Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2021. Т. 25, № 2. С. 320–342
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1797

УДК 539.3

Решение связанной нестационарной задачи термоупругости для жесткозакрепленной многослойной круглой пластины методом конечных интегральных преобразований

© *Д. А. Шляхин, Ж. М. Кусаева*

Самарский государственный технический университет,
Россия, 443100, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

Аннотация

Построено новое замкнутое решение осесимметричной нестационарной задачи для жесткозакрепленной круглой многослойной пластины в случае изменения температуры на ее верхней лицевой поверхности (граничные условия 1-го рода) и учета конвекционного теплообмена нижней лицевой поверхности с окружающей средой (граничные условия 3-го рода).

Математическая формулировка рассматриваемой задачи включает линейные уравнения равновесия и теплопроводности (классическая теория) в пространственной постановке в предположении, что при анализе работы исследуемой конструкции можно пренебречь ее инерционными характеристиками. При этом используется полуобратный метод решения, связанный с заданием на цилиндрической поверхности конструкции касательных напряжений, которые позволяют с заданной точностью удовлетворить условия жесткого закрепления пластины.

При построении общего решения нестационарной задачи, описываемой системой линейных связанных несамосопряженных уравнений в частных производных, используется математический аппарат разделения переменных в виде конечных интегральных преобразований Фурье–Бесселя и обобщенного биортогонального преобразования. Особенностью данного решения является применение конечного интегрального преобразования, основанного на многокомпонентном соотношении собственных вектор-функций двух однородных краевых задач с выделением сопряженного оператора, позволяющего осуществить решение несамосопряженных линейных задач математической физики. Данное преобразование является наиболее эффективным методом исследования подобных краевых задач.

Научная статья

Образец для цитирования

Шляхин Д. А., Кусаева Ж. М. Решение связанной нестационарной задачи термоупругости для жесткозакрепленной многослойной круглой пластины методом конечных интегральных преобразований // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2021. Т. 25, № 2. С. 320–342. https://doi.org/10.14498/vsgtu1797.

Сведения об авторах

Дмитрий Аверкиевич Шляхин https://orcid.org/0000-0003-0926-7388
доктор технических наук; заведующий кафедрой; каф. строительной механики, инженерной геологии, оснований и фундаментов; e-mail: d-612-mit2009@yandex.ru

Жанслу Маратовна Кусаева https://orcid.org/0000-0001-7028-0130
аспирант; каф. строительной механики, инженерной геологии, оснований и фундаментов; e-mail: dauletmuratova@mail.ru

Построенные расчетные соотношения дают возможность определить напряженно-деформированное состояние и характер распределения температурного поля в жесткозакрепленной круглой многослойной пластине при произвольном по времени и радиальной координате внешнем температурном воздействии. Кроме того, численные результаты расчета позволяют проанализировать эффект связанности термоупругих полей, который приводит к существенному увеличению нормальных напряжений по сравнению с решением аналогичных задач в несвязанной постановке.

Ключевые слова: круглая многослойная пластина, классическая теория термоупругости, нестационарное температурное воздействие, биортогональные конечные интегральные преобразования.

Получение: 15 июля 2020 г. / Исправление: 26 апреля 2021 г. / Принятие: 11 мая 2021 г. / Публикация онлайн: 18 июня 2021 г.

Введение. Неравномерное нестационарное температурное воздействие на конструкцию приводит к образованию тепловых деформаций и напряжений, которые необходимо учитывать при определении прочностных характеристик упругих систем [1–3]. Для описания их работы формулируются начально-краевые задачи термоупругости в линейной постановке, математическая формулировка которых включает связанные несамосопряженные дифференциальные уравнения движения и теплопроводности в частных производных.

Проблема интегрирования исходных расчетных соотношений при построении замкнутого решения приводит к необходимости введения ряда допущений. В результате их использования исследуется только уравнение теплопроводности без учета деформирования упругой системы [4–8] или решается несвязанная задача термоупругости для тонкостенных [9–13] и бесконечно длинных тел [14–18].

Использование системы несамосопряженных дифференциальных уравнений, которые формируются в классической (CTE) [8] и гиперболической (LS, GHII, GHIII) [19–21] теориях термоупругости, позволило построить связанные замкнутые решения динамических задач в немногих работах. Здесь необходимо отметить статьи, посвященные исследованию гармонических волн и анализу частотного уравнения в бесконечном цилиндрическом волноводе [21] и длинной пластине [20]. В работах [22, 23] при использовании классической (CTE) теории для бесконечного цилиндра построено нестационарное решение, позволяющее удовлетворить граничные условия первого, второго и третьего рода, а в [24,25] получены результаты для цилиндра конечных размеров с мембранным закреплением его торцов. Из последних работ следует отметить статью [26], посвященную анализу работы жесткозакрепленной пластины при внешнем нестационарном температурном воздействии на ее лицевых поверхностях (граничные условия 1-го рода).

Задача термоупругости становится более сложной при исследовании многослойных конструкций. В данных работах, как правило, рассматривается бесконечно длинный цилиндр. Так, в [27, 28] при действии на конструкцию нестационарной тепловой и механических нагрузок использовалось преобразование Лапласа по времени с численной реализацией расчетных соотношений в области изображений функций.

В настоящей работе объектом исследования является многослойная жесткозакрепленная круглая пластина в случае нестационарного осесимметричного температурного воздействия на ее верхней лицевой поверхности (граничные условия 1-го рода). При этом в исходных расчетных соотношениях не учитываются инерционные характеристики упругой системы, что допустимо при исследовании пластин, для которых выполняется условие $h^*/b < 0.01$ (h^*, b — толщина и радиус пластины) [29]. Новое замкнутое решение связанной осесимметричной нестационарной задачи термоупругости строится при использовании метода неполного разделения переменных в виде конечных интегральных преобразований.

1. Постановка задачи. Пусть круглая многослойная жесткозакрепленная пластина занимает в цилиндрической системе координат (r_*, θ, z_*) область Ω: $\{0 \leqslant r_* \leqslant b, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, 0 \leqslant z_* \leqslant h^*\}$. Рассматривается случай изменения температуры $\omega_1^*(r_*, t_*)$ на ее верхней $(z_* = 0)$ лицевой поверхности при заданной температуре внешней среды ϑ^* на нижней $(z_* = h^*)$ плоскости (звездочкой отмечены размерные величины). Расчетная схема представлена на рис. 1.

Разрешающая система дифференциальных осесимметричных уравнений равновесия и теплопроводности классической (CTE) теории термоупругости j-го слоя изотропной среды, а также краевые условия рассматриваемой задачи в безразмерной форме имеют вид [8, 9]:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial}{\partial r}\nabla U + a_1^{(j)}\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + a_2^{(j)}\frac{\partial^2 W}{\partial r\partial z} - a_3^{(j)}\frac{\partial T}{\partial r} = 0,\\
a_1^{(j)}\nabla\frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} + a_2^{(j)}\frac{\partial}{\partial z}\nabla U - a_3^{(j)}\frac{\partial T}{\partial z} = 0,\\
\nabla\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} - a_4^{(j)}\frac{\partial T}{\partial t} - a_5^{(j)}\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla U + \frac{\partial W}{\partial z}\right) = 0;
\end{gathered} \tag{1}$$

$$r = 1: \quad \left.\frac{\partial T}{\partial r}\right|_{r=1} = 0, \quad U\big|_{r=1} = W\big|_{r=1} = 0; \tag{2}$$

$$r = 0: \quad \left.\frac{\partial T}{\partial r}\right|_{r=0} = \left.\frac{\partial W}{\partial r}\right|_{r=0} = 0, \quad U\big|_{r=0} = 0; \tag{3}$$

$$z = 0: \ \left[a_6^{(1)}\nabla U + \frac{\partial W}{\partial z} - T\right]_{z=0} = 0, \ \left[\frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\partial U}{\partial z}\right]_{z=0} = 0, \ T\big|_{z=0} = \omega_1; \tag{4}$$

$$z = h_1, h_1 + h_2, \ldots, h - h_m: \quad \{U, W, T\}|_{-z} = \{U, W, T\}|_{+z},$$

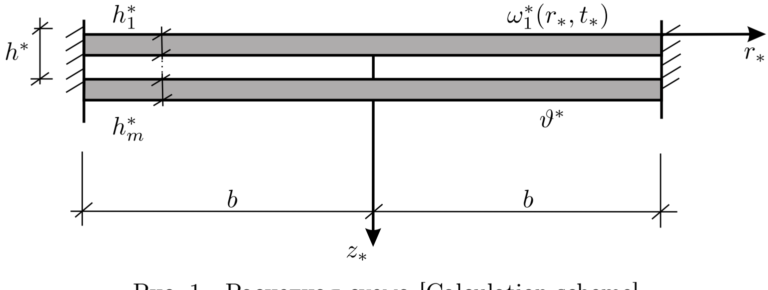


Рис. 1. Расчетная схема [Calculation scheme]

$$-\Lambda^{(j)}\frac{\partial T}{\partial z}\Big|_{-z} = -\Lambda^{(j+1)}\frac{\partial T}{\partial z}\Big|_{+z}, \quad \Big[\frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\partial U}{\partial z}\Big]_{-z} = a_8^{(j)}\Big[\frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\partial U}{\partial z}\Big]_{+z},$$

$$\Big[a_6^{(j)}\nabla U + \frac{\partial W}{\partial z} - a_3^{(j)}T\Big]_{-z} = a_7^{(j)}\frac{a_3^{(j)}}{a_3^{(j+1)}}\Big[a_6^{(j+1)}\nabla U + \frac{\partial W}{\partial z} - a_3^{(j+1)}T\Big]_{+z},$$

$$j = 1, 2, \ldots, m; \quad (5)$$

$$z = h: \quad \Big[a_6^{(m)}\nabla U + \frac{\partial W}{\partial z} - a_3^{(m)}T\Big]_{z=h} = 0, \quad \Big[\frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\partial U}{\partial z}\Big]_{z=h} = 0,$$

$$-\Lambda^{(m)}\frac{\partial T}{\partial z}\Big|_{z=h} = \alpha(T - \vartheta); \qquad (6)$$

$$t = 0: \quad U\big|_{t=0} = W\big|_{t=0} = T\big|_{t=0} = 0, \qquad (7)$$

где

$$\{U, W, r, h_m, h\} = \frac{1}{b}\{U^*, W^*, r_*, h_m^*, h^*\}, \quad \big\{T, \omega_1, \vartheta\big\} = a_9^{(1)}\big\{[T^*, \omega_1^*, \vartheta^*] - T_0\big\},$$

$$t = t_*\frac{k^{(1)}}{b^2}, \quad a_1^{(j)} = \frac{1 - 2v^{(j)}}{2(1 - v^{(j)})}, \quad a_2^{(j)} = \frac{1}{2(1 - v^{(j)})}, \quad a_3^{(j)} = \frac{a_9^{(j)}}{a_9^{(1)}},$$

$$a_4^{(j)} = \frac{k^{(1)}}{k^{(j)}}, \quad a_5^{(j)} = \frac{\gamma^{(j)}T_0}{\Lambda^{(j)}}a_9^{(1)}k^{(1)}, \quad a_6^{(j)} = \frac{v^{(j)}}{1 - v^{(j)}}, \quad a_7(j) = \frac{\gamma^{(j+1)}}{\gamma^{(j)}},$$

$$a_8^{(j)} = \frac{E^{(j+1)}(1 + v^{(j)})}{E^{(j)}(1 + v^{(j+1)})}, \quad a_9^{(j)} = \frac{\gamma^{(j)}(1 + \nu^{(j)})(1 - 2\nu^{(j)})}{E^{(j)}(1 - \nu^{(j)})};$$

$$\gamma^{(j)} = \frac{E^{(j)}}{(1 - 2v^{(j)})}\alpha_t^{(j)}, \quad k^{(j)} = \frac{\Lambda^{(j)}}{c_\varepsilon^{(j)}}, \quad \nabla = \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r};$$

$U^*(r_*, z_*, t_*)$, $W^*(r_*, z_*, t_*)$, $T^*(r_*, z_*, t_*)$, $T_0(r_*, z_*, t_*)$ — компоненты вектора перемещений, температура и абсолютная температура начального недеформированного состояния тела в размерной форме; t_* — время в размерной форме; $E^{(j)}$, $v^{(j)}$ — модуль упругости и коэффициент Пуассона изотропного материала j-го слоя; $\Lambda^{(j)}$, $\alpha_t^{(j)}$, $c_\varepsilon^{(j)}$ — коэффициенты теплопроводности, линейного теплового расширения и объемная теплоемкость материала j-го слоя; α — коэффициент теплоотдачи.

Условия (2) определяют жесткое закрепление и теплоизоляцию цилиндрической поверхности пластины, а равенства (3) — осевую симметрию решения. Первые условия (4), (6) учитывают отсутствие нормальных и касательных напряжений на ее лицевых поверхностях, а последние — соответственно, действие температурной нагрузки (граничные условия 1-го рода) и конвекционный теплообмен лицевой поверхности с окружающей средой (граничные условия 3-го рода). Соотношения (5) являются условиями совместности перемещений, температуры, напряжений и идеального теплового контакта (граничные условия 4-го рода) на поверхности жесткого соединения слоев.

2. Построение общего решения. Начально-краевая задача (1)–(7) решается путем последовательного использования конечного интегрального преобразования Фурье—Бесселя [30] по переменной r и обобщенного конечного биортогонального преобразования [31] по координате z. При этом для определенности решения ниже рассматривается двухслойная пластина ($m = 2$).

Принимая во внимание, что преобразование Фурье—Бесселя позволяет исследовать задачи со смешанными однородными граничными условиями [30], заменяем последнее равенство (2) на условие наличия касательных напряжений $P_1(z,t)$ при $r = 1$:

$$\sigma_{rz}\big|_{r=1} = \frac{E^{(j)}}{2(1+v^{(j)})}\Big[\frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\partial U}{\partial z}\Big]_{r=1} = P_1(z,t) \tag{8}$$

и вводим новую функцию $w(r,z,t)$, связанную с $W(r,z,t)$ соотношением

$$W(r,z,t) = \frac{1+v^{(j)}}{E^{(j)}} r^2 P_1(z,t) + W_1(t) + w(r,z,t). \tag{9}$$

Выражения для P_1, W_1 определяются в процессе решения задачи при выполнении условия $W(1,z,t) = 0$.

Таким образом, рассматриваемая задача решается полуобратным методом, когда на цилиндрической поверхности пластины действуют неизвестные касательные напряжения и известная температурная нагрузка.

Подстановка (9) в (1)–(8) позволяет сформулировать новую задачу относительно функций U, w, T, в которой дифференциальные уравнения (1), первые (4), (6) и последнее (5) граничные условия, а также начальное условие относительно вертикальной компоненты вектора перемещений становятся неоднородными с правыми частями R_1, R_2, R_3, B_1, B_2, B_3, B_4[1]:

$$\{R_1,R_2,R_3\} = -\big(a_{10}^{(j)}\big)^{-1}\Big\{2a_2^{(j)} r\frac{\partial}{\partial z},\ \Big(4a_1^{(j)} + r^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}\Big),\ a_5^{(j)} r^2 \frac{\partial^2}{\partial z\partial t}\Big\}P_1,$$

$$\{B_1,B_2,B_3\} = -r^2\Big\{\big(a_{10}^{(1)}\big)^{-1}\frac{\partial P_1}{\partial z}\Big|_{z=0},\ \ \big(a_{10}^{(2)}\big)^{-1}\frac{\partial P_1}{\partial z}\Big|_{z=h},$$

$$\Big[\big(a_{10}^{(1)}\big)^{-1}\frac{\partial P_1}{\partial z}\Big|_{-z} - a_7^{(1)}\frac{a_3^{(1)}}{a_3^{(2)}a_{10}^{(2)}}\frac{\partial P_1}{\partial z}\Big|_{+z}\Big]\Big\},$$

$$B_4 = -\big(a_{10}^{(j)}\big)^{-1} r^2 P_1(z,0) - W_1(0), \qquad a_{10}^{(j)} = E^{(j)}(1+v^{(j)})^{-1},$$

а граничные условия на цилиндрической поверхности принимают вид

$$r = 1: \quad U(1,z,t) = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial r}\Big|_{r=1} = \frac{\partial T}{\partial r}\Big|_{r=1} = 0. \tag{10}$$

Применим к краевой задаче относительно U, w, T преобразование Фурье—Бесселя, используя трансформанты

$$u_H(n,z,t) = \int_0^1 U(r,z,t) r J_1(j_n r)dr,$$

$$\big\{w_H(n,z,t),\phi_H(n,z,t)\big\} = \int_0^1 \big\{w(r,z,t),T(r,z,t)\big\} r J_0(j_n r)dr$$

[1] На основании парности и неразрывности касательных напряжений имеем $P_1|_{z=0,h_1,h}{=}0$.

и формулы обращения

$$U(r,z,t)=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_H(n,z,t)}{J_0(j_n)^2}J_1(j_nr),$$
$$\big\{w(r,z,t),T(r,z,t)\big\}=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\big\{w_H(n,z,t),\phi_H(n,z,t)\big\}}{J_0(j_n)^2}J_0(j_nr),$$

где j_n — положительные нули функции $J_1(j_n)$, $n=0,1,2,\ldots$; $j_0=0$.

В результате получим следующую задачу относительно трансформант u_H, w_H, ϕ_H:

$$\begin{gathered}
-j_n^2u_H+a_1^{(j)}\frac{\partial^2u_H}{\partial z^2}-a_2^{(j)}j_n\frac{\partial w_H}{\partial z}+a_3^{(j)}j_n\phi_H=R_{1H},\\
-a_1^{(j)}j_n^2w_H+\frac{\partial^2w_H}{\partial z^2}+a_2^{(j)}j_n\frac{\partial u_H}{\partial z}-a_3^{(j)}\frac{\partial\phi_H}{\partial z}=R_{2H},\\
-j_n^2\phi_H+\frac{\partial^2\phi_H}{\partial z^2}-\frac{\partial}{\partial t}\Big(a_4^{(j)}\phi_H+a_5^{(j)}j_nu_H+a_5^{(j)}\frac{\partial w_H}{\partial z}\Big)=R_{3H};
\end{gathered}\tag{11}$$

$$\begin{gathered}
z=0:\quad\Big[a_6^{(1)}j_nu_H+\frac{\partial w_H}{\partial z}\Big]_{z=0}=B_{1H}+\omega_{1H},\\
\Big[\frac{\partial u_H}{\partial z}-j_nw_H\Big]_{z=0}=0,\quad\phi_H\big|_{z=0}=\omega_{1H};
\end{gathered}\tag{12}$$

$$\begin{gathered}
z=h_1:\quad\big\{u_H,w_H,\phi_H\big\}\big|_{-z}=\big\{u_H,w_H,\phi_H\big\}\big|_{+z},\\
-\Lambda^{(1)}\frac{\partial\phi_H}{\partial z}\Big|_{-z}=-\Lambda^{(2)}\frac{\partial\phi_H}{\partial z}\Big|_{+z},\quad\Big[\frac{\partial u_H}{\partial z}-j_nw_H\Big]_{-z}=a_8^{(1)}\Big[\frac{\partial u_H}{\partial z}-j_nw_H\Big]_{+z},\\
\Big[a_6^{(1)}\nabla U+\frac{\partial w_H}{\partial z}-a_3^{(1)}T\Big]_{-z}-a_7^{(1)}\frac{a_3^{(1)}}{a_3^{(2)}}\Big[a_6^{(2)}\nabla U+\frac{\partial w_H}{\partial z}-a_3^{(2)}T\Big]_{+z}=B_{3H};
\end{gathered}\tag{13}$$

$$\begin{gathered}
z=h:\quad\Big[a_6^{(2)}j_nu_H+\frac{\partial w_H}{\partial z}-a_3^{(2)}\phi_H\Big]_{z=h}=B_{2H},\\
\Big[\frac{\partial u_H}{\partial z}-j_nw_H\Big]_{z=h}=0,\quad\Big[\frac{\Lambda^{(2)}}{\alpha}\frac{\partial\phi_H}{\partial z}+\phi_H\Big]_{z=h}=\vartheta_H,
\end{gathered}\tag{14}$$

$$t=0:\quad u_H\big|_{t=0}=\phi_H\big|_{t=0}=0,\quad w_H\big|_{t=0}=B_{4H};\tag{15}$$

где

$$\big\{R_{2H},R_{3H},B_{1H},\ldots,B_{4H},\omega_{1H},\vartheta_H\big\}=\\
=\int_0^1\big\{R_2,R_3,B_1,\ldots,B_4,\omega_1,\vartheta\big\}rJ_0(j_nr)dr,$$

$$R_{1H}=\int_0^1R_1rJ_1(j_nr)dr.$$

Неоднородные граничные условия (12)–(14) приводятся к однородным путем введения новых функций U_H, W_H, L_H, связанных с u_H, w_H, ϕ_H соотношениями

$$\begin{aligned} u_H(n,z,t) &= H_1(n,z,t) + U_H(n,z,t),\\ w_H(n,z,t) &= H_2(n,z,t) + W_H(n,z,t),\\ \phi_H(n,z,t) &= H_3(n,z,t) + L_H(n,z,t), \end{aligned} \tag{16}$$

где

$$\begin{gathered} \{H_1, H_2\} = \{f_1(z), f_2(z)\}\omega_{1H}(t) + \{f_3(z), f_4(z)\}\vartheta_H + \\ + \{f_5(z), f_6(z)\}B_{1H}(0,t) + \{f_7(z), f_8(z)\}B_{2H}(h,t) + \\ + \{f_9(z), f_{10}(z)\}B_{3H}\big(h_1, t\big), \end{gathered}$$

$$H_3 = f_{11}(z)\omega_{1H}(t) + f_{12}(z)\vartheta_H;$$

$f_1(z), f_2(z), \ldots, f_{12}(z)$ — дважды дифференцируемые функции.

Подстановка (16) в (11)–(15) при выполнении условий

$$\begin{gathered} z=0: \quad \left[a_6^{(1)} j_n H_1 + \frac{\partial H_2}{\partial z}\right]_{z=0} = B_{1H} + \omega_{1H}, \\ \left[\frac{\partial H_1}{\partial z} - j_n H_2\right]_{z=0} = 0, \quad H_3\big|_{z=0} = \omega_{1H}; \end{gathered} \tag{17}$$

$$\begin{gathered} z=h_1: \quad \{H_1, H_2, H_3\}\big|_{-z} = \{H_1, H_2, H_3\}\big|_{+z}, \\ -\Lambda^{(1)}\frac{\partial H_3}{\partial z}\Big|_{-z} = -\Lambda^{(2)}\frac{\partial H_3}{\partial z}\Big|_{+z}, \quad \left[\frac{\partial H_1}{\partial z} - j_n H_2\right]_{-z} = a_8^{(1)}\left[\frac{\partial H_1}{\partial z} - j_n H_2\right]_{+z}, \\ \left[a_6^{(1)} j_n H_1 + \frac{\partial H_2}{\partial z} - a_3^{(1)} H_3\right]_{-z} - a_7^{(1)}\frac{a_3^{(1)}}{a_3^{(2)}}\left[a_6^{(2)} j_n H_1 + \frac{\partial H_2}{\partial z} - a_3^{(2)} H_3\right]_{+z} = B_{3H}; \end{gathered} \tag{18}$$

$$\begin{gathered} z=h: \quad \left[a_6^{(2)} j_n H_1 + \frac{\partial H_2}{\partial z} - a_3^{(2)} H_3\right]_{z=h} = B_{2H}, \\ \left[\frac{\partial H_1}{\partial z} - j_n H_2\right]_{z=h} = 0, \quad \left[\frac{\Lambda^{(2)}}{\alpha}\frac{\partial H_3}{\partial z} + H_3\right]_{z=h} = \vartheta_H \end{gathered} \tag{19}$$

позволяет преобразовать задачу (11)–(15) относительно U_H, W_H, L_H:

$$\begin{gathered} -j_n^2 U_H + a_1^{(j)}\frac{\partial^2 U_H}{\partial z^2} - a_2^{(j)} j_n \frac{\partial W_H}{\partial z} + a_3^{(j)} j_n L_H = F_{1H}, \\ -a_1^{(j)} j_n^2 W_H + \frac{\partial^2 W_H}{\partial z^2} + a_2^{(j)} j_n \frac{\partial U_H}{\partial z} - a_3^{(j)}\frac{\partial L_H}{\partial z} = F_{2H}, \\ -j_n^2 L_H + \frac{\partial^2 L_H}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial t}\Big(a_4^{(j)} L_H + a_5^{(j)} j_n U_H + a_5^{(j)}\frac{\partial W_H}{\partial z}\Big) = F_{3H}; \end{gathered} \tag{20}$$

$$z=0: \quad \left[a_6^{(1)} j_n U_H + \frac{\partial W_H}{\partial z}\right]_{z=0} = 0, \ \left[\frac{\partial U_H}{\partial z} - j_n W_H\right]_{z=0} = 0, \ L_H\big|_{z=0} = 0; \tag{21}$$

$$z = h_1: \quad \{U_H, W_H, L_H\}\big|_{-z} = \{U_H, W_H, L_H\}\big|_{+z},$$

$$\Lambda^{(1)} \frac{\partial L_H}{\partial z}\Big|_{-z} = \Lambda^{(2)} \frac{\partial L_H}{\partial z}\Big|_{+z}, \quad \left[\frac{\partial U_H}{\partial z} - j_n W_H\right]_{-z} = a_8^{(1)} \left[\frac{\partial U_H}{\partial z} - j_n W_H\right]_{+z},$$

$$\left[a_6^{(1)} j_n U_H + \frac{\partial W_H}{\partial z} - a_3^{(1)} L_H\right]_{-z} - a_7^{(1)} \frac{a_3^{(1)}}{a_3^{(2)}} \left[a_6^{(2)} j_n U_H + \frac{\partial W_H}{\partial z} - a_3^{(2)} L_H\right]_{+z} = 0; \quad (22)$$

$$z = h: \quad \left[a_6^{(2)} j_n U_H + \frac{\partial W_H}{\partial z} - a_3^{(2)} L_H\right]_{z=h} = 0,$$

$$\left[\frac{\partial U_H}{\partial z} - j_n W_H\right]_{z=h} = 0, \quad \left[\frac{\Lambda^{(2)}}{\alpha} \frac{\partial L_H}{\partial z} + L_H\right]_{z=h} = 0; \quad (23)$$

$$t = 0: \quad U_H\big|_{t=0} = u_{0H}, \quad W_H\big|_{t=0} = w_{0H}, \quad L_H\big|_{t=0} = l_{0H}, \quad (24)$$

где

$$F_{1H} = R_{1H} + j_n^2 H_1 - a_1^{(j)} \frac{\partial^2 H_1}{\partial z^2} + a_2^{(j)} j_n \frac{\partial H_2}{\partial z} - a_3^{(j)} j_n H_3,$$

$$F_{2H} = R_{2H} + a_1^{(j)} j_n^2 H_2 - \frac{\partial^2 H_2}{\partial z^2} - a_2^{(j)} j_n \frac{\partial H_1}{\partial z} + a_3^{(j)} \frac{\partial H_3}{\partial z},$$

$$F_{3H} = R_{3H} + j_n^2 H_3 - \frac{\partial^2 H_3}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial t}\left(a_4^{(j)} H_3 + a_5^{(j)} j_n H_1 + a_5^{(j)} \frac{\partial H_2}{\partial z}\right),$$

$$u_{0H} = -H_1, \quad w_{0H} = B_{4H} - H_2, \quad l_{0H} = -H_3.$$

Начально-краевая задача (20)–(24) решается с использованием структурного алгоритма вырожденного биортогонального конечного интегрального преобразования (КИП) [31]. Для этого на сегменте $[0, h]$ вводится КИП с неизвестными компонентами собственных вектор-функций ядер преобразований $K_1(\lambda_{in}, z)$, $K_2(\lambda_{in}, z)$, $K_3(\lambda_{in}, z)$, $N_1(\mu_{in}, z)$, $N_2(\mu_{in}, z)$, $N_3(\mu_{in}, z)$:

$$G(\lambda_{in}, n, t) = \int_0^h \left[a_5^{(j)} j_n U_H(n, z, t) + a_4^{(j)} L_H(n, z, t) - \right.$$

$$\left. - a_5^{(j)} W_H(n, z, t) \frac{d}{dz}\right] K_3(\lambda_{in}, z) dz, \quad (25)$$

$$\{U_H(n, z, t), W_H(n, z, t), L_H(n, z, t)\} =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} G(\lambda_{in}, n, t) \{N_1(\mu_{in}, z), N_2(\mu_{in}, z), N_3(\mu_{in}, z)\} \|K_{in}\|^{-2}, \quad (26)$$

где

$$\|K_{in}\|^2 = \int_0^h K_3(\lambda_{in}, z) N_3(\mu_{in}, z) dz;$$

λ_{in}, μ_{in} — собственные значения соответствующих однородных линейных краевых задач относительно сопряженных $K_k(\lambda_{in}, z)$ и инвариантных $N_k(\mu_{in}, z)$ компонент вектор-функций ядер КИП ($k = 1, 2, 3$).

Принимая во внимание кусочно-гладкий характер функций U_H, W_H, L_H, подвергаем уравнения (20) и краевые условия (21)–(24) вырожденному

КИП [31]. В результате получается задача для трансформанты $G(\lambda_{in}, n, t)$:

$$\frac{dG_{in}}{dt} + \lambda_{in} G_{in} = F_H, \quad i = 1, 2, \ldots, \quad n = 0, 1, \ldots,$$
$$t = 0: \quad G_{in}\big|_{t=0} = G_{0H}(n, z), \tag{27}$$

решение которой имеет вид

$$G_{in} = G_{0H} \exp(-\lambda_{in} t) + \int_0^t F_H(\tau) \exp \lambda_{in}(\tau - t) d\tau, \tag{28}$$

а также две однородные задачи относительно функций $K_{ein}^{(j)} = K_{ein}^{(j)}(\lambda_{in}, z)$ $(e = 1, 2, 3,\ i = 1, 2, \ldots,\ n = 0, 1, \ldots)$:

$$-j_n^2 K_{1in}^{(j)} + a_1^{(j)} \frac{d^2 K_{1in}^{(j)}}{dz^2} - a_2^{(j)} j_n \frac{dK_{2in}^{(j)}}{dz} + \lambda_{in} a_5^{(j)} j_n K_{3in}^{(j)} = 0,$$
$$-a_1^{(j)} j_n^2 K_{2in}^{(j)} + \frac{d^2 K_{2in}^{(j)}}{dz^2} + a_2^{(j)} j_n \frac{dK_{1in}^{(j)}}{dz} - \lambda_{in} a_5^{(j)} \frac{dK_{3in}^{(j)}}{dz} = 0, \tag{29}$$
$$(\lambda_{in} a_4^{(j)} - j_n^2) K_{3in}^{(j)} + \frac{d^2 K_{3in}^{(j)}}{dz^2} + a_3^{(j)} j_n K_{1in}^{(j)} + a_3^{(j)} \frac{dK_{2in}^{(j)}}{dz} = 0;$$

$$z = 0: \quad \left[a_1^{(1)} \frac{dK_{1in}^{(1)}}{dz} + (a_6^{(1)} - a_2^{(1)}) j_n K_{2in}^{(1)}\right]_{z=0} = 0,$$
$$\left[\frac{dK_{2in}^{(1)}}{dz} + (a_2^{(1)} - a_1^{(1)}) j_n K_{1in}^{(1)}\right]_{z=0} = 0, \quad K_{3in}^{(1)}\big|_{z=0} = 0; \tag{30}$$

$$z = h_1: \quad \left\{K_{1in}^{(1)}, K_{2in}^{(1)}, K_{3in}^{(1)}\right\}\big|_{z=h_1} = \left\{K_{1in}^{(2)}, K_{2in}^{(2)}, K_{3in}^{(2)}\right\}\big|_{z=h_1},$$

$$\left[(a_2^{(1)} - a_1^{(1)}) j_n K_{1in}^{(1)} + \frac{dK_{2in}^{(1)}}{dz}\right]_{z=h_1} = a_7^{(1)} \frac{a_3^{(1)}}{a_3^{(2)}} \left[(a_2^{(2)} - a_1^{(2)}) j_n K_{1in}^{(2)} + \frac{dK_{2in}^{(2)}}{dz}\right]_{z=h_1},$$

$$\left[(a_2^{(1)} - a_6^{(1)}) j_n K_{2in}^{(1)} - a_1^{(1)} \frac{dK_{1in}^{(1)}}{dz}\right]_{z=h_1} = a_8 \frac{a_1^{(1)}}{a_1^{(2)}} \left[(a_2^{(2)} - a_6^{(2)}) j_n K_{2in}^{(2)} - a_1^{(2)} \frac{dK_{1in}^{(2)}}{dz}\right]_{z=h_1},$$

$$\Lambda^{(1)} \frac{dK_{3in}^{(1)}}{dz}\bigg|_{z=h_1} = \Lambda^{(2)} \frac{dK_{3in}^{(2)}}{dz}\bigg|_{z=h_1}, \tag{31}$$

$$z = h: \quad \left[a_1^{(2)} \frac{dK_{1in}^{(2)}}{dz} + (a_6^{(2)} - a_2^{(2)}) j_n K_{2in}^{(2)}\right]_{z=h} = 0,$$
$$\left[\frac{dK_{2in}^{(2)}}{dz} + (a_2^{(2)} - a_1^{(2)}) j_n K_{1in}^{(2)}\right]_{z=h} = 0, \quad \left[\frac{\Lambda^{(2)}}{\alpha} \frac{dK_{3in}^{(2)}}{dz} + K_{3in}^{(2)}\right]_{z=h} = 0 \tag{32}$$

и $N_{ein}^{(j)} = N_{ein}^{(j)}\big(\mu_{in}, z\big)$ $(e = 1, 2, 3,\ i = 1, 2, \ldots,\ n = 0, 1, \ldots)$:

$$-j_n^2 N_{1in}^{(j)} + a_1^{(j)} \frac{d^2 N_{1in}^{(j)}}{dz^2} - a_2^{(j)} j_n \frac{dN_{2in}^{(j)}}{dz} + a_3^{(j)} j_n N_{3in}^{(j)} = 0,$$

$$-a_1^{(j)} j_n^2 N_{2in}^{(j)} + \frac{d^2 N_{2in}^{(j)}}{dz^2} + a_2^{(j)} j_n \frac{dN_{1in}^{(j)}}{dz} - a_3^{(j)} \frac{dN_{3in}^{(j)}}{dz} = 0, \tag{33}$$

$$-j_n^2 N_{3in}^{(j)} + \frac{d^2 N_{3in}^{(j)}}{dz^2} + \mu_{in}\Big(a_5^{(j)} j_n N_{1in}^{(j)} + a_5^{(j)} \frac{dN_{2in}^{(j)}}{dz} + a_4^{(j)} N_{3in}^{(j)}\Big) = 0;$$

$$z = 0: \quad \Big[a_6^{(1)} j_n N_{1in}^{(j)} + \frac{dN_{2in}^{(j)}}{dz}\Big]_{z=0} = 0,$$

$$\Big[\frac{dN_{1in}^{(j)}}{dz} - j_n N_{2in}^{(j)}\Big]_{z=0} = 0, \quad N_{3in}^{(j)}\big|_{z=0} = 0; \tag{34}$$

$$z = h_1: \quad \{N_{1in}^{(1)}, N_{2in}^{(1)}, N_{3in}^{(1)}\}\big|_{z=h_1} = \{N_{1in}^{(2)}, N_{2in}^{(2)}, N_{3in}^{(2)}\}\big|_{z=h_1},$$

$$\Big[j_n N_{2in}^{(1)} - \frac{dN_{1in}^{(1)}}{dz}\Big]_{z=h_1} = a_8 \Big[j_n N_{2in}^{(2)} - \frac{dN_{1in}^{(2)}}{dz}\Big]_{z=h_1},$$

$$\Big[a_6^{(1)} j_n N_{1in}^{(1)} + \frac{dN_{2in}^{(1)}}{dz} - a_3^{(1)} N_{3in}^{(1)}\Big]_{z=h_1} = a_7^{(1)} \frac{a_3^{(1)}}{a_3^{(2)}} \Big[a_6^{(2)} j_n N_{1in}^{(2)} + \frac{dN_{2in}^{(2)}}{dz} - a_3^{(2)} N_{3in}^{(2)}\Big]_{z=h_1},$$

$$\Lambda^{(1)} \frac{dN_{3in}^{(1)}}{dz}\Big|_{z=h_1} = \Lambda^{(2)} \frac{dN_{3in}^{(2)}}{dz}\Big|_{z=h_1}; \tag{35}$$

$$z = h: \quad \Big[a_6^{(2)} j_n N_{1in} + \frac{\partial N_{2in}}{\partial z} - a_3^{(2)} N_{3in}\Big]_{z=h} = 0, \quad \Big[\frac{\partial N_{1in}}{\partial z} - j_n N_{2in}\Big]_{z=h} = 0,$$

$$\Big[\frac{\Lambda^{(2)}}{\alpha} \frac{\partial N_{3in}}{\partial z} + N_{3in}\Big]_{z=h} = 0. \tag{36}$$

В равенствах (27)–(36) используются следующие обозначения:

$$\{K_{1in}, K_{2in}, K_{3in}\} = \{K_{1in}^{(1)}, K_{2in}^{(1)}, K_{3in}^{(1)}\} H(h_1 - z) + \\ + \{K_{1in}^{(2)}, K_{2in}^{(2)}, K_{3in}^{(2)}\} H(z - h_1),$$

$$\{N_{1in}, N_{2in}, N_{3in}\} = \{N_{1in}^{(1)}, N_{2in}^{(1)}, N_{3in}^{(1)}\} H(h_1 - z) + \\ + \{N_{1in}^{(2)}, N_{2in}^{(2)}, N_{3in}^{(2)}\} H(z - h_1);$$

$$F_H = -\int_0^h (F_{1H} K_{1in} + F_{2H} K_{2in} + F_{3H} K_{3in}) dz - a_5^{(j)} \Big[K_{3in} \frac{\partial W_H}{\partial t}\Big]_{z=h},$$

$$G_{0H} = \int_0^h (u_{0H} K_{1in} + w_{0H} K_{2in} + l_{0H} K_{3in}) dz,$$

$H(\,\cdot\,)$ — единичная функция Хэвисайда.

Задачи для трансформанты (27) G_{in} и сопряженная однородная задача (29), (30) относительно компонент ядра $K_1(\lambda_{in}, z)$, $K_2(\lambda_{in}, z)$, $K_3(\lambda_{in}, z)$ получены в результате применения вырожденного преобразования (25), а соотношения (33), (34) построены путем использования в полученной (сопряженной) задаче (29), (30) аналогичного (25) КИП с1 компонентами ядра $N_1(\mu_{in}, z)$, $N_2(\mu_{in}, z)$, $N_3(\mu_{in}, z)$.

Особенность полученных расчетных соотношений (27), (28) заключается в том, что трансформанта нагрузки F_H включает неоднородное граничное условие. Для определения F_H первоначально принимается $\frac{\partial W_H}{\partial t}\big|_{z=h} = 0$ с последующим определением в процессе решения $\frac{\partial W_H}{\partial t}\big|_{z=h}$.

Системы (29), (33) приводятся к разрешающим дифференциальным уравнениям 6-го порядка относительно функций $K_1^{(j)}(\lambda_{in}, z)$, $N_1^{(j)}(\mu_{in}, z)$:

$$\left(\frac{d^6}{dr^6} + b_{1in}^{(j)}\frac{d^4}{dr^4} + b_{2in}^{(j)}\frac{d^2}{dr^2} + b_{3in}^{(j)}\right)\left\{K_{1in}^{(j)}, N_{1in}^{(j)}\right\} = 0, \tag{37}$$

которые допускают разложение на коммутативные сомножители 2-го порядка:

$$\left[\frac{d^2}{dz^2} + (A_{in}^{(j)})^2\right]\left(\frac{d^2}{dz^2} - j_n^2\right)\left(\frac{d^2}{dz^2} - j_n^2\right)\left\{K_{1in}^{(j)}, N_{1in}^{(j)}\right\} = 0,$$

где

$$b_{1in}^{(j)} = \xi_{in} b_4^{(j)} - 3j_n^2, \qquad b_{2in}^{(j)} = (3j_n^2 - 2\xi_{in} b_4^{(j)})j_n^2,$$
$$b_{3in}^{(j)} = (\xi_{in} b_4^{(j)} - j_n^2)j_n^4, \quad b_4^{(j)} = a_3^{(j)} a_5^{(j)} + a_4^{(j)},$$

$\xi_{in} = \lambda_{in}$ и $\xi_{in} = \mu_{in}$ при решении соответственно задач (29), (30) и (33), (34), $A_{in}^{(j)}$ — действительный корень следующего бикубического уравнения:

$$\left[(A_{in}^{(j)})^2\right]^3 - b_{1in}^{(j)}\left[(A_{in}^{(j)})^2\right]^2 + b_{2in}^{(j)}(A_{in}^{(j)})^2 - b_{3in}^{(j)} = 0.$$

Общий интеграл дифференциальных уравнений (33) имеет вид

$$\begin{aligned}\{K_{1in}^{(j)}, N_{1in}^{(j)}\} &= \{D_{1in}^{(j)}, E_{1in}^{(j)}\}\sin(A_{in}^{(j)} z) + \{D_{2in}^{(j)}, E_{2in}^{(j)}\}\cos(A_{in}^{(j)} z) + \\ &+ \{D_{3in}^{(j)}, E_{3in}^{(j)}\}\exp(j_n z) + \{D_{4in}^{(j)}, E_{4in}^{(j)}\}\exp(-j_n z) + \\ &+ \{D_{5in}^{(j)}, E_{5in}^{(j)}\} z\exp(j_n z) + \{D_{6in}^{(j)}, E_{6in}^{(j)}\} z\exp(-j_n z).\end{aligned} \tag{38}$$

Использование связи между компонентами преобразований, полученных в результате приведения (29), (33) к (37), дает выражения для $K_{2in}^{(j)}(\lambda_{in}, z)$, $K_{3in}^{(j)}(\lambda_{in}, z)$, $N_{2in}^{(j)}(\mu_{in}, z)$, $N_{3in}^{(j)}(\mu_{in}, z)$:

$$\begin{aligned}K_{2in}^{(j)} &= -D_{1in}^{(j)}\frac{A_{in}^{(j)}}{j_n}\cos(A_{in}^{(j)} z) + D_{2in}^{(j)}\frac{A_{in}^{(j)}}{j_n}\sin(A_{in}^{(j)} z) - \\ &- D_{3in}^{(j)}\exp(j_n z) + D_{4in}^{(j)}\exp(-j_n z) + D_{5in}^{(j)} j_n^{-1}(b_5^{(j)} - j_n z)\exp(j_n z) + \\ &+ D_{6in}^{(j)} j_n^{-1}(b_5^{(j)} + j_n z)\exp(-j_n z),\end{aligned} \tag{39}$$

$$\begin{aligned}K_{3in}^{(j)} &= \frac{j_n^2 + (A_{in}^{(j)})^2}{\lambda_{in} a_5^{(j)} j_n}\left[D_{1in}^{(j)}\sin(A_{in}^{(j)} z) + D_{2in}^{(j)}\cos(A_{in}^{(j)} z)\right] - \\ &- a_3^{(j)} b_{6in}^{(j)}\left[D_{5in}^{(j)}\exp(j_n z) - D_{6in}^{(j)}\exp(-j_n z)\right],\end{aligned}$$

$$N_{2in}^{(j)} = -E_{1in}^{(j)} \frac{A_{in}^{(j)}}{j_n} \cos(A_{in}^{(j)} z) + E_{2in}^{(j)} \frac{A_{in}^{(j)}}{j_n} \sin(A_{in}^{(j)} z) - E_{3in}^{(j)} \exp(j_n z) + \\ + E_{4in}^{(j)} \exp(-j_n z) + E_{5in}^{(j)} j_n^{-1} (b_5^{(j)} - j_n z) \exp(j_n z) + \\ + E_{6in}^{(j)} j_n^{-1} (b_5^{(j)} + j_n z) \exp(-j_n z),$$

$$N_{3in}^{(j)} = \frac{j_n^2 + (A_{in}^{(j)})^2}{a_3^{(j)} j_n} \left[E_{1in}^{(j)} \sin(A_{in}^{(j)} z) + E_{2in}^{(j)} \cos(A_{in}^{(j)} z) \right] - \\ - a_5^{(j)} b_{6in}^{(j)} \left[E_{5in}^{(j)} \exp(j_n z) + E_{6in}^{(j)} \exp(-j_n z) \right].$$

Здесь

$$b_5^{(j)} = 1 + \frac{2a_1^{(j)} a_4^{(j)}}{a_3^{(j)} a_5^{(j)} + a_2^{(j)} a_4^{(j)}}, \quad b_{6in}^{(j)} = \frac{2a_1^{(j)}}{\xi_{in}(a_3^{(j)} a_5^{(j)} + a_2^{(j)} a_4^{(j)})}.$$

Подстановка (38), (39) в граничные условия (30), (34) позволяет сформировать две системы алгебраических уравнений, решение которых дает возможность определить постоянные интегрирования $D_{1in}^{(j)}, \ldots, D_{6in}^{(j)}$, $E_{1in}^{(j)}, \ldots, E_{6in}^{(j)}$ и собственные значения λ_{in}, μ_{in}.

Окончательные выражения для функций $U(r,z,t)$, $W(r,z,t)$, $T(r,z,t)$ получаются последовательным использованием формул обращения (26), (10) к трансформанте (28). В результате с учетом (9), (16) имеем:

$$U(r,z,t) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1(j_n r)}{J_0(j_n)^2} \left[H_1(n,z,t) + \sum_{n=1}^{\infty} G(\lambda_{in}, n, t) N_1(\mu_{in}, z) \|K_{in}\|^{-2} \right],$$

$$W(r,z,t) = \frac{1 + v^{(j)}}{E^{(j)}} r^2 P_1(z,t) + W_1(t) + \\ + 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{J_0(j_n r)}{J_0(j_n)^2} \left[H_2(n,z,t) + \sum_{i=1}^{\infty} G(\lambda_{in}, n, t) N_2(\mu_{in}, z) \|K_{in}\|^{-2} \right], \quad (40)$$

$$T(r,z,t) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{J_0(j_n r)}{J_0(j_n)^2} \left[H_3(n,z,t) + \sum_{i=1}^{\infty} G(\lambda_{in}, n, t) N_3(\mu_{in}, z) \|K_{in}\|^{-2} \right].$$

Полученные выражения в виде рядов являются сходящимися в силу полноты систем функций $\{J_v(j_n r)\}_{n=0}^{\infty}$ на интервале $r \in [0,1]$ и $\{K_{ein}(\lambda_{in}, z), N_{ein}(\mu_{in}, z)\}_{i=1}^{\infty}$ на участке $z \in [0,h]$.

Заключительным этапом исследования является определение функций $W_1(t)$, $P_1(z,t)$, $H_1(n,z,t)$, $H_2(n,z,t)$, $H_3(n,z,t)$.

Сначала рассматривается случай действия только температурной нагрузки ω_1, ϑ ($P_1 = 0$). Тогда H_1, H_2, H_3 определяются из условия упрощений правых частей уравнений (20):

$$j_n^2 H_1 - a_1^{(j)} \frac{\partial^2 H_1}{\partial z^2} + a_2^{(j)} j_n \frac{\partial H_2}{\partial z} - a_3^{(j)} j_n H_3 = 0,$$

$$a_1^{(j)} j_n^2 H_2 - \frac{\partial^2 H_2}{\partial z^2} - a_2^{(j)} j_n \frac{\partial H_1}{\partial z} + a_3^{(j)} \frac{\partial H_3}{\partial z} = 0, \quad j_n^2 H_3 - \frac{\partial^2 H_3}{\partial z^2} = 0.$$

В результате формируются системы уравнений относительно $f_1(z)$, $f_2(z)$, $f_{11}(z)$ и $f_3(z)$, $f_4(z)$, $f_{12}(z)$, решение которых с учетом условий (17) позволяет определить H_1, H_2, H_3.

Функция $W_1(t)$ определяется из условия $W(1,h,t)=0$:

$$W_1(t) = -2\sum_{n=0}^{\infty} J_0(j_n)^{-1}\Big[H_2(n,h,t) + \sum_{i=1}^{\infty} G(\lambda_{in},n,t)N_2^{(2)}(\mu_{in},h)\|K_{in}\|^{-2}\Big].$$

Затем к цилиндрической поверхности пластины прикладываются касательные напряжения $P_1(z,t)$ $(\omega_1=\vartheta=0)$. Условия уравновешенности пластины, парности и неразрывности касательных напряжений

$$\int_0^h P_1(z,t)dz = 0, \quad P_1|_{z=0,h_1,h} = 0$$

позволяют записать $P_1(z,t)$ в виде следующей зависимости:

$$P_1(z,t) = S_0 W_1(t)\Big[\frac{h-h_1}{h_1}\sin\Big(\frac{\pi}{h_1}z\Big)H(h_1-z) - \\ - \sin\Big(\frac{\pi}{h-h_1}(z-h_1)\Big)H(z-h_1)\Big]. \quad (41)$$

Функции H_1, H_2 также вычисляются из условия упрощений правых частей дифференциальных уравнений (20):

$$j_n^2 H_1 - a_1^{(j)}\frac{\partial^2 H_1}{\partial z^2} + a_2^{(j)} j_n \frac{\partial H_2}{\partial z} = 0, \quad a_1^{(j)} j_n^2 H_2 - \frac{\partial^2 H_2}{\partial z^2} - a_2^{(j)} j_n \frac{\partial H_1}{\partial z} = 0.$$

В этом случае образуются системы дифференциальных уравнений относительно функций $f_5(z)$, $f_6(z)$; $f_7(z)$, $f_8(z)$ и $f_9(z)$, $f_{10}(z)$, которые решаются при удовлетворении граничных условий (17).

Сумма двух результатов расчета позволяет определить постоянную S_0 из условия интегрального равенства нулю вертикальных перемещений цилиндрической поверхности пластины:

$$\int_0^h W(1,z,t_{\max})dz = 0.$$

3. Численный анализ результатов. Выводы. Рассмотрим случай действия на верхней лицевой поверхности $(z_*=0)$ упругой системы $(b=1$ м) температурной нагрузки

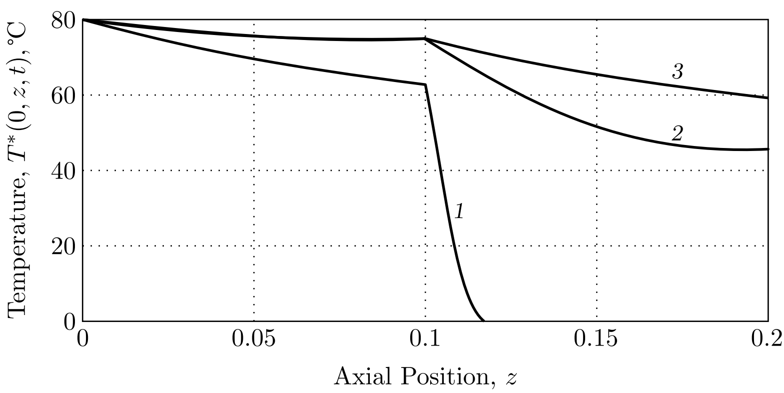
$$\omega_1^*(r_*,t_*) = \Big(1-\frac{r_*}{b}\Big)T_{\max}\Big[\sin\Big(\frac{\pi}{2t_{\max}}t_*\Big)H(t_{\max}^* - t_*) + H(t_* - t_{\max}^*)\Big] \quad (42)$$

при известной температуре внешней среды $\vartheta^* = 293\,\mathrm{K}$ $(20\,^\circ\mathrm{C})$; коэффициент теплоотдачи между поверхностью пластины и воздухом $\alpha = 8.7\,\text{Вт}/(\text{м}^2\cdot\mathrm{K})$. Здесь $T_{\max} = T_{\max}^* - T_0$; $T_{\max}^*$, $t_{\max}^*$ — максимальное значение температурной нагрузки и время, при котором тепловое внешнее воздействие достигает наибольшей величины в размерной форме ($T^*_{\max} = 373\,\text{K}$ ($100\,^\circ\text{C}$), $T_0 = 293\,\text{K}$ ($20\,^\circ\text{C}$), $t^*_{\max} = 10$ с).

Двухслойная пластина ($b = 1$ м), изготовленная из стали ($j = 1$) и пластика ($j = 2$), имеет следующие физико-механические характеристики материалов:

$$\{E^{(1)}, E^{(2)}\} = \{20, 0.33\} \times 10^{10}\ \text{Па}, \quad \{\Lambda^{(1)}, \Lambda^{(2)}\} = \{50, 0.2\}\ \text{Вт}/(\text{м}\cdot\text{K}),$$
$$\{v^{(1)}, v^{(2)}\} = \{0.28, 0.33\}, \quad \{c_\varepsilon^{(1)}, c_\varepsilon^{(2)}\} = \{3.8, 0.23\} \times 10^6\ \text{Дж}/(\text{м}^3\cdot\ \text{K}),$$
$$\{\alpha_t^{(1)}, \alpha_t^{(2)}\} = \{1.2, 8\} \times 10^{-5}\ 1/\text{K}.$$

На рис. 2, 3 представлены графики изменения температурного поля $T^*(0,z,t)$, перемещений $W^*(0,z,t)$ и компоненты тензора напряжений $\sigma_{rr}(r,z,t)$ по пространственным переменным в различные моменты времени t. Анализ численных результатов расчета позволяет сделать следующие выводы.



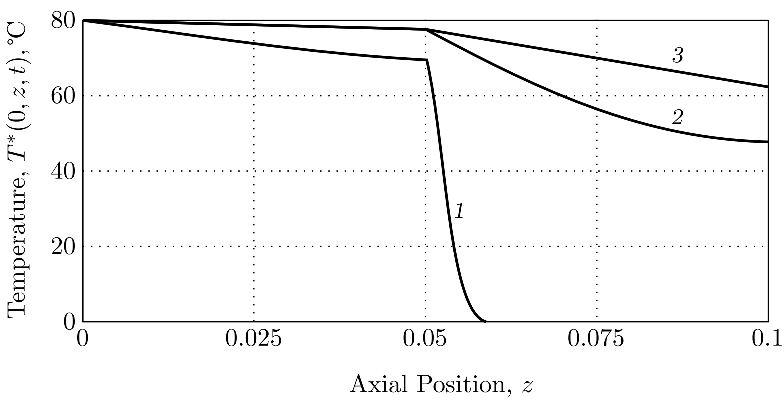


Рис. 2. Графики изменения температуры в конструкции по аксиальной координате z в различные моменты времени: $h_1 = h_2 = 0.1$, *1* — $t = t_{\max}$, *2* — $t = 550\,t_{\max}$, *3* — $t = 1100\,t_{\max}$ (сверху) и $h_1 = h_2 = 0.05$, *1* — $t = t_{\max}$, *2* — $t = 150\,t_{\max}$, *3* — $t = 300\,t_{\max}$ (снизу)

[Figure 2. Graphs of temperature changes in the structure along the axial coordinate at various points in time: $h_1 = h_2 = 0.1$, *1* — $t = t_{\max}$, *2* — $t = 550\,t_{\max}$, *3* — $t = 1100\,t_{\max}$ (at the top of the figure), and $h_1 = h_2 = 0.05$, *1* — $t = t_{\max}$, *2* — $t = 150\,t_{\max}$, *3* — $t = 300\,t_{\max}$ (at the bottom)]

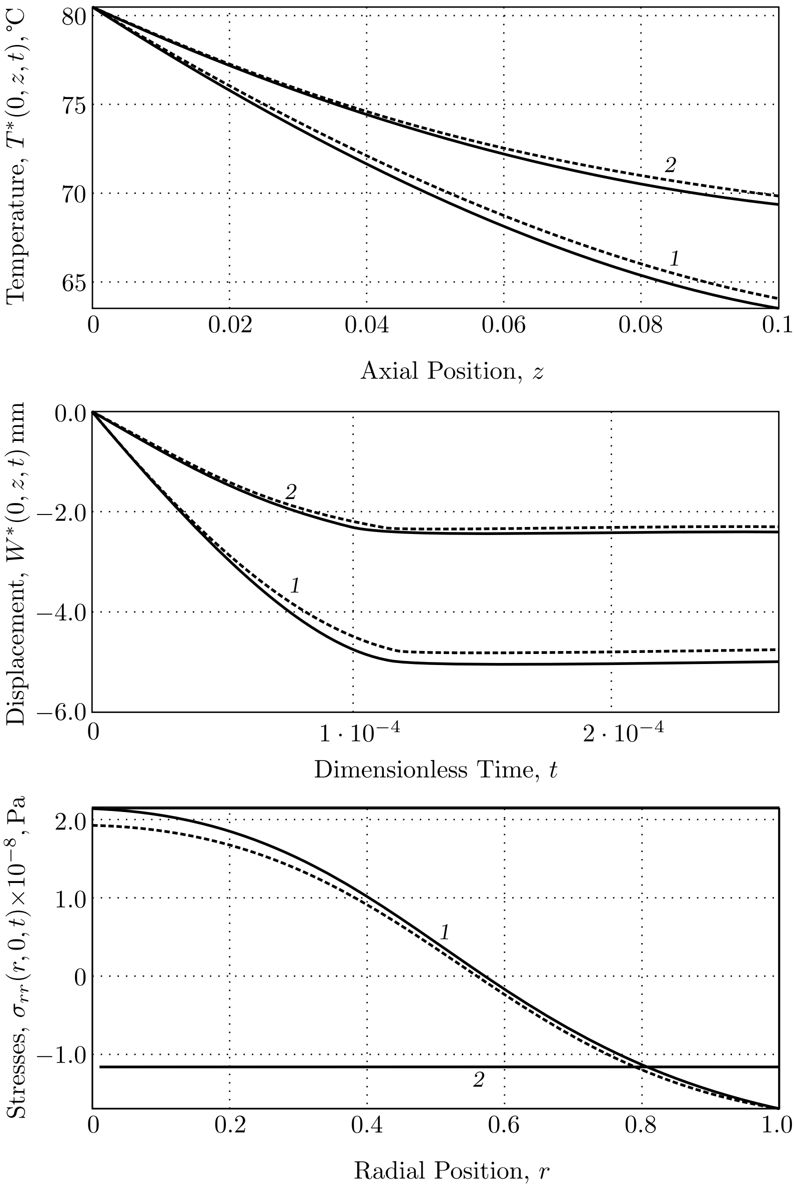


Рис. 3. Графики изменения температуры, перемещений и напряжений в металлической части конструкции ($h = 0.2$); сплошные линии — с учетом связанности термоупругих полей; пунктирные линии — без учета связанности термоупругих полей; метки сверху: *1* — $t = t_{\max}$, *2* — $t = 100\, t_{\max}$; метки по середине: *1* — $z = h$, *2* — $z = h_1$, $t_{\max} = 1.3 \cdot 10^{-4}$; метки снизу: *1* — $t = t_{\max}$, *2* — $t = 1100\, t_{\max}$

[Figure 3. Graphs of temperature, displacement and stress changes in the metal part of the structure ($h = 0.2$); the solid lines correspond to the solution with the connectivity of thermoelastic fields; the dashed lines correspond to the solution without the connectivity of thermoelastic fields; labels at the top: *1* — $t = t_{\max}$, *2* — $t = 100\, t_{\max}$; labels in the middle: *1* — $z = h$, *2* — $z = h_1$, $t_{\max} = 1.3 \cdot 10^{-4}$; labels at the bottom: *1* — $t = t_{\max}$, *2* — $t = 1100\, t_{\max}$]

1. При достижении температурной нагрузкой максимальных значений $t = t_{\max}$, $t_{\max} = k^{(1)} b^{-2} t^*_{\max}$ вследствие большой теплопроводности металла на внутренней поверхности стальной части пластины (рис. 2, кривые *1*) наблюдается достаточно высокая температура:

$$T^*(0, h_1, t_{\max}) = 63\,^\circ\text{C}, \quad h_1 = 0.1;$$
$$T^*(0, h_1, t_{\max}) = 71\,^\circ\text{C}, \quad h_1 = 0.05.$$

   При этом толщина пластины оказывает существенное влияние на время полного прогрева конструкции и на температуру ее нижней ($z = h$) лицевой поверхности. Для толстой ($h = 0.2$) пластины $T^*(0, h, t) = 60\,^\circ\text{C}$, $t = 1100\, t_{\max}$, а для более тонкой ($h = 0.1$) конструкции $T^*(0, h, t) = 64\,^\circ\text{C}$, $t = 300\, t_{\max}$ (рис. 2, кривые *3*).
2. Связанность термоупругих полей приводит к уменьшению температуры пластины (рис. 3 сверху), росту перемещений (рис. 3 по середине), что приводит к увеличению радиальной компоненты тензора напряжений $\sigma_{rr}(r, 0, t)$ (рис. 3 снизу) до 10 % во время ее прогрева. Наибольший эффект связанности полей наблюдается в центре пластины при достижении температурной нагрузкой максимальных значений $t = t_{\max}$ (рис. 3 снизу кривая *1*).
3. При достижении температурной нагрузкой максимальных значений ($t = t_{\max}$) верхняя лицевая поверхность пластины ($z = 0$) на участке $0 \leqslant r < 0.55$ испытывает растяжение в радиальной плоскости, а на оставшемся участке — сжатие. Однако в процессе прогрева конструкции область сжатия увеличивается и при установившемся тепловом режиме $t = 1100\, t_{\max}$ данная плоскость будет сжата, а напряжения $\sigma_{rr}(r, 0, t)$ — постоянны (рис. 3 снизу, кривая *2*).

В заключение следует отметить, что построенный алгоритм расчета позволяет также исследовать начально-краевые задачи термоупругости для многослойной пластины в случае действия силовой нагрузки и кинематического воздействия на ее лицевых поверхностях, а также учитывать воздействие внутренних источников тепла, расположенных в области соединения слоев.

На рис. 4, 5 приведены графики, позволяющие сделать выводы о влиянии приближенного выполнения граничного условия $W(1, z, t) = 0$ $\left(\frac{\partial W}{\partial z}\Big|_{r=1} = 0\right)$ на напряженно-деформированное состояние упругой системы:

1) аппроксимация касательных напряжений $\sigma_{rz}(1, z, t)$ с помощью функции $P_1(z, t)$ позволяет существенно снизить градиент вертикальных перемещений $\left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)$ по аксиальной координате при $r = 1$ (рис. 4, кривая *1*) по сравнению с соответствующей величиной при $r = 0$ (рис. 4, кривая *2*);
2) учет функции $P_1(z, t)$ в приближенном представлении (41) приводит к увеличению касательных напряжений (рис. 5, кривые *2*, *3*). При этом дальнейшее ее уточнение, связанное с использованием более сложной зависимости по высоте пластины, не приводит к существенному изменению численных значений касательных напряжений в пластине.

Кроме этого, решение задачи, когда к цилиндрической поверхности пластины прикладываются касательные напряжения $P_1(z, t)$ ($\omega_1 = \vartheta = 0$), приводит к несущественному изменению остальных компонент тензора напряжений и температурного поля, за исключением σ_{zz} в приграничном слое.

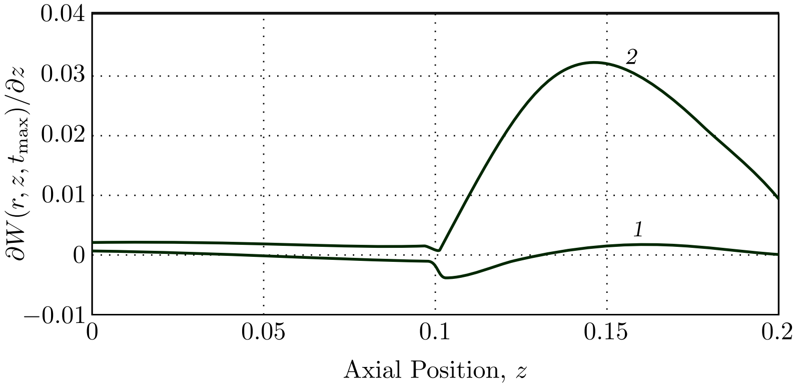


Рис. 4. Степень сжатия конструкции по высоте: *1* — $r = 1$, *2* — $r = 0$
[Figure 4. The compression ratio of the structure in height: *1* — $r = 1$, *2* — $r = 0$]

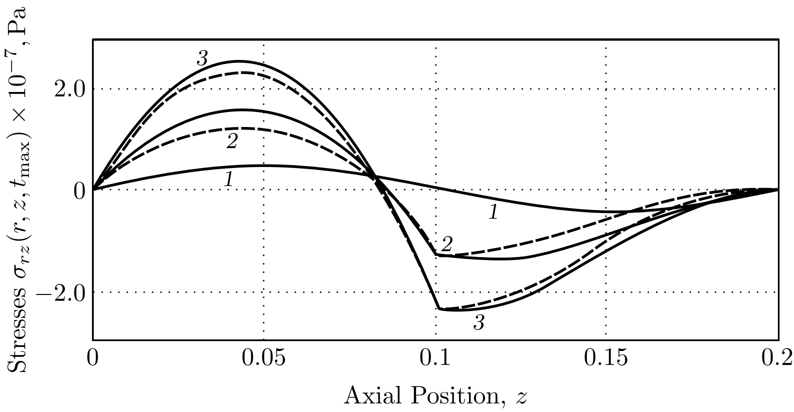


Рис. 5. Графики изменения касательного напряжения по высоте конструкции; сплошные линии — с учетом функции $P_1(z, t_{\max})$; пунктирные линии — без учета функции $P_1(z, t_{\max})$; метки: *1* — $r = 1$, *2* — $r = 0.8$, *3* — $r = 0.5$

[Figure 5. Graphs of shear stress changes along the structure's height; the solid lines correspond to the solution with the function $P_1(z, t_{\max})$; the dashed lines correspond to the solution without the function $P_1(z, t_{\max})$; labels: *1* — $r = 1$, *2* — $r = 0.8$, *3* — $r = 0.5$

Отметим, что при действии внешней температурной нагрузки в виде гладкой функции по радиальной координате (42) ряды, входящие в разложения (40), сходятся достаточно быстро, как правило, при $n = 0, 1, \ldots, 10$, $i = 0, 1, \ldots, 10$ (вычисление ряда заканчивается, когда численное значение последнего члена ряда составляет меньше 1 % от суммы предыдущих членов). В случае вычисления механических напряжений сходимость рядов ухудшается и количество учитываемых членом ряда (в среднем) увеличивается в два раза.

Заключение. В представленной работе при использовании классической теории термоупругости построено новое замкнутое решение осесимметричной задачи для многослойной жесткозакрепленной пластины. Полученные расчетные соотношения позволяют учесть связанность температурных и упругих полей.

Использование приближенного выражения для функции касательных напряжений не оказывает существенного влияния на напряженно-деформированное состояние и температурное поле пластины.

Представленный алгоритм расчета позволяет также исследовать начально-краевые задачи термоупругости для многослойной пластины в случае действия силовой нагрузки и кинематического воздействия на ее лицевых поверхностях, а также учитывать воздействие внутренних источников тепла, расположенных в области соединения слоев.

Конкурирующие интересы. Заявляем, что в отношении авторства и публикации этой статьи конфликта интересов не имеем.

Авторский вклад и ответственность. Д.А. Шляхин — идея исследования, формулировка целей и задач исследования, математическая постановка задачи и разработка подходов для построения общего решения, анализ численных результатов и формирование выводов, работа с черновиком рукописи. Ж.М. Кусаева — построение замкнутого решения рассматриваемой начально-краевой задачи, реализация построенного решения в среде Mathcad 15, верификация результатов и формирование выводов, работа с черновиком и переработанным вариантом рукописи. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 20–31–90042.

Библиографический список

1. Подстригач Я. С., Ломакин В. А., Коляно Ю. М. *Термоупругость тел неоднородной структуры.* М.: Наука, 1984. 368 с.
2. Boley B., Weiner J. *Theory of Thermal Stresses.* New York: Wiley, 1960. xvi+586 pp.
3. Новацкий В. *Динамические задачи термоупругости.* М.: Мир, 1970. 256 с.
4. Коваленко А. Д. *Введение в термоупругость.* Киев: Наук. думка, 1965. 202 с.
5. Радаев Ю. Н., Таранова М. В. Волновые числа термоупругих волн в волноводе с теплообменом на боковой стенке // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2011. №2(23). С. 53–61. https://doi.org/10.14498/vsgtu965.
6. Шашков А. Г., Бубнов В. А., Яновский С. Ю. *Волновые явления теплопроводности. Системно-структурный подход.* М.: Едиториал УРСС, 2004. 296 с.
7. Кудинов В. А., Карташев Э. М., Калашников В. В. *Аналитические решения задач тепломассопереноса и термоупругости для многослойных конструкций.* М.: Высш. шк., 2005. 430 с.
8. Кудинов В. А., Клебнеев Р. М., Куклова Е. А. Получение точных аналитических решений нестационарных задач теплопроводности ортогональными методами // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2017. Т. 21, №1. С. 197–206. https://doi.org/10.14498/vsgtu1521.
9. Карташов Э. М. *Аналитические методы в теплопроводности твердых тел.* М.: Высш. шк., 1985. 480 с.
10. Филатов В. Н. Расчет на температурные воздействия гибких пологих оболочек, подкрепленных ортогональной сеткой ребер / *Нелинейные задачи расчета тонкостенных конструкций.* Саратов: СГУ, 1989. С. 108–110.
11. Кудинов В. А., Кузнецова А. Э., Еремин А. В., Котова Е. В. Аналитические решения квазистатических задач термоупругости с переменными физическими свойствами среды // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2014. №2(35). С. 130–135. https://doi.org/10.14498/vsgtu1219.

12. Кобзарь В. Н., Фильштинский Л. А. Плоская динамическая задача термоупругости // *ПММ*, 2008. Т. 72, № 5. С. 842–851.
13. Sargsyan S. H. Mathematical model of micropolar thermo-elasticity of thin shells // *J. Thermal Stresses*, 2013. vol. 36, no. 11. pp. 1200–1216. https://doi.org/10.1080/01495739.2013.819265.
14. Жорник А. И., Жорник В. А., Савочка П. А. Об одной задаче термоупругости для сплошного цилиндра // *Изв. ЮФУ. Техн. науки*, 2012. № 6(131). С. 63–69.
15. Жуков П. В. Расчет температурных полей и термических напряжений в толстостенном цилиндре при импульсном подводе теплоты // *Вестник ИГЭУ*, 2013. № 3. С. 54–57.
16. Макарова И. С. Решение несвязной задачи термоупругости с краевыми условиями первого рода // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2012. № 3(28). С. 191–195. https://doi.org/10.14498/vsgtu1088.
17. Harmatij H., Król M., Popovycz V. Quasi-static problem of thermoelasticity for thermosensitive infinite circular cylinder of complex heat exchange // *Adv. Pure Math.*, 2013. vol. 3, no. 4. pp. 430–437. https://doi.org/10.4236/apm.2013.34061.
18. Lee Z.-Y. Coupled problem of thermoelasticity for multilayered spheres with time-dependent boundary conditions // *J. Mar. Sci. Tech.*, 2004. vol. 12, no. 2. pp. 93–101.
19. Lord H. W., Shulman Y. A generalized dynamical theory of thermoelasticity // *J. Mech. Phys. Solids*, 1967. pp. 299–309. https://doi.org/10.1016/0022-5096(67)90024-5.
20. Ковалев В. А., Радаев Ю. Н., Семенов Д. А. Связанные динамические задачи гиперболической термоупругости // *Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика*, 2009. Т. 9, № 4(2). С. 94–127. https://doi.org/10.18500/1816-9791-2009-9-4-2-94-127.
21. Ковалев В. А., Радаев Ю. Н., Ревинский Р. А. Прохождение обобщенной GNIII-термоупругой волны через волновод с проницаемой для тепла стенкой // *Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика*, 2011. Т. 11, № 1. С. 59–70. https://doi.org/10.18500/1816-9791-2011-11-1-59-70.
22. Сеницкий Ю. Э. К решению связанной динамической задачи термоупругости для бесконечного цилиндра и сферы // *Прикл. мех.*, 1982. Т. 18, № 6. С. 34–41.
23. Шляхин Д. А., Кальмова М. А. Связанная нестационарная задача термоупругости для длинного полого цилиндра // *Инженерный вестник Дона*, 2020. № 3. http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n3y2020/6361.
24. Лычев С. А. Связанная динамическая задача термоупругости для конечного цилиндра // *Вестн. Сам. гос. ун-та. Естественнонаучн. сер.*, 2003. № 4(30). С. 112–124.
25. Лычев С. А., Манжиров А. В., Юбер С. В. Замкнутые решения краевых задач связанной термоупругости // *Изв. РАН. МТТ*, 2010. № 4. С. 138–154.
26. Шляхин Д. А., Даулетмуратова Ж. М. Нестационарная связанная осесимметричная задача термоупругости для жесткозакрепленной круглой пластины // *Вестник ПНИПУ. Механика*, 2019. № 4. С. 191–200. https://doi.org/10.15593/perm.mech/2019.4.18.
27. Fu J. W., Chen Z. T., Qian L. F. Coupled thermoelastic analysis of a multi-layered hollow cylinder based on the C–T theory and its application on functionally graded materials // *Compos. Struct.*, 2015. vol. 131, no. 1. pp. 139–150. https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2015.04.053.
28. Vitucci G., Mishuris G. Analysis of residual stresses in thermoelastic multilayer cylinders // *J. Eur. Ceram. Soc.*, 2016. vol. 36, no. 9. pp. 2411–2417, arXiv: 1511.06562 [cond-mat.mtrl-sci]. https://doi.org/10.1016/j.jeurceramsoc.2015.12.003.
29. Шляхин Д. А., Даулетмуратова Ж. М. Нестационарная осесимметричная задача термоупругости для жесткозакрепленной круглой пластины // *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2018. № 5(77), 1761. 18 с. https://doi.org/10.18698/2308-6033-2018-5-1761.
30. Sneddon I. N. *Fourier Transforms*. New York: McGraw-Hill, 1950. xii+542 pp.
31. Сеницкий Ю. Э. Биортогональное многокомпонентное конечное интегральное преобразование и его приложение к краевым задачам механики // *Изв. вузов. Матем.*, 1996. № 8. С. 71–81.

Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2021, vol. 25, no. 2, pp. 320–342
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1797

MSC: 74F15, 74S20

Solution of the coupled nonstationary problem of thermoelasticity for a rigidly fixed multilayer circular plate by the finite integral transformations method

© ***D. A. Shlyakhin, Zh. M. Kusaeva***

Samara State Technical University,
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russian Federation.

Abstract

A new closed solution of an axisymmetric non-stationary problem is constructed for a rigidly fixed round layered plate in the case of temperature changes on its upper front surface (boundary conditions of the 1st kind) and a given convective heat exchange of the lower front surface with the environment (boundary conditions of the 3rd kind).

The mathematical formulation of the problem under consideration includes linear equations of equilibrium and thermal conductivity (classical theory) in a spatial setting, under the assumption that their inertial elastic characteristics can be ignored when analyzing the operation of the structure under study.

When constructing a general solution to a non-stationary problem described by a system of linear coupled non-self-adjoint partial differential equations, the mathematical apparatus for separating variables in the form of finite integral Fourier–Bessel transformations and generalized biorthogonal transformation (CIP) is used. A special feature of the solution construction is the use of a CIP based on a multicomponent relation of eigenvector functions of two homogeneous boundary value problems, with the use of a conjugate operator that allows solving non-self-adjoint linear problems of mathematical physics. This transformation is the most effective method for studying such boundary value problems.

The calculated relations make it possible to determine the stress-strain state and the nature of the distribution of the temperature field in a rigid round multilayer plate at an arbitrary time and radial coordinate of external temperature influence. In addition, the numerical results of the calculation

Research Article

Please cite this article in press as:
Shlyakhin D. A., Kusaeva Zh. M. Solution of the coupled nonstationary problem of thermoelasticity for a rigidly fixed multilayer circular plate by the finite integral transformations method, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2021, vol. 25, no. 2, pp. 320–342. https://doi.org/10.14498/vsgtu1797 (In Russian).

Authors' Details:
Dmitriy A. Shlyakhin https://orcid.org/0000-0003-0926-7388
Dr. Techn. Sci.; Head of Dept.; Dept. of Structural Mechanics and Engineering Geology;
e-mail: d-612-mit2009@yandex.ru

Zhanslu M. Kusaeva https://orcid.org/0000-0001-7028-0130
Postgraduate Student; Dept. of Structural Mechanics and Engineering Geology;
e-mail: Dauletmuratova@mail.ru

allow us to analyze the coupling effect of thermoelastic fields, which leads to a significant increase in normal stresses compared to solving similar problems in an unrelated setting.

Keywords: round multilayer plate, classical theory of thermoelasticity, nonstationary temperature influence, biorthogonal finite integral transformations.

Received: 15th July, 2020 / Revised: 26th April, 2021 /
Accepted: 11th May, 2021 / First online: 18th June, 2021

Competing interests. We declare that we have no conflicts of interest in the authorship and publication of this article.

Authors' contributions and responsibilities. D.A. Shlyakhin: Idea of study; Formulation of research goals and aims; Mathematical formulation of the problem; Development of methods for constructing a general solution; Interpreting results and drawing conclusions; Writing — original draft. Zh.M. Kusaeva: Constructing a closed solution for the considered initial-boundary value problem; Implementation of the solution by Mathcad 15; Interpreting results and drawing conclusions; Writing — original draft and review & editing. The authors are absolutely responsible for submitting the final manuscript in print. Each author has approved the final version of manuscript.

Funding. This study was funded by RFBR, research project no. 20–31–90042.

References

1. Podstrigach Ya. S., Lomakin V. A., Kolyano Yu. M. *Termouprugost' tel neodnorodnoi struktury* [Thermoelasticity of Bodies with Inhomogeneous Structure]. Moscow, Nauka, 1984, 368 pp. (In Russian)
2. Boley B., Weiner J. *Theory of Thermal Stresses.* New York, Wiley, 1960, xvi+586 pp.
3. Nowacki W. *Dinamicheskie zadachi termouprugosti* [Dynamic Problems of Thermoelasticity]. Moscow, Mir, 1970, 256 pp. (In Russian)
4. Kovalenko A. D. *Vvedenie v termouprugost'* [Introduction to Thermoelasticity]. Kiev, Nauk. dumka, 1965, 202 pp. (In Russian)
5. Radayev Yu. N., Taranova M. V. Wavenumbers of type III thermoelastic waves in a long waveguide under sidewall heat interchanging, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2011, no. 2(23), pp. 53–61 (In Russian). https://doi.org/10.14498/vsgtu965.
6. Shashkov A. G., Bubnov V. A., Ianovsky S. Yu. *Volnovye iavleniia teploprovodnosti. Sistemno-strukturnyi podkhod* [Wave Phenomena of Heat Conductivity. System and Structural Approach]. Moscow, Editorial URSS, 2004, 296 pp. (In Russian)
7. Kudinov V. A., Kartashev E. M., Kalashnikov V. V. *Analiticheskie resheniia zadach teplomassoperenosa i termouprugosti dlia mnogosloinykh konstruktsii* [Analytical Solutions of Heat and Mass Transfer and Thermoelasticity Problems for Multilayer Structures]. Moscow, Vyssh. Shk., 2005, 430 pp. (In Russian)
8. Kudinov V. A., Klebleev R. M., Kuklova E. A. Obtaining exact analytical solutions for nonstationary heat conduction problems using orthogonal methods, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2017, vol. 21, no. 1, pp. 197–206 (In Russian). https://doi.org/10.14498/vsgtu1521.
9. Kartashov E. M. *Analiticheskie metody v teploprovodnosti tverdykh tel* [Analytical Methods in the Theory of the Thermal Conductivity of Solids]. Moscow, Vyssh. shk., 1985, 480 pp. (In Russian)
10. Filatov V. N. Calculation of the temperature effects of flexible gently sloping shells supported by an orthogonal grid of edges, In: *Nelineinye zadachi rascheta tonkostennykh konstruktsii*

[Nonlinear Problems of Calculating Thin-Walled Structures]. Saratov, Saratov State Univ., 1989, pp. 108–110 (In Russian).

11. Kudinov V. A., Kuznetsova A. E., Eremin A. V., Kotova E. V. Analytical solutions of the quasistatic thermoelasticity task with variable physical properties of a medium, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2014, no. 2(35), pp. 130–135 (In Russian). https://doi.org/10.14498/vsgtu1219.
12. Kobzar' V. N., Fil'shtinskii L. A. The plane dynamic problem of coupled thermoelasticity, *J. Appl. Math. Mech.*, 2008, vol. 72, no. 5, pp. 611–618. https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2008.11.002.
13. Sargsyan S. H. Mathematical model of micropolar thermo-elasticity of thin shells, *J. Thermal Stresses*, 2013, vol. 36, no. 11, pp. 1200–1216. https://doi.org/10.1080/01495739.2013.819265.
14. Zhornik A. I., Zhornik V. A., Savochka P. A. On a problem of thermoelasticity for a solid cylinder, *Izv. YuFU. Tekhn. Nauki*, 2012, no. 6(131), pp. 63–69 (In Russian).
15. Zhukov P. V. Calculation of temperature fields and thermal stresses in thick-walled cylinder under impulse heat supply, *Vestnik IGEU*, 2013, no. 3, pp. 54–57 (In Russian).
16. Makarova I. S. The solution of uncoupled thermoelastic problem with first kind boundary conditions, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2012, no. 3(28), pp. 191–195 (In Russian). https://doi.org/10.14498/vsgtu1088.
17. Harmatij H., Król M., Popovycz V. Quasi-static problem of thermoelasticity for thermosensitive infinite circular cylinder of complex heat exchange, *Adv. Pure Math.*, 2013, vol. 3, no. 4, pp. 430–437. https://doi.org/10.4236/apm.2013.34061.
18. Lee Z.-Y. Coupled problem of thermoelasticity for multilayered spheres with time-dependent boundary conditions, *J. Mar. Sci. Tech.*, 2004, vol. 12, no. 2, pp. 93–101.
19. Lord H. W., Shulman Y. A generalized dynamical theory of thermoelasticity, *J. Mech. Phys. Solids*, 1967, pp. 299–309. https://doi.org/10.1016/0022-5096(67)90024-5.
20. Kovalev V. A., Radayev Yu. N., Semenov D. A. Coupled dynamic problems of hyperbolic thermoelasticity, *Izv. Saratov Univ. Math. Mech. Inform.*, 2009, vol. 9, no. 4(2), pp. 94–127 (In Russian). https://doi.org/10.18500/1816-9791-2009-9-4-2-94-127.
21. Kovalev V. A., Radayev Yu. N., Revinsky R. A. Generalized cross-coupled type-III thermoelastic waves propagating via a waveguide under sidewall heat interchange, *Izv. Saratov Univ. Math. Mech. Inform.*, 2011, vol. 11, no. 1, pp. 59–70 (In Russian). https://doi.org/10.18500/1816-9791-2011-11-1-59-70.
22. Senitskii Yu. E. Solution of coupled dynamic thermoelasticity problem for an infinite cylinder and sphere, *Sov. Appl. Mech.*, 1982, vol. 18, no. 6, pp. 514–520. https://doi.org/10.1007/BF00883341.
23. Shlyakhin D. A., Kalmova M. A. A coupled unsteady thermoelasticity problem for a long hollow cylinder, *Engineering Journal of Don*, 2020, no. 3 (In Russian). http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n3y2020/6361.
24. Lychev S. A. A coupled dynamic problem of thermoelasticity for a finite cylinder, *Vestn. Samar. Gos. Univ., Estestvennonauchn. Ser.*, 2003, no. 4(30), pp. 112–124 (In Russian).
25. Lychev S. A., Manzhirov A. V., Joubert S. V. Closed solutions of boundary-value problems of coupled thermoelasticity, *Mech. Solids*, 2010, vol. 45, no. 4, pp. 610–623. https://doi.org/10.3103/S0025654410040102.
26. Shlyakhin D. A., Dauletmuratova Zh. M. Non-stationary coupled axisymmetric thermoelasticity problem for a rigidly fixed round plate, *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2019, no. 4, pp. 191–200 (In Russian). https://doi.org/10.15593/perm.mech/2019.4.18.
27. Fu J. W., Chen Z. T., Qian L. F. Coupled thermoelastic analysis of a multi-layered hollow cylinder based on the C–T theory and its application on functionally graded materials, *Compos. Struct.*, 2015, vol. 131, no. 1, pp. 139–150. https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2015.04.053.

28. Vitucci G., Mishuris G. Analysis of residual stresses in thermoelastic multilayer cylinders, *J. Eur. Ceram. Soc.*, 2016, vol. 36, no. 9, pp. 2411–2417, arXiv: 1511.06562 [cond-mat.mtrl-sci]. https://doi.org/10.1016/j.jeurceramsoc.2015.12.003.
29. Shliakhin D. A., Dauletmuratova Zh. M. Nonstationary axisymmetric thermoelasticity problem for a rigidly fixed circular plate, *Engineering Journal: Science and Innovation*, 2018, no. 5(77), 1761, 18 pp (In Russian). https://doi.org/10.18698/2308-6033-2018-5-1761
30. Sneddon I. N. *Fourier Transforms.* New York, McGraw-Hill, 1950, xii+542 pp.
31. Senitskij Yu. È. Biorthogonal multicomponent finite integral transformation and its application to boundary value problems of mechanics, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 1996, vol. 40, no. 8, pp. 69–79.