa_{12.2}}{G_{12}} \\ \frac{-\mu_{13}}{E_1} & -\frac{\mu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & \frac{\kappa_{12.3}}{G_{12}} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & \frac{\eta_{31.23}}{G_{31}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\eta_{23.31}}{G_{23}} & \frac{1}{G_{31}} & 0 \\ \frac{\kappa_{1.12}}{E_1} & \frac{\kappa_{2.12}}{E_2} & \frac{\kappa_{3.12}}{E_3} & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{pmatrix}, \quad (18)$$

$$\frac{\mu_{lk}}{E_l} = \frac{\mu_{kl}}{E_k}, \quad \frac{\kappa_{i.kl}}{E_i} = \frac{\kappa_{kl.i}}{G_{kl}}, \quad \frac{\eta_{ik.lm}}{G_{ik}} = \frac{\eta_{lm.ik}}{G_{lm}}.$$

Здесь E_i — модули упругости первого рода; G_{ik} — модули упругости второго рода; μ_{lk} — коэффициенты Пуассона; $\kappa_{i.kl}$, $\kappa_{kl.i}$ — коэффициенты взаимного влияния; $\eta_{ik.lm}$ — коэффициенты Ченцова.

В качестве примера нестационарного воздействия рассмотрим два типа нагрузок — единичную сосредоточенную нагрузку вида (11) и равномерно распределенную по прямоугольной площадке с соотношением сторон $b/a = 5$ нагрузку вида (14), где $P(\tau) = 2 \sin(\tau)e^{-2\tau}$.

На рис. 2 для справки представлены характер изменения нагрузки во времени τ (слева) и ориентация площадки распределенной нагрузки относительно координат x_1 и x_2 соответственно в момент времени $\tau = 0.35$ (справа). Сосредоточенная нагрузка действует в центре координат.

3.1. Изотропная среда. Исследуем нестационарную динамику металлической пластины с модулем Юнга $E = 200$ ГПа и коэффициентом Пуассона $\mu = 0.3$. Коэффициенты взаимного влияния и коэффициенты Ченцова нулевые.

Компоненты тензора упругих постоянных согласно (17), (18) примут следующие значения (в Па):

$$C_{11} = 2.692 \cdot 10^{11}, \quad C_{12} = 1.154 \cdot 10^{11}, \quad C_{16} = 0,$$

$$C_{22} = 2.692 \cdot 10^{11}, \quad C_{66} = 7.692 \cdot 10^{10}, \quad C_{26} = 0.$$

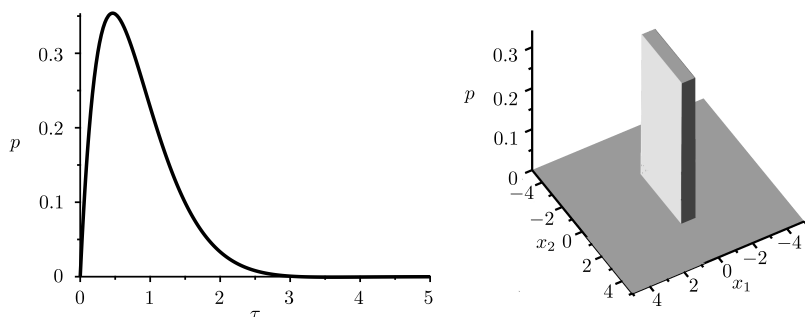


Рис. 2. Характер нагрузки [Figure 2. The nature of the load: the change in load over time τ (left); the orientation of the distributed load relative to the coordinates x_1 and x_2 at the time $\tau = 0.35$ (right)]

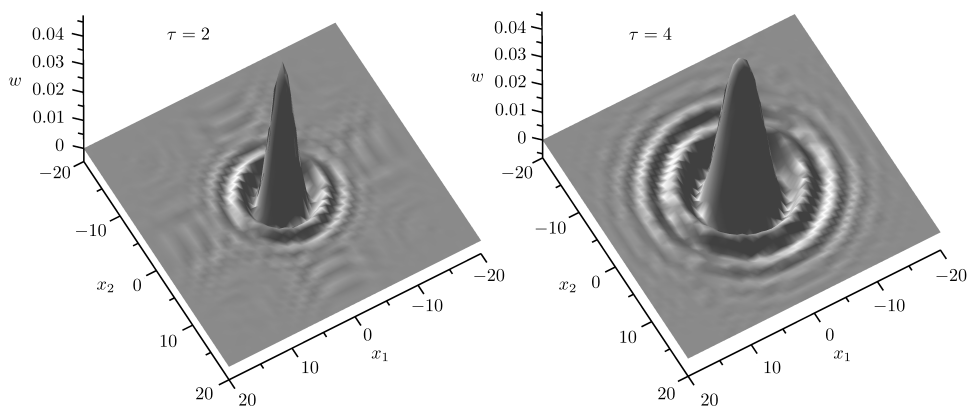


Рис. 3. Пространственные зависимости нестационарного прогиба изотропной пластины при воздействии сосредоточенной нагрузки в моменты времени $\tau = 2$ и $\tau = 4$ [Figure 3. Spatial dependences of unsteady deflection of an isotropic plate under the influence of a concentrated load at the times $\tau = 2$ and $\tau = 4$]

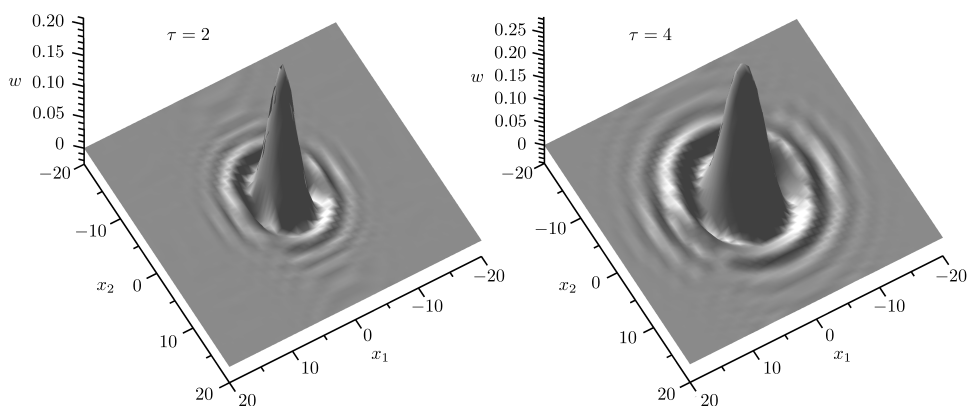


Рис. 4. Пространственные зависимости нестационарного прогиба изотропной пластины при воздействии распределенной нагрузки в моменты времени $\tau = 2$ и $\tau = 4$ [Figure 4. Spatial dependences of non-stationary deflection of an isotropic plate under the influence of distributed load at the times $\tau = 2$ and $\tau = 4$]

Соответствующие безразмерные упругие константы в (3) таковы:

$$C_1 = 1, \quad C_2 = 2, \quad C_3 = 0, \quad C_4 = 0. \quad (19)$$

На рис. 3 и 4 представлены пространственные зависимости нестационарного прогиба изотропной пластины при воздействии сосредоточенной и распределенной нагрузки соответственно.

3.2. Ортоотропная среда. Исследуем нестационарную динамику полимерной композитной пластины с симметричной относительно срединной плоскости схемой армирования. Приведенные характеристики пакета примем следующими (модули упругости в Па):

$$\begin{aligned} E_1 &= 1.21 \cdot 10^{11}, & E_2 &= 8.6 \cdot 10^9, & E_3 &= 8.6 \cdot 10^9, \\ G_{12} &= 4.7 \cdot 10^9, & G_{23} &= 3.1 \cdot 10^9, & G_{31} &= 4.7 \cdot 10^9, \\ \mu_{12} &= 0.27, & \mu_{23} &= 0.4, & \mu_{13} &= 0.27. \end{aligned}$$

Коэффициенты взаимного влияния и коэффициенты Ченцова нулевые. Компоненты тензора упругих постоянных согласно (17), (18) примут следующие значения (в Па):

$$\begin{aligned} C_{11} &= 1.231 \cdot 10^{11}, & C_{12} &= 3.938 \cdot 10^9, & C_{16} &= 0, \\ C_{22} &= 1.036 \cdot 10^{10}, & C_{66} &= 4.700 \cdot 10^9, & C_{26} &= 0. \end{aligned}$$

Соответствующие безразмерные упругие константы в (3) таковы:

$$C_1 = 0.084, \quad C_2 = 0.218, \quad C_3 = 0, \quad C_4 = 0. \quad (20)$$

На рис. 5 и 6 представлены пространственные зависимости нестационарного прогиба ортоотропной пластины при воздействии сосредоточенной и распределенной нагрузки соответственно.

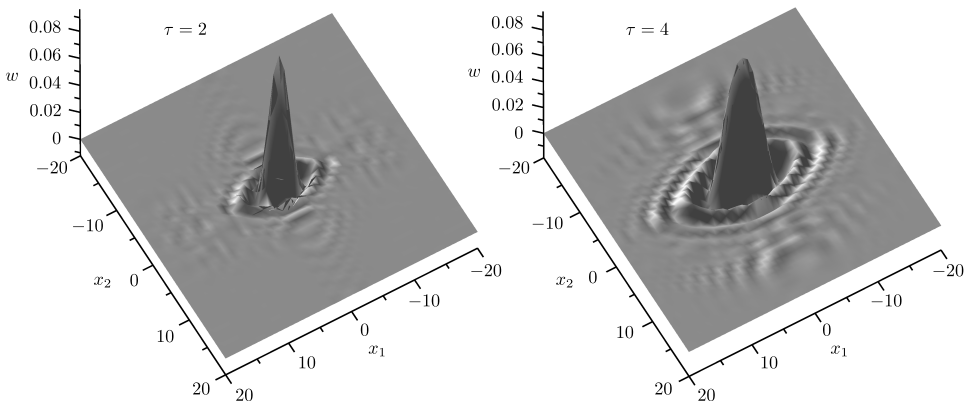


Рис. 5. Пространственные зависимости нестационарного прогиба ортоотропной пластины при воздействии сосредоточенной нагрузки в моменты времени $\tau = 2$ и $\tau = 4$

[Figure 5. Spatial dependences of unsteady deflection of an orthotropic plate under the influence of a concentrated load at the times $\tau = 2$ and $\tau = 4$]

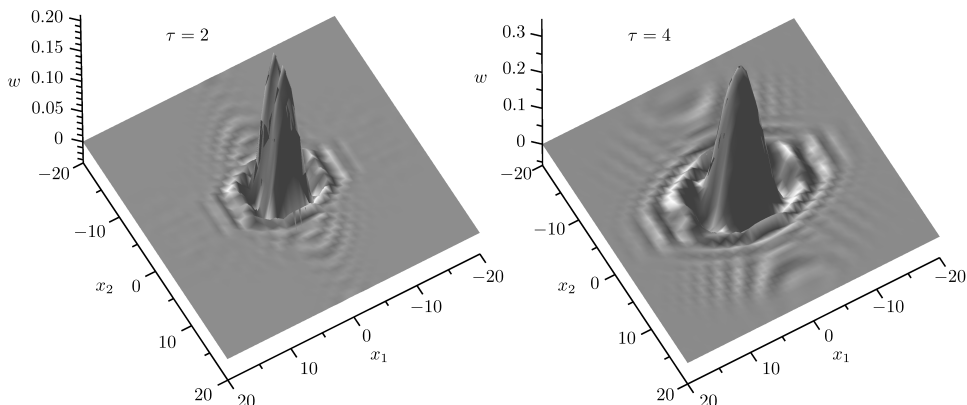


Рис. 6. Пространственные зависимости нестационарного прогиба ортотропной пластины при воздействии распределенной нагрузки в моменты времени $\tau = 2$ и $\tau = 4$

[Figure 6. Spatial dependences of unsteady deflection of an orthotropic plate under the influence of distributed load at the times $\tau = 2$ and $\tau = 4$]

3.3. Анизотропная среда. Исследуем нестационарный прогиб анизотропной пластины со следующими значениями упругих констант:

$$C_{11} = 9.699 \cdot 10^{10}, \quad C_{12} = 2.539 \cdot 10^{10}, \quad C_{16} = -2.299 \cdot 10^{10}, \\ C_{22} = 7.130 \cdot 10^{10}, \quad C_{66} = 3.799 \cdot 10^{10}, \quad C_{26} = -3.660 \cdot 10^{10}.$$

Соответствующие безразмерные упругие константы в (3) таковы:

$$C_1 = 0.735, \quad C_2 = 2.090, \quad C_3 = -0.948, \quad C_4 = -1.509. \quad (21)$$

На рис. 7 и 8 представлены пространственные зависимости нестационарного прогиба анизотропной пластины при воздействии сосредоточенной и распределенной нагрузки соответственно.

На рис. 3, 5 и 7 представлен класс решений (толщина и плотность материала безразмерны) для изотропных, ортотропных и анизотропных пластин при отношениях упругих постоянных согласно (19)–(21) в виде пространственных зависимостей прогиба пластин при воздействии сосредоточенной нагрузки, а на рис. 4, 6 и 8 — распределенной нагрузки в безразмерные моменты времени $\tau = 2$ и $\tau = 4$ соответственно.

Из рис. 3 видно, что в случае изотропного материала пластины прогиб обладает осевой симметрией. Изгибные колебания в полимерной композитной пластине на рис. 5 согласуются с особенностями ортотропной среды, а именно присутствуют две плоскости симметрии. Решение, полученное для анизотропного материала (см. рис. 7), демонстрирует асимметричную динамику колебаний.

Из результатов, представленных на рис. 4, 6 и 8, видно, что в случае воздействия на пластину распределенной по прямоугольной области нагрузки характер изгибных колебаний соответствует особенностям рассматриваемых вариантов симметрии упругих сред.

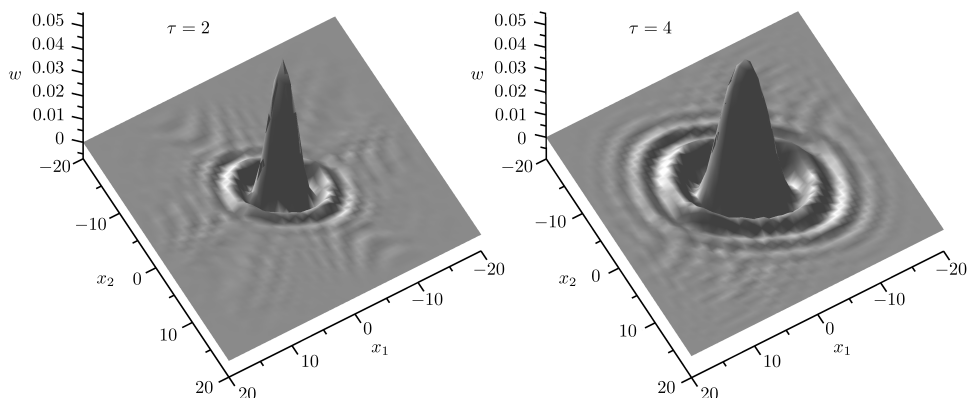


Рис. 7. Пространственные зависимости нестационарного прогиба анизотропной пластины при воздействии сосредоточенной нагрузки в моменты времени $\tau = 2$ и $\tau = 4$
 [Figure 7. Spatial dependences of unsteady deflection of an anisotropic plate under the influence of a concentrated load at the times $\tau = 2$ and $\tau = 4$]

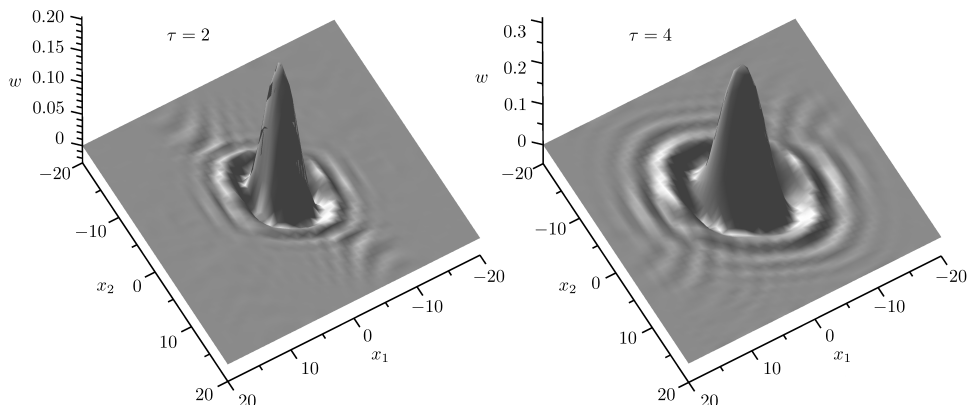


Рис. 8. Пространственные зависимости нестационарного прогиба анизотропной пластины при воздействии распределенной нагрузки в моменты времени $\tau = 2$ и $\tau = 4$
 [Figure 8. Spatial dependences of non-stationary deflection of an anisotropic plate under the influence of distributed load at the times $\tau = 2$ and $\tau = 4$]

Представленные на рис. 3–8 результаты демонстрируют универсальность построенных нестационарных функций прогибов (13) и (16) для анизотропной неограниченной пластины Кирхгофа в вопросе исследования нестационарной динамики и в частных случаях анизотропии материала пластины.

Реализация алгоритмов для соотношений (10), (13), (16) и построение приведенных изображений выполнено при помощи программного пакета системы компьютерной алгебры Maple.

Выводы. В работе представлен подход к построению фундаментального решения (функции Грина) применительно к анизотропной тонкой бесконечной пластине Кирхгофа. Полученное фундаментальное решение позволило выразить искомую функцию нестационарного прогиба в виде тройной свертки функции Грина с функцией нестационарной нагрузки. Найденная функция прогиба позволила исследовать пространственно-временное поведение

ние нестационарных колебаний в неограниченной пластине Кирхгофа с учетом анизотропии материала. В качестве примера рассмотрено воздействие на пластину нестационарной сосредоточенной и распределенной по прямоугольной области нагрузки для нескольких вариантов симметрии упругой среды (анизотропной, ортотропной и изотропной), чем продемонстрирована универсальность построенного решения. Для рассмотренных вариантов симметрии проведено исследование характера нестационарных колебаний, позволившее дать оценку адекватности решения.

Стоит отметить, что найденную функцию Грина возможно применить для исследования вынужденных нестационарных колебаний анизотропных пластин не только для равномерно распределенной по заданной области нагрузки, но и для произвольных случаев распределения нагрузки. Кроме того, и сама область воздействия в общем случае может быть произвольной.

Построенная нестационарная функция прогиба при переходе в размерные величины открывает возможности для выработки инженерных рекомендаций при решении прикладных задач, связанных с исследованием нестационарных перемещений, а также для анализа напряженного состояния при высокоскоростном нелинейном нагружении с учетом всевозможных вариантов анизотропии материала.

Конкурирующие интересы. Заявляем, что в отношении авторства и публикации этой статьи конфликта интересов не имеем.

Авторский вклад и ответственность. А.О. Сердюк — анализ литературы, реализация алгоритмов на компьютере, расчеты и визуализация результатов, черновик рукописи. Д.О. Сердюк — идея исследования, формулировка целей и задач исследования, анализ литературы, теоретический анализ, выполнение расчетов, анализ и верификация расчетов, черновик рукописи. Г.В. Федотенков — идея исследования, поиск методов решения, руководство и консультирование, чистовик рукописи. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 20–19–00217).

Библиографический список

1. Горшков А. Г., Медведский А. Л., Рабинский Л. Н., Тарлаковский Д. В. *Волны в сплошных средах*. М.: Физматлит, 2004. 472 с.
2. Моргачев К. С. Нестационарная динамика кольцевой пластины Тимошенко переменной толщины // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2007. № 2(15). С. 162–164. <https://doi.org/10.14498/vsgtu548>.
3. Дьяченко Ю. Г. *Нестационарная задача динамики пластин переменного сечения в уточненной постановке*: Автореф. ... дис. канд. физ.-мат. наук.. Саратов: Саратов. гос. ун-т, 2008. 19 с.
4. Шевченко В. П., Ветров О. С. Динамика ортотропной пластины под действием локальных внезапно приложенных нагрузок // *Труды ИПММ НАН Украины*, 2011. Т. 22. С. 207–215.
5. Михайлова Е. Ю., Федотенков Г. В. Нестационарная осесимметричная задача об ударе сферической оболочки по упругому полупространству (начальный этап взаимодействия) // *Изв. РАН. МТТ.*, 2011. № 2. С. 98–108.
6. Тарлаковский Д. В., Федотенков Г. В. Двумерный нестационарный контакт упругих цилиндрических или сферических оболочек // *Проблемы машиностроения и надежности машин*, 2014. № 2. С. 69–76.

7. Тарлаковский Д. В., Федотенков Г. В. Пространственное нестационарное движение упругой сферической оболочки // *Изв. РАН. МТТ*, 2015. № 2. С. 118–128.
8. Вестяк А. В., Игумнов Л. А., Тарлаковский Д. В., Федотенков Г. В. Воздействие нестационарного давления на тонкую сферическую оболочку с упругим наполнителем // *Вычислительная механика сплошных сред*, 2016. Т. 9, № 4. С. 443–452. <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2016.9.4.37>.
9. Fedotenkov G. V., Mikhailova E. Yu., Kuznetsova E. L., Rabinskiy L. N. Modeling the unsteady contact of spherical shell made with applying the additive technologies with the perfectly rigid stamp // *Int. J. Pure Appl. Math.*, 2016. vol. 111, no. 2. pp. 331–342. <https://doi.org/10.12732/ijpam.v111i2.16>.
10. Mikhailova E. Yu., Tarlakovskii D. V., Fedotenkov G. V. Transient contact problem for spherical shell and elastic half-space / *Shell Structures: Theory and Applications*. vol. 4. London: CRC Press, 2017. pp. 301–304. <https://doi.org/10.1201/9781315166605-67>.
11. Mikhailova E. Yu., Tarlakovskii D. V., Fedotenkov G. V. The impact of liquid filled concentric spherical shells with a rigid wall / *Shell Structures: Theory and Applications*. vol. 4. London: CRC Press, 2017. pp. 305–308. <https://doi.org/10.1201/9781315166605-68>.
12. Mikhailova E. Yu., Tarlakovskii D. V., Fedotenkov G. V. Transient contact problem for liquid filled concentric spherical shells and a rigid barrier / *Proceedings of the First International Conference on Theoretical, Applied and Experimental Mechanics*. vol. 5. Cham: Springer, 2019. pp. 385–386. https://doi.org/10.1007/978-3-319-91989-8_92.
13. Fedotenkov G. V., Kalinchuk V. V., Mitin A. Y. Three-Dimensional non-stationary motion of Timoshenko-type circular cylindrical shell // *Lobachevskii J. Math.*, 2019. vol. 40, no. 3. pp. 311–320. <https://doi.org/10.1134/S1995080219030107>.
14. Локтева Н. А., Сердюк Д. О., Скопинцев П. Д. Нестационарная динамика тонких анизотропных упругих цилиндрических оболочек / *Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред: материалы XXVI Междунар. симп. им. А. Г. Горшкова*. Т. 2. М., 2020. С. 90–91.
15. Okonechnikov A. S., Tarlakovski D. V., Ul'yashina A. N., Fedotenkov G. V. Transient reaction of an elastic half-plane on a source of a concentrated boundary disturbance // *IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng.*, 2016. vol. 158, 012073. <https://doi.org/10.1088/1757-899X/158/1/012073>.
16. Okonechnikov A. S., Tarlakovsky D. V., Fedotenkov G. V. Transient interaction of rigid indenter with elastic half-plane with adhesive force // *Lobachevskii J. Math.*, 2019. vol. 40, no. 4. pp. 489–498. <https://doi.org/10.1134/S1995080219040115>.
17. Михайлова Е. Ю., Тарлаковский Д. В., Федотенков Г. В. *Упругие пластины и пологие оболочки*. М.: МАИ, 2018. 92 с.
18. Тарлаковский Д. В., Федотенков Г. В. *Общие соотношения и вариационные принципы математической теории упругости*. М.: МАИ-Принт, 2009. 112 с.
19. Сердюк А. О., Сердюк Д. О., Федотенков Г. В. Функция Грина для неограниченной тонкой анизотропной пластины / *Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред: материалы XXVI Междунар. симп. им. А. Г. Горшкова*. Т. 2. М., 2020. С. 106–108.
20. Сердюк А. О., Сердюк Д. О., Федотенков Г. В. Функция влияния для пластины с произвольной анизотропией материала / *Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред: материалы XXVI Междунар. симп. им. А. Г. Горшкова*. Т. 2. М., 2020. С. 108–110.
21. Doetsch G. *Introduction to the theory and application of the Laplace transformation*. Berlin: Springer Verlag, 1974. vii+326 pp.
22. Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. *Численные методы*. М.: Наука, 1975. 630 с.
23. Ашкенази Е. К. *Анизотропия древесины и древесных материалов*. М.: Лесн. пром., 1978. 224 с.

MSC: 74H45, 74S99, 74K99

Unsteady bending function for an unlimited anisotropic plate

© A. O. Serdyuk¹, D. O. Serdyuk¹, G. V. Fedotenkov^{1,2}¹ Moscow Aviation Institute (National Research University),
4, Volokolamskoe Shosse, Moscow, 125993, Russian Federation.² Lomonosov Moscow State University,
Institute of Mechanics,
1, Michurinsky prospekt, Moscow, 119192, Russian Federation.


Abstract

This work is devoted to the study of non-stationary vibrations of a thin anisotropic unbounded Kirchhoff plate under the influence of random non-stationary loads.

The approach to the solution is based on the principle of superposition and the method of influence functions (the so-called Green functions), the essence of which is to link the desired solution to the load using an integral operator of the type of convolution over spatial variables and over time. The convolution core is the Green function for the anisotropic plate, which represents normal displacements in response to the impact of a single concentrated load in coordinates and time, mathematically described by the Dirac delta functions. Direct and inverse integral transformations of Laplace and Fourier are used to construct the Green function. The inverse integral Laplace transform is found analytically. The inverse two-dimensional integral Fourier transform is found numerically by integrating rapidly oscillating functions. The obtained fundamental solution allowed us to present the desired non-stationary deflection in the form of a triple convolution in spatial coordinates and time of the Green function with the non-stationary load function. The rectangle method is used to calculate the convolution integral and construct the desired solution.

The found deflection function makes it possible to study the space-time propagation of non-stationary waves in an unbounded Kirchhoff plate for

Research Article

 The content is published under the terms of the [Creative Commons Attribution 4.0 International License](http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Serdyuk A. O., Serdyuk D. O., Fedotenkov G. V. Unsteady bending function for an unlimited anisotropic plate, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2021, vol. 25, no. 1, pp. 111–126. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1793> (In Russian).

Authors' Details:

Alexander O. Serdyuk  <https://orcid.org/0000-0002-2109-7900>

Postgraduate Student; Dep. of Materials Resistance, Dynamics and Machine Strength;
e-mail: serduksaha@yandex.ru

Dmitry O. Serdyuk  <https://orcid.org/0000-0003-0082-1856>

PhD, Cand. Techn. Sci.; Associate Professor; Dep. of Materials Resistance, Dynamics and Machine Strength; e-mail: d.serduk55@gmail.com

Grigory V. Fedotenkov  <https://orcid.org/0000-0002-9556-7442>

PhD, Cand. Phys. & Math. Sci.; Associate Professor; Dep. of Materials Resistance, Dynamics and Machine Strength¹; Senior Researcher; Lab. of Dynamic Tests²; e-mail: greghome@mail.ru

various versions of the symmetry of the elastic medium: anisotropic, orthotropic, transversally isotropic, and isotropic. Examples of calculations are presented.

Keywords: non-stationary dynamics, anisotropic material, Green function, non-stationary deflection, Kirchhoff plate, integral transforms, quadrature formulas, rectangle method, rapidly oscillating functions.

Received: 28th June, 2020 / Revised: 3rd February, 2021 /

Accepted: 8th February, 2021 / First online: 12th February, 2021

Competing interests. We declare that we have no conflicts of interest in the authorship and publication of this article.

Authors' contributions and responsibilities. A.O. Serdyuk: Literature review; Implementation of the computer algorithms; Performing calculations and visualizing results; Writing — original draft. D.O. Serdyuk: Idea of study; Formulation of research goals and aims; Literature review; Theoretical analysis; Performing calculations, their analysis and verification; Writing — original draft. G.V. Fedotenkov: Idea of study; Search for methods of solution; Supervision and consulting; Writing — review & editing. The authors are absolutely responsible for submitting the final manuscript in print. Each author has approved the final version of manuscript.

Funding. This work was supported by the Russian Science Foundation (project 20–19–00217).

References

1. Gorshkov A. G., Medvedskii A. L., Rabinskii L. N., Tarlakovskii D. V. *Volny v sploshnykh sredakh* [Waves in Continuous Media]. Moscow, Fizmatlit, 2004, 472 pp. (In Russian)
2. Morgachev K. S. Non-stationary dynamics of Timoshenko circular plate of variable thickness, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2007, no.2(15), pp. 162–164 (In Russian). <https://doi.org/10.14498/vsgtu548>.
3. Dyachenko Yu. G. *The unsteady problem of variable section plate dynamics in a refined formulation*, Thesis of Dissertation (Cand. Phys. & Math. Sci.). Saratov, Saratov State Univ., 2008, 19 pp. (In Russian)
4. Shevchenko V. P., Vetrov S. O. The dynamics of an orthotropic plate under the action of local suddenly applied loads, *Trudy Inst. Prikl. Mat. Mekh.*, 2011, vol.22, pp. 207–215 (In Russian).
5. Mikhailova E. Yu., Fedotenkov G. V. Nonstationary axisymmetric problem of the impact of a spherical shell on an elastic half-space (initial stage of interaction), *Mech. Solids*, 2011, vol.46, no.2, pp. 239–247. <https://doi.org/10.3103/S0025654411020129>.
6. Tarlakovskii D. V., Fedotenkov G. V. Two-dimensional nonstationary contact of elastic cylindrical or spherical shells, *J. Mach. Manuf. Reliab.*, 2014, vol.43, no.2, pp. 145–152. <https://doi.org/10.3103/S1052618814010178>.
7. Tarlakovskii D. V., Fedotenkov G. V. Nonstationary 3D motion of an elastic spherical shell, *Mech. Solids*, 2015, vol.50, no.2, pp. 208–217. <https://doi.org/10.3103/S0025654415020107>.
8. Vestyak A. V., Igumnov L. A., Tarlakovskii D. V., Fedotenkov G. V. The influence of non-stationary pressure on a thin spherical shell with an elastic filler, *Computational Continuum Mechanics*, 2016, vol.9, no.4, pp. 443–452 (In Russian). <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2016.9.4.37>.
9. Fedotenkov G. V., Mikhailova E. Yu., Kuznetsova E. L., Rabinskiy L. N. Modeling the unsteady contact of spherical shell made with applying the additive technologies with the

- perfectly rigid stamp, *Int. J. Pure Appl. Math.*, 2016, vol. 111, no. 2, pp. 331–342. <https://doi.org/10.12732/ijpam.v111i2.16>.
10. Mikhailova E. Yu., Tarlakovskii D. V., Fedotenkov G. V. Transient contact problem for spherical shell and elastic half-space, In: *Shell Structures: Theory and Applications*, vol. 4. London, CRC Press, 2017, pp. 301–304. <https://doi.org/10.1201/9781315166605-67>.
 11. Mikhailova E. Yu., Tarlakovskii D. V., Fedotenkov G. V. The impact of liquid filled concentric spherical shells with a rigid wall, In: *Shell Structures: Theory and Applications*, vol. 4. London, CRC Press, 2017, pp. 305–308. <https://doi.org/10.1201/9781315166605-68>.
 12. Mikhailova E. Yu., Tarlakovskii D. V., Fedotenkov G. V. Transient contact problem for liquid filled concentric spherical shells and a rigid barrier, In: *Proceedings of the First International Conference on Theoretical, Applied and Experimental Mechanics*, vol. 5. Cham, Springer, 2019, pp. 385–386. https://doi.org/10.1007/978-3-319-91989-8_92.
 13. Fedotenkov G. V., Kalinchuk V. V., Mitin A. Y. Three-Dimensional non-stationary motion of Timoshenko-type circular cylindrical shell, *Lobachevskii J. Math.*, 2019, vol. 40, no. 3, pp. 311–320. <https://doi.org/10.1134/S1995080219030107>.
 14. Lokteva N. A., Serdyuk D. O., Skopintsev P. D. Unsteady dynamics of thin anisotropic elastic cylindrical shells, In: *Dynamic and Technological Problems of Mechanics of Structures and Continuous Media*, vol. 2. Moscow, 2020, pp. 90–91 (In Russian).
 15. Okonechnikov A. S., Tarlakovski D. V., Ul'yashina A. N., Fedotenkov G. V. Transient reaction of an elastic half-plane on a source of a concentrated boundary disturbance, *IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng.*, 2016, vol. 158, 012073. <https://doi.org/10.1088/1757-899X/158/1/012073>.
 16. Okonechnikov A. S., Tarlakovsky D. V., Fedotenkov G. V. Transient interaction of rigid indenter with elastic half-plane with adhesive force, *Lobachevskii J. Math.*, 2019, vol. 40, no. 4, pp. 489–498. <https://doi.org/10.1134/S1995080219040115>.
 17. Mikhailova E. Yu., Tarlakovskii D. V., Fedotenkov G. V. *Uprugie plastiny i pologie obolochki* [Elastic Plates and Shallow Shells]. Moscow, Moscow Aviation Inst., 2018, 92 pp. (In Russian)
 18. Tarlakovskii D. V., Fedotenkov G. V. *Obshchie sootnosheniia i variatsionnye printsipy matematicheskoi teorii uprugosti* [General Relations and Variational Principles of the Mathematical Theory of Elasticity]. Moscow, MAI-Print, 2009, 112 pp. (In Russian)
 19. Serdyuk A. O., Serdyuk D. O., Fedotenkov G. V. Green's function for an unbounded thin anisotropic plate, In: *Dynamic and Technological Problems of Mechanics of Structures and Continuous Media*, vol. 2. Moscow, 2020, pp. 106–108 (In Russian).
 20. Serdyuk A. O., Serdyuk D. O., Fedotenkov G. V. Influence function for a plate with arbitrary material anisotropy, In: *Dynamic and Technological Problems of Mechanics of Structures and Continuous Media*, vol. 2. Moscow, 2020, pp. 108–110 (In Russian).
 21. Doetsch G. *Introduction to the theory and application of the Laplace transformation*. Berlin, Springer Verlag, 1974, vii+326 pp.
 22. Bakhvalov N. S., Zhidkov N. P., Kobel'kov G. M. *Chislennye metody* [Numerical Methods]. Moscow, Nauka, 1975, 630 pp. (In Russian)
 23. Ashkenazi E. K. *Anizotropiia drevesiny i drevesnykh materialov* [Anisotropy of Wood and Wood Materials]. Moscow, Lesn. Prom., 1978, 224 pp. (In Russian)