Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2021. Т. 25, № 1. С. 35–50
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1835

УДК 517.956.6

Нелокальная краевая задача Трикоми для дифференциально-разностного уравнения смешанного типа

© *А. Н. Зарубин*

Орловский государственный университет имени И. С. Тургенева,
Россия, 302026, Орел, Улица Комсомольская, 95.

Аннотация

Исследуется краевая задача Трикоми для дифференциально-разностного опережающе-запаздывающего уравнения смешанного типа с некарлемановскими отклонениями по всем аргументам искомой функции. Применена редукция к уравнению смешанного типа без отклонений. Используются симметричные попарно коммутативные матрицы коэффициентов уравнения. Доказаны теоремы единственности и существования. Задача однозначно разрешима.

Ключевые слова: уравнение смешанного типа, дифференциально-разностное уравнение, интегральное уравнение, сингулярное интегральное уравнение, сосредоточенное запаздывание и опережение.

Получение: 5 ноября 2020 г. / Исправление: 13 февраля 2021 г. /
Принятие: 22 февраля 2021 г. / Публикация онлайн: 10 марта 2021 г.

Введение. Дифференциально-разностные уравнения (как обыкновенные, так и с частными производными, с сосредоточенным карлемановским или некарлемановским запаздыванием и опережением) служат математическими моделями для многих прикладных задач таких как, вихреобразование, перемежаемость, формирование сложных когерентных пятен [1]; многослойные оболочки и пластины [2]; плазма [3]; колебания кристаллической решетки [4]; проблема оптимизации лечения онкологических заболеваний [5].

Данная работа посвящена изучению краевой задачи Трикоми для нелокального уравнения смешанного типа Лаврентьева—Бицадзе с сосредоточенным запаздыванием и опережением по всем аргументам искомой функции вида

Научная статья

Образец для цитирования
Зарубин А. Н. Нелокальная краевая задача Трикоми для дифференциально-разностного уравнения смешанного типа // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2021. Т. 25, № 1. С. 35–50. https://doi.org/10.14498/vsgtu1835.

Сведения об авторе
Александр Николаевич Зарубин https://orcid.org/0000-0002-0611-5752
доктор физико-математических наук, профессор; заведующий кафедрой; каф. математического анализа и дифференциальных уравнений; e-mail: aleks_zarubin@mail.ru; matdiff@yandex.ru

$$\sum_{k=-1}^{1}\sum_{n=-1}^{1} H\big((-1)^{(k-1)/2}k(y+(k-1)h/2)\big)\times$$
$$\times\left[(\operatorname{sgn} y)b_{n+1,k+1}U_{yy}(x+n\tau,y+kh)+a_{n+1,k+1}U_{xx}(x-n\tau,y+kh)\right]=0 \quad (1)$$

в области $D=D^+\cup D^-\cup I^0$, где

$$D^+=\big\{(x,y):0<x<3\tau,0<y<2h\big\}=\bigcup_{k=0}^{2}\Big(\bigcup_{j=0}^{1}D^+_{kj}\Big),$$

и

$$D^-=\bigcup_{k=0}^{2}D^-_{k0}=\bigcup_{k=0}^{2}\Big(\bigcup_{j=0}^{1}D^{\gamma_{j0}}_{k0}\Big)$$

— эллиптическая и гиперболическая части области D, причем

$$D^+_{kj}=\big\{(x,y):k\tau<x<(k+1)\tau, jh<y<(j+1)h\big\},\quad k=-\overline{1,3},\ \ j=0,1,2;$$

$0<\tau,\ h,\ a_{n+1,k+1},\ b_{n+1,k+1}\equiv\text{const}$; $H(\zeta)$ — функция Хевисайда; $D^{\gamma_{j0}}_{k0}=\big\{(x,y):-y\gamma_{j0}+k\tau<x<y\gamma_{j0}+(k+1)\tau;-\tau/2\gamma_{j0}<y<0\big\}$, $k=-\overline{1,3}$, $j=0,1$; γ^2_{jk} — собственные значения матрицы коэффициентов уравнения (1).

Пусть $D_k=D^-_{k0}\bigcup\limits_{j=0}^{1}D^+_{kj}\bigcup\limits_{l=0}^{1}I^l_k$, $k=-\overline{1,3}$, где

$$I^l=\bigcup_{k=0}^{2}I^l_k,\quad I^l_k=\big\{(x,y):k\tau<x<(k+1)\tau,y=lh\big\},\quad l=0,1,$$

а

$$J=\bigcup_{k=0}^{1}J_k,\quad J_k=\big\{(x,y):x=(k+1)\tau,0<y<2h\big\}.$$

Тогда $D=\bigcup\limits_{k=0}^{2}D_k\bigcup\limits_{j=0}^{1}J_j$.

1. Постановка задачи. Редукция. Дифференциально-разностное уравнение смешанного типа (1) запишем в виде

$$\sum_{k=-1}^{1}H\big((-1)^{(k-1)/2}k(y+(k-1)h/2)\big)\times$$
$$\times\big\{(\operatorname{sgn} y)\big[b_{0(k+1)}U_{yy}(x-\tau,y+kh)+b_{1(k+1)}U_{yy}(x,y+kh)+$$
$$+b_{2(k+1)}U_{yy}(x+\tau,y+kh)\big]+$$
$$+\big[a_{0(k+1)}U_{xx}(x+\tau,y+kh)+a_{1(k+1)}U_{xx}(x,y+kh)+$$
$$+a_{2(k+1)}U_{xx}(x-\tau,y+kh)\big]\big\}=0,\quad (x,y)\in D. \quad (2)$$

Задача T. *В области* $D=\bigcup\limits_{k=0}^{2}D_k\bigcup J$ *найти решение* $U(x,y)\in C(\overline{D})\bigcap$ $\bigcap C^2\Big(D\backslash\Big(J\bigcup\limits_{l=0}^{1}I^l\Big)\Big)$ *уравнения* (2), *удовлетворяющее следующим условиям:*

$$U(x,y)=r(x,y),\quad (x,y)\in\overline{D}_{-1}; \quad (3)$$

$$U(x,y)=\rho(x,y), \quad (x,y)\in\overline{D}_3; \tag{4}$$

$$U(x,y)=\delta(x,y), \quad (x,y)=\overline{\bigcup_{k=0}^{2} D_{k2}^{+}}; \tag{5}$$

$$U(x,(k\tau-x)/\gamma_{j0})=\psi_{kj}(x),\ k\tau\leqslant x\leqslant(2k+1)\tau/2,\ j=0,1,\ k=0,1,2, \tag{6}$$

и условиям сопряжения

$$U(x,0-)=U(x,0+)=\omega(x), \quad 0\leqslant x\leqslant 3\tau;$$
$$U_y(x,0-)=U_y(x,0+)=\nu(x), \quad 0<x<3\tau,\ x\neq\tau,2\tau.$$

Причем

$$\psi_{0j}(0)=r(0,0), \quad r(0,2h)=\delta(0,2h), \quad \rho(3\tau,2h)=\delta(3\tau,2h),$$
$$r(0,y)=\rho(3\tau,y), \quad 0\leqslant y\leqslant 2h;$$

γ_{jk}^2 — *собственные значения матрицы коэффициентов уравнения* (2), $j=0,1$, $k=0,1,2$; $r(x,y)$, $\rho(x,y)$, $\delta(x,y)$, $\psi_{kj}(x)$ — *заданные непрерывные достаточно гладкие функции;* $\omega(x)$, $\nu(x)$ — *функции, подлежащие определению в процессе решения задачи* T.

Теорема 1. *Если*

$$r(x,y)\in C(\overline{D}_{-1})\bigcap C^4(D_{-1}); \quad \rho(x,y)\in C(\overline{D}_2)\bigcap C^4(D_2);$$

$$\delta(x,y)\in C\Bigl(\overline{\bigcup_{k=0}^{2} D_{k2}^{+}}\Bigr)\bigcap C^4\Bigl(\bigcup_{k=0}^{2} D_{k2}^{+}\Bigr);$$

$$\psi_{kj}(x)\in C\,[k\tau,(2k+1)\tau/2]\bigcap C^2(k\tau,(2k+1)\tau/2), \quad k=0,1,2,\ j=0,1;$$

$r(0,y)=\rho(3\tau,y)$, $0\leqslant y\leqslant 2h$; $r(0,0)=\psi_{0j}(0)$; $r(0,2h)=\delta(0,2h)$; $\rho(3\tau,2h)=$ $=\delta(3\tau,2h)$, *то существует единственное решение задачи* T.

Для *доказательства* теоремы произведем редукцию опережающе-запаздывающего уравнения смешанного типа (2) сначала к системе трех уравнений смешанного типа без отклонений по переменной x, а затем к системе шести уравнений смешанного типа без отклонений и по аргументу y.

В терминах функций

$$U_k(x,y)=U(x,y), \quad (x,y)\in D_k, \quad k=-\overline{1,3}, \tag{7}$$

учитывая (3), (4), переводя D_k заменой x на $x+k\tau$ $(k=0,1,2)$ в D_0 и используя вектор

$$\overline{U}(x,y)=\bigl(U_0(x,y),U_1(x+\tau,y),U_2(x+2\tau,y)\bigr)^{\top}, \quad (x,y)\in D_0, \tag{8}$$

запишем уравнение (2) в областях D_k $(k=0,1,2)$ в форме

$$\sum_{k=-1}^{1} H\bigl((-1)^{(k-1)/2}k(y+(k-1)h/2)\bigr)\times$$
$$\times\bigl\{(\operatorname{sgn}y)B_k\overline{U}_{yy}(x,y+kh)+A_k\overline{U}_{xx}(x,y+kh)\bigr\}=$$

$$= -\sum_{k=-1}^{1} H\big((-1)^{(k-1)/2}k(y+(k-1)h/2)\big)\times$$
$$\times\left\{(\operatorname{sgn} y)B_k^0\overline{m}_{yy}(x,y+kh)+A_k^0\overline{m}_{xx}(x,y+kh)\right\},\quad (x,y)\in D_0,\quad (9)$$

где

$$B_k=\begin{pmatrix} b_{1(k+1)} & b_{2(k+1)} & 0\\ b_{0(k+1)} & b_{1(k+1)} & b_{2(k+1)}\\ 0 & b_{0(k+1)} & b_{1(k+1)}\end{pmatrix},\quad A_k=\begin{pmatrix} a_{1(k+1)} & a_{0(k+1)} & 0\\ a_{2(k+1)} & a_{1(k+1)} & a_{0(k+1)}\\ 0 & a_{2(k+1)} & a_{1(k+1)}\end{pmatrix},$$

$$\overline{m}(x,y+kh)=\big(r(x-\tau,y+kh),0,\rho(x+3\tau,y+kh)\big)^{\top},$$

причем

$$B_k^0=\begin{pmatrix} b_{0(k+1)} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & b_{2(k+1)}\end{pmatrix},\quad A_k^0=\begin{pmatrix} a_{2(k+1)} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & a_{0(k+1)}\end{pmatrix}.$$

Когда $b_{2(k+1)}=b_{0(k+1)}$, $b_{1(k+1)}>\sqrt{2}b_{0(k+1)}>0$, $a_{2(k+1)}=a_{0(k+1)}$, $a_{1(k+1)}>$ $>\sqrt{2}a_{0(k+1)}>0$, матрицы B_k, A_k симметричны и попарно коммутативны. Поэтому [6] существует невырожденная матрица T такая, что

$$T^{-1}B_kT=\Lambda_{B_k}=\begin{pmatrix}\alpha^2_{0(k+1)} & 0 & 0\\ 0 & \alpha^2_{1(k+1)} & 0\\ 0 & 0 & \alpha^2_{2(k+1)}\end{pmatrix},$$

где $\alpha^2_{j(k+1)}=b_{1(k+1)}-(-1)^j j\sqrt{2}b_{0(k+1)}2^{1-j}$ $(j=\overline{0,2};\ k=-\overline{1,1})$ — собственные значения матрицы B_k;

$$T^{-1}A_kT=\Lambda_{A_k}=\begin{pmatrix}\beta^2_{0(k+1)} & 0 & 0\\ 0 & \beta^2_{1(k+1)} & 0\\ 0 & 0 & \beta^2_{2(k+1)}\end{pmatrix},$$

где $\beta^2_{j(k+1)}=a_{1(k+1)}-(-1)^j j\sqrt{2}a_{0(k+1)}2^{1-j}$ $(j=\overline{0,2};\ k=-\overline{1,1})$ — собственные значения матрицы A_k. При этом

$$T=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2}\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix},\quad T^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}2 & 0 & -2\\ 1 & \sqrt{2} & 1\\ 1 & -\sqrt{2} & 1\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}\overline{P}_0\\ \overline{P}_1\\ \overline{P}_2\end{pmatrix}.$$

Умножая слева матричное уравнение (9) на T^{-1} и учитывая соотношения

$$T^{-1}B_k=\Lambda_{B_k}T^{-1},\quad T^{-1}A_k=\Lambda_{A_k}T^{-1},$$

$$T^{-1}B_k^0\overline{m}=b_{0(k+1)}T^{-1}\overline{m},\quad T^{-1}A_k^0\overline{m}=a_{0(k+1)}T^{-1}\overline{m},$$

после преобразований получим три отдельных опережающе-запаздывающих только по переменной y уравнения смешанного типа:

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=-1}^{1} H\big((-1)^{(k-1)/2}k(y+(k-1)h/2)\big)\times\\
&\quad\times\big\{(\operatorname{sgn} y)\alpha_{j(k+1)}^2\langle\overline{P}_j,\overline{U}(x,y+kh)\rangle_{yy}+\beta_{j(k+1)}^2\langle\overline{P}_j,\overline{U}(x,y+kh)\rangle_{xx}\big\}=\\
&=-\sum_{k=-1}^{1} H\big((-1)^{(k-1)/2}k(y+(k-1)h/2)\big)\times\\
&\qquad\qquad\times\big\{(\operatorname{sgn} y)b_{0(k+1)}\langle\overline{P}_j,\overline{m}(x,y+kh)\rangle_{yy}+\\
&\qquad\qquad\qquad+a_{0(k+1)}\langle\overline{P}_j,\overline{m}(x,y+kh)\rangle_{xx}\big\},\quad (x,y)\in D_0,
\end{aligned}\tag{10}$$

где $\langle\overline{P}_j,\overline{U}\rangle$, $\langle\overline{P}_j,\overline{m}\rangle$ — скалярное произведение векторов, $j=0,1,2$; область $D_0=D_{00}^-\bigcup D_{00}^+\bigcup D_{01}^+$.

Уравнение (10) в области D_{00}^- является гиперболическим без отклонений аргументов x и y:

$$\begin{aligned}
&-\alpha_{j1}^2\langle\overline{P}_j,\overline{U}(x,y)\rangle_{yy}+\beta_{j1}^2\langle\overline{P}_j,\overline{U}(x,y)\rangle_{xx}=\\
&\quad=b_{01}\langle\overline{P}_j,\overline{m}(x,y)\rangle_{yy}-a_{01}\langle\overline{P}_j,\overline{m}(x,y)\rangle_{xx},\quad (x,y)\in D_{00}^-,\ \ j=0,1,2,
\end{aligned}\tag{11}$$

причем, так же как в (8), (7), будем считать

$$\begin{aligned}
&\overline{U}(x,y)=\big(U_{00}(x,y),U_{10}(x+\tau,y),U_{20}(x+2\tau,y)\big)^\top,\\
&\overline{U}(x,y+h)=\big(U_{01}(x,y+h),U_{11}(x+\tau,y+h),U_{21}(x+2\tau,y+h)\big)^\top
\end{aligned}\tag{12}$$

при $(x,y)\in D_{00}$. Здесь

$$U_{kj}(x,y)=U_k(x,y)=U(x,y),\quad (x,y)\in D_{kj},\ \ k=0,1,2,\ \ j=0,1.\tag{13}$$

В терминах функций (13), (12), учитывая (5) и переводя D_{0k}^+ заменой y на $y+kh$ $(k=0,1)$ в D_{00}^+, запишем уравнение (10) в областях D_{0k}^+ $(k=0,1)$ в виде системы

$$\begin{aligned}
&M\begin{pmatrix}\langle\overline{P}_j,\overline{U}(x,y)\rangle\\ \langle\overline{P}_j,\overline{U}(x,y+h)\rangle\end{pmatrix}_{yy}+N\begin{pmatrix}\langle\overline{P}_j,\overline{U}(x,y)\rangle\\ \langle\overline{P}_j,\overline{U}(x,y+h)\rangle\end{pmatrix}_{xx}=\\
&\qquad=-M_0\begin{pmatrix}\langle\overline{P}_j,\overline{m}(x,y)\rangle\\ \langle\overline{P}_j,\overline{m}(x,y+h)\rangle\end{pmatrix}_{yy}+N_0\begin{pmatrix}\langle\overline{P}_j,\overline{m}(x,y)\rangle\\ \langle\overline{P}_j,\overline{m}(x,y+h)\rangle\end{pmatrix}_{xx}-\\
&\quad-H(y)\alpha_{j2}^2\begin{pmatrix}0\\ \langle\overline{P}_j,\overline{U}^\delta(x,y+2h)\rangle\end{pmatrix}_{yy}-H(y)\beta_{j2}^2\begin{pmatrix}0\\ \langle\overline{P}_j,\overline{U}^\delta(x,y+2h)\rangle\end{pmatrix}_{xx}-\\
&\quad\ -H(y)b_{02}\begin{pmatrix}0\\ \langle\overline{P}_j,\overline{m}(x,y+2h)\rangle\end{pmatrix}_{yy}-H(y)a_{02}\begin{pmatrix}0\\ \langle\overline{P}_j,\overline{m}(x,y+2h)\rangle\end{pmatrix}_{xx},\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (x,y)\in D_{00}^+,\ \ j=0,1,2,
\end{aligned}\tag{14}$$

где, согласно (12), (13), (5),

$$\overline{U}^{\delta}(x,y{+}2h) = \bigl(\delta(x,y+2h),\delta(x+\tau,y+2h),\delta(x+2\tau,y+2h)\bigr)^{\top}, \quad (x,y)\in D_{00}^{+},$$

причем

$$M=\begin{pmatrix}\alpha_{j1}^2 & H(y)\alpha_{j2}^2\\ H(y)\alpha_{j0}^2 & \alpha_{j1}^2\end{pmatrix}, \quad N=\begin{pmatrix}\beta_{j1}^2 & H(y)\beta_{j2}^2\\ H(y)\beta_{j0}^2 & \beta_{j1}^2\end{pmatrix},$$

а

$$M_0=\begin{pmatrix}b_{01} & H(y)b_{02}\\ H(y)b_{00} & b_{01}\end{pmatrix}, \quad N_0=\begin{pmatrix}a_{01} & H(y)a_{02}\\ H(y)a_{00} & a_{01}\end{pmatrix}.$$

При $\alpha_{j2}^2=\alpha_{j0}^2$, $\beta_{j2}^2=\beta_{j1}^2$ (в этом случае $b_{02}=b_{00}$, $a_{02}=a_{00}$) матрицы M и N (матрицы M_0 и N_0) симметричны и попарно коммутативны. Поэтому [6] существует невырожденная матрица Q такая, что

$$Q^{-1}MQ=\Lambda_M=\begin{pmatrix}\alpha_{j1}^2+H(y)\alpha_{j0}^2 & 0\\ 0 & \alpha_{j1}^2-H(y)\alpha_{j0}^2\end{pmatrix},$$

где $\alpha_{j1}^2+(-1)^k\alpha_{j0}^2$ $(k=0,1)$ — собственные значения матрицы M;

$$Q^{-1}NQ=\Lambda_N=\begin{pmatrix}\beta_{j1}^2+H(y)\beta_{j0}^2 & 0\\ 0 & \beta_{j1}^2-H(y)\beta_{j0}^2\end{pmatrix},$$

где $\beta_{j1}^2+(-1)^k\beta_{j0}^2$ $(k=0,1)$ — собственные значения матрицы N;

$$Q^{-1}M_0Q=\Lambda_{M_0}=\begin{pmatrix}b_{01}+H(y)b_{00} & 0\\ 0 & b_{01}-H(y)b_{00}\end{pmatrix},$$

где $b_{01}+(-1)^k b_{00}$ $(k=0,1)$ — собственные значения матрицы M_0;

$$Q^{-1}N_0Q=\Lambda_{N_0}=\begin{pmatrix}a_{01}+H(y)a_{00} & 0\\ 0 & a_{01}-H(y)a_{00}\end{pmatrix},$$

где $a_{01}+(-1)^k a_{00}$ $(k=0,1)$ — собственные значения матрицы N_0. При этом

$$Q=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}, \quad Q^{-1}=\frac{1}{2}Q.$$

Умножая слева матричное уравнение (14) на Q^{-1} и учитывая соотношения

$$Q^{-1}M=\Lambda_M Q^{-1}, \quad Q^{-1}N=\Lambda_N Q^{-1},$$
$$Q^{-1}M_0=\Lambda_{M_0} Q^{-1}, \quad Q^{-1}N_0=\Lambda_{N_0} Q^{-1},$$

после преобразований получим шесть отдельных уравнений эллиптического типа без отклонения аргументов:

$$\begin{aligned}&\bigl(\alpha_{j1}^2+(-1)^k H(y)\alpha_{j0}^2\bigr)\bigl(\langle\overline{P}_j,\overline{U}(x,y)+(-1)^k\overline{U}(x,y+h)\rangle\bigr)_{yy}+\\ &\quad+\bigl(\beta_{j1}^2+(-1)^k H(y)\beta_{j0}^2\bigr)\bigl(\langle\overline{P}_j,\overline{U}(x,y)+(-1)^k\overline{U}(x,y+h)\rangle\bigr)_{xx}=\\ &\quad=-\bigl(b_{01}+(-1)^k H(y)b_{00}\bigr)\bigl(\langle\overline{P}_j,\overline{m}(x,y)+(-1)^k\overline{m}(x,y+h)\rangle\bigr)_{yy}-\\ &\quad-\bigl(a_{01}+(-1)^k H(y)a_{00}\rangle\bigr)\bigl(\langle\overline{P}_j,\overline{m}(x,y)+(-1)^k\overline{m}(x,y+h)\rangle\bigr)_{xx}-\end{aligned}$$

$$-H(y)\alpha_{j2}^2(-1)^k\big(\langle\overline{P}_j,\overline{U}^\delta(x,y+2h)\rangle\big)_{yy}-H(y)\beta_{j2}^2(-1)^k\big(\langle\overline{P}_j,\overline{U}^\delta(x,y+2h)\rangle\big)_{xx}-$$
$$-H(y)b_{02}(-1)^k\big(\langle\overline{P}_j,\overline{m}(x,y+2h)\rangle\big)_{yy}-H(y)a_{02}(-1)^k\big(\langle\overline{P}_j,\overline{m}(x,y+2h)\rangle\big)_{xx},$$
$$(x,y)\in D_{00}^+,\quad j=0,1,2,\quad k=0,1. \qquad (15)$$

Таким образом, опережающе-запаздывающее уравнение смешанного типа (2) в силу (11), (15) приведено к системе шести уравнений смешанного типа без отклонений аргументов:

$$(\operatorname{sgn} y)q_{jkyy}(x,y)+\gamma_{jk}^2 q_{jkxx}(x,y)=n_{jk}(x,y),\quad (x,y)\in D_{00}, \qquad (16)$$

где

$$q_{jk}(x,y)=\frac{1}{8}\langle\overline{P}_j,\overline{U}(x,y)+(-1)^kH(y)\overline{U}(x,y+h)\rangle, \qquad (17)$$
$$\gamma_{jk}^2=\frac{\beta_{j1}^2+(-1)^kH(y)\beta_{j0}^2}{\alpha_{j1}^2+(-1)^kH(y)\alpha_{j0}^2},$$

$$n_{jk}(x,y)=-\frac{1}{8[\alpha_{j1}^2+(-1)^kH(y)\alpha_{j0}^2]}\Big\{\Big\langle\overline{P}_j,\Big[(\operatorname{sgn} y)\big(b_{01}+(-1)^kH(y)b_{00}\big)\frac{\partial^2}{\partial y^2}+$$
$$+\big(a_{01}+(-1)^kH(y)a_{00}\big)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Big]\big(\overline{m}(x,y)+(-1)^kH(y)\overline{m}(x,y+h)\big)\Big\rangle+$$
$$+H(y)(-1)^k\Big\langle\overline{P}_j,\Big[(\operatorname{sgn} y)\alpha_{j2}^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\beta_{j2}^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Big]\overline{U}^\delta(x,y+2h)\Big\rangle+$$
$$+H(y)(-1)^k\Big\langle\overline{P}_j,\Big[(\operatorname{sgn} y)b_{02}\frac{\partial^2}{\partial y^2}+a_{02}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Big]\overline{m}(x,y+2h)\Big\rangle\Big\}.$$

Множество решений $q_{jk}(x,y)$, $(x,y)\in D_{00}$ $(j=0,1,2,\ k=0,1)$ шести неоднородных уравнений смешанного типа Лаврентьева—Бицадзе (16) содержит все решения $U(x,y)=U_{jk}(x,y)$, $(x,y)\in D_{jk}$ $(j=0,1,2,\ k=0,1)$ опережающе-запаздывающего уравнения смешанного типа (2), которые в силу (12) можно выделить из системы (17) в виде

$$\begin{pmatrix}U_{0l}(x,y+lh)\\U_{1l}(x+\tau,y+lh)\\U_{2l}(x+2\tau,y+lh)\end{pmatrix}=\overline{U}(x,y+lh)=$$
$$=T\begin{pmatrix}q_{00}(x,y)+(-1)^lq_{01}(x,y)\\q_{10}(x,y)+(-1)^lq_{11}(x,y)\\q_{20}(x,y)+(-1)^lq_{21}(x,y)\end{pmatrix},\quad (x,y)\in D_{00},\ l=0,1. \qquad (18)$$

Таким образом, поставленная задача T для опережающе-запаздывающего уравнения смешанного типа (2) в области $D=D^+\bigcup D^-\bigcup I$ относительно искомой функции $U(x,y)$ редуцирована к шести задачам Трикоми для шести уравнений смешанного типа (16) без отклонений в области $D_{00}= D_{00}^+\bigcup D_{00}^-\bigcup I_0$ относительно функций $q_{jk}(x,y)$ вида (17).

Задача T_{jk}. *В области* $D_{00} = D_{00}^{+} \bigcup D_{00}^{-} \bigcup I_0$ *найти решение* $q_{jk}(x,y) \in \in C(\overline{D}_{00}) \bigcap C^2(D_{00} \backslash I_0)$ *уравнения* (16), *удовлетворяющее условиям*

$$q_{jk}(0,y)=q_{jk}(\tau,y)=\overline{r}_{jk}(y)\equiv\frac{1}{8}\langle\overline{P}_j,\overline{U}(0,y)+(-1)^k\overline{U}(0,y+h)\rangle,\ 0\leqslant y\leqslant h; \quad (19)$$

$$q_{jk}(x,h)=\overline{\delta}_{jk}(x)\equiv\frac{1}{8}\langle\overline{P}_j,\overline{U}(x,h)+(-1)^k\overline{U}(x,2h)\rangle,\quad 0\leqslant x\leqslant\tau; \quad (20)$$

$$q_{jk}(x,-x/\gamma_{jk})=\overline{\psi}_{jk}(x)\equiv\frac{1}{8}\langle\overline{P}_j,\overline{U}(x,-x/\gamma_{jk})\rangle,\quad 0\leqslant x\leqslant\tau/2, \quad (21)$$

условиям сопряжения

$$q_{jk}(x,0-)=q_{jk}(x,0+)=\overline{\omega}_{jk}(x)\equiv\frac{1}{8}\langle\overline{P}_j,\overline{U}(x,0)\rangle,\quad 0\leqslant x\leqslant\tau; \quad (22)$$

$$q_{jky}(x,0-)=q_{jky}(x,0+)=\overline{\nu}_{jk}(x)\equiv\frac{1}{8}\langle\overline{P}_j,\overline{U}_y(x,0)\rangle,\quad 0<x<\tau; \quad (23)$$

причем

$$\overline{r}_{jk}(0)=\overline{\psi}_{jk}(0),\quad \overline{r}_{jk}(h)=\overline{\delta}_{jk}(0),\quad \overline{r}_{jk}(h)=\overline{\delta}_{jk}(\tau),$$

где $\overline{r}_{jk}(y)$, $\overline{\delta}_{jk}(x)$, $\overline{\psi}_{jk}(x)$ — *заданные непрерывные достаточно гладкие функции;* $\overline{\omega}_{jk}(x)$, $\overline{\nu}_{jk}(x)$ — *функции, подлежащие определению в процессе решения задачи* T_{jk}. Здесь и далее $j=0,1,2$, $k=0,1$.

2. Однозначная разрешимость задачи T. *Единственность решения задачи* T для опережающе-запаздывающего уравнения смешанного типа (2) в области $D=D^{+}\bigcup D^{-}\bigcup I$ следует из того, что однородная задача T имеет тривиальное решение $U(x,y)\equiv 0$ в $\overline{D}$ в смысле ее эквивалентности, согласно (1), (18), тривиальному решению $q_{jk}(x,y)\equiv 0$ в $\overline{D}_{00}=\overline{D}_{00}^{+}\bigcup\overline{D}_{00}^{-}\bigcup I_0$ однородной задаче T_{jk} для однородного уравнения (16) при однородных условиях (19)–(21).

Доказательство этого факта основано на установлении знакоопределенности интеграла

$$\beta_{jk}=\int_0^{\tau}\overline{\omega}_{jk}(x)\overline{\nu}_{jk}(x)dx.$$

Лемма 1. *Если* $q_{jk}(x,y)$ — *решение однородного уравнения* (16) *в области* $\overline{D}_{00}^{+}$ *из класса* $C(\overline{D}_{00}^{+})\bigcap C^2(D_{00}^{+})$, *обращающееся в нуль при* $x=0$, $x=\tau$ $(0\leqslant y\leqslant h)$ *и* $y=h$ $(0\leqslant x\leqslant\tau)$, *то*

$$\beta_{jk}\leqslant 0, \quad (24)$$

$$\beta_{jk}+\iint\limits_{D_{00}^{+}}\left[q_{jky}^2(x,y)+\gamma_{jk}^2 q_{jkx}^2(x,y)\right]dxdy=0. \quad (25)$$

Лемма 2. *Если* $q_{jk}(x,y)\in C(\overline{D}_{00}^{-})\bigcap C^2(D_{00}^{-})$ — *решение однородного уравнения* (16) *в области* D_{00}^{-}, *обращающееся в нуль на характеристике* $x=-\gamma_{jk}y$ $(0\leqslant x\leqslant\tau/2)$, *то*

$$\beta_{jk}\geqslant 0. \quad (26)$$

Доказательство лемм 1, 2 можно провести аналогично [7, 8].

Из неравенств (24), (26) следует $\beta_{jk} = 0$, поэтому из равенства (25) получим положительно определенную форму, равную нулю, и, значит, $q_{jkx}(x,y) \equiv 0$, $q_{jky}(x,y) \equiv 0$, т. е. $q_{jk}(x,y) \equiv \text{const}$ в D^+_{00}. Однородность граничных условий в D^+_{00} и $q_{jk}(x,y) \in C(\overline{D}^+_{00})$ позволяют утверждать, что $q_{jk}(x,y) \equiv 0$ в $\overline{D}^+_{00}$ и, в частности, $q_{jk}(x,0) = 0$, $0 \leqslant x \leqslant \tau$. Последнее равенство в совокупности с однородным условием (21) обеспечивает тривиальность решений $q_{jk}(x,y) \equiv 0$ первой задачи Дарбу в $\overline{D}^-_{00}$. Из полученной тривиальности решений $q_{jk}(x,y)$ в $\overline{D}^+_{00}$ и $\overline{D}^-_{00}$ следует тривиальность $q_{jk}(x,y) \equiv 0$ в $\overline{D}_{00}$.

Таким образом, единственность решения задачи T_{jk} для уравнения (16) и граничных условий (19)–(21) в области $\overline{D}_{00}$ доказана.

Тривиальность решения однородной задачи T для опережающе-запаздывающего уравнения смешанного типа (2) и однородных граничных условий (3)–(6) в области $\overline{D}$ следует из $q_{jk}(x,y) \equiv 0$ в $\overline{D}_{00}$ и равенств (18), (12), (13): $U(x,y) = U_{jk}(x,y) \equiv 0$, $(x,y) \in \overline{D}_{jk}$. Это означает единственность решения задачи T для уравнения (2) при граничных условиях (3)–(6) в области $\overline{D}$.

Доказательство существования решения $U(x,y)$ задачи T в области $\overline{D}$ для опережающе-запаздывающего уравнения смешанного типа (2) основано на решениях задач T_{jk} в области эллиптичности D^+_{00} и гиперболичности D^-_{00} для уравнения (16).

Задача Неймана—Дирихле. *В области D^+_{00} найти решение $q^+_{jk}(x,y) \in C(\overline{D}^+_{00}) \bigcap C^2(D^+_{00})$ уравнения* (16):

$$q^+_{jkyy}(x,y) + \gamma^2_{jk} q^+_{jkxx}(x,y) = n^+_{jk}(x,y), \quad (x,y) \in D^+_{00}, \tag{27}$$

где $n^+(x,y) = n_{jk}(x)$, удовлетворяющее условиям (19), (20), (23).

Задача Дарбу. *В области D^-_{00} найти решение $q^-_{jk}(x,y) \in C(\overline{D}^-_{00}) \bigcap C^2(D^-_{00})$ уравнения* (16):

$$q^-_{jkyy} - \gamma^2_{jk} q^-_{jkxx}(x,y) = n^-_{jk}(x,y) \equiv$$
$$\equiv \frac{1}{8\alpha^2_{j1}} \langle \overline{P}_j, (b_{01}\partial^2/\partial y^2 - a_{01}\partial^2/\partial x^2)\overline{m}(x,y)\rangle, \quad (x,y) \in D^-_{00}, \tag{28}$$

удовлетворяющее условиям (21), (23).

Вопрос существования решения $q_{jk}(x,y)$ задачи T_{jk} для уравнения (16) в области $D_{00} = D^+_{00} \bigcup D^-_{00} \bigcup I_0$ связан с разрешимостью полного [9] сингулярного интегрального уравнения относительно $\overline{\nu}_{jk}(x)$, $0 < x < \tau$, которое будет получено из функциональных соотношений между $\overline{\omega}_{jk}(x)$ и $\overline{\nu}_{jk}(x)$, привнесенных на $y = 0$, $0 < x < \tau$ решениями задачи Неймана—Дирихле из D^+_{00} и задачи Дарбу из D^-_{00}.

Лемма 3. *Если имеют место включения*

$$\overline{r}_{jk}(y) \in C[0,h] \bigcap C^2(0,h), \quad \overline{\delta}_{jk}(x) \in C[0,\tau] \bigcap C^2(0,\tau), \quad \overline{\nu}_{jk}(x) \in C^1(0,\tau),$$

то существует единственное решение задачи Неймана—Дирихле $q^+_{jk}(x,y) \in \in C(\overline{D}^+_{00}) \bigcap C^2(D^+_{00})$, *которое имеет вид*

$$q^+_{jk}(x,y) = \int_0^\tau \overline{\delta}_{jk}(t)\frac{\partial}{\partial y}G_{jk}(x,t;0,y)dt- \\ -\int_0^\tau \overline{\nu}_{jk}(t)G_{jk}(x,t;0,h-y)dt - \int_0^h d\zeta\int_0^\tau n^+_{jk}(t,\zeta)\Gamma_{jk}(x,t;\zeta,y)dt+ \\ +\int_0^h d\zeta\int_0^\tau \overline{r}_{jk}(\zeta)\frac{\partial^2}{\partial y^2}\Gamma_{jk}(x,t;\zeta,y)dt, \quad (29)$$

где

$$\Gamma_{jk}(x,y;\zeta,y) = \begin{cases} G_{jk}(x,t;\zeta,h-y), & y>\zeta, \\ G_{jk}(x,t;y,h-\zeta), & \zeta>y; \end{cases}$$

причем

$$G_{jk}(x,t;r,z) = \frac{2}{\tau}\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{\operatorname{sh}(\gamma_{jk}\lambda_m z)\operatorname{ch}(\gamma_{jk}\lambda_m r)}{\gamma_{jk}\lambda_m\operatorname{ch}(\gamma_{jk}\lambda_m h)}\sin(\lambda_m x)\sin(\lambda_m t).$$

Доказательство. Решение задачи Неймана—Дирихле для уравнения (27) в области D^+_{00} будем искать в форме ряда

$$q^+_{jk}(x,y) = \overline{r}_{jk}(x,y) + \sum_{m=1}^{+\infty} R_{mjk}(y)\sin(\lambda_m x), \quad (x,y)\in\overline{D}^+_{00},\ \lambda_m = m\pi/\tau, \quad (30)$$

в котором функция $R_{mjk}(y)$, удовлетворяющая уравнению

$$R''_{mjk}(y) - \gamma^2_{jk}\lambda^2_m R_{mjk}(y) = f_{mjk}(y) \equiv \\ \equiv \frac{2}{\tau}\int_0^\tau [n^+_{jk}(\zeta,y) - \overline{r}''_{jk}(y)]\sin(\lambda_m\zeta)d\zeta, \quad 0<y<h,$$

и, в силу (20), (23), условиям

$$R_{mjk}(h) = \frac{2}{\tau}\int_0^\tau [\overline{\delta}_{jk}(\zeta) - \overline{r}_{jk}(h)]\sin(\lambda_m\zeta)d\zeta,$$
$$R'_{mjk}(0) = \frac{2}{\tau}\int_0^\tau [\overline{\nu}_{jk}(\zeta) - \overline{r}'_{jk}(0)]\sin(\lambda_m\zeta)d\zeta,$$

имеет вид

$$R_{mjk}(y) = \frac{\operatorname{ch}(\gamma_{jk}\lambda_m y)}{\operatorname{ch}(\gamma_{jk}\lambda_m h)}R_{mjk}(h) - \frac{\operatorname{sh}(\gamma_{jk}\lambda_m(h-y))}{\gamma_{jk}\lambda_m\operatorname{ch}(\gamma_{jk}\lambda_m h)}R'_{mjk}(0)- \\ -\frac{\operatorname{ch}(\gamma_{jk}\lambda_m y)}{\gamma_{jk}\lambda_m\operatorname{ch}(\gamma_{jk}\lambda_m h)}\int_0^h f_{mjk}(\zeta)\operatorname{sh}(\gamma_{jk}\lambda_m(h-\zeta))d\zeta+ \\ +\frac{1}{\gamma_{jk}\lambda_m}\int_0^y f_{mjk}(\zeta)\operatorname{sh}(\gamma_{jk}\lambda_m(y-\zeta))d\zeta, \quad 0\leqslant y\leqslant h.$$

Подстановка последнего равенства в (30) и необходимые преобразования приводят к искомому решению (29) задачи Неймана—Дирихле (27), (19), (20), (23). □

Функциональное соотношение между $\overline{\omega}_{jk}(x)$ и $\overline{\nu}_{jk}(x)$ привнесенное из D_{00}^+ на $y=0$, $0 \leqslant x \leqslant \tau$, найдем из решения задачи Неймана—Дирихле (29), полагая $y=0$ и дифференцируя соответствующее выражение:

$$\overline{\omega}'_{jk}(x) = \frac{1}{2\tau\gamma_{jk}} \int_0^\tau \overline{\nu}_{jk}(\zeta)[\mathrm{ctg}(\pi(\zeta-x)/2\tau) - \mathrm{ctg}(\pi(\zeta+x)/2\tau)]d\zeta - \\ - \frac{1}{\tau\gamma_{jk}} \int_0^\tau \overline{\nu}_{jk}(\zeta) M_{jk}(x,\zeta)d\zeta + \mu_{jk}(x), \quad 0<x<\tau, \tag{31}$$

где

$$M_{jk}(x,\zeta) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\Big[\frac{\sin(\pi(\zeta-x)/\tau)}{\cos(\pi(\zeta-x)/\tau) - \mathrm{ch}(2(n+1)\gamma_{jk}\pi h/\tau)} + \\ + \frac{\sin(\pi(\zeta+x)/\tau)}{\cos(\pi(\zeta+x)/\tau) - \mathrm{ch}(2(n+1)\gamma_{jk}\pi h/\tau)}\Big],$$

$$\mu_{jk}(x) = \int_0^\tau \overline{\delta}_{jk}(t)\frac{\partial}{\partial x}\Big[\frac{\partial}{\partial y}G_{jk}(x,t;0,y)\Big]_{y=0}dt - \\ - \int_0^h d\zeta \int_0^\tau n_{jk}^+(t,\zeta)\frac{\partial}{\partial x}G_{jk}(x,y;0,h-\zeta)dt + \\ + \int_0^h d\zeta \int_0^\tau \overline{r}_{jk}(\zeta)\frac{\partial}{\partial x}\Big[\frac{\partial^2}{\partial y^2}G_{jk}(x,t;y,h-\zeta)\Big]_{y=0}dt,$$

причем $M_{jk}(x,\zeta) \in C^2(0<x,\zeta<\tau)$, $\mu_{jk}(x) \in C^1(0,\tau)$.

Лемма 4. *Если выполняются включения*

$$\overline{\nu}_{jk}(x) \in C^1(0,\tau), \quad \overline{\psi}_{jk}(x) \in C[0,\tau/2]\bigcap C^2(0,\tau/2)$$

и $\overline{\psi}_{jk}(0) = \overline{r}_{jk}(0)$, *то существует единственное решение задачи Дарбу* $q_{jk}^-(x,y) \in C(\overline{D_{00}^-})\bigcap C^2(D_{00}^-)$, *которое имеет вид*

$$q_{jk}^-(x,y) = \frac{1}{\gamma_{jk}}\int_0^{x+y\gamma_{jk}} \overline{\nu}_{jk}(\zeta)d\zeta + P_{jk}(x,y), \quad (x,y)\in \overline{D_{00}^-}, \tag{32}$$

где

$$P_{jk}(x,y) = -\overline{\psi}_{jk}(0) + \overline{\psi}_{jk}\big((x-y\gamma_{jk})/2\big) + \overline{\psi}_{jk}\big((x+y\gamma_{jk})/2\big) - B_{jk}(x,y) + \\ + B_{jk}\big((x-y\gamma_{jk})/2, -(x-y\gamma_{jk})/2\gamma_{jk}\big) + \\ + B_{jk}\big((x+y\gamma_{jk})/2, -(x+y\gamma_{jk})/2\gamma_{jk}\big),$$

$$B_{jk}(x,y)=\frac{1}{2\gamma_{jk}}\int_0^y dt\int_{x-(y-t)\gamma_{jk}}^{x+(y-t)\gamma_{jk}} n^-_{jk}(\zeta,t)d\zeta.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о формулы (32) следует из общего решения неоднородного уравнения (28) колебания струны

$$q^-_{jk}(x,y)=L^1_{jk}(x-y\gamma_{jk})+L^2_{jk}(x+y\gamma_{jk})+\\ +B_{jk}(x,y),\quad (x,y)\in\overline{D^-_{00}},\ L^s_{jk}(\zeta)\in C^2[0,\tau]\quad (s=1,2)$$

и краевых условий (21), (23).

Функциональное соотношение между $\overline{\omega}_{jk}(x)$ и $\overline{\nu}_{jk}(x)$, привнесенное из D^-_{00} на $y=0$, $0\leqslant x\leqslant\tau$, найдем из решения (32) Дарбу, полагая в нем $y=0$ и дифференцируя соответствующее выражение:

$$\overline{\omega}'_{jk}(x)=\frac{1}{\gamma_{jk}}\overline{\nu}_{jk}(x)+P'_{jk}(x,0),\quad 0<x<\tau,\tag{33}$$

где

$$P'_{jk}(x,0)=\overline{\psi}_{jk}(x/2)+\frac{1}{\gamma_{jk}}\int_0^{-x/2\gamma_{jk}} n^-_{jk}(x+t\gamma_{jk},t)dt,$$

причем

$$P'_{jk}(x,0)\in C^1(0,\tau).$$

Вопрос существования решения задачи T_{jk} (16), (19)–(21) в силу условий сопряжения (22)–(23) и функциональных соотношений (31), (33) сведен к разрешимости полного сингулярного интегрального уравнения нормального типа [9]

$$\overline{\nu}_{jk}(x)-\frac{1}{2\tau}\int_0^\tau\overline{\nu}_{jk}(\zeta)[\mathrm{ctg}(\pi(\zeta-x)/2\tau)-\mathrm{ctg}(\pi(\zeta+x)/2\tau)]d\zeta=d_{jk}(x)\equiv\\ \equiv\gamma_{jk}[\mu_{jk}(x)-P'_{jk}(x,0)]-\frac{1}{\tau}\int_0^\tau\overline{\nu}_{jk}(\zeta)M_{jk}(x,\zeta)d\zeta,\quad 0<x<\tau,\tag{34}$$

$d_{jk}(x)\in C^1(0,\tau)$, которое после преобразований и замены переменных и функций по формулам

$$\overline{\nu}_{jk}(x)=\overline{\overline{\nu}}_{jk}(y),\quad d_{jk}(x)=\overline{d}_{jk}(y),\quad y=\cos(\pi x/\tau),\tag{35}$$

примет вид

$$\overline{\overline{\nu}}_{jk}(y)-\frac{1}{\pi}\int_{-1}^1\overline{\overline{\nu}}_{jk}(t)\frac{dt}{t-y}=\overline{d}_{jk}(y),\quad -1<y<1.\tag{36}$$

Индекс [9] нормального сингулярного интегрального уравнения (36) равен нулю. В силу единственности решения задачи T_{jk} (16), (19)–(21) уравнение (36) однозначно обратимо в классе функций $\overline{\overline{\nu}}_{jk}(y)$, удовлетворяющих условию Гельдера при $-1<y<1$, методом сингуляризации [10, 11].

Действительно, действуя на обе части уравнения (36) оператором

$$Kv \equiv v(s) + \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} v(P)\frac{dP}{P-s},$$

используя формулу Пуанкаре—Бертрана [9] для перестановки порядка интегрирования в сингулярном повторном интеграле с ядром Коши и необходимые при этом преобразования, придем к решению уравнения (36) вида

$$\overline{\overline{\nu}}_{jk}(y) = \frac{1}{2}\overline{d}_{jk}(y) + \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\overline{d}_{jk}(P)\frac{dP}{P-y}, \quad -1 < y < 1.$$

Возврат к старым переменным и функциям по формулам (35) с подстановкой правой части уравнения (34) приводит к уравнению Фредгольма [12]

$$\overline{\nu}_{jk}(x) + \int_0^\tau \overline{\nu}_{jk}(t)W_{jk}(x,t)dt = Q_{jk}(x), \quad 0 < x < \tau, \tag{37}$$

где

$$W_{jk}(x,t) = \frac{1}{2\tau}M_{jk}(x,t) + \\ + \frac{1}{4\tau^2}\int_0^\tau [\mathrm{ctg}(\pi(\zeta - x)/2\tau) - \mathrm{ctg}(\pi(\zeta + x)/2\tau)]M_{jk}(\zeta,t)d\zeta,$$

$$Q_{jk}(x) = \frac{\gamma_{jk}}{2}[\mu_{jk}(x) - P'_{jk}(x,0)] + \\ + \frac{\gamma_{jk}}{4\tau}\int_0^\tau [\mathrm{ctg}(\pi(\zeta - x)/2\tau) - \mathrm{ctg}(\pi(\zeta + x)/2\tau)][\mu_{jk}(\zeta) - P'_{jk}(\zeta,0)]d\zeta,$$

причем

$$Q_{jk}(x) \in C^1(0,\tau), W_{jk}(x,t) \in C^1(0 < x, t < \tau).$$

Разрешимость уравнения [12] Фредгольма (37) следует из единственности решения задачи T_{jk} в области $\overline{D}_{00}$.

Определив $\overline{\nu}_{jk}(x)$ из уравнения (37), найдем $\overline{\omega}_{jk}(x)$ из (31) или (33), а затем по формулам (29) и (32) получим решения $q^+_{jk}(x,y)$ и $q^-_{jk}(x,y)$ задачи Неймана—Дирихле и Дарбу соответственно в областях D^+_{00} и D^-_{00}. Таким образом, существование решения $q_{jk}(x,y)$ задачи T_{jk} в области $D_{00} = D^+_{00}\bigcup D^-_{00}\bigcup I_0$ доказано.

Вернемся к задаче T для опережающе-запаздывающего уравнения смешанного типа (2) в области $D = D^+\bigcup D^-\bigcup I$. Ее решение в силу (18) и (29) имеет в области $\overline{D}^+ = \bigcup\limits_{j=0}^{2}\left(\bigcup\limits_{k=0}^{1}\overline{D}^+_{jk}\right)$ следующий вид:

$$\overline{U}(x,y) = \overline{U}^+(x,y+lh) = T\begin{pmatrix} q^+_{00}(x,y) + (-1)^l q^+_{01}(x,y) \\ q^+_{10}(x,y) + (-1)^l q^+_{11}(x,y) \\ q^+_{20}(x,y) + (-1)^l q^+_{21}(x,y) \end{pmatrix},$$

$$(x,y) \in \overline{D}_{jk} \quad j = 0,1,2, \ k,l = 0,1,$$

а в области $\overline{D}^- = \bigcup\limits_{j=0}^{2} \overline{D}_{j0}^-$, согласно (18) и (32), имеем

$$\overline{U}(x,y) = \overline{U}^-(x,y) = T\begin{pmatrix} q_{00}^-(x,y) + q_{01}^-(x,y) \\ q_{10}^-(x,y) + q_{11}^-(x,y) \\ q_{20}^-(x,y) + q_{21}^-(x,y) \end{pmatrix}.$$

Таким образом, теорема доказана.

Конкурирующие интересы. Конкурирующих интересов не имею.

Авторский вклад и ответственность. Я несу полную ответственность за предоставление окончательной версии рукописи в печать. Окончательная версия рукописи мною одобрена.

Финансирование. Исследование выполнялось без финансирования.

Библиографический список

1. Шарковский А. Н., Майстренко Ю. А., Романенко Е. Ю. *Разностные уравнения и их приложения*. Киев: Наук. думка, 1986. 280 с.
2. Онанов Г. Г., Скубачевский А. Л. Дифференциальные уравнения с отклоняющимися аргументами в стационарных задачах механики деформированного тела // *Прикл. механика*, 1979. Т. 15, № 5. С. 39–47.
3. Самарский А. А. О некоторых проблемах теории дифференциальных уравнений // *Дифференц. уравн.*, 1980. Т. 16, № 11. С. 1925–1935.
4. Маслов В. П. *Операторные методы*. М.: Наука, 1973. 544 с.
5. Ганцев Ш. Х., Бахтизин Р. Н., Франц М. В., Ганцев К. Ш. Опухолевый рост и возможности математического моделирования системных процессов // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2019. Т. 23, № 1. С. 131–151. https://doi.org/10.14498/vsgtu1661.
6. Беллман Р. *Введение в теорию матриц*. М.: Наука, 1976. 352 с.
7. Франкль Ф. И. *Избранные труды по газовой динамике*. М.: Наука, 1973. 712 с.
8. Зарубин А. Н. *Уравнения смешанного типа с запаздывающим аргументом*. Орел: ОГУ, 1997. 225 с.
9. Гахов Ф. Д. *Краевые задачи*. М.: Наука, 1977. 640 с.
10. Флайшер Н. М. Новый метод решения в замкнутой форме для некоторых классов сингулярных интегральных уравнений с регулярной частью // *Rev. Roum. Math. Pures Appl.*, 1965. Т. 10, № 5. С. 615–620.
11. Бабурин Ю. С. О сингуляризации сингулярных интегральных уравнений / *Дифференциальные уравнения*, Выпуск 10. Рязань, 1977. С. 14–24.
12. Краснов М. Л. *Интегральные уравнения*. М.: Наука, 1975. 303 с.

Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2021, vol. 25, no. 1, pp. 35–50
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1835

MSC: 35M12

Nonlocal Tricomi boundary value problem for a mixed-type differential-difference equation

© *A. N. Zarubin*

Orel State University named after I. S. Turgenev,
95, Komsomolskaya st., Orel, 119192, Russian Federation.

Abstract

We investigate the Tricomi boundary value problem for a differential-difference leading-lagging equation of mixed type with non-Carleman deviations in all arguments of the required function. A reduction is applied to a mixed-type equation without deviations. Symmetric pairwise commutative matrices of the coefficients of the equation are used. The theorems of uniqueness and existence are proved. The problem is unambiguously solvable.

Keywords: mixed-type equation, differential-difference equation, integral equation, singular integral equation, concentrated lag and lead.

Received: 5th November, 2020 / Revised: 13th February, 2021 /
Accepted: 22nd February, 2021 / First online: 10th March, 2021

Competing interests. I have no competing interests.

Authors' contributions and responsibilities. I take full responsibility for submitting the final manuscript in print. I approved the final version of the manuscript.

Funding. This research received no specific grant from any funding agency in the public, commercial, or not-for-profit sectors.

References

1. Sharkovsky A. N., Maistrenko Yu. L., Romanenko E. Yu *Difference Equations and Their Applications*, Mathematics and Its Applications, vol. 250. Dordrecht, Kluwer Academic Publ., 1993, xii+358 pp. https://doi.org/10.1007/978-94-011-1763-0.
2. Onanov G. G., Skubachevskii A. L. Differential equations with displaced arguments in stationary problems in the mechanics of a deformable body, *Sov. Appl. Mech.*, 1979, vol. 15, no. 5, pp. 391–397. https://doi.org/10.1007/BF01074069.
3. Samarskii A. A. Some problems of the theory of differential equations, *Differ. Uravn.*, 1980, vol. 16, no. 11, pp. 1925–1935 (In Russian).

Research Article

Please cite this article in press as:
Zarubin A. N. Nonlocal Tricomi boundary value problem for a mixed-type differential-difference equation, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2021, vol. 25, no. 1, pp. 35–50. https://doi.org/10.14498/vsgtu1835 (In Russian).

Author's Details:
Aleksandr N. Zarubin https://orcid.org/0000-0002-0611-5752
Dr. Phys. & Math. Sci., Professor; Head of Dept.; Dept. of Mathematical Analysis and Differential Equations; e-mail: aleks_zarubin@mail.ru; matdiff@yandex.ru

4. Maslov V. P. *Operatornye metody* [Operational Methods]. Moscow, Nauka, 1973, 544 pp. (In Russian)
5. Gantsev Sh., Bakhtizin R. N., Frants M. V., Gantsev K. Sh. Tumor growth and mathematical modeling of system processes, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2019, vol. 23, no. 1, pp. 131–151 (In Russian). https://doi.org/10.14498/vsgtu1661.
6. Bellman R. *Introduction to matrix analysis*, Society for Industrial and Applied Mathematics, vol. 19. Philadelphia, PA, 1997, xxviii+403 pp.
7. Frankl F. I. *Izbrannye trudy po gazovoi dinamike* [Selected Works on Gas Dynamics]. Moscow, Nauka, 1973, 712 pp. (In Russian)
8. Zarubin A. N. *Uravneniia smeshannogo tipa s zapazdyvaiushchim argumentom* [Mixed-Type Equations with Retarded Argument]. Orel, Orel State Univ., 1997, 225 pp. (In Russian)
9. Gakhov F. D. *Boundary Value Problems*, International Series of Monographs in Pure and Applied Mathematics, vol. 85. Oxford, Pergamon Press, 1966, xix+564 pp. https://doi.org/10.1016/C2013-0-01739-2.
10. Flaysher N. M. A new closed-form solution method for some classes of singular integral equations with a regular part, *Rev. Roum. Math. Pures Appl.*, 1965, vol. 10, no. 5, pp. 615–620 (In Russian).
11. Baburin Yu. S. On the singularization of singular integral equations, In: *Differentsial'nye uravneniia* [Differential Equations], Issue 10. Ryazan, 1977, pp. 14–24 (In Russian).
12. Krasnov M. L. *Integral'nye uravneniia* [Integral Equations]. Moscow, Nauka, 1975, 303 pp. (In Russian)