Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2020. Т. 24, № 3. С. 407–423
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1775

Дифференциальные уравнения и математическая физика

УДК 517.956.3

Задача с динамическим краевым условием для одномерного гиперболического уравнения

© А. Б. Бейлин[1], Л. С. Пулькина[2]

[1] Самарский государственный технический университет,
Россия, 443100, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.
[2] Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева,
Россия, 443086, Самара, Московское ш., 34.

Аннотация

Рассмотрена задача с динамическим краевым условием, учитывающим наличие демпфера при закреплении, для гиперболического уравнения на плоскости и доказана ее однозначная разрешимость. Динамическое условие, содержащее производные первого порядка как по пространственной, так и по переменной времени, приводит к несамосопряженной задаче, что затрудняет применение методов спектрального анализа. Однако эти трудности преодолены и существование единственного решения поставленной задачи доказано. Основным инструментом доказательства являются априорные оценки в пространствах Соболева, выведенные в процессе работы над статьей. Предложены способы получения приближенного решения, в качестве частного случая рассмотрен пример одномерного волнового уравнения и получено точное решение задачи с динамическим условием.

Ключевые слова: гиперболическое уравнение, краевая задача, динамическое краевое условие, обобщенное решение, пространства Соболева.

Получение: 24 февраля 2020 г. / Исправление: 12 июля 2020 г. /
Принятие: 14 сентября 2020 г. / Публикация онлайн: 30 сентября 2020 г.

Научная статья

Образец для цитирования

Бейлин А. Б., Пулькина Л. С. Задача с динамическим краевым условием для одномерного гиперболического уравнения // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2020. Т. 24, № 3. С. 407–423. https://doi.org/10.14498/vsgtu1775.

Сведения об авторах

Александр Борисович Бейлин https://orcid.org/0000-0002-4042-2860
кандидат технических наук; доцент; каф. технология машиностроения, станки и инструменты; e-mail: abeilin@mail.ru

Людмила Степановна Пулькина https://orcid.org/0000-0001-7947-6121
доктор физико-математических наук; профессор; каф. дифференциальных уравнений и теории управления; e-mail: louise@samdiff.ru

Введение. В статье рассматривается задача отыскания в ограниченной области $Q_T = (0,l) \times (0,T)$ решения гиперболического уравнения

$$u_{tt} - (a(x,t)u_x)_x + c(x,t)u = f(x,t), \tag{1}$$

удовлетворяющего начальным данным

$$u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0 \tag{2}$$

и краевым условиям

$$\begin{aligned} u(0,t) &= 0,\\ u_x(l,t) + \gamma u_t(l,t) &= 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Второе из условий (3) содержит производные первого порядка как по x, так и по t, что можно интерпретировать как упругое закрепление правого конца стержня при наличии некоего демпфера [1, с. 44]. Хорошо известно, что эта задача является несамосопряженной и, стало быть, исследование разрешимости сталкивается с дополнительными трудностями, не свойственными самосопряженным задачам [2–4]. Это утверждение легко иллюстрируется попыткой применить метод разделения переменных даже для частного случая уравнения (1), а именно, для уравнения колебаний струны. Некоторые результаты в исследовании задач с краевыми условиями, содержащими производную по времени первого порядка, для одномерных гиперболических уравнений получены в статьях [5, 6].

Заметим, что краевые задачи с динамическими условиями, к которым относится и второе из (3), вызывают интерес [7–13], и не только как математический объект. При проектировании и эксплуатации различных инженерных конструкций надежность является важнейшим параметром. Обеспечение надежности базируется на выявлении внешних и внутренних факторов, воздействующих на изделие, обоснованном выборе материалов и конструктивных схем. При этом должны быть учтены не только максимальные и минимальные значения параметров, но и динамика их изменения, в том числе вибрационное воздействие, ветровые и ударные нагрузки и их сочетания. Отметим статью [12], в которой авторы рассматривают много примеров тех физических процессов, которые приводят к описанной выше задаче для уравнения колебаний струны, а также обсуждают сферы применения эффектов этих процессов, в том числе в биологии и медицине. Аналогичные процессы наблюдаются и при закреплении некоторых деталей механизмов или строительных конструкций [14–16], однако в этих случаях может возникнуть необходимость использовать более общее, чем уравнение колебаний струны, гиперболическое уравнение. На этапе проектирования исследование динамических свойств конструкций выполняют на математических моделях. Математические модели реальных физических процессов сложны, для их изучение обычно используются различные численные методы. Однако для эффективного применения полученных при этом результатов необходимо аналитическое исследование математической модели, имеющее своей целью найти и обосновать условия разрешимости задачи.

Именно поэтому в предлагаемой статье рассматривается линейное гиперболическое уравнение с переменными коэффициентами и доказывается существование единственного и достаточно гладкого решения задачи (1)–(3), а именно, доказана принадлежность решения поставленной задачи пространству $W_2^2(Q_T)$, что дает возможность получения как приближенных, так и, в частных случаях, точных решений задачи.

Не менее важным результатом мы считаем возможность получения точного решения задачи в явном виде для частных случаев уравнения (1). Заметим, что приближенные решения, в том числе и не только для уравнения колебаний, можно получить, используя один из этапов реализации схемы доказательства существования решения задачи (1)–(3).

1. Постановка задачи. Приступим к изучению вопроса о разрешимости задачи (1)–(3). Обозначим

$$W(Q_T) = \{u(x,t) : u \in W_2^1(Q_T),\ u_t(l,t) \in L_2(0,T)\},$$

$$\hat{W}(Q_T) = \{v(x,t) : v \in W(Q_T),\ v(0,t) = 0,\ v(x,T) = 0\}.$$

Следуя известной процедуре [17, с. 210, 113], в предположении, что u — гладкое решение задачи (1)–(3), $v(x,t)$ — произвольная гладкая функция, удовлетворяющая условиям $v(x,T) = 0$, $v(0,t) = 0$, выведем равенство

$$\int_0^T \int_0^l (-u_t v_t + a u_x v_x + cuv)dxdt + \int_0^T \alpha(t) u_t(l,t) v(l,t) dt = \\ = \int_0^T \int_0^l f(x,t) v(x,t) dxdt, \quad (4)$$

где $\alpha(t) = \gamma a(l,t)$.

Определение. Обобщенным решением задачи (1)–(3) будем называть функцию $u(x,t) \in W(Q_T)$, удовлетворяющую условию $u(x,0) = 0$ и тождеству (4) для любой $v \in \hat{W}(Q_T)$.

2. Разрешимость задачи в $W(Q_T)$. Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть выполняются следующие условия*:

$$a, a_t, a_{tt}, c \in C(\bar{Q}_T), \quad a(x,t) > 0\ \forall (x,t) \in \bar{Q}_T, \quad f \in L_2(Q_T), \quad \gamma > 0.$$

Тогда существует единственное обобщенное решение задачи (1)–(3).

Доказательство. Единственность решения. Предположим, что существует два различных решения этой задачи, $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$. Тогда их разность $u(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$ удовлетворяет условию $u(x,0) = 0$ и тождеству

$$\int_0^T \int_0^l (-u_t v_t + a u_x v_x + cuv)dxdt + \int_0^T \alpha(t) u_t(l,t) v(l,t) dt = 0. \quad (5)$$

Выберем в тождестве (5) функцию $v(x,t)$, положив

$$v(x,t) = \begin{cases} \displaystyle\int_\tau^t u(x,\eta)d\eta, & 0 \leqslant t \leqslant \tau, \\ 0, & \tau \leqslant t \leqslant T, \end{cases}$$

где $\tau \in [0,T]$ произвольно.

Элементарные преобразования тождества (5), состоящие, как обычно, в интегрировании по частям с выбранной указанным образом функцией $v(x,t)$, приводят к равенству

$$\int_0^l \big[u^2(x,\tau)+a(x,0)v_x^2(x,0)\big]dx+2\int_0^\tau \alpha(t)u^2(l,t)dt=$$
$$=2\int_0^\tau\int_0^l cvv_t dxdt-\int_0^\tau\int_0^l a_t v_x^2 dxdt+\int_0^\tau \alpha''(t)v^2(l,t)dt+\alpha'(t)v^2(l,0). \quad (6)$$

Так как в силу условия теоремы $\alpha(t)>0$ из (6) вытекает неравенство

$$\int_0^l \big[u^2(x,\tau)+a(x,0)v_x^2(x,0)\big]dx+2\int_0^\tau \alpha(t)u^2(l,t)dt\leqslant$$
$$\leqslant 2\left|\int_0^\tau\int_0^l cvv_t dxdt\right|+\left|\int_0^\tau\int_0^l a_t v_x^2 dxdt\right|+$$
$$+\left|\int_0^\tau \alpha''(t)v^2(l,t)dt\right|+|\alpha'(t)v^2(l,0)|. \quad (7)$$

Оценим правую часть неравенства (7).

Заметим, что из условий теоремы следует существование положительных чисел a_0, a_1, c_0 таких, что

$$\min_{\bar{Q}_T} a(x,t)\geqslant a_0,\quad \max_{\bar{Q}_T}|a,a_t,a_{tt}|\leqslant a_1,\quad \max_{\bar{Q}_T}|c(x,t)|\leqslant c_0.$$

Тогда, применив неравенство Коши к первому слагаемому правой части неравенства, получим

$$\int_0^l \big[u^2(x,\tau)+a_0v_x^2(x,0)\big]dx+2\int_0^\tau \alpha(t)u^2(l,t)dt\leqslant$$
$$\leqslant c_0\int_0^\tau\int_0^l (v^2+v_t^2)dxdt+$$
$$+\gamma a_1\Big(\int_0^\tau\int_0^l v_x^2 dxdt+\int_0^\tau v^2(l,t)dt+v^2(l,0)\Big). \quad (8)$$

Теперь для оценки двух последних слагаемых правой части (8) применим неравенства

$$v^2(l,t)\leqslant 2l\int_0^l v_x^2(x,t)dx+\frac{2}{l}\int_0^l v^2(x,t)dx,$$
$$v^2(l,t)\leqslant \varepsilon\int_0^l v_x^2(x,t)dx+c(\varepsilon)\int_0^l v^2(x,t)dx, \quad (9)$$

первое из которых легко следует из представления [13]

$$v(l,t)=\int_x^l v_\xi(\xi,t)d\xi+v(x,t),$$

а второе является частным случаем неравенства (6.24) монографии О. А. Ладыженской [17, с. 77]. Тогда

$$\int_0^\tau v^2(l,t)dt \leqslant 2l\int_0^\tau\int_0^l v_x^2(x,t)dxdt + \frac{2}{l}\int_0^\tau\int_0^l v^2(x,t)dxdt,$$

$$v^2(l,0) \leqslant \varepsilon\int_0^l v_x^2(x,0)dx + c(\varepsilon)\int_0^l v^2(x,0)dx.$$

Выберем ε так, чтобы $a_0 - \gamma a_1\varepsilon > 0$, положив, например, $\varepsilon = a_0/(2a_1\gamma)$, и перенесем слагаемое $\gamma a_1\varepsilon\int_0^l v_x^2(x,0)dx$ в левую часть неравенства (8).

Для завершения оценки нам потребуется еще неравенство

$$v^2(x,t) \leqslant \tau\int_0^\tau u^2(x,t)dt,$$

которое является следствием представления функции $v(x,t)$. В результате получим

$$\int_0^l [u^2(x,\tau) + \frac{a_0}{2}v_x^2(x,0)]dx + 2\int_0^\tau \alpha(t)u^2(l,t)dt \leqslant$$
$$\leqslant M_1\int_0^\tau\int_0^l \left[u^2(x,t) + v_x^2(x,t)\right]dxdt, \quad (10)$$

где M_1 зависит лишь от a_0, a_1, c_0, l, T.

Введем функцию $w(x,t) = \int_0^t u_x(x,\eta)d\eta$. Тогда, как нетрудно заметить,

$$v_x(x,t) = w(x,t) - w(x,\tau), \quad v_x(x,0) = -w(x,\tau),$$

$$v_x^2(x,t) \leqslant 2w^2(x,t) + 2w^2(x,\tau).$$

Учитывая эти соотношения, из (10) получим

$$\int_0^l \left[u^2(x,\tau) + \frac{a_0}{2}w^2(x,\tau)\right]dx + 2\int_0^\tau \alpha(t)u^2(l,t)dt \leqslant$$
$$\leqslant 2M_1\tau\int_0^l w^2(x,\tau)dx + 2M_1\int_0^\tau\int_0^l \left[u^2(x,t) + w^2(x,t)\right]dxdt. \quad (11)$$

Пользуясь произволом τ, выберем его так, чтобы $a_0 - 4M_1\tau > 0$. Для определенности будем считать, что $a_0 - 4M_1\tau \geqslant a_0/2$. Тогда первое слагаемое правой части (11) можно перенести в левую часть, и для всех $\tau \in [0, a_0/(8M_1)]$ будет справедливо неравенство

$$m_0\int_0^l \left[u^2(x,\tau) + w^2(x,\tau)\right]dx \leqslant 2M_1\int_0^\tau\int_0^l \left[u^2(x,t) + w^2(x,t)\right]dxdt,$$

где $m_0 = \min\{1, a_0/4\}$, применение к которому неравенства Гронуолла моментально влечет выполнение равенства $u(x,t) = 0$, $t \in [0, a_0/(8M_1)]$. Повторяя рассуждения для $\tau \in [a_0/(8M_1), a_0/(4M_1)]$ и продолжая этот процесс, мы за конечное число шагов убедимся в том, что $u(x,t) = 0\ \forall t \in [0,T]$, что и приводит к противоречию с предположением о существовании более одного решения.

Существование решения. Доказательство существования обобщенного решения проведем по следующей схеме:

– построим последовательность приближенных решений;
– выведем априорную оценку;
– покажем, что полученная оценка позволяет выделить слабо сходящуюся подпоследовательность;
– убедимся в том, что предел выделенной подпоследовательности и есть искомое решение.

Перейдем к реализации этой схемы. Пусть функции $w_k \in C^2[0,l]$, $w_k(0)=0$, образуют линейно независимую и полную в $W_2^1(0,l)$ систему. Будем искать приближенное решение задачи в виде

$$u^m(x,t) = \sum_{k=1}^{m} c_k(t) w_k(x)$$

из соотношений

$$\int_0^l (u^m_{tt} w_j + a u^m_x w'_j + c u^m w_j)dx + w_j(l)\alpha(t)u^m_t(l,t) = \int_0^l f(x,t)w_j(x)dx. \quad (12)$$

Дополнив соотношения (12), которые представляют собой систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений относительно $c_k(t)$, начальными условиями $c_k(0) = 0, \quad c'_k(0) = 0$, приходим к задаче Коши, разрешимость которой гарантирована условиями теоремы. Действительно, подставив в (12) функции $u^m(x,t)$, получим

$$\sum_{k=1}^{m} A_{kj} c''_k(t) + \sum_{k=1}^{m} B_{kj}(t) c'_k(t) + \sum_{k=1}^{m} D_{kj}(t) c_k(t) = f_j(t), \quad (13)$$

$$A_{kj} = \int_0^l w_k(x) w_j(x) dx, \quad B_{kj}(t) = \alpha(t) w_k(l) w_j(l),$$

$$D_{kj}(t) = \int_0^l \left[a(x,t) w'_k(x) w'_j(x) + c(x,t) w_k(x) w_j(x)\right] dx,$$

$$f_j(t) = \int_0^l f(x,t) w_j(x) dx.$$

Система (13) разрешима относительно старших производных в силу линейной независимости функций $w_k(x)$, условия теоремы гарантируют ограниченность ее коэффициентов, а свободные члены $f_j \in L_1(0,T)$. Но тогда задача Коши для системы (13) однозначно разрешима, причем $c''_k \in L_1(0,T)$.

Это, в свою очередь, означает, что последовательность приближенных решений построена.

Для дальнейших шагов в доказательстве существования обобщенного решения поставленной задачи нам потребуется априорная оценка, к выводу которой мы и перейдем.

Умножим каждое из равенств (12) на $c_j'(t)$, просуммируем по j от 1 до m, а затем проинтегрируем от 0 до τ, в результате чего придем к равенству

$$\int_0^\tau\int_0^l \big(u_{tt}^m u_t^m + a u_x^m u_{xt}^m + c u^m u_t^m\big)dxdt + \int_0^\tau \alpha(t)\big(u_t^m(l,t)\big)^2 dt = \\ = \int_0^\tau f(x,t)u_t^m(x,t)dxdt. \quad (14)$$

Интегрируя по частям, преобразуем (14). Получим равенство

$$\frac{1}{2}\int_0^l \big[(u_t^m(x,\tau))^2 + a(x,\tau)(u_x^m(x,\tau))^2\big]dx + \int_0^\tau \alpha(t)(u_t^m(l,t))^2dt = \\ = \frac{1}{2}\int_0^\tau\int_0^l a_t(u_x^m)^2dxdt - \int_0^\tau\int_0^l cu^m u_t^m dxdt + \int_0^\tau\int_0^l f u_t^m dxdt,$$

из которого следует неравенство

$$\int_0^l \big[(u_t^m(x,\tau))^2 + a(x,\tau)(u_x^m(x,\tau))^2\big]dx + 2\int_0^\tau \alpha(t)(u_t^m(l,t))^2dt \leqslant \\ \leqslant \int_0^\tau\int_0^l |a_t|(u_x^m)^2dxdt + 2\left|\int_0^\tau\int_0^l cu^m u_t^m dxdt\right| + 2\left|\int_0^\tau\int_0^l f u_t^m dxdt\right|. \quad (15)$$

Применяя условия теоремы и неравенство Коши, а также очевидное неравенство

$$(u^m(x,\tau))^2 \leqslant \tau\int_0^\tau (u_t^m(x,t))^2dt,$$

с помощью той же техники, что и при доказательстве единственности решения, из (15) получим неравенство

$$\int_0^l \big[(u^m)^2 + (u_t^m)^2 + (u_x^m)^2\big]_{t=\tau}dx + \gamma\int_0^\tau (u_t^m(l,t))^2dt \leqslant \\ \leqslant M_2\int_0^\tau\int_0^l \big[(u^m)^2 + (u_t^m)^2 + (u_x^m)^2\big]dxdt + M_3\int_0^\tau\int_0^l f^2dxdt, \quad (16)$$

где γ, M_i зависят лишь от постоянных c_0, a_0, a_1 и не зависят от m. В частности,

$$\int_0^l \big[(u^m)^2 + (u_t^m)^2 + (u_x^m)^2\big]_{t=\tau}dx \leqslant \\ \leqslant M_2\int_0^\tau\int_0^l \big[(u^m)^2 + (u_t^m)^2 + (u_x^m)^2\big]dxdt + M_3\int_0^\tau\int_0^l f^2dxdt.$$

Из этого неравенства, справедливого для любого m, в силу леммы Гронуолла вытекает *априорная оценка*

$$\|u^m\|_{W_2^1(Q_T)} \leqslant R. \quad (17)$$

Из неравенства (16) с помощью (17) теперь легко получить еще одну оценку:

$$\|u_t^m(l,\,\cdot\,)\|_{L_2(0,T)} \leqslant r. \tag{18}$$

Следовательно, $\|u^m\|_{W(Q_T)}$ ограничена и из построенной последовательности $\{u^m(x,t)\}$ приближенных решений можно выделить слабо сходящуюся в $W(Q_T)$ подпоследовательность, за которой во избежание громоздкой записи сохраним прежнее обозначение.

Покажем, что предел выделенной подпоследовательности, $u \in W(Q_T)$, и есть искомое приближенное решение.

Умножим каждое из равенств (12) на $d_j \in C^1(0,T)$, $d_j(T) = 0$, просуммируем по l от 1 до m, а затем проинтегрируем от 0 до T. После интегрирования первого слагаемого полученного равенства по частям, обозначив $\eta(x,t) = \sum\limits_{j=1}^{m} d_j(t)w_j(x)$, получим

$$\int_0^T \int_0^l (-u_t^m \eta_t + a u_x^m \eta_x + c u^m \eta)dxdt + \int_0^T \alpha(t) u_t^m(l,t)\eta(l,t)dt = \\ = \int_0^T \int_0^l f\eta dxdt. \tag{19}$$

Совокупность функций вида $\sum\limits_{j=1}^{m} d_j(t)w_j(x)$ обозначим $\mathscr{N}_m$. Зафиксируем произвольно функцию $\eta(x,t)$ из какого-либо множества $\mathscr{N}_{m_i}$. В (19) можно перейти к пределу при $m \to \infty$ в силу обоснованной выше слабой сходимости выделенной подпоследовательности. В результате мы приходим к тождеству (4) для предельной функции $u \in W(Q_T)$, справедливому для произвольной функции $\eta \in \mathscr{N}_{m_i}$. Так как $\bigcup\limits_{m=1}^{\infty} \mathscr{N}_m$ плотно в $\hat{W}$, полученное в результате предельного перехода тождество выполняется для любой функции из $\hat{W}(Q_T)$, что и завершает доказательство существования обобщенного решения и, следовательно, теоремы. □

Замечание 1. Однородность начальных условий (2) не ограничивает общность. Действительно, если $u(x,0) = \varphi(x)$, $u_t(x,0) = \psi(x)$, то, введя новую неизвестную функцию $v(x,t) = u(x,t) - \varphi(x) - t\psi(x)$, получим для нее уравнение, отличающееся от (1) лишь правой частью, тогда как начальные условия для $v(x,t)$ однородны.

3. Исследование гладкости решения. Покажем, что при выполнении некоторых дополнительных условий на входные данные решение задачи обладает и производными второго порядка.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы 1 и, кроме того,* $f_t \in L_2(Q_T)$, $c_t \in C(\bar{Q}_T)$. *Тогда* $u \in W_2^2(Q_T)$.

Доказательство. Для доказательства существования обобщенного решения, обладающего свойствами, указанными в теореме 2, снова воспользуемся методом Галеркина, взяв в качестве базиса $w_k(x)$ фундаментальную систему в $W_2^2(0,l)$. Не повторяя процедуру, описанную при доказательстве теоремы 1, заметим, что теперь $c_k(t)$, решения задачи Коши, имеют производные по t до третьего порядка в силу условий теоремы 2. Сначала покажем, что для построенных с помощью найденных $c_k(t)$ приближений $u^m(x,t)$ нормы $\|u^m_{tt}(x,0)\|_{L_2(0,l)}$ равномерно ограничены по m. Умножим каждое из (12) на $c''_j(t)$, просуммируем по j от 1 до m и положим $t=0$. Так как $c_k(0)=c'_k(0)=0$, в результате получим

$$\int_0^l (u^m_{tt}(x,0))^2dx = \int_0^l f(x,0)u^m_{tt}(x,0)dx,$$

откуда немедленно следует

$$\int_0^l (u^m_{tt}(x,0))^2dx \leqslant \frac{1}{2}\int_0^l f^2(x,0)dx,$$

что и доказывает наше утверждение.

Продолжим вывод оценки. Продифференцируем (12) по t, затем умножим на $c''_j(t)$, просуммируем по j от 1 до m и проинтегрируем по t от 0 до τ. Получим

$$\int_0^\tau\int_0^l (u^m_{ttt}u^m_{tt} + au^m_{xt}u^m_{xtt} + cu^m_t u^m_{tt} + a_t u^m_x u^m_{xtt} + c_t u^m u^m_{tt})dxdt+ \\ + \int_0^\tau \alpha(t)(u^m_{tt}(l,t))^2dt + \int_0^\tau \alpha'(t)u^m_t(l,t)u^m_{tt}(l,t)dt = \int_0^\tau\int_0^l f_t u^m_{tt}dxdt.$$

Проинтегрировав некоторые из слагаемых по частям, получим равенство

$$\frac{1}{2}\int_0^l \left[(u^m_{tt}(x,\tau))^2 + a(x,\tau)(u^m_{xt}(x,\tau))^2\right]dx + \int_0^\tau \alpha(t)(u^m_{tt}(l,t))^2dt = \\ = \frac{1}{2}\int_0^l (u^m_{tt}(x,0))^2dx + \frac{1}{2}\int_0^\tau \alpha''(t)(u^m_t(l,t))^2dt - \frac{1}{2}\alpha'(\tau)(u^m_t(l,\tau))^2+ \\ + \frac{3}{2}\int_0^\tau\int_0^l a_t(u^m_{xt})^2dxdt + \int_0^\tau\int_0^l a_{tt}u^m_{xt}u^m_x dxdt - \int_0^l a_t(\tau)u^m_x(x,\tau)u^m_{xt}dx- \\ - \int_0^\tau\int_0^l cu^m_t u^m_{tt}dxdt - \int_0^\tau\int_0^l c_t u^m u^m_{tt}dxdt + \int_0^\tau\int_0^l fu^m_{tt}dxdt.$$

Заметим, что из условий теоремы вытекает существование положительного числа c_1 такого, что $\max\limits_{\bar{Q}_T}|c_t| \leqslant c_1$.

Рассмотрим некоторые слагаемые правой части последнего равенства с целью вывода в дальнейшем нужного нам неравенства. Применим неравенство (9) к $(u^m_t(l,t))^2$:

$$(u^m_t(l,t))^2 \leqslant \varepsilon\int_0^l (u^m_{xt}(x,t))^2dx + c(\varepsilon)\int_0^l (u^m_t(x,t))^2dx,$$

а затем последнее слагаемое этого неравенства оценим следующим образом:

$$\int_0^l (u^m_t(x,t))^2dx \leqslant \tau\int_0^\tau\int_0^l u^m_{tt}dxdt.$$

Теперь с помощью второго из неравенств (9) получим

$$\left|\int_0^l (u_t^m(l,t))^2dx\right| \leqslant \varepsilon\int_0^l (u_{xt}^m)^2dx + c(\varepsilon)\int_0^l (u_t^m(x,t))^2dx.$$

Применив к слагаемым, содержащим произведения функций под знаком интегралов, неравенство Коши и учтя полученные выше соотношения, приходим к неравенству

$$\frac{1}{2}\int_0^l \big[(u_{tt}^m(x,\tau))^2 + a(x,\tau)(u_{xt}^m(x,\tau))^2\big]dx + \int_0^\tau \alpha(t)(u_{tt}^m(l,t))^2dt \leqslant$$
$$\leqslant N_1\int_0^\tau\int_0^l \big[(u_{tt}^m)^2 + (u_{xt}^m)^2\big]dxdt + N_2\int_0^\tau\int_0^l \big[(u^m)^2 + (u_t^m)^2 + (u_x^m)^2\big]dxdt +$$
$$+ a_1\int_0^\tau (u_t^m(l,t))^2dt + \int_0^\tau\int_0^l f_t^2dxdt + 2\varepsilon a_1\int_0^l (u_{xt}^m(x,\tau))^2dx.$$

Выбрав ε надлежащим образом, так, чтобы $a_0 - 2a_1\varepsilon > 0$, перенесем последнее слагаемое правой части полученного неравенства в левую, и тогда

$$\int_0^l \big[(u_{tt}^m(x,\tau))^2 + (u_{xt}^m(x,\tau))^2\big]dx + \gamma\int_0^\tau \alpha(t)(u_{tt}^m(l,t))^2dt \leqslant$$
$$\leqslant N_3\int_0^\tau\int_0^l \big[(u_{tt}^m)^2 + (u_{xt}^m)^2\big]dxdt + N_4\int_0^\tau\int_0^l \big[(u^m)^2 + (u_t^m)^2 + (u_x^m)^2\big]dxdt +$$
$$+ N_5\int_0^\tau (u_t^m(l,t))^2dt + N_6\int_0^\tau\int_0^l f_t^2dxdt.$$

Заметим, что из полученных при доказательстве теоремы 1 оценок (17) и (18) следует, что второе и третье слагаемые правой части последнего неравенства ограничены. Применив лемму Гронуолла, приходим к выводу о справедливости неравенства

$$\|u_{tt}^m\|^2_{L_2(Q_T)} + \|u_{xt}^m\|^2_{L_2(Q_T)} \leqslant K. \tag{20}$$

Оценка (20) вместе с (17) и (18) позволяет выделить подпоследовательность из последовательности $\{u^m(x,t)\}$, сходящуюся в $L_2(Q_T)$ вместе с производными первого порядка и производными $u_{tt}^m(x,t)$, $u_{xt}^m(x,t)$. Переходя к пределу при $m\to\infty$ в (12), приходим к тождеству (4). Решение, обладающее указанными свойствами, удовлетворяет тождеству (4) в форме

$$\int_0^T\int_0^l (u_{tt}v + au_xv_x + cuv)dxdt + \int_0^T \alpha(t)u_t(l,t)v(l,t)dt = \int_0^T\int_0^l fvdxdt \tag{21}$$

и единственно в силу теоремы 1.

Покажем, что при выполнении условий теоремы 2 решение имеет производные второго порядка и по пространственной переменной.

Возьмем в (21) $v(x,t) = \Psi(t)\Phi(x)$, где $\Psi(t)$ — произвольный элемент из $L_2(0,T)$, $\Psi(T) = 0$, а $\Phi(x)$ — произвольный элемент из $W_2^1(0,l)$, $\Phi(0) = 0$. Тогда (21) можно записать так:

$$\int_0^T \Psi(t) \int_0^l \big[u_{tt}\Phi(x) + au_x\Phi'(x) + cu\Phi(x)\big]dxdt+$$
$$+\int_0^T \alpha(t)u_t(l,t)\Psi(t)\Phi(l)dt = \int_0^T \Psi(t)\int_0^l f\Phi(x)dxdt.$$

В силу произвола в выборе $\Psi(t)$ из последнего равенства следует, что для почти всех $t \in [0,T]$ выполняется соотношение

$$\int_0^l au_x\Phi'(x)dx = -\int_0^l \big[u_{tt} + cu - f\big]\Phi(x)dx - \alpha(t)u_t(l,t)\Phi(l). \tag{22}$$

Для обоснования утверждения о существовании вторых производных по x рассматривается вспомогательная задача: *найти решение уравнения*

$$(au_x)_x = F(x,t),$$

удовлетворяющее условиям

$$u(0,t) = 0, \quad u_x(l,t) = \nu(t).$$

Рассматривая ее как краевую задачу для обыкновенного дифференциального уравнения, нетрудно получить решение

$$u(x,t) = a(l,t)\nu(t)\int_0^x \frac{d\xi}{a(\xi,t)} - \int_0^x \frac{1}{a(\xi,t)}\int_\xi^l F(\xi',t)d\xi'd\xi.$$

Очевидно, это решение имеет непрерывную производную второго порядка, если $F \in L_2(0,l)$ для всех $t \in [0,T]$. Нетрудно увидеть, что это решение удовлетворяет тождеству

$$\int_0^l au_x\Phi'(x)dx = -\int_0^l F(x,t)\Phi(x)dx + a(l,t)\nu(t)\Phi(l)$$

и, стало быть, является обобщенным решением вспомогательной задачи из $W_2^2(0,l)$ для $F \in L_2(0,l)$, $\nu \in L_2(0,T)$ и почти всех $t \in [0,T]$. Возвращаясь к (22) видим, что для почти всех $t \in [0,T]$ функцию $u(x,t)$, удовлетворяющую этому тождеству, можно интерпретировать как решение вспомогательной задачи при $F(x,t) = u_{tt} + cu - f$, $\nu(t) = u_t(l,t)$. Следовательно, $u_{xx} \in L_2(Q_T)$.

Итак, доказано, что решение задачи (1)–(3) при выполнении условий теоремы 2 принадлежит пространству $W_2^2(Q_T)$ и является решением почти всюду в Q_T. □

4. Частный случай. Для практических целей часто возникает необходимость получения решения в явном виде или приближенного решения. Доказанные теоремы 1 и 2 оказываются весьма полезными и для этих целей. Действительно, выбрав подходящий базис $w_k(x)$, мы можем воспользоваться процедурой, описанной при доказательстве существования обобщенного решения, и получить приближенное решение в виде конечной суммы $u^m(x,t) = \sum\limits_{k=1}^{m} c_k(t) w_k(x)$, а для нахождения $c_k(t)$ можно применить известные численные методы решения задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Рассмотрим пример, демонстрирующий возможность получения решения задачи в явном виде.

Пример. *Найти решение уравнения*

$$u_{tt} - u_{xx} = f(x,t)$$

в $Q_T = (0,l) \times (0,T)$, *удовлетворяющее начальным данным*

$$u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0$$

и краевым условиям

$$u(0,t) = 0, \quad u_x(l,t) + \gamma u_t(l,t) = 0.$$

Как отмечено выше, метод разделения переменных бесполезно пытаться применить непосредственно к этой задаче. Однако мы его все же используем после некоторых рассуждений и действий.

Рассмотрим вспомогательную задачу:

$$\begin{gathered} u_{tt} - u_{xx} = f(x,t); \\ u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0; \\ u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = \mu(t). \end{gathered}$$

Будем искать решение вспомогательной задачи в виде суммы $u(x,t) = u^1(x,t) + u^2(x,t)$, где $u^1(x,t)$ — решение однородного уравнения, удовлетворяющее заданным начальным и краевым условиям, а $u^2(x,t)$ — решение неоднородного уравнения, удовлетворяющее однородным начальным и краевым условиям. Если $\mu(t)$ дважды непрерывно дифференцируема и обращается в нуль при $t \leqslant 0$, то мы можем воспользоваться представлением решения этой задачи при $T \leqslant l$, предъявленным в статье В. А. Ильина и В. В. Тихомирова [18]:

$$u^1(x,t) = \mu(t + x - l).$$

Функцию $u^2(x,t)$ найдем методом разделения переменных. Тогда решение нашей вспомогательной задачи имеет вид

$$u(x,t) = \mu(t + x - l) + \frac{l}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \int_0^t f_n(\tau) \sin \frac{\pi n}{l}(t - \tau) d\tau,$$

где

$$f_n(t) = \frac{2}{l}\int_0^l f(x,t)\sin\frac{\pi n x}{l}dx.$$

Теперь попробуем выяснить, найдется ли такая функция $\mu(t)$, чтобы решение вспомогательной задачи было решением поставленной задачи. Для этого к полученному решению вспомогательной задачи применим краевое условие $u_x(l,t) + \gamma u_t(l,t) = 0$. После несложных преобразований приходим к дифференциальному уравнению

$$\mu'(t) = \frac{\gamma}{1+\gamma}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\int_0^t f_n(\tau)\cos\frac{\pi n}{l}(t-\tau)d\tau,$$

решение которого легко получить:

$$\mu(t) = \frac{\gamma}{1+\gamma}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\int_0^t\int_0^\tau f_n(\eta)\cos\frac{\pi n}{l}(\tau-\eta)d\eta d\tau.$$

Замечание 2. Условие $T \leqslant l$ существенно, но только для простоты представления решения. Для других значений t представления решений задачи с неоднородными краевыми условиями получены в серии работ В. А. Ильина [19, раздел VI].

Заключение. На наш взгляд, наиболее важным результатом этой работы является доказательство принадлежности решения поставленной задачи пространству $W_2^2(Q_T)$, что дает возможность получения как приближенных, так и, в частных случаях, точных решений задачи.

Авторский вклад и ответственность. Все авторы принимали участие в разработке концепции статьи и в написании рукописи. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Исследование выполнялось без финансирования.

Библиографический список

1. Тихонов А. Н., Самарский А. А. *Уравнения математической физики.* М.: Наука, 2004.
2. Скубачевский А. Л., Стеблов Г. М. О спектре дифференциальных операторов с областью определения, не плотной в $L_2(0,1)$ // *Докл. АН СССР*, 1991. Т. 321, № 6. С. 1158–1163.
3. Ионкин Н. И. Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием // *Дифференц. уравнения*, 1977. Т. 13, № 2. С. 294–304.
4. Лажетич Н. Л. О классической разрешимости смешанной задачи для одномерного гиперболического уравнения второго порядка // *Дифференц. уравнения*, 2006. Т. 42, № 8. С. 1072–1077.
5. Рогожников А. М. О различных типах граничных условий для одномерного уравнения колебаний / *Сборник статей молодых ученых факультета ВМК МГУ.* Т. 10, 2013. С. 188–214.
6. Киричек В. А., Пулькина Л. С. Задача с динамическими граничными условиями для гиперболического уравнения // *Вестн. Самарск. ун-та. Естественно-научн. сер.*, 2017. Т. 23, № 1. С. 21–27.

7. Корпусов М. О. *Разрушение в неклассических волновых уравнениях*. М.: URSS, 2010.
8. Бейлин А. Б., Пулькина Л. С. Задача о продольных колебаниях стержня с динамическими граничными условиями // *Вестн. Самарск. гос. ун-та. Естественно-научн. сер.*, 2014. № 3(114). С. 9–19.
9. Doronin G. G., Lar'kin N. A., Souza A. J. A hyperbolic problem with nonlinear second-order boundary damping // *Electron. J. Differ. Equ.*, 1998. vol. 1998, no. 28. 10 pp. https://digital.library.txstate.edu/handle/10877/7927.
10. Andrews K. T., Kuttler K. L., Shillor M. Second order evolution equations with dynamic boundary conditions // *J. Math. Anal. Appl.*, 1996. vol. 197, no. 3. pp. 781–795. https://doi.org/10.1006/jmaa.1996.0053.
11. Бейлин А. Б., Пулькина Л. С. Задача с нелокальными динамическими условиями для уравнения колебаний толстого стержня // *Вестн. Самарск. ун-та. Естественно-научн. сер.*, 2017. Т. 23, № 4. С. 7–18. https://doi.org/10.18287/2541-7525-2017-23-4-7-18.
12. Louw T., Whitney S., Subramanian A., Viljoen H. Forced wave motion with internal and boundary damping // *J. Appl. Phys.*, 2012. vol. 111, 014702. https://doi.org/10.1063/1.3674316.
13. Пулькина Л. С. Задача с динамическим нелокальным условием для псевдогиперболического уравнения // *Изв. вузов. Матем.*, 2016. № 9. С. 42–50.
14. Федотов И. А., Полянин А. Д., Шаталов М. Ю. Теория свободных и вынужденных колебаний твердого стержня, основанная на модели Рэлея // *ДАН*, 2007. Т. 417, № 1. С. 56–61.
15. Pulkina L. S., Beylin A. B. Nonlocal approach to problems on longitudinal vibration in a short bar // *Electron. J. Differ. Equ.*, 2019. vol. 2019, no. 29. 9 pp. https://ejde.math.txstate.edu/Volumes/2019/29/abstr.html.
16. Хазанов Х. С. *Механические колебания систем с распределенными параметрами*. Самара: Самар. госуд. аэрокосмич. ун-т, 2002.
17. Ладыженская О. А. *Краевые задачи математической физики*. М.: Наука, 1973.
18. Ильин В. А., Тихомиров В. В. Волновое уравнение с граничным управлением на двух концах и задача о полном успокоении колебательного процесса // *Дифференц. уравнения*, 1999. Т. 35, № 5. С. 692–704.
19. Ильин В. А. *Избранные труды В. А. Ильина*. Т. 2. М.: Макс-Пресс, 2008.

Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2020, vol. 24, no. 3, pp. 407–423
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1775

MSC: 35L20, 35B45, 35D30

A problem with dynamical boundary condition for a one-dimensional hyperbolic equation

© ***A. B. Beylin***[1], ***L. S. Pulkina***[2]

[1] Samara State Technical University,
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russian Federation.
[2] Samara National Research University,
34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.

Abstract

In this paper, we consider a problem with dynamical boundary conditions for a hyperbolic equation. The dynamical boundary condition is a convenient method to take into account the presence of certain damper when fixing the end of a string or a beam. Problems with dynamical boundary conditions containing first-order derivatives with respect to both space and time variables are not self-ajoint, that complicates solution by spectral analysis. However, these difficulties can be overcome by a method proposed in the paper. The main tool to prove the existence of the unique weak solution to the problem is the priori estimates in Sobolev spaces. As a particular example of the wave equation is considered. The exact solution of a problem with dynamical condition is obtained.

Keywords: hyperbolic equation, boundary-value problem, dynamical boundary condition, weak solution, Sobolev spaces.

Received: 24th February, 2020 / Revised: 12th July, 2020 /
Accepted: 14th September, 2020 / First online: 30th September, 2020

Competing interests. We declare that we have no conflicts of interest in the authorship and publication of this article.

Authors' contributions and responsibilities. Each author has participated in the article concept development and in the manuscript writing. The authors are absolutely

Research Article

Please cite this article in press as:
Beylin A. B., Pulkina L. S. A problem with dynamical boundary condition for a one-dimensional hyperbolic equation, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2020, vol. 24, no. 3, pp. 407–423. https://doi.org/10.14498/vsgtu1775 (In Russian).

Authors' Details:
Alexander B. Beylin https://orcid.org/0000-0002-4042-2860
Cand. Techn. Sci.; Associate Professor; Dept. of Mechanical Engineering, Machine Tools and Tools; e-mail: abeilin@mail.ru

Ludmila S. Pulkina https://orcid.org/0000-0001-7947-6121
Dr. Phys. & Math. Sci.; Professor; Dept. of Differential Equations and Control Theory; e-mail: louise@samdiff.ru

responsible for submitting the final manuscript in print. Each author has approved the final version of manuscript.

Funding. The research has no funding from any party.

References

1. Tikhonov A. N., Samarskii A. A. *Uravneniia matematicheskoi fiziki* [Equations of Mathematical Physics]. Moscow, Nauka, 2004 (In Russian).
2. Skubachevskii A. L., Steblov G. M. On the spectrum of differential operators with a domain that is not dense in $L_2(0,1)$, *Soviet Math. Dokl.*, 1992, vol. 44, no. 3, pp. 870–875.
3. Ionkin N. I. The solution of a certain boundary value problem of the theory of heat conduction with a nonclassical boundary condition, *Differ. Uravn.*, 1977, vol. 13, no. 2, pp. 294–304 (In Russian).
4. Lažetić N. L. On the classical solvability of the mixed problem for a second-order one-dimensional hyperbolic equation, *Differ. Equ.*, 2006, vol. 42, no. 8, pp. 1134–1139. https://doi.org/10.1134/S0012266106080088.
5. Rogozhnikov A. M. On various kinds of boundary conditions for one-dimensional wave equation, In: *The Collection of Articles by Young Scientists at the MSU Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics*, vol. 10, 2013, pp. 188–214 (In Russian).
6. Kirichek V. A., Pulkina L. S. Problem with dynamic boundary conditions for a hyperbolic equation, *Vestn. Samarsk. Univ. Estestvenno-Nauchn. Ser.*, 2017, vol. 23, no. 1, pp. 21–27 (In Russian).
7. Korpusov M. O. *Razrushenie v neklassicheskikh volnovykh uravneniiakh* [Blow-Up in Nonclassical Wave Equations]. Moscow, URSS, 2010 (In Russian).
8. Beylin A. B., Pulkina L. S. A problem on longitudinal vibrations of a beam with dynamic boundary conditions, *Vestn. Samarsk. Gosud. Univ. Estestvenno-Nauchn. Ser.*, 2014, no. 3(114), pp. 9–19 (In Russian).
9. Doronin G. G., Lar'kin N. A., Souza A. J. A hyperbolic problem with nonlinear second-order boundary damping, *Electron. J. Differ. Equ.*, 1998, vol. 1998, no. 28, 10 pp. https://digital.library.txstate.edu/handle/10877/7927.
10. Andrews K. T., Kuttler K. L., Shillor M. Second order evolution equations with dynamic boundary conditions, *J. Math. Anal. Appl.*, 1996, vol. 197, no. 3, pp. 781–795. https://doi.org/10.1006/jmaa.1996.0053.
11. Beylin A. B., Pulkina L. S. A problem on longitudinal vibration in a short bar with dynamical boundary conditions, *Vestn. Samarsk. Univ. Estestvenno-Nauchn. Ser.*, 2017, vol. 23, no. 4, pp. 7–18 (In Russian). https://doi.org/10.18287/2541-7525-2017-23-4-7-18.
12. Louw T., Whitney S., Subramanian A., Viljoen H. Forced wave motion with internal and boundary damping, *J. Appl. Phys.*, 2012, vol. 111, 014702. https://doi.org/10.1063/1.3674316.
13. Pulkina L. S. A problem with dynamic nonlocal condition for pseudohyperbolic equation, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2016, vol. 60, no. 9, pp. 38–45. https://doi.org/10.3103/S1066369X16090048.
14. Fedotov I. A., Polyanin A. D., Shatalov M. Y. Theory of free and forced vibrations of a rigid rod based on the Rayleigh model, *Dokl. Phys.*, 2007, vol. 52, no. 11, pp. 607–612. https://doi.org/10.1134/S1028335807110080.
15. Pulkina L. S., Beylin A. B. Nonlocal approach to problems on longitudinal vibration in a short bar, *Electron. J. Differ. Equ.*, 2019, vol. 2019, no. 29, 9 pp. https://ejde.math.txstate.edu/Volumes/2019/29/abstr.html.
16. Khazanov Kh. S. *Mekhanicheskie kolebaniia sistem s raspredelennymi parametrami* [Mechanical Vibrations of Systems with Distributed Parameters]. Samara, Samara State Aerospace Univ., 2002 (In Russian).
17. Ladyzhenskaya O. A. *Kraevye zadachi matematicheskoi fiziki* [Boundary-Value Problems of Mathematical Physics]. Moscow, Nauka, 1973 (In Russian).

18. Il'in V. A., Tikhomirov V. V. The wave equation with boundary control at two ends and the problem of the complete damping of a vibration process, *Differ. Equ.*, 1999, vol. 35, no. 5, pp. 697–708.
19. Il'in V. A. *Izbrannye trudy V.A. Il'ina* [Selected Works of V.A. Il'in], vol. 2. Moscow, Maks-Press, 2008 (In Russian).