Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2021. Т. 25, № 1. С. 51–66
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1845

УДК 517.954

Начально-граничная задача для уравнения вынужденных колебаний консольной балки

© К. Б. Сабитов, О. В. Фадеева

Самарский государственный технический университет,
Россия, 443100, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

Аннотация

Изучена начально-граничная задача для уравнения вынужденных колебаний консольно закрепленной балки. Такое линейное дифференциальное уравнение четвертого порядка описывает изгибные поперечные колебания однородной балки при воздействии внешней силы при отсутствии вращательного движения при изгибе.

Методом разделения переменных построена система собственных функций одномерной спектральной задачи, которая является ортогональной и полной в пространстве квадратично-суммируемых функций. Единственность решения начально-граничной задачи доказана двумя способами — с применением интеграла энергии и с использованием свойства полноты системы собственных функций.

Решение задачи вначале найдено при отсутствии внешней силы и однородных граничных условиях, а затем рассмотрен общий случай при наличии внешней силы и неоднородных граничных условиях. В обоих случаях решение задачи построено в виде суммы ряда Фурье.

Получены оценки коэффициентов этих рядов и системы собственных функций. На основании установленных оценок найдены достаточные условия на начальные функции, выполнение которых обеспечивает равномерную сходимость построенных рядов в классе регулярных решений уравнения колебаний балки, т.е. доказаны теоремы существования решения поставленной начально-граничной задачи. Установлена устойчивость решений начально-граничной задачи в зависимости от начальных данных и правой части рассматриваемого уравнения в классах квадратично-суммируемых и непрерывных функций.

Ключевые слова: консольно закрепленная балка, вынужденные колебания, начальные и граничные условия, спектральный метод, аналитическое решение, единственность, существование, устойчивость.

Получение: 11 февраля 2021 г. / Исправление: 16 февраля 2021 г. / Принятие: 10 марта 2021 г. / Публикация онлайн: 31 марта 2021 г.

Научная статья

Образец для цитирования

Сабитов К. Б., Фадеева О. В. Начально-граничная задача для уравнения вынужденных колебаний консольной балки // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2021. Т. 25, № 1. С. 51–66. https://doi.org/10.14498/vsgtu1845.

Сведения об авторах

Камиль Басирович Сабитов https://orcid.org/0000-0001-9516-2704
доктор физико-математических наук; профессор; каф. высшей математики;
e-mail: sabitov_fmf@mail.ru

Оксана Владиславовна Фадеева https://orcid.org/0000-0003-1704-9524
кандидат физико-математических наук; доцент; каф. высшей математики;
e-mail: faoks@yandex.ru

Введение. Рассмотрим однородную консольно закрепленную балку длины l. Вынужденные изгибные поперечные колебания такой балки под действием непрерывной внешней силы $G(x,t)$ в случае отсутствия вращательного движения описываются следующим уравнением [1, с. 143–145; 2, с. 276–277]:

$$\rho S u_{tt} + EJu_{xxxx} = G(x,t),$$

где ρ — линейная плотность балки, S — площадь поперечного сечения, E — модуль упругости материала, J — момент инерции сечения относительно своей горизонтальной оси. Это уравнение можно записать в виде

$$u_{tt} + \alpha^2 u_{xxxx} = F(x,t), \tag{1}$$

где $\alpha^2 = EJ/(\rho S)$, $F(x,t) = G(x,t)/(\rho S)$.

Отметим, что задачи о колебательных процессах балок, стержней и пластин играют важную роль в строительной механике [3, с. 326].

В данной работе для уравнения (1) изучается начально-граничная задача в области

$$D = \{(x,t) : 0 < x < l, 0 < t < T\},$$

где l и T — заданные положительные действительные числа.

Начально-граничная задача. *В области D найти решение $u(x,t)$ уравнения* (1), *удовлетворяющее условиям*

$$u(x,t) \in C^{4,2}_{x,t}(D) \cap C^{2,1}_{x,t}(\overline{D}), \tag{2}$$

$$u(0,t) = u_x(0,t) = u_{xx}(l,t) = u_{xxx}(l,t) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{3}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{4}$$

где $F(x,t)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ — заданные функции, обладающие достаточной гладкостью.

Отметим, что в учебниках и монографиях [1, с. 145–147; 2, с. 277; 3, с. 346–350; 4, с. 35–38; 5, с. 149–158; 6, с. 321–330] найдены собственные частоты и виды собственных колебаний для уравнения (1) с различными граничными условиями, но начально-граничные задачи не изучены. В последние годы к исследованию линейных и нелинейных начально-граничных задач для уравнения колебаний балки наблюдается повышенный интерес [7–15].

В данной работе на основе [11,12] решение начально-граничной задачи для уравнения (1) вначале построено при отсутствии внешней силы и однородных граничных условиях, а затем рассмотрен общий случай при наличии внешней силы и неоднородных граничных условиях.

1. Единственность решения начально-граничной задачи. Для доказательства единственности решения поставленной задачи воспользуемся следующим утверждением из работы [12].

Теорема 1 [12]. *Если существует решение начально-граничной задачи* (1)–(4), *то для любого t, $0 \leqslant t \leqslant T$, справедлива оценка*

$$\int_0^l (u_t^2 + \alpha^2 u_{xx}^2)\,\mathrm{d}x \leqslant e^T \left[\int_0^l (\psi^2(x) + \alpha^2(\varphi''(x))^2)\,\mathrm{d}x + \iint\limits_{\overline{D}} F^2(x,t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\right]. \tag{5}$$

Теорема 2. *Если существует функция $u(x,t)$, удовлетворяющая уравнению (1) и условиям (2)–(4), то она единственна.*

Доказательство. Предположим, что существуют две различные функции $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$, являющиеся решениями данной задачи. Тогда разность $u(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$ удовлетворяет однородному уравнению

$$u_{tt} + \alpha^2 u_{xxxx} = 0$$

и нулевым начальным и граничным условиям. Для этой разности в силу оценки (5) при любом $t \in [0,T]$ имеем

$$\int_0^l (u_t^2 + \alpha^2 u_{xx}^2)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Это возможно только в случае, когда $u_t = u_{xx} \equiv 0$ в области D, т.е. $u(x,t) = c_1 x + c_2$, где c_1, c_2 — произвольные постоянные. Из выполнимости граничных условий (3) получаем $c_1 = c_2 = 0$, т.е. $u(x,t) \equiv 0$ в $\overline{D}$, откуда и следует утверждение теоремы. □

2. Существование решения начально-граничной задачи. Рассмотрим решение задачи для случая отсутствия внешней силы — $F(x,t) \equiv 0$. Разделяя в уравнении (1) переменные $u(x,t) = X(x)T(t)$, получим спектральную задачу относительно функции $X(x)$:

$$X^{IV} + \lambda X(x) = 0, \quad 0 < x < l, \tag{6}$$

$$X(0) = X'(0) = X''(l) = X'''(l) = 0. \tag{7}$$

Если $\lambda > 0$, то, полагая $\lambda = 4d^4$, $d > 0$, найдем общее решение уравнения (6):

$$X(x) = e^{dx}(a_1 \cos dx + a_2 \sin dx) + e^{-dx}(a_3 \cos dx + a_4 \sin dx),$$

где a_i — произвольные постоянные, $i = \overline{1,4}$. Подчиняя функцию $X(x)$ и ее производные до третьего порядка граничным условиям (7), получим линейную систему относительно неизвестных постоянных a_i:

$$\begin{cases} a_1 + a_3 = 0, \\ a_1 + a_2 - a_3 + a_4 = 0, \\ a_1 e^{dl} \sin dl - a_2 e^{dl} \cos dl - a_3 e^{-dl} \sin dl + a_4 e^{-dl} \cos dl = 0, \\ (a_1 e^{dl} - a_4 e^{-dl})(\cos dl + \sin dl) - (a_2 e^{dl} + a_3 e^{-dl})(\cos dl - \sin dl) = 0, \end{cases}$$

определитель которой равен

$$\Delta = e^{2dl} + e^{-2dl} + 2(1 + \cos^2 dl).$$

Поскольку определитель отличен от нуля, система имеет только тривиальное решение $X(x) \equiv 0$.

Если $\lambda = 0$, то спектральная задача (6), (7) также имеет только тривиальное решение $X(x) \equiv 0$.

Если $\lambda < 0$, то, полагая $\lambda = -d^4$, $d > 0$, строим общее решение уравнения (6) в виде

$$X(x) = a_1 e^{dx} + a_2 e^{-dx} + a_3 \cos dx + a_4 \sin dx,$$

где a_i — произвольные пока неизвестные постоянные, $i = \overline{1,4}$. Удовлетворяя функцию $X(x)$ граничным условиям (7), получим следующую систему относительно неизвестных постоянных:

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 0, \\ a_1 - a_2 + a_4 = 0, \\ a_1 e^{dl} + a_2 e^{-dl} - a_3 \cos dl - a_4 \sin dl = 0, \\ (a_1 e^{dl} + a_2 e^{-dl}) + a_3 \sin dl - a_4 \cos dl = 0. \end{cases} \tag{8}$$

Определитель системы (8) равен

$$\Delta = -4(\operatorname{ch} dl \cos dl + 1).$$

Чтобы система (8) имела ненулевые решения, потребуем, чтобы ее определитель был равен нулю:

$$\operatorname{ch} dl \cos dl = -1. \tag{9}$$

Уравнение (9) имеет счетное множество корней d_n [1, с. 146; 9]:

$$d_n = \frac{\pi}{l}\left(n - \frac{1}{2} + (-1)^n \Theta_n\right), \quad \Theta_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right). \tag{10}$$

Итак, получили собственные значения спектральной задачи (6), (7):

$$\lambda_n = -d_n^4,$$

где d_n — корень уравнения (9).

Находя общее решение системы (8) и учитывая равенство (9) при $d = d_n$ получаем систему собственных функций:

$$X_n(x) = \frac{\operatorname{sh} d_n l + \sin d_n l}{\operatorname{ch} d_n l + \cos d_n l}(\operatorname{ch} d_n x - \cos d_n x) + \sin d_n x - \operatorname{sh} d_n x.$$

Отсюда, учитывая

$$\operatorname{sh} d_n l = \sqrt{\operatorname{ch}^2 d_n l - 1} = |\operatorname{tg} d_n l| = -\frac{|\sin d_n l|}{\cos d_n l},$$

получаем две подсистемы:

$$X_n(x) = \begin{cases} a_n \operatorname{ch} d_n(x - l/2) + b_n \sin d_n(x - l/2), & n = 2k-1, \\ c_n \operatorname{sh} d_n(x - l/2) + f_n \cos d_n(x - l/2), & n = 2k, \end{cases} \tag{11}$$

где $a_n = \operatorname{sh}^{-1}(d_n l/2)$, $b_n = \cos^{-1}(d_n l/2)$, $c_n = -\operatorname{ch}^{-1}(d_n l/2)$, $f_n = \sin^{-1}(d_n l/2)$.

Таким образом, построена система собственных функций задачи (6), (7) по формуле (11). Эта система ортогональна и полна в пространстве $L_2[0,l]$ [16, с. 99]. Для удобства дальнейших исследований нормируем систему функций (11). Для нахождения норм собственных функций вычислим интеграл

$$I_{nn} = \int_0^l X_n^2(x)\,\mathrm{d}x.$$

Для $n = 2k-1$ имеем

$$I_{nn} = \int_0^l \big[a_n \operatorname{ch} d_n(x-l/2) + b_n \sin d_n(x-l/2)\big]^2\,\mathrm{d}x = \\ = \frac{a_n^2+b_n^2}{2} l + \frac{a_n^2}{2d_n} \operatorname{sh} d_n l - \frac{b_n^2}{2d_n} \sin d_n l.$$

Тогда, с учетом равенства (9), находим

$$I_{nn} = \|X_n(x)\|^2 = \int_0^l X_n^2(x)\,\mathrm{d}x = l\frac{\operatorname{ch} d_n l + 1}{\operatorname{ch} d_n l - 1} = l \operatorname{cth}^2(d_n l/2). \tag{12}$$

Аналогично для $n = 2k$ получаем

$$I_{nn} = \|X_n(x)\|^2 = \int_0^l X_n^2(x)\,\mathrm{d}x = l\frac{\operatorname{ch} d_n l - 1}{\operatorname{ch} d_n l + 1} = l \operatorname{th}^2(d_n l/2). \tag{13}$$

На основании равенств (12) и (13) нормируем систему функций (11):

$$Y_n(x) = \frac{X_n(x)}{\|X_n(x)\|}, \quad \|X_n(x)\| = \begin{cases} \sqrt{l}\operatorname{cth}(d_n l/2), & n = 2k-1, \\ \sqrt{l}\operatorname{th}(d_n l/2), & n = 2k. \end{cases} \tag{14}$$

Пусть $u(x,t)$ — решение задачи (1)–(4). Следуя [11], [12], рассмотрим вспомогательные функции

$$u_n(t) = \int_0^l u(x,t) Y_n(x)\,\mathrm{d}x. \tag{15}$$

Дифференцируя (15) дважды и учитывая (1), при условии $F(x,t) \equiv 0$ получим

$$u_n''(t) = -\alpha^2 \int_0^l u_{xxxx}(x,t) Y_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

Интегрируя последнее равенство четыре раза по частям и принимая во внимание условия (3) и (7), получим уравнение

$$u_n''(t) + \alpha^2 d_n^4 u_n(t) = 0,$$

общее решение которого имеет вид

$$u_n(t) = \alpha_n \cos \alpha d_n^2 t + \beta_n \sin \alpha d_n^2 t, \tag{16}$$

где α_n, β_n — произвольные постоянные.

Для нахождения постоянных α_n, β_n, подчинив функции (15) условиям (4), получим начальные условия:

$$u_n(0) = \int_0^l u(x,0)Y_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^l \varphi(x)Y_n(x)\,\mathrm{d}x = \varphi_n, \tag{17}$$

$$u'_n(0) = \int_0^l u_t(x,0)Y_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^l \psi(x)Y_n(x)\,\mathrm{d}x = \psi_n. \tag{18}$$

Удовлетворяя функции (16) полученным начальным условиям (17) и (18), находим $\alpha_n = \varphi_n$, $\beta_n = \psi_n/(\alpha d_n^2)$ и явный вид функций

$$u_n(t) = \varphi_n \cos \alpha d_n^2 t + \frac{\psi_n}{\alpha d_n^2} \sin \alpha d_n^2 t. \tag{19}$$

Поскольку для функций (15) получен явный вид (19), на основании полноты системы $Y_n(x)$ в пространстве $L_2[0,l]$ можно доказать единственность решения задачи (1)–(4). Действительно, пусть существуют различные функции $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$ — решения данной задачи. Тогда их разность $u(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$ есть решение однородной задачи (1)–(4), где $\varphi(x) = \psi(x) = 0$. Тогда из (17)–(19) следует, что $u_n(t) = 0$ при любом $t \in [0,T]$, что, с учетом (15), влечет выполнимость равенства

$$\int_0^l u(x,t)Y_n(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

при любом $t \in [0,T]$ и для любого $n \in \mathbb{N}$. Отсюда в силу полноты системы $Y_n(x)$ в пространстве $L_2[0,l]$ получаем, что $u(x,t) = 0$ почти всюду на $[0,l]$ при любом $t \in [0,T]$. Так как $u(x,t)$ в силу условия (2) непрерывна на $\overline{D}$, то $u(x,t) \equiv 0$ на $\overline{D}$.

Решение поставленной задачи (1)–(4) будем искать в виде суммы ряда

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)Y_n(x), \tag{20}$$

где $u_n(t)$ и $Y_n(x)$ определяются формулами (19) и (14).

Лемма 1. *Для любых $t \in [0,T]$ и больших $n \in \mathbb{N}$ справедливы оценки*

$$|u_n(t)| \leqslant C_1\Big(|\varphi_n| + \frac{|\psi_n|}{n^2}\Big), \quad |u''_n(t)| \leqslant C_2 n^4\Big(|\varphi_n| + \frac{|\psi_n|}{n^2}\Big),$$

где C_i — здесь и далее положительные постоянные.

Справедливость этих оценок вытекает непосредственно из формулы (19).

Лемма 2. *Для любых $x \in [0,l]$ и больших $n \in \mathbb{N}$ справедливы оценки*

$$|Y_n^{(i)}(x)| \leqslant C_{i+3} n^i, \quad i = \overline{0,4}. \tag{21}$$

Доказательство. Для случая $n = 2k - 1$ на основании формулы (11) имеем

$$X_n(x) = a_n \operatorname{ch} d_n(x - l/2) + b_n \sin d_n(x - l/2) =$$
$$= \frac{2\operatorname{sh}(d_n l/2)}{\operatorname{ch} d_n l - 1} \operatorname{ch} d_n(x - l/2) + \frac{2\operatorname{ch} d_n l \cos(d_n l/2)}{\operatorname{ch} d_n l - 1} \sin d_n(x - l/2).$$

Из данного представления при всех $x \in [0, l]$ и $n \in \mathbb{N}$ оценим $X_n(x)$:

$$|X_n(x)| \leqslant \frac{\operatorname{sh} d_n l}{\operatorname{ch} d_n l - 1} + \frac{2\operatorname{ch} d_n l}{\operatorname{ch} d_n l - 1} \leqslant \frac{4}{(1 - e^{-d_1 l})^2} = C_3.$$

Теперь из формулы (12) следует, что

$$\|X_n(x)\| \geqslant \sqrt{l}, \quad \lim_{n\to\infty} \|X_n(x)\| = \sqrt{l}.$$

Отсюда вытекает, что существует номер n_1 такой, что при всех $n > n_1$: $\sqrt{l} \leqslant \|X_n(x)\| \leqslant 2\sqrt{l}$. Тогда при больших n и любых $x \in [0, l]$

$$|Y_n(x)| \leqslant \frac{|X_n(x)|}{\|X_n(x)\|} < \frac{C_3}{\sqrt{l}}.$$

При $n = 2k$ на основании формулы (14) имеем

$$X_n(x) = c_n \operatorname{sh} d_n(x - l/2) + f_n \cos d_n(x - l/2) =$$
$$= \frac{\operatorname{sh} d_n(x - l/2)}{\operatorname{ch}(d_n l/2)} - \frac{2\operatorname{ch} d_n l \sin(d_n l/2)}{\operatorname{ch} d_n l + 1} \cos d_n(x - l/2),$$

откуда при всех $x \in [0, l]$ и $n \in \mathbb{N}$ имеем

$$|X_n(x)| \leqslant \frac{\operatorname{sh}(d_n l/2)}{\operatorname{ch}(d_n l/2)} + \frac{2\operatorname{ch} d_n l}{1 + \operatorname{ch} d_n l} \leqslant 3.$$

Из (13) имеем

$$\|X_n(x)\| \leqslant \sqrt{l}, \quad \lim_{n\to\infty} \|X_n(x)\| = \sqrt{l}.$$

Отсюда следует, что существует номер n_2 такой, что при всех $n > n_2$ выполняется неравенство $\sqrt{l}/2 \leqslant \|X_n(x)\| \leqslant \sqrt{l}$. Тогда при больших n и любых $x \in [0, l]$ справедлива оценка

$$|Y_n(x)| \leqslant \frac{|X_n(x)|}{\|X_n(x)\|} \leqslant \frac{6}{\sqrt{l}}.$$

Вычисляя производные функций $Y_n(x)$ до четвертого порядка включительно, с учетом асимптотической формулы (10) для d_n убеждаемся в справедливости оценок (21) для больших $n \in \mathbb{N}$ и любых $x \in [0, l]$. $\square$

Далее, дифференцируя почленно ряд (20), составим ряды из производных:

$$u_{tt}(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u''_n(t)Y_n(x), \tag{22}$$

$$u_{xxxx}(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t)Y_n^{(4)}(x)=\sum_{n=1}^{\infty}d_n^4u_n(t)Y_n(x). \tag{23}$$

Полученные ряды (22) и (23), как и ряд (20), на основании лемм 1 и 2 при любых $(x,t)\in\overline{D}$ мажорируются рядом

$$C_8\sum_{n=1}^{\infty}n^4\Big(|\varphi_n|+\frac{|\psi_n|}{n^2}\Big).$$

Лемма 3. *Если функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$ удовлетворяют условиям*

$$\varphi(x)\in C^6[0,l],\quad \varphi(0)=\varphi'(0)=\varphi''(l)=\varphi'''(l)=\varphi^{IV}(0)=\varphi^{V}(0)=0,$$
$$\psi(x)\in C^4[0,l],\quad \psi(0)=\psi'(0)=\psi''(l)=\psi'''(l)=0,$$

то имеют место следующие представления:

$$\varphi_n=\frac{\varphi_n^{(6)}}{d_n^6},\qquad \psi_n=\frac{\psi_n^{(4)}}{d_n^4},$$

где

$$\varphi_n^{(6)}=\begin{cases}\dfrac{1}{\|X_n\|}\displaystyle\int_0^l\varphi_n^{(6)}(x)\big(a_n\operatorname{ch}d_n(x-l/2)+b_n\sin d_n(x-l/2)\big)\,\mathrm{d}x, & n=2k-1,\\[2mm] \dfrac{1}{\|X_n\|}\displaystyle\int_0^l\varphi_n^{(6)}(x)\big(c_n\operatorname{sh}d_n(x-l/2)-f_n\cos d_n(x-l/2)\big)\,\mathrm{d}x, & n=2k,\end{cases}$$

$$\psi_n^{(4)}=\int_0^l\psi^{(4)}(x)Y_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

Доказательство. Заметим, что непосредственным дифференцированием можно убедиться в том, что

$$Y_n^{(4)}(x)=d_n^4Y_n(x).$$

Тогда на основании (17) имеем

$$\varphi_n=\int_0^l\varphi(x)Y_n(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{d_n^4}\int_0^l\varphi(x)Y_n^{(4)}(x)\,\mathrm{d}x.$$

Интегрируя последнее равенство четыре раза по частям и учитывая граничные условия (3), получаем

$$\varphi_n=\frac{1}{d_n^4}\int_0^l\varphi^{(4)}(x)Y_n(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{d_n^8}\int_0^l\varphi^{(4)}(x)Y_n^{(4)}(x)\,\mathrm{d}x.$$

Интегрируя в последнем интеграле дважды по частям, приходим к справедливости первого представления леммы 3.

Аналогично, на основании (18) получим

$$\psi_n = \int_0^l \psi(x) Y_n(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{d_n^4}\int_0^l \psi(x) Y_n^{(4)}(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{d_n^4}\psi_n^{(4)}.$$

□

На основании леммы 3 ряды (20), (22), (23) мажорируются сходящимся числовым рядом

$$C_9 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\big(|\varphi_n^{(6)}| + |\psi_n^{(4)}|\big),$$

т.е. они сходятся равномерно на $\overline{D}$. Таким образом, сумма ряда (20) удовлетворяет условиям задачи (1)–(4).

Итак, приходим к справедливости следующего утверждения.

Теорема 3. *Если функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$ удовлетворяют условиям леммы 3, то существует единственное решение задачи* (1)–(4) *(где $F(x,t) \equiv 0$) и оно определяется суммой ряда* (20).

3. Устойчивость решения начально-граничной задачи. Для обоснования устойчивости решения задачи (1)–(4) рассмотрим пространство квадратично-суммируемых функций $L_2[0,l]$.

Теорема 4. *Для решения* (20) *начально-граничной задачи* (1)–(4) *справедливы оценки*

$$\|u(x,t)\|_{L_2[0,l]} \leqslant C_{10}\big(\|\varphi(x)\|_{L_2[0,l]} + \|\psi(x)\|_{L_2[0,l]}\big),$$
$$\|u(x,t)\|_{C(\overline{D})} \leqslant C_{11}\big(\|\varphi^{(4)}(x)\|_{C_{[0,l]}} + \|\psi(x)\|_{C_{[0,l]}}\big).$$

Доказательство. Так как система функций $Y_n(x)$ ортонормирована, из представления (20) в силу леммы 1 получим

$$\|u(x,t)\|^2_{L_2[0,l]} = \sum_{n=1}^{\infty} u_n^2(t) \leqslant 2C_1^2 \sum_{n=1}^{\infty}(\varphi_n^2 + \psi_n^2) = \\ = C_{10}\big(\|\varphi(x)\|^2_{L_2[0,l]} + \|\psi(x)\|^2_{L_2[0,l]}\big).$$

Из полученного неравенства следует справедливость первой оценки.

Из (20) на основании лемм 1 и 2 при любых $(x,t) \in \overline{D}$ имеем

$$|u(x,t)| \leqslant C_{12}\sum_{n=1}^{\infty}\Big(|\varphi_n| + \frac{|\psi_n|}{n^2}\Big) \leqslant C_{13}\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{|\varphi_n^{(4)}|}{n^4} + \frac{|\psi_n|}{n^2}\Big) \leqslant \\ \leqslant C_{13}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\big(|\varphi_n^{(4)}| + |\psi_n|\big).$$

Отсюда, используя неравенство Коши—Буняковского, получим

$$|u(x,t)| \leqslant C_{13}\Big(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\Big)^{1/2}\Big[\Big(\sum_{n=1}^{\infty}|\varphi_n^{(4)}|^2\Big)^{1/2}+\Big(\sum_{n=1}^{\infty}|\psi_n|^2\Big)^{1/2}\Big] = \\ = C_{14}\big(\|\varphi^{(4)}(x)\|_{L_2[0,l]}+\|\psi(x)\|_{L_2[0,l]}\big).$$

Из полученной оценки непосредственно следует вторая оценка теоремы 4. □

4. Вынужденные колебания балки с неоднородными граничными условиями. Рассмотрим начально-граничную задачу с неоднородными граничными условиями для случая, когда внешняя сила отлична от нуля: *найти в области D решение $u(x,t)$ уравнения* (1), *обладающее свойствами* (2), (4) *и*

$$\begin{aligned} &u(0,t)=h_1(t), \quad u_x(0,t)=h_2(t),\\ &u_{xx}(l,t)=g_1(t), \quad u_{xxx}(l,t)=g_2(t), \quad 0\leqslant t\leqslant T, \end{aligned} \tag{24}$$

где $h_1(t)$, $h_2(t)$, $g_1(t)$, $g_2(t)$ — заданные достаточно гладкие функции, подчиненные условиям согласования с начальными функциями (4):

$$\begin{aligned} &h_1(0)=\varphi(0), \quad h_1'(0)=\psi(0), \quad h_2(0)=\varphi'(0), \quad h_2'(0)=\psi'(0),\\ &g_1(0)=\varphi''(l), \quad g_1'(0)=\psi''(l), \quad g_2(0)=\varphi'''(l), \quad g_2'(0)=\psi'''(l). \end{aligned} \tag{25}$$

Поставленную неоднородную задачу можно свести к решению начально-граничной задачи для неоднородного уравнения колебаний балки с однородными начальными и граничными условиями и новой правой частью.

Введем в рассмотрение функцию

$$v(x,t)=u(x,t)-z(x,t)-w(x,t), \tag{26}$$

где

$$z(x,t)=h_1(t)+xh_2(t)+\frac{x^2}{2}g_1(t)+\Big(\frac{x^4}{24l}-\frac{lx^2}{4}\Big)g_2(t), \tag{27}$$

$$w(x,t)=\varphi(x)-\varphi(0)-x\varphi'(0)-\frac{x^2}{2}\varphi''(l)-\Big(\frac{x^4}{24l}-\frac{lx^2}{4}\Big)\varphi'''(l)+ \\ +t\Big(\psi(x)-\psi(0)-x\psi'(0)-\frac{x^2}{2}\psi''(l)-\Big(\frac{x^4}{24l}-\frac{lx^2}{4}\Big)\psi'''(l)\Big). \tag{28}$$

Отметим, что функция $z(x,t)$ удовлетворяет граничным условиям (24), а функция $w(x,t)$ — нулевым граничным условиям. В силу условий согласования (25) функция (26) удовлетворяет уравнению

$$v_{tt}+\alpha^2 v_{xxxx}=\tilde F(x,t), \tag{29}$$

где

$$\tilde F(x,t)=F(x,t)+h_1''(t)+xh_2''(t)+\frac{x^2}{2}g_1''(t)+\Big(\frac{x^4}{24l}-\frac{lx^2}{4}\Big)g_2''(t)+ \\ +\frac{\alpha^2}{l}\big(g_2(t)+l\varphi^{IV}(x)+t\psi^{IV}(x)-g_2(0)-tg_2'(0)\big)$$

и нулевым начальным и граничным условиям:

$$v(0,t)=v_x(0,t)=v_{xx}(l,t)=v_{xxx}(l,t)=0, \quad v(x,0)=v_t(x,0)=0.$$

Поэтому ниже будем изучать задачу для уравнения (29) с нулевыми начальными и граничными условиями в классе функций (2). Решение этой задачи будем искать в виде

$$v(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)Y_n(x), \tag{30}$$

где $Y_n(x)$ — собственные функции задачи (1)–(4), определяемые по формулам (14).

Пусть функция $\tilde{F}(x,t)$ такова, что она на отрезке $[0,l]$ разлагается в ряд Фурье по системе функций $Y_n(x)$:

$$\tilde{F}(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{F}_n(t)Y_n(x),$$

где

$$\tilde{F}_n(t)=\int_0^l \tilde{F}(x,t)Y_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

Подставляя функции $v(x,t)$ и $\tilde{F}(x,t)$ в уравнение (29), найдем

$$T_n(t)=\frac{1}{\alpha d_n^2}\int_0^l \tilde{F}_n(s)\sin\alpha d_n^2(t-s)\,\mathrm{d}s. \tag{31}$$

Лемма 4. *Для любых $t\in[0,T]$ справедливы оценки*

$$|T_n(t)|\leqslant C_{15}\frac{\|\tilde{F}_n(t)\|}{n^2}, \quad |T_n''(t)|\leqslant C_{16}n^2\|\tilde{F}_n(t)\|,$$

где

$$\|\tilde{F}_n(t)\|=\max_{0\leqslant t\leqslant T}|\tilde{F}_n(t)|.$$

Справедливость этих оценок следует непосредственно из формулы (31). Формально продифференцируем ряд (30):

$$v_{tt}(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} T_n''(t)Y_n(x), \quad v_{xxxx}(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} d_n^4 T_n(t)Y_n(x).$$

Эти ряды, как и ряд (30), для любых $(x,t)\in\overline{D}$ мажорируются рядом

$$C_{17}\sum_{n=1}^{\infty} n^2\|\tilde{F}_n(t)\|.$$

Лемма 5. *Если функция* $\tilde{F}(x,t) \in C(\overline{D}) \cap C_x^4(\overline{D})$ *и при любых* $t \in [0,T]$

$$\tilde{F}(0,t) = \tilde{F}_x(0,t) = \tilde{F}_{xx}(l,t) = \tilde{F}_{xxx}(l,t) = 0,$$

то справедливо следующее представление:

$$\tilde{F}_n(t) = \frac{1}{d_n^4} F_n^{(4)}(t), \quad F_n^{(4)}(t) = \int_0^l \tilde{F}_x^{(4)}(x,t) Y_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

Доказательство проводится аналогично доказательству леммы 3.

При условии выполнения леммы 5 функции $v(x,t)$, $v_{tt}(x,t)$, $v_{xxxx}(x,t)$ мажорируются сходящимся рядом

$$C_{18} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|\tilde{F}_n^{(4)}(t)\|}{n^2},$$

а значит, сходятся равномерно на $\overline{D}$. Таким образом, приходим к справедливости следующего утверждения.

Теорема 5. *Если функция* $\tilde{F}(x,t)$ *удовлетворяет условиям леммы* 5, *то существует единственное решение задачи для уравнения* (29) *с нулевыми начальными и граничными условиями, определяемое суммой ряда* (30).

Теорема 6. *Для функции* $v(x,t)$, *определяемой формулой* (30), *справедливы оценки*

$$\|v(x,t)\|_{L_2[0,l]} \leqslant C_{19} \|\tilde{F}(x,t)\|_{L_2(D)},$$

$$\|v(x,t)\|_{C(\overline{D})} \leqslant C_{20} \|\tilde{F}(x,t)\|_{C(\overline{D})}.$$

Доказательство. Поскольку система (14) ортонормирована в $L_2(D)$, то из формулы (30) на основании леммы 4 получим

$$\|v(x,t)\|^2_{L_2[0,l]} = \sum_{n=1}^{\infty} T_n^2(t) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha^2 d_n^4} \left(\int_0^t \tilde{F}_n(s) \sin \alpha d_n^2 (t-s)\,\mathrm{d}s \right)^2 \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha^2 d_n^4} \int_0^t \tilde{F}_n^2(s)\,\mathrm{d}s \leqslant C_{21} \int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{F}_n^2(s)\,\mathrm{d}s = C_{21} \int_0^t \int_0^l \tilde{F}^2(x,s)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s =$$
$$= C_{21} \int_0^t \|\tilde{F}(x,t)\|^2_{L_2[0,l]}\,\mathrm{d}s \leqslant C_{19}^2 \|\tilde{F}(x,t)\|^2_{L_2(D)}.$$

В силу лемм 4 и 5 для любой точки $(x,t) \in \overline{D}$ имеем

$$|v(x,t)| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |T_n(t)| \leqslant C_{15} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|\tilde{F}_n(t)\|}{n^2} \leqslant C_{20} \|\tilde{F}(x,t)\|_{C(\overline{D})}.$$

Из полученных оценок следует справедливость теоремы. □

Теорема 7. *Если выполняются условия*

$$F(x,t) \in C(\overline{D}) \cap C_x^4(\overline{D}),$$
$$h_1(t),\ h_2(t),\ g_1(t),\ g_2(t) \in C^2[0,T],$$
$$\varphi(x),\ \psi(x) \in C^7[0,l]$$

и при любом $t \in [0,T]$

$$F(0,t) + h_1''(t) + \frac{\alpha^2}{l}\left(g_2(t) + l\varphi^{IV}(0) + t\psi^{IV}(0) - g_2(0) - tg_2'(0)\right) =$$
$$= F_x(0,t) + h_2''(t) + \frac{\alpha^2}{l}\left(l\varphi^{V}(0) + t\psi^{V}(0)\right) =$$
$$= F_{xx}(l,t) + g_1''(t) + \frac{\alpha^2}{l}\left(l\varphi^{VI}(l) + t\psi^{VI}(l)\right) =$$
$$= F_{xxx}(l,t) + g_2''(t) + \frac{\alpha^2}{l}\left(l\varphi^{VII}(l) + t\psi^{VII}(l)\right) = 0,$$

то существует единственное устойчивое решение начально-граничной задачи (1), (2), (4), (24), *определяемое по формуле*

$$u(x,t) = v(x,t) + z(x,t) + w(x,t),$$

где функция $v(x,t)$ *определяется рядом* (30), *а функции* $z(x,t)$ *и* $w(x,t)$ *— формулами* (27) *и* (28) *соответственно.*

Конкурирующие интересы. Заявляем, что в отношении авторства и публикации этой статьи конфликта интересов не имеем.

Авторский вклад и ответственность. Все авторы принимали участие в разработке статьи и в написании рукописи. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Исследование выполнялось без финансирования.

Библиографический список

1. Тихонов А. Н., Самарский А. А. *Уравнения математической физики.* М.: Наука, 1966. 724 с.
2. Релей Л. *Теория звука.* М.: Гостехиздат, 1955. 503 с.
3. Крылов А. Н. *Вибрация судов.* Л., М.: ОНТИ НКТП СССР, 1936. 442 с.
4. Коллатц Л. *Задачи на собственные значения с техническими приложениями.* М.: Наука, 1968. 503 с.
5. Бидерман В. Л. *Теория механических колебаний.* М.: Высш. шк., 1980. 408 с.
6. Тимошенко С. П. *Колебания в инженерном деле.* М.: Физматлит, 1967. 444 с.
7. Рудаков И. А. Периодические решения квазилинейного уравнения колебаний балки с однородными граничными условиями // *Диффер. уравн.*, 2012. Т. 48, № 6. С. 814–825.
8. Li S., Reynders E., Maes K., De Roeck G. Vibration-based estimation of axial force for abeam member with uncertain boundary conditions // *J. Sound Vibrat.*, 2013. vol. 332, no. 4. pp. 795–806. https://doi.org/10.1016/j.jsv.2012.10.019.

9. Рудаков И. А. Периодические решения квазилинейного уравнения вынужденных колебаний балки с однородными граничными условиями // *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2015. Т. 79, № 5. С. 215–238. https://doi.org/10.4213/im8250.
10. Ванг И., Фанг Ж. Колебания упругой балки на нелинейных опорах // *ПМТФ*, 2015. Т. 56, № 2. С. 196–206. https://doi.org/10.15372/PMTF20150220.
11. Сабитов К. Б. Колебания балки с заделанными концами // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2015. Т. 19, № 2. С. 311–324. https://doi.org/10.14498/vsgtu1406.
12. Сабитов К. Б. К теории начально-граничных задач для уравнения стержней и балок // *Диффер. уравн.*, 2017. Т. 53, № 1. С. 89–100. https://doi.org/10.1134/S0374064117010083.
13. Сабитов К. Б. Начальная задача для уравнения колебаний балок // *Диффер. уравн.*, 2017. Т. 53, № 5. С. 665–671. https://doi.org/10.1134/S0374064117050090.
14. Касимов Ш. Г., Мадрахимов У. С. Начально-граничная задача для уравнения колебаний балки в многомерном случае // *Диффер. уравн.*, 2019. Т. 55, № 10. С. 1379–1391. https://doi.org/10.1134/S0374064119100091.
15. Сабитов К. Б., Акимов А. А. Начально-граничная задача для нелинейного уравнения колебаний балки // *Диффер. уравн.*, 2020. Т. 56, № 5. С. 632–645. https://doi.org/10.1134/S0374064120050076.
16. Наймарк М.А. *Линейные дифференциальные операторы.* Москва: Наука, 1969. 528 с.

Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2021, vol. 25, no. 1, pp. 51–66
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1845

MSC: 35G16

Initial-boundary value problem for the equation of forced vibrations of a cantilever beam

© ***K. B. Sabitov, O. V. Fadeeva***

Samara State Technical University,
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russian Federation.

Abstract

In this paper, an initial-boundary value problem for the equation of forced vibrations of a cantilever beam is studied. Such a linear differential equation of the fourth order describes bending transverse vibrations of a homogeneous beam under the action of an external force in the absence of rotational motion during bending.

The system of eigenfunctions of the one-dimensional spectral problem, which is orthogonal and complete in the space of square-summable functions, is constructed by the method of separation of variables. The uniqueness of the solution to the initial-boundary value problem is proved in two ways: (i) using the energy integral; (ii) relying on the completeness property of the system of eigenfunctions.

The solution to the problem was first found in the absence of an external force and homogeneous boundary conditions, and then the general case was considered in the presence of an external force and inhomogeneous boundary conditions. In both cases, the solution of the problem is constructed as the sum of the Fourier series.

Estimates of the coefficients of these series and the system of eigenfunctions are obtained. On the basis of the established estimates, sufficient conditions were found for the initial functions, the fulfillment of which ensures the uniform convergence of the constructed series in the class of regular solutions of the beam vibration equation, i.e. existence theorems for the solution of the stated initial-boundary value problem are proved. Based on the solutions obtained, the stability of the solutions of the initial-boundary value problem is established depending on the initial data and the right-hand side of the equation under consideration in the classes of square-summable and continuous functions.

Keywords: cantilevered beam, forced vibrations, initial and boundary conditions, spectral method, analytical solution, uniqueness, existence, stability.

Received: 11$^{\text{th}}$ February, 2021 / Revised: 16$^{\text{th}}$ February, 2021 / Accepted: 10$^{\text{th}}$ March, 2021 / First online: 31$^{\text{st}}$ March, 2021

Research Article

Please cite this article in press as:
Sabitov K. B., Fadeeva O. V. Initial-boundary value problem for the equation of forced vibrations of a cantilever beam, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2021, vol. 25, no. 1, pp. 51–66. https://doi.org/10.14498/vsgtu1845 (In Russian).

Authors' Details:

Kamil B. Sabitov https://orcid.org/0000-0001-9516-2704
Dr. Phys. & Math. Sci.; Professor; Dept. of Higher Mathematics; e-mail: sabitov_fmf@mail.ru

Oksana V. Fadeeva https://orcid.org/0000-0003-1704-9524
Cand. Phys. & Math. Sci.; Associate Professor; Dept. of Higher Mathematics;
e-mail: faoks@yandex.ru

Competing interests. We declare that we have no conflicts of interest in the authorship and publication of this article.

Authors' contributions and responsibilities. Each author has participated in the article concept development and in the manuscript writing. The authors are absolutely responsible for submitting the final manuscript in print. Each author has approved the final version of manuscript.

Funding. This research received no specific grant from any funding agency in the public, commercial, or not-for-profit sectors.

References

1. Tikhonov A. N., Samarskii A. A. *Uravneniia matematicheskoi fiziki* [Equations of Mathematical Physics]. Moscow, Nauka, 1966, 724 pp. (In Russian)
2. Rayleigh L. *Teoriia zvuka* [The Theory of Sound]. Moscow, Gostehizdat, 1955, 503 pp. (In Russian)
3. Krylov A. N. *Vibratsiia sudov* [The Ship Vibration]. Leningrad, Moscow, 1936, 442 pp. (In Russian)
4. Collatts L. *Zadachi na sobstvennye znacheniia s tekhnicheskimi prilozheniiami* [The Eigenvalue Problem with Technical Applications]. Moscow, Nauka, 1968, 503 pp. (In Russian)
5. Biderman V. L. *Teoriia mekhanicheskikh kolebanii* [Theory of Mechanical Vibrations]. Moscow, Vyssh. shk., 1980, 408 pp. (In Russian)
6. Timoshenko S. P. *Kolebaniia v inzhenernom dele* [Fluctuations in Engineering]. Moscow, Fizmatlit, 1967, 444 pp. (In Russian)
7. Rudakov I. A. Periodic solutions of the quasilinear beam vibration equation with homogeneous boundary conditions, *Differ. Equ.*, 2012, vol. 48, no. 6, pp. 820–831. https://doi.org/10.1134/S0012266112060067.
8. Li S., Reynders E., Maes K., De Roeck G. Vibration-based estimation of axial force for abeam member with uncertain boundary conditions, *J. Sound Vibrat.*, 2013, vol. 332, no. 4, pp. 795–806. https://doi.org/10.1016/j.jsv.2012.10.019.
9. Rudakov I. A. Periodic solutions of the quasilinear equation of forced beam vibrations with homogeneous boundary conditions, *Izv. Math.*, 2015, vol. 79, no. 5, pp. 1064–1086. https://doi.org/10.1070/IM2015v079n05ABEH002772.
10. Wang Y.-R., Fang Z.-W. Vibrations in an elastic beam with nonlinear supports at both ends, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2015, vol. 56, no. 2. https://doi.org/10.1134/S0021894415020200.
11. Sabitov K. B. Fluctuations of a beam with clamped ends, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2015, vol. 19, no. 2, pp. 311–324 (In Russian). https://doi.org/10.14498/vsgtu1406.
12. Sabitov K. B. A remark on the theory of initial-boundary value problems for the equation of rods and beams, *Differ. Equ.*, 2017, vol. 53, no. 1, pp. 86–98. https://doi.org/10.1134/S0012266117010086.
13. Sabitov K. B. Cauchy problem for the beam vibration equation, *Differ. Equ.*, 2017, vol. 53, no. 5, pp. 658–664. https://doi.org/10.1134/S0012266117050093.
14. Kasimov S. G., Madrakhimov U. S. Initial-boundary value problem for the beam vibration equation in the multidimensional case, *Differ. Equ.*, 2019, vol. 55, no. 10, pp. 1336–1348. https://doi.org/10.1134/S0012266119100094.
15. Sabitov K. B., Akimov A. A. Initial-boundary value problem for a nonlinear beam vibration equation, *Differ. Equ.*, 2020, vol. 56, no. 5, pp. 621–634. https://doi.org/10.1134/S0012266120050079.
16. Naimark M. A. *Lineinye differentsial'nye operatory* [Linear Differential Operators]. Moscow, Nauka, 1969, 528 pp. (In Russian)