



УДК 539.37

Общие свойства показателя скоростной чувствительности диаграмм деформирования, порождаемых линейной теорией вязкоупругости, и существование максимума у его зависимости от скорости



© А. В. Хохлов

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова,
Научно-исследовательский институт механики,
Россия, 119192, Москва, Мичуринский проспект, 1.

Аннотация

Анализируется скоростная чувствительность семейства диаграмм деформирования, порождаемых физически линейным определяющим соотношением вязкоупругости Больцмана–Вольтерры с произвольной функцией релаксации в одноосных испытаниях с постоянными скоростями деформации. Выведено общее выражение для показателя скоростной чувствительности (скоростного упрочнения) и аналитически исследованы его общие качественные свойства: зависимость от деформации, скорости деформации и характеристик функции релаксации, диапазон значений, интервалы монотонности и существование точек экстремума, предельные значения при стремлении скорости деформации к нулю или бесконечности, способы определения по диаграммам деформирования или по кривым релаксации. Установлено, что (в рамках линейной теории вязкоупругости) этот показатель зависит не от двух независимых аргументов (деформации и скорости деформации), а только от их отношения, что он выражается через отношение касательного модуля к секущему и может быть вычислен по одной диаграмме деформирования с произвольной скоростью деформации, и что по заданной (или измеренной в испытаниях) функции скоростной чувствительности можно однозначно восстановить функцию релаксации. Доказано, что значения показателя скоростной чувствительности всегда лежат в интервале от нуля до единицы (т.е. линейное определяющее соотношение описывает только псевдопластические среды и не может описывать дилатантные) и могут быть сколь угодно близки к единице (верхней границе для псевдопластических сред), что как функция скорости он не только может монотонно возрастать или убывать, но может иметь точки экстремума, в частности точку максимума (при малообременительных ограничении-

Научная статья

  Контент публикуется на условиях лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru) (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Образец для цитирования

Хохлов А. В. Общие свойства показателя скоростной чувствительности диаграмм деформирования, порождаемых линейной теорией вязкоупругости, и существование максимума у его зависимости от скорости // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2020. Т. 24, № 3. С. 469–505. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1726>.

Сведения об авторе

Андрей Владимирович Хохлов  <https://orcid.org/0000-0002-9212-2579>

кандидат технических наук; ведущий научный сотрудник; лаб. упругости и пластичности; e-mail: andrey-khokhlov@ya.ru

ях на функцию релаксации). Тем самым обнаружена неожиданная способность линейной теории вязкоупругости не только порождать семейство диаграмм деформирования с выраженными участками течения при практически постоянном напряжении, но и качественно описывать «сигмоидальную» форму зависимости напряжения от скорости деформации (в логарифмических осях) и очень высокую скоростную чувствительность, характерные для режима сверхпластического деформирования материалов.

Установленные свойства показателя скоростной чувствительности и его характерные особенности проиллюстрированы на примерах классических регулярных, сингулярных и фрактальных моделей вязкоупругости (Максвелла, Фойгта, Кельвина, Зенера, Бюргерса, Скотт–Блэра) и их параллельных соединений.

Ключевые слова: вязкоупругость, диаграммы деформирования, скоростное упрочнение, показатель скоростной чувствительности, функция скоростной чувствительности, псевдопластические среды, фрактальные модели, уравнения с дробной производной, сверхпластичность, сигмоидальная кривая, титановые и алюминиевые сплавы, керамики.

Получение: 25 июля 2019 г. / Исправление: 23 июня 2020 г. /

Принятие: 24 августа 2020 г. / Публикация онлайн: 31 августа 2020 г.

Введение. Данная статья продолжает цикл работ [1–5] (и др.) по аналитическому исследованию физически линейного определяющего соотношения (ОС) вязкоупругости

$$\sigma(t) = \int_0^t R(t - \tau) d\varepsilon(\tau), \quad \varepsilon(t) = \int_0^t \Pi(t - \tau) d\sigma(\tau), \quad t > 0, \quad (1)$$

с произвольными функциями релаксации (ФР) и ползучести $R(t)$ и $\Pi(t)$, $t > 0$, с целью определения комплекса моделируемых им реологических эффектов, границ и индикаторов его области применимости, сфер влияния материальных функций и разработки методик идентификации. ОС (1) описывает одномерные изотермические процессы в структурно-стабильных материалах. Функции ползучести (ФП) и релаксации (ФР) в (1) предполагаются положительными и дифференцируемыми на $(0; \infty)$, $\Pi(t)$ — возрастающей и выпуклой вверх на $(0; \infty)$ [1–5], а $R(t)$ — убывающей и выпуклой вниз; ФР может быть непрерывной справа в точке $t = 0$ (тогда модель называется регулярной), а может иметь интегрируемую особенность (например степенную, как у многих фрактальных моделей [6–12]) или включать сингулярное слагаемое $\eta\delta(t)$, где $\delta(t)$ — дельта-функция, $\eta > 0$. Парой операторов вида (1) задаются и трехмерные ОС вязкоупругости нестареющих изотропных сред: тогда под $\sigma(t)$ и $\varepsilon(t)$ понимаются компоненты девиаторов тензоров напряжений и деформаций или среднее напряжение и объемная деформация, связанные сдвиговой или объемной ФР [4, 5].

Данная работа посвящена анализу общих свойств показателя скоростной чувствительности (ПСЧ) диаграмм деформирования, порождаемых ОС (1) в одноосных квазистатических испытаниях $\varepsilon = at$ с постоянными скоростями деформации (СД).

Диаграммы деформирования (ДД) многих материалов (в частности, наследственных) в испытаниях с постоянными скоростями деформации зависят от скорости a : $\sigma = \sigma(\varepsilon, a)$. Одна из наиболее распространенных мер скоростной чувствительности материала (выраженности зависимости ДД от a и скоростного упрочнения) — показатель скоростной чувствительности (ПСЧ):

$$m(a, \varepsilon) := \frac{\partial \lg \sigma(\varepsilon, a)}{\partial \lg a} = \sigma^{-1} a \frac{\partial \sigma}{\partial a} \quad (2)$$

(в неодноосном случае под σ и a следует понимать интенсивности тензоров напряжений и скоростей деформаций). Для степенной модели вязкой (жидкообразной) среды $\sigma = K \dot{\varepsilon}^M$ ПСЧ постоянен и совпадает с показателем M ($M \in (0; 1)$ для псевдопластических сред, $M > 1$ — для дилатантных) [13]. Как будет показано ниже, ПСЧ может быть постоянным и для моделей линейной вязкоупругости с определенными функциями релаксации.

Особенно важна высокая скоростная чувствительность материала и ее характеристика при сверхпластическом деформировании [14–36] (см. п. 1), которое лежит в основе важных технологических процессов штамповки изделий сложной формы, получения материалов с нужной структурой и механическими свойствами посредством обработки давлением и большими пластическими деформациями [19, 23, 27–29, 36–45] и т.п.

В работах [1, 4] исследованы общие свойства диаграмм деформирования $\sigma = \sigma(\varepsilon, a)$, порождаемых линейной теорией вязкоупругости в одноосном и общем случаях, в частности доказано, что ЛОС описывает только положительную скоростную чувствительность и не способна описывать отрицательную [46–52], но ПСЧ и другие количественные характеристики скоростной чувствительности не анализировались.

Главные задачи данной статьи — вывести формулу для показателя скоростной чувствительности кривых деформирования с постоянными скоростями, порождаемых линейным ОС (1) с произвольной функцией релаксации, аналитически исследовать общие качественные свойства зависимости ПСЧ от деформации, скорости деформации и характеристик ФР и доказать, что физически линейное ОС вязкоупругости (1) способно описывать максимум ПСЧ диаграмм деформирования, т.е. «сигмоидальную» форму зависимости напряжения от скорости деформации в осях « $\lg \sigma - \lg a$ », и очень высокую скоростную чувствительность с показателем $m \in (0.5; 1)$, характерные для режима сверхпластического деформирования материалов [14–36], причем без каких-либо экзотических ограничений на функцию релаксации: окажется, что эти условия выполняются даже для классической модели Кельвина (“standard linear solid”) из двух упругих элементов и одного вязкого. Обнаруженный факт, в частности, выявляет важность учета упругих деформаций (которыми традиционно пренебрегают в моделировании сверхпластичности) для описания максимума ПСЧ. Из него следует принципиальная возможность использования линейных интегральных операторов вида (1) (инвариантных относительно сдвигов по времени) как полезного инструмента (элемента) при построении ОС сверхпластичности, связывающих истории тензоров напряжений и деформаций (конечных, больших), температуры и эволюции параметров структуры материала. Например, соединив (параллельно или последовательно) один нелинейно вязкий элемент и модель Кельвина (линейный

вязкоупругий «суперэлемент»), можно получить нелинейную модель с ПСЧ, имеющим максимум.

Напряжение и время (и скорость деформации) в ОС (1) и формуле (2) предполагаются безразмерными. В силу линейности операторов (1) изучаемые качественные свойства ДД и ПСЧ не зависят от способа масштабирования напряжений и времени.

1. Особенности кривых испытаний материалов в состоянии сверхпластичности и способов их описания. Сверхпластичность — способность многих материалов в определенных структурно-термомеханических условиях (в определенном диапазоне температур, скоростей и при достаточной степени измельчения зерен) к очень большой пластической деформации (100–200 % и более) при относительно низком напряжении течения и его сильной зависимости от скорости деформации; способность к деформации не только без разрушения, но и без потери (или даже с улучшением) своих основных механических характеристик. Напряжение течения в состоянии сверхпластичности может быть в несколько раз меньше предела текучести материала в обычном состоянии (при той же температуре), а деформация при разрушении — в несколько раз больше. Сверхпластичность обычно наблюдается у металлов и сплавов (титан, медь, цирконий, цинк, титановые, алюминиевые, магниевые и свинцово-оловянные сплавы, стали и др.), интерметаллидов и керамик с ультрамелкозернистой структурой (средний размер равноосных зерен менее 10 мкм) при достаточно высоких температурах ($T > 0.4 T_m$, T_m — температура плавления) и достаточно малых скоростях деформирования ($\dot{\epsilon} = 10^{-5} \div 10^{-1} \text{ с}^{-1}$) [18–36]. Обычно выделяют два основных вида сверхпластического деформирования:

- 1) сверхпластичность полиморфных материалов (стали, чугуны, титан и его сплавы, цирконий, цинк и др.) в процессе фазовых превращений, вызванных деформированием, термоциклированием, радиацией и т.п.;
- 2) структурную сверхпластичность материалов (металлов и сплавов, интерметаллидов, керамик) с ультрамелкозернистой (глобулярной) структурой, не связанную с фазовыми превращениями.

Основными механизмами, определяющими развитие структурной сверхпластичности, считаются зернограничное проскальзывание, внутризеренное дислокационное скольжение, диффузионная ползучесть и рекристаллизация [18–30, 33–36]. Как правило, чем меньше средний размер зерен поликристаллического материала в состоянии сверхпластичности, тем больше его скоростная чувствительность, меньше напряжение течения, больше деформационный ресурс и вязкость (тогда как для металла в обычном состоянии пределы текучести и прочности возрастают с уменьшением размера зерен). У металлических стекол в переохлажденном жидком состоянии (в некотором диапазоне температур, немного выше температуры стеклования) наблюдается сверхпластическое течение с ПСЧ, близким к единице, и при высоких скоростях деформации [27].

Механическое поведение материалов в условиях сверхпластичности, как правило, изучается в испытаниях на одноосное растяжение и сжатие цилиндрических или плоских образцов (со специально подготовленной структурой), на кручение под давлением и на продавливание материала в специальных матрицах (равноканальное угловое прессование и т.п.). До и после ис-

пытания производится подробное изучение структуры материала средствами металловедения. Все более популярными становятся методы индентирования, но методология, математическая обработка, расшифровка и интерпретация результатов таких опытов вызывают пока много вопросов. В одноосных опытах на растяжение-сжатие при постоянной температуре обычно снимаются ДД $\sigma(\varepsilon, a)$ при постоянных СД и три паспортные кривые сверхпластичности (все эти кривые сильно зависят от температуры [18–30, 35–39, 64]): зависимости (истинного) напряжения течения $\sigma_y(a)$, ПСЧ $m(a)$ и максимального относительного удлинения при разрыве $\delta(a) = l/l_0 - 1$ от СД $a := \dot{\varepsilon} = \dot{l}/l = V/l$, где $\varepsilon = \ln l/l_0$, V – скорость траверсы испытательной машины. Эти кривые принято строить в (полу)логарифмических координатах: $\lg \sigma - \lg a$, $m - \lg a$, $\delta - \lg a$. По их качественному виду принято судить о том, находится ли материал в состоянии сверхпластичности или в «обычном состоянии» (только в температурно-скоростном режиме, необходимом для проявления сверхпластичности в случае материала с «правильной» структурой).

На ЭДД $\sigma(\varepsilon, a)$ сверхпластичных материалов при постоянных СД имеется начальный участок быстрого нарастания напряжения (иногда до $\varepsilon = 5\%$). За ним следует участок постоянства напряжения (без деформационного упрочнения), где напряжение течения сильно зависит от СД (а затем, возможно, участок убывания напряжения). На рис. 1 приведены ДД для титанового сплава ВТ6С при температуре 900°C (в вакууме) при постоянной СД в диапазоне от 0.00008 до 0.02 c^{-1} из статьи [53]: истинные напряжения (в МПа) в зависимости от относительной деформации $l/l_0 - 1$ в процентах при постоянстве скорости траверсы (истинная СД $a := \dot{l}/l = V/l$ в процессе растяжения падает, ибо l растет). Это типичные кривые сверхпластического деформирования. Они отличаются от ДД для титанового сплава в обычном состоянии (примерно в том же диапазоне СД, но при меньшей температуре и без подготовки структуры) не только гораздо большими деформациями при таких

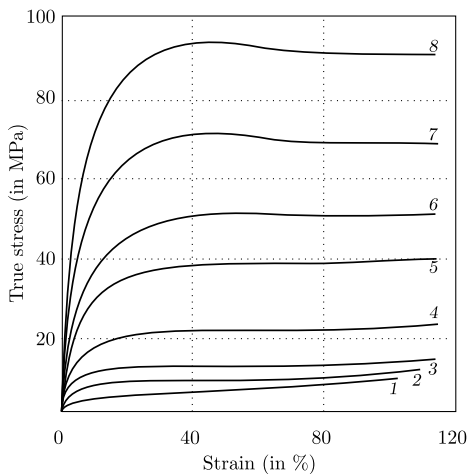


Рис. 1. Диаграммы деформирования титанового сплава ВТ6С при 900°C (в вакууме) для скоростей деформации $a = 8; 55; 84; 160; 350; 600; 800; 2000 \cdot 10^{-5} \text{ c}^{-1}$ (кривые 1–8) [53]

[Figure 1. Stress-strain curves of titanium alloy VT6S under tension at 900°C and strain rates $a = 8; 55; 84; 160; 350; 600; 800; 2000 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$ (curves 1–8) [53]]

же или меньших напряжениях, но и очень сильной чувствительностью напряжения течения к СД: на рис. 1 напряжение течения увеличилось в 10 раз при изменении (начальной) СД от 0.00008 до 0.02 с⁻¹, а ПСЧ, определенный по кривым рис. 1, находится в диапазоне от 0.5 до 0.7. Отметим, что аналогичные по форме диаграммы деформирования с длинным горизонтальным участком, сильно зависящим от скорости, порождают линейная модель Максвелла [1] и нелинейная модель упруговязкопластичности типа Максвелла [54, 55].

Многочисленные эксперименты показали, что сверхбольшие пластические деформации надежно коррелируют с высоким значением ПСЧ (2). Сильная чувствительность напряжения течения к СД — один из главных факторов, обеспечивающих устойчивость сверхпластического течения: в месте зарождения шейки повышается СД, что вызывает повышение напряжения (упрочнение) и стабилизацию (залечивание локального сужения). Увеличение ПСЧ с ростом деформации (его предсказывают, в частности, нелинейная модель типа Максвелла [54, 55] и линейное ОС (1) с регулярными функциями релаксации, см. п. 3) также способствует стабилизации участков локализации деформации. Сильная зависимость напряжения течения от СД (режим сверхпластичности) характеризуется величиной $m > 0.3$ (максимальное значение $m = 1$ соответствует линейно-вязкой жидкости), тогда как для материалов в обычном состоянии $m \leq 0.1$. Принято считать [18–30, 35, 36], что для режима сверхпластического деформирования материала характерна «сигмоидальная» форма графика зависимости $\lg \sigma$ от $\lg a$ (кривая 1 на рис. 2), т.е. наличие точки перегиба с почти прямолинейным участком в ее окрестности и, соответственно, наличие точки максимума на графике зависимости ПСЧ (2) от СД при фиксированной деформации (кривая 2), а также — максимум

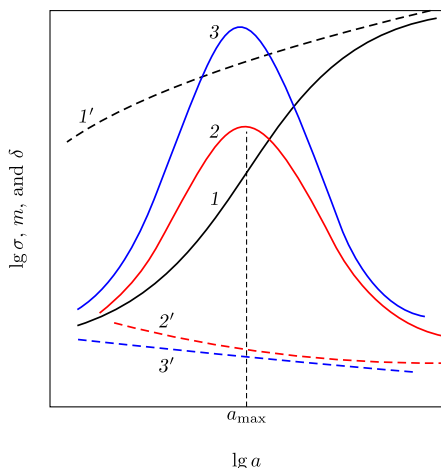


Рис. 2. Типичные качественные зависимости (безразмерного) напряжения (1, 1'), показателя скоростной чувствительности (2, 2') и деформации при разрушении (3, 3') от скорости деформирования: 1, 2, 3 — в режиме сверхпластического деформирования; 1', 2', 3' — в обычном состоянии

[Figure 2. Typical qualitative dependences of (non-dimensional) stress (1, 1'), strain rate sensitivity index (2, 2') and rupture strain on strain rate for tensile tests (3, 3') at constant strain rate; curves 1, 2, 3 correspond to the superplastic deformation regime; curves 1', 2', 3' correspond to the usual condition]

и очень высокие значения деформации при разрушении δ (кривая 3). Для материала в обычном состоянии характерны кривые вида $1'$ и $2'$ без точек перегиба и максимума и монотонное убывание $\delta(\lg a)$ (кривая $3'$). Точка максимума a_{\max} указывает оптимальную скорость деформирования для достижения максимальных деформаций и нужной формы изделия с наименьшими энергозатратами. У керамик с ультрамелкозернистой структурой график ПСЧ, как правило, имеет широкий участок постоянства (плато) [24, 27].

Наличие выраженного максимума на графиках m и δ (кривые 2 и 3) на рис. 2 позволяет выделить на ней три области [24–27]. При очень малых СД δ и m малы (стадия I). Стадия II характеризуется высокими (максимальными) значениями δ и m , т.е. максимальным наклоном и наименьшей кривизной «сигмоидальной кривой» 1. При этом характер взаимодействия фаз, средний размер зерен и их форма (в идеале — близкая к глобулярной) практически не меняются. Как только происходят существенные изменения (увеличение зерен, потеря равноосности, нарушение фазового равновесия и т.п.), происходит понижение ПСЧ и переход к стадии III. Оптимальный диапазон СД, соответствующий стадии II, зависит от материала (его химического и фазового состава, структуры и текстуры) и температуры. Он, как правило, лежит в интервале скоростей $\dot{\epsilon}$, равных $10^{-4} \div 10^{-2} \text{ с}^{-1}$. Его прогнозирование, определение, расширение и сдвиг в сторону больших СД («высокоскоростная сверхпластичность») — одна из важнейших технологических и научных задач.

Уменьшение среднего размера зерен (при сохранении их равномасштабности и равноосности) посредством специальной предварительной термомеханической обработки вызывает понижение напряжения течения и сдвиг оптимального диапазона СД (максимума кривой $m(\lg a)$ и точки перегиба сигмоидальной кривой — рис. 2) в сторону увеличения (порой в десятки раз). «Правильный» фазовый состав материала поддерживает стабильность необходимой для сверхпластичности микроструктуры и повышает эффективность механизмов сверхпластического деформирования. Повышение температуры, как правило, приводит к росту зерен, но если оно не выводит материал из состояния сверхпластичности (если не нарушает мелкозернистую структуру и равноосность зерен, не сдвигает фазовое равновесие и не вызывает переход материала в однофазное состояние), то влечет значительное понижение напряжения течения и сдвиг оптимального для интервала СД в сторону увеличения СД [18–30, 35–39, 63, 64].

Из сказанного следует, что ПСЧ (его зависимость от СД, деформации, температуры, параметров структуры, их истории и т.п.) — важнейшая характеристика материала, находящегося в состоянии сверхпластичности, и конкретного процесса сверхпластического деформирования. Методам определения ПСЧ посвящено огромное количество работ (в большинстве изучается лишь зависимость ПСЧ от СД) [15–27, 53, 56, 59]. ПСЧ определяют по наклонам кривых $\lg \sigma - \lg a$, или по ДД со скачком СД, или по кривым релаксации напряжений, или по результатам технологических экспериментов. Все существующие методы позволяют определить ПСЧ с малой точностью, значения, определенные разными методами, имеют большой разброс (30–50 % и более), зависят не только от методики его измерения, но и от степени и скорости деформации образца. Уже общепризнанно, что не существует универсального

оптимального способа определения величины ПСЧ, и измеренную величину не следует рассматривать как материальную константу [22, 25, 26]. Естественным продолжением этой мысли было бы рассматривать ПСЧ как материальную функцию в моделях сверхпластического деформирования: функцию от ε , a , T , среднего размера зерна и других параметров структуры материала (и от историй инвариантов тензора напряжений при трехосном нагружении и характеристик процесса нагружения). Аргументы для обоснования такого подхода будут обнаружены ниже.

Для моделирования сверхпластичности используют и разрабатывают множество моделей, как правило, описывающих одноосный случай [16–28, 35, 45, 52, 57–63]. Исторически самая популярная (в силу простоты) модель сверхпластического течения представляет собой гибрид уравнения состояния вязкой жидкости и нелинейно упругой среды: напряжение течения моделируется соотношением (иногда называемым *Fields–Backofen equation*) [18–28, 63, 64]

$$\sigma(t) = K |\dot{\varepsilon}(t)|^M |\varepsilon(t)|^N \operatorname{sgn} \varepsilon(t), \quad K > 0, \quad M \in (0; 1], \quad N \geq 0 \quad (3)$$

(отметим, что эта зависимость — частный случай модели ползучести с упрочнением [65–68]). Для этой модели семейство ДД имеет вид $\sigma(\varepsilon, a) = K \varepsilon^N a^M$, а ПСЧ (2) совпадает с постоянной M (модель (3)) пренебрегает зависимостью M от a и ε). Чаще всего полагают [18–29, 35], что показатель деформационного упрочнения N равен нулю, и пренебрегают зависимостью M от ε , т.е. считают материал степенной вязкой жидкостью. Нередко используют структурные (одномерные) модели, полученные последовательным или параллельным соединением вязких элементов со степенными зависимостями напряжения от СД с произвольными положительными показателями и коэффициентами [16, 19, 25, 26, 59]. Чтобы учесть параметры структуры, в модель вводят зависимость напряжения от среднего размера зерна (например, степенную) и, возможно, иных параметров структуры (задаваемую кинетическим уравнениями) [24–28, 33, 35, 60–63]. Авторы работ [45, 58] рассматривают сверхпластичность как особый вид ползучести. Несмотря на все усилия, удовлетворительное комплексное теоретическое описание сверхпластического деформирования, учитывающее влияние термомеханической истории и контуры эволюции структуры материала и позволяющее (хоть как-то) предсказывать вход в состояние сверхпластичности и выход из него, пока отсутствует.

Одно из основных феноменологических требований к определяющим соотношениям сверхпластичности — способность моделировать наличие локального максимума у функции $m(a)$. Далеко не все модели на это способны. Например, для последовательного соединения элементов со степенной вязкостью ПСЧ (2) — убывающая функция от скорости деформации, а для параллельного соединения — возрастающая, т.е. в обоих случаях максимума у функции $m(a)$ нет [69], а смешанное соединение трех элементов (модель Бэкофена) способно воспроизводить максимум при некоторых наборах материальных параметров [16, 25, 59, 69]. «Формула Смирнова» [19, 27]

$$\sigma = \sigma_s(\sigma_0 + K a^M) / (\sigma_s + K a^M), \quad K, \quad M > 0, \quad \sigma_s > \sigma_0 > 0,$$

позволяет аппроксимировать зависимость напряжения течения от СД функцией с точкой перегиба (т.е. обеспечить «сигмоидальность» этой кривой в логарифмических координатах). Но трактовать ее как ОС материала нельзя:

она не описывает даже ДД, т.к. всегда $\sigma \geq \sigma_0$ и $\sigma = \text{const}$ при $a = \text{const}$; полностью пренебрегает зависимостью σ и m от ε ; совсем не моделирует релаксацию напряжений: при $a = 0$ имеем $\sigma = \sigma_0$ — независимо от уровня деформации, мгновенно, в частности, тождественно равной нулю, ставится в соответствие ненулевое напряжение $\sigma = \sigma_0$. Если $a = 0$ начиная с некоторого момента времени, то с этого же момента сразу $\sigma = \sigma_0$ независимо от установившегося уровня деформации и от всей предыстории, в частности, независимо от первоначальной скорости нарастания деформации и от соответствующего ей по формуле напряжения течения. С таким же успехом для описания сигмоидальной кривой $\lg \sigma - \lg a$ можно использовать, например, функции $y = y_0 + K \arctg A(x - x_0)$ или $y = y_0 + K[(x - x_0)^2 + C]^{1/3}$, имеющие точки перегиба (положив $y = \lg \sigma$, $x = \lg a$ и даже считая все константы функциями от ε).

Покажем, что линейное ОС (1) не только описывает релаксацию, ползучесть, обратную ползучесть, скоростную чувствительность ДД и другие эффекты, свойственные реономным материалам, но вполне способно порождать диаграммы деформирования с выраженными участками течения при практически постоянном напряжении и моделировать существование максимума у ПСЧ.

2. О материальных функциях линейного ОС вязкоупругости и классах моделей. Входные процессы $\sigma(t)$ или $\varepsilon(t)$ в ОС (1) предполагаются кусочно непрерывными и кусочно гладкими при $t \geq 0$. Из положительности и монотонности функций ползучести и релаксации на $(0; \infty)$ следует, что в точке $t = 0$ существуют пределы справа $\Pi(0+) = \inf \Pi(t) \geq 0$ и $R(0+) = \sup R(t) > 0$ ($R(0) = +\infty$, если $R(t)$ не ограничена сверху) и предел $R(+\infty) = \inf R(t) \geq 0$. Если $\Pi(0+) \neq 0$ (модель регулярна), то $R(0+) = 1/\Pi(0) < \infty$ и на линеале *непрерывных* кусочно гладких при $t \geq 0$ функций операторы (1) представимы в виде

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= R(0)\varepsilon(t) + \int_0^t \dot{R}(t-\tau)\varepsilon(\tau)d\tau, \\ \varepsilon(t) &= \Pi(0)\sigma(t) + \int_0^t \dot{\Pi}(t-\tau)\sigma(\tau)d\tau, \quad t \geq 0, \end{aligned} \quad (4)$$

где $y(0) := y(0+)$ — краткое обозначение предела функции $y(t)$ справа в точке $t = 0$.

Операторы (1) взаимно обратны, и потому ФП и ФР связаны зависимостями

$$\int_0^t R(t-\tau)\Pi(\tau)d\tau = t \quad \text{или} \quad \int_0^t \dot{\Pi}(t-\tau)R(\tau)d\tau + \Pi(0)R(t) = 1, \quad t > 0. \quad (5)$$

Зная ФР, можно найти ФП из (5), и наоборот. Поэтому одномерное ОС (1) содержит лишь одну материальную функцию.

Свойства семейств основных теоретических кривых (диаграмм деформирования при постоянных скоростях деформации или нагружения, кривых ползучести при ступенчатом нагружении, кривых ползучести и релаксации с произвольной начальной стадией нагружения и др.), порождаемых ОС (1)

с произвольной ФР, его способности описывать те или иные эффекты, наблюдаемые в квазистатических испытаниях, сферы влияния материальных функций, границы и индикаторы его области применимости и методики идентификации проанализированы в цикле работ [1–5] и др. Анализ, в частности, показал, что среди моделей, задаваемых ОС (1) с различными ФР и ФП, необходимо выделять как минимум три основных класса, поскольку качественные свойства базовых теоретических кривых моделей этих классов в окрестности точки $t = 0$ (а также особенности постановки и решения краевых задач) заметно отличаются.

1. Регулярные модели (РеМ) — те, у которых ФР непрерывна справа в точке $t = 0$ (на всем луче $[0; \infty)$), или $\Pi(0) \neq 0$. Тогда мгновенный модуль $E = R(0) = 1/\Pi(0)$ диаграмм деформирования с постоянной скоростью конечен, $\dot{\Pi}(0)/\Pi(0) = -\dot{R}(0)/R(0)$ [2], а ОС (1) и первое уравнение (5) сводятся к уравнениям Вольтерры второго рода (4) и (5).
2. Сингулярные модели (СиМ) — модели с ФР, которая содержит слагаемое $\eta\delta(t)$, $\eta > 0$; тогда $\Pi(0) = 0$ и $\dot{\Pi}(0) = \eta^{-1}$. ФР $R = \eta\delta(t)$ задает ньютоновскую жидкость с ОС $\sigma = \eta\dot{\varepsilon}$ и входит слагаемым в ФР ползучести реологических моделей из линейных пружин и демпферов.
3. Модели с неограниченной ФР, не содержащей слагаемого $\eta\delta(t)$, но имеющей интегрируемую особенность в точке $t = 0$, в частности модель Скотт—Блэра с ФР

$$R(t) = At^{-\alpha}, \quad \alpha \in (0; 1) \quad (6)$$

(ее можно задать оператором дробного дифференцирования $\sigma = \eta D^\alpha \varepsilon$ [6–12], и потому ее называют «фрактальным элементом»: the Scott–Blair model, fractional element, fractional dashpot, spring-pot) и многие другие фрактальные модели [6–12]. Они тоже не регулярны и $\Pi(0) = 0$. В случае $\Pi(0) = 0$ (4) и (5) — уравнения Вольтерры первого рода, что приводит к некорректным задачам, особенностям в нуле у КР, бесконечности мгновенного модуля, отсутствию мгновенной диаграммы деформирования и т.п. [1–5].

Ниже (ш. 4–7) будет показано, что и свойства ПСЧ этих трех классов моделей различны.

Все структурные реологические модели из линейных пружин и демпферов описываются ОС (1). Можно доказать, что для любого n множество неприводимых n -звенных моделей распадается ровно на два класса эквивалентности (модели класса задаются одним и тем же семейством ФП с одинаковыми диапазонами параметров): регулярные и сингулярные (РеМ- n и СиМ- n). В частности, эквивалентны модель Пойнтинга—Томсона и модель Кельвина (две модели из двух пружин и одного вязкого элемента).

3. Общие свойства диаграмм деформирования, порождаемых ОС (1). Для процесса деформирования $\varepsilon = at$ (с постоянной скоростью) определяющее соотношение (1) принимает вид

$$\sigma(t) = atP(t), \quad \text{где} \quad P(t) := t^{-1} \int_0^t R(\tau) d\tau, \quad t > 0. \quad (7)$$

$P(t)$ — осреднение ФР (оно удобнее первообразной для исследования ДД, т.к. через него выражается секущий модуль, а его свойства гораздо ближе к свойствам функции $R(t)$). В [1] доказаны следующие свойства $P(t)$ (они будут полезны при анализе свойств ДД и ПСЧ).

ЛЕММА 1. Пусть $R(t)$ — положительная непрерывная убывающая функция. Тогда $P(t)$, $t > 0$ — гладкая убывающая функция, обладающая следующими свойствами:

- 1) $P(t) > 1/\Pi(t) > R(t)$ при $t > 0$;
- 2) $\dot{P}(t) = t^{-1}(R(t) - P(t))$;
- 3) $P(+\infty) = R(+\infty)$;
- 4) для регулярной ФР $P(0+) = R(0+)$;
- 5) если $R(t)$ дифференцируема, то $\dot{P}(t) = o(t^{-1})$ при $t \rightarrow \infty$, а функция $tP(t)$ возрастает и выпукла вверх;
- 6) если $\dot{R}(0+) < \infty$, то $\dot{P}(0+) = \dot{R}(0+)/2$.

Исключив из (7) параметр $t = \varepsilon/a$, получим семейство ДД в явной форме [1]:

$$\sigma(\varepsilon, a) = P(\varepsilon/a)\varepsilon. \quad (8)$$

Секущий и касательный модули ДД (8) выражаются формулами

$$\sigma(\varepsilon, a)/\varepsilon = P(\varepsilon/a), \quad \sigma'_\varepsilon(\varepsilon, a) = R(\varepsilon/a). \quad (9)$$

При $\varepsilon \rightarrow 0+$ оба модуля (9) стремятся к пределу $E := \sigma'(0) = R(0) = P(0)$ (если модель регулярна, т.е. $R \in C[0; \infty)$, а если нет, то $E = \infty$), а при $\varepsilon \rightarrow \infty$ — к пределу $r := R(\infty) = P(\infty) \geq 0$; E и r — мгновенный и длительный модули (модули сдвига, объемные модули или модули Юнга — в зависимости от физического смысла σ и ε).

В [1] доказаны следующие общие свойства ДД (8) (для любой допустимой ФР).

ТЕОРЕМА 1. Пусть $R(t)$ — положительная непрерывная убывающая и выпуклая вниз функция при $t > 0$. Тогда ДД (8) обладает следующими свойствами:

- 1) при любом $a > 0$ ДД $\sigma(\varepsilon)$ монотонна и выпукла вверх на луче $\varepsilon > 0$;
- 2) семейство ДД (8) возрастает по a , т.е. ОС (1) описывает только положительную скоростную чувствительность;
- 3) секущий и касательный модули (9) являются функциями только одной переменной ε/a , а не двух независимых аргументов;
- 4) мгновенный и длительный модули E и r не зависят от скорости деформации a ;
- 5) при любом $a > 0$ справедлива оценка $r\varepsilon < \sigma(\varepsilon, a) < E\varepsilon$ (правое неравенство содержательно при $E < \infty$, т.е. в случае $R \in C[0; \infty)$);
- 6) при $a \rightarrow 0$ семейство ДД (8) всегда сходится (сверху) к прямой $\sigma = r\varepsilon$ (равновесной ДД) равномерно на любом отрезке полуоси $\varepsilon > 0$;
- 7) при $a \rightarrow +\infty$ семейство ДД (8) любой регулярной модели сходится (снизу) к прямой $\sigma = E\varepsilon$ (мгновенной ДД) равномерно на любом отрезке оси ε ;
- 8) если модель не регулярна (т.е. $R \notin C[0; \infty)$), то $E = \infty$, касательная к любой ДД в нуле вертикальна, а семейство ДД $\varepsilon(\sigma, a)$ сходится при $a \rightarrow \infty$ к прямой $\varepsilon = 0$;

9) при $\varepsilon \rightarrow \infty$ $\sigma/\varepsilon \rightarrow r$, и ДД (8) обладает асимптотой лишь тогда, когда сходится интеграл $I := \int_0^\infty (R(\tau) - r) d\tau$; тогда каждая ДД (8) имеет асимптоту $\sigma = r\varepsilon + Ia$, $I > 0$, и $\sigma < r\varepsilon + Ia$.

Отсутствие любого из обнаруженных свойств у ДД материала — достаточный признак неприменимости ОС (1) к его моделированию. В частности, линейное ОС (1) не способно моделировать материалы с отрицательной скоростной чувствительностью, с падающей ДД, с выпуклыми вниз или имеющими точки перегиба ДД и те, у которых достоверно установлена зависимость мгновенного или длительного модуля ДД от СД. А свойство 3 теоремы 1 удобно для оценки (не)применимости ОС (1) посредством проверки по двум ДД материала с разными СД совпадения величин модулей (7) (с заданным допуском) в представительном наборе пар точек с одинаковыми значениями отношения ε/a .

ПРИМЕР. Рассмотрим трехпараметрическое семейство ФР

$$R(t) = (E - r)e^{-\mu t} + r, \quad E > r \geq 0, \quad \mu > 0. \quad (10)$$

ФР (10) при $r > 0$ порождает трехзвенную регулярную модель Кельвина—Пойнтинга (РеМ-3) с двумя пружинами, при $r = 0$ (10) вырождается в модель Максвелла (РеМ-2), а при $E = r \neq 0$ — в упругий элемент. Осреднения ФР (10) и ДД (8) имеют вид

$$P(t) = (E - r)\mu^{-1}t^{-1}(1 - e^{-\mu t}) + r, \quad (11)$$

$$\sigma(\varepsilon, a) = (E - r)\mu^{-1}a(1 - e^{-\mu\varepsilon/a}) + r\varepsilon. \quad (12)$$

При любом a ДД (12) обладает асимптотой $\sigma = r\varepsilon + Ia$, $I = (E - r)/\mu$.

Для модели Фойгта (СиМ-2) $R = \eta\delta(t) + rh(t)$, $P(t) = r + \eta t^{-1}$, и ДД (8) имеют вид

$$\sigma(\varepsilon, a) = r\varepsilon + \eta a. \quad (13)$$

Все ДД модели Фойгта прямолинейны и параллельны друг другу, $\sigma(0, a) = \eta a$ (вертикальный начальный участок характерен для ДД всех сингулярных моделей). ДД модели Фойгта напоминают формой ДД жесткопластического тела с линейным упрочнением, но пороговое напряжение $\sigma(0)$ зависит от СД. При $a \rightarrow \infty$ семейство ДД (13) сходится к вертикальному лучу $\varepsilon = 0$, а при $a \rightarrow 0$ — к прямой $\sigma = r\varepsilon$ (штрих-пунктирная линия 0 на рис. 3).

На рис. 3 приведены ДД (12) модели Кельвина (РеМ-3) с $r = 100$, $E = \eta = 1000$, $\mu = 1$ (кривые 1–5) и Максвелла (с $r = 0$ — синие штриховые ДД 1'–5') для пяти скоростей $a = 0.0001; 0.001; 0.002; 0.003; 0.010$. При $a \rightarrow \infty$ оба семейства ДД сходятся к прямой $\sigma = E\varepsilon$ (штрих-пунктирная линия с символом ∞). При $a \rightarrow 0$ семейство ДД РеМ-3 сходится к прямой $\sigma = r\varepsilon$ (штрих-пунктирная линия 0), а ДД модели Максвелла — к прямой $\sigma = 0$. Красные штриховые прямые 2''–4'' — ДД модели Фойгта (13) с $r = 100$, $\eta = 1000$ при $a = 0.001; 0.002; 0.003$, они совпадают с асимптотами ДД 2–4. Асимптоты ДД модели Максвелла горизонтальны и совпадают с ДД вязкого элемента (штриховые прямые — для $a = 0.001; 0.002; 0.003$): для линейно вязкой жидкости $R = \eta\delta(t)$, $P = \eta t^{-1}$ и $\sigma(\varepsilon, a) = \eta a$.

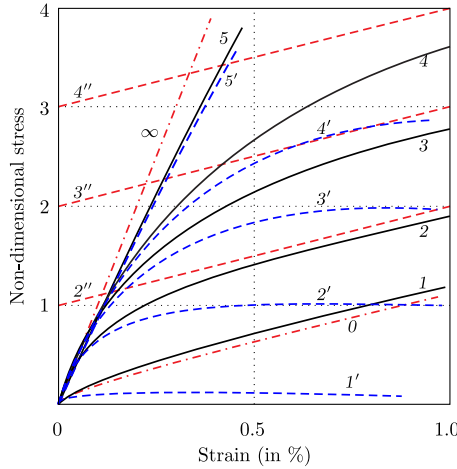


Рис. 3. Диаграммы деформирования (12) моделей Кельвина (10), Максвелла и Фойгта при разных скоростях деформации

[Figure 3 (color online). Stress-strain curves (12) generated by the standard linear solid model (10) (ReM-3) with $E = \eta = 1000$, $r = 100$, $\mu = 1$ and by the Maxwell model ($r = 0$) at strain rates $a = 0.0001$; 0.001 ; 0.002 ; 0.003 ; 0.010 (black curves 1–5 and blue dashed curves 1'–5' with horizontal asymptotes). Dot-dashed curves are the limit curves for $a \rightarrow \infty$ and $a \rightarrow 0$. Red dashed lines 2''–4'' are stress-strain curves (13) generated by the Voigt model (SiM-2) with $r = 100$, $\eta = 1000$ at strain rates $a = 0.001$; 0.002 ; 0.003 (they coincide with asymptotes of curves 2''–4'')]

4. Функция скорости чувствительности линейного ОС и ее свойства. Вычислим ПСЧ (2) по ДД (8), используя формулу п. 2 леммы 1 $P'(x) = x^{-1}(R(x) - P(x))$:

$$m(a, \varepsilon) = -\sigma^{-1} a(\varepsilon/a)^2 P'(\varepsilon/a) = \varepsilon \sigma^{-1} (P(\varepsilon/a) - R(\varepsilon/a)),$$

т.к. $\sigma/\varepsilon = P(\varepsilon/a)$, отсюда имеем

$$m(x) = 1 - R(x)/P(x), \quad x := \varepsilon/a > 0. \tag{14}$$

Итак, ПСЧ — непрерывная функция, зависящая от одного аргумента $x := \varepsilon/a$ (линии уровня $m(a, \varepsilon)$ — лучи $\varepsilon = xa$, $a > 0$). Будем называть функцию $m(x)$ (14) функцией скорости чувствительности (ФСЧ), а ее график — кривой скорости чувствительности (КСЧ). Так как оператор осреднения (7), отображающий $R(x)$ в $P(x)$, линеен, то при умножении $R(x)$ на любое число $\lambda > 0$ ФСЧ (14) не меняется. Для параллельного соединения любого количества произвольных моделей $R = \sum R_i$, $P = \sum P_i$, и КСЧ (14) выражается формулой

$$m(x) = 1 - R(x)/P(x) = 1 - \sum R_i / \sum P_i.$$

Так как по лемме 1 имеем неравенство $P(x) > R(x) > 0$ при $x > 0$, из (14) следует *общая оценка* $0 < m(x) < 1$, справедливая для любой ФР. Для вырожденных моделей реализуются предельные случаи:

- для упругого элемента $R(t) = E = \text{const}$, $P(x) = E$ и $m(x) \equiv 0$;
- для ньютоновской жидкости — $R = \eta \delta(t)$, $P(t) = \eta t^{-1}$, $\sigma(\varepsilon, a) = \eta a$ и $m(x) \equiv 1$ при $x > 0$.

Таким образом, линейное ОС (1) описывает только псевдопластические среды и не может моделировать дилатантные среды (у которых кажущаяся вязкость $v := \sigma/\dot{\varepsilon}$ — возрастающая функция СД). Из (8) следует, что для ОС (1) $v = \sigma/a = P(\varepsilon/a)\varepsilon/a = xP(x)$ — убывающая функция a при любом фиксированном ε (так как согласно лемме 1 функция $xP(x)$ возрастает, $v'(a) = -\varepsilon a^{-2}R(\varepsilon/a) < 0$), т.е. среда относится к классу псевдопластических, и $v(a) \rightarrow 0$ при $a \rightarrow \infty$, если ФР несингулярна (если же ФР содержит слагаемое $\eta\delta(t)$, то $v(a) \rightarrow \eta$).

Предел ФСЧ (14) при $x \rightarrow 0$ (т.е. при $\varepsilon \rightarrow 0$ или $a \rightarrow \infty$) зависит от класса, к которому принадлежит модель (см. п. 2). Если ФР непрерывна справа в точке $t = 0$ (модель регулярна), то при $x \rightarrow 0$ имеем $m \rightarrow 0$, поскольку $P(0+) = R(0+)$ по лемме 1. Для всех сингулярных моделей $R(0+) < \infty$ и $P(t) = \eta t^{-1}$, и потому $m(0+) = 1$. Если $R(t) \sim x^{-\alpha}$ при $t \rightarrow 0$, $\alpha \in (0; 1)$ (в частности, для фрактальных моделей Фойгта (25) и их параллельных соединений — см. п. 6), то $P(t) \sim (1 - \alpha)^{-1}t^{-\alpha}$ и по (14) $m(0+) = \alpha$.

Предел ФСЧ (14) при $x \rightarrow \infty$ также может принимать любые значения из отрезка $[0; 1]$. Если $r = R(\infty) > 0$, то $m \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$ (т.е. при $\varepsilon \rightarrow \infty$ или $a \rightarrow 0$), поскольку по лемме 1 $P(\infty) = R(\infty) := r$ и $R(x)/P(x) \rightarrow 1$. В случае $r = 0$ за неопределенностью $0/0$ может скрываться любой предел (из отрезка $[0; 1]$). Если $R(t) \sim t^{-p}$ при $t \rightarrow \infty$, $p > 0$, то по (14) $m(\infty) = \min\{p, 1\}$ (в частности, для всех параллельных соединений фрактальных элементов (6) и их сдвигов вдоль оси времени).

Если $R(t) = O(t^{-(1+h)})$ при $t \rightarrow \infty$, $h > 0$, то $m(\infty) = 1$, так как по (7) $P(t) \sim It^{-1}$, где $I := \int_0^\infty R(\tau)d\tau$ (интеграл сходится по признаку сравнения) и $R/P = O(t^{-h})$. В частности, для модели Максвелла ($R = Ee^{-\mu t}$) имеем $P = E\mu^{-1}t^{-1}(1 - e^{-\mu t})$, $R(x)/P(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$, и потому $m \rightarrow 1$. Для всех параллельных соединений моделей Максвелла с разными временами релаксации (РеМ-2n) тоже $m(\infty) = 1$.

Если $R(0+) < \infty$ (т.е. модель регулярна) и $R(\infty) \neq 0$, то положительная непрерывная функция $m(x)$ стремится к нулю на концах интервала $(0; +\infty)$, следовательно, она имеет хотя бы один локальный максимум (в той точке $x = \hat{x}$, в которой достигает своей точной верхней грани $\hat{m} := m(\hat{x})$). При фиксированной СД a функция $m(\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, имеет максимум в точке $\hat{\varepsilon} = a\hat{x}$, а при фиксированном ε функция $m(a)$, $a > 0$, имеет максимум в точке $\hat{a} = \varepsilon/\hat{x}$. Чем больше ε , тем больше \hat{a} и тем шире диапазон СД, в котором значения $m(a)$ близки к максимальной величине ПСЧ $\hat{m} = m(\hat{x})$. Таким образом, физически линейное ОС (1) способно моделировать наличие максимума ПСЧ и сигмоидальность зависимости $\lg \sigma - \lg a$, столь важные для сверхпластичности. Этой способностью ОС (1) выгодно отличается от модели (3) (традиционно используемой для описания сверхпластичности в течение полувека) и всех параллельных соединений моделей вида (3), которые не могут описывать ни наличие максимума ПСЧ [22], ни релаксацию напряжений. Условия наличия максимума у зависимостей $m(x)$ и $m(a)$ выполняются даже для классической модели Пойнтинга—Томсона, получаемой параллельным присоединением упругого элемента к модели Максвелла, и для эквивалентной ей модели Кельвина, т.е. для всех РеМ-3 (см. п. 2). Обнаруженный факт выявляет важность учета упругих деформаций (которыми традиционно пренебрегают в моделировании сверхпластичности) для описания максимума ПСЧ.

Для определения \hat{x} и \hat{m} надо найти критические точки $m(x)$:

$$m'(x) = -[P(x)]^{-2}(R'(x)P(x) - R(x)P'(x)),$$

$m'(x) = 0$ равносильно

$$R'(x)/R(x) = P'(x)/P(x), \quad \text{или} \quad xR'(x)/R(x) = R(x)/P(x) - 1,$$

поскольку $P'(x) = (R(x) - P(x))/x$ (лемма 1). Для конкретной ФР решения этого уравнения — критические точки $m(x)$, разбивающие ось на интервалы монотонности $m(x)$. Из общих качественных свойств ФР не следуют ограничения на количество точек экстремума у КСЧ. Анализ показывает (см. ниже), что КСЧ могут иметь несколько точек экстремума (например, модель стандартного тела, т.е. параллельное соединение двух моделей Максвелла с разными временами релаксации).

Каждой конкретной модели (1) (каждой ФР $R(x)$) соответствует по (14) своя ФСЧ $m(x)$, характеризующая ее скоростную чувствительность, и, соответственно, значения \hat{x} и \hat{m} (если есть максимум и другие характерные точки). ФСЧ можно рассматривать как материальную функцию, поскольку по заданной ФСЧ можно однозначно восстановить ФР и таким образом построить модель с заданной формой КСЧ, зарегистрированной в испытаниях материала. В самом деле, по заданной непрерывной и кусочно-гладкой функции $m(x)$, такой, что $0 < m < 1$ при $x > 0$, можно восстановить ФР $R(x)$ с точностью до положительного множителя (т.к. по (14)) всем ФР $\lambda R(t)$, $\lambda > 0$, соответствует одна и та же ФСЧ $m(x)$); для его определения надо задать еще начальное условие $R(t_0) = R_0 > 0$. Из (14) следуют интегральное и дифференциальное уравнения для $R(x)$: $\int_0^x R(t)dt = x(1 - m(x))^{-1}R(x)$, или

$$R' = f(x)R, \quad f(x) := -x^{-1}m(x) - m'(x)(1 - m(x))^{-1}. \quad (15)$$

Очевидно, $f(x)$ кусочно непрерывна, и множество ее точек разрыва совпадает с множеством точек разрыва $m'(x)$ на $(0, \infty)$ (как правило, пустым), а наличие разрывов у $m'(x)$ равносильно наличию разрывов у $\dot{R}(t)$ в силу (15) (такие ФР иногда используют, склеивая задаваемые представления для ФР, в частности, полагая $R(t) = \text{const}$ при больших t).

Решение дифференциального уравнения (15) с начальным условием $R(t_0) = R_0 > 0$ имеет следующий вид: $R(t) = R_0 \exp\left(\int_{t_0}^t f(x)dx\right)$. Обозначив $y(x) := x^{-1}m(x)$, после преобразований получим

$$R(t) = R_0 \frac{1 - m(t)}{1 - m(t_0)} \exp(-Y(t)), \quad Y(t) := \int_{t_0}^t y(x)dx, \quad (16)$$

$$y := x^{-1}m(x), \quad t \geq t_0 > 0.$$

Очевидно, функция $R(t)$ непрерывна, и $R(t) > 0$, поскольку $m(t) < 1$. Точки разрыва $\dot{R}(t)$ совпадают с точками разрыва $m'(x)$. Так как $0 < m < 1$, вы-

полняется неравенство $0 < y < x^{-1}$ и $Y(t)$ возрастает; $0 < Y(t) < \ln(t/t_0)$ при $t > t_0$, $t_0/t < \exp(-Y(t)) < 1$, и потому верна оценка для ФР (16):

$$t_0 t^{-1} \frac{1 - m(t)}{1 - m(t_0)} < \frac{R(t)}{R(t_0)} < \frac{1 - m(t)}{1 - m(t_0)}, \quad t > t_0 > 0. \quad (17)$$

Предел ФР (16) при $t \rightarrow \infty$ зависит от поведения интеграла $Y(t)$. Если $Y(\infty) < \infty$ (интеграл сходится), то $m(\infty) = 0$ (в предположении, что предел $m(\infty)$ существует) и $R(\infty) = R_0(1 - m(t_0))^{-1} \exp(-Y(\infty)) > 0$. Если же интеграл $Y(t)$ расходится, то $\exp(-Y(t)) \rightarrow 0$ и $R(\infty) = 0$. Для этого достаточно, чтобы $m(\infty) > 0$.

Для того чтобы ФР (16), восстановленная по ФСЧ, удовлетворяла необходимым ограничениям на ФР в ОС (1) (была убывающей и выпуклой вниз), надо наложить дополнительные ограничения на $m(x)$. Из дифференциального уравнения (15) следует, что критерий (нестрогого) убывания $R(x)$ при $x > 0$ — выполнение неравенства $f(x) \leq 0$, т.е. $-x^{-1}m(x) \leq m'(x)(1 - m(x))^{-1}$, или

$$m'(x) \geq -x^{-1}m(x)(1 - m(x)), \quad x > 0. \quad (18)$$

Критерий выпуклости вниз ФР (16) найдем из (15):

$$R'' = f'R + fR' = (f' + f^2)R,$$

где $R > 0$, поэтому $R'' > 0$ равносильно условию $f' + f^2 > 0$ для всех $x > 0$, т.е. (см. подробнее [71])

$$x^2 m'' < m(1 - m^2) + xm'(3m - 1). \quad (19)$$

Отметим в заключение, что ФСЧ легко определяется не только по заданной ФР, но и по одной ДД $\sigma(\varepsilon, a)$: ведь в силу (14) и (8)

$$m(x) = 1 - E_T(x)/E_S(x), \quad (20)$$

где $E_T := \partial\sigma/\partial\varepsilon = R(\varepsilon/a)$ и $E_S := \sigma(\varepsilon, a)/\varepsilon = P(\varepsilon/a)$ — касательный и секущий модули, вычисляемые по одной ДД $\sigma(\varepsilon, a)$ с произвольной скоростью (или одной экспериментальной ДД материала в случае адекватности линейного ОС). Это свойство можно использовать и как индикатор (не)применимости линейного ОС (1) по данным испытаний материала, так и для прямого определения ФСЧ по ним.

5. Кривые скоростной чувствительности моделей Кельвина, Максвелла и Фойгта. Для модели Кельвина (РеМ-3) с трехпараметрической ФР (10) ФСЧ задается (в силу (14) и (11)) уравнением

$$m(x) = 1 - \frac{(E - r)e^{-\mu x} + r}{(E - r)\mu^{-1}x^{-1}(1 - e^{-\mu x}) + r} = 1 - \frac{(1 - \bar{r})e^{-s} + \bar{r}}{(1 - \bar{r})(1 - e^{-s})s^{-1} + \bar{r}} \quad (21)$$

($s := \mu x$ и $\bar{r} := r/E$ — безразмерные аргумент и параметр). При $\bar{r} = 0$ получается модель Максвелла, ее ФСЧ возрастает, $m(0+) = 0$, $m(\infty) = 1$. Для РеМ-3 $\bar{r} > 0$ и, поскольку $R(0+) = E < \infty$ и $R(\infty) = r \neq 0$, то $m(0+) = 0$, $m(\infty) = 0$

и ФСЧ (19)) имеет хотя бы один максимум. Можно доказать, что ФСЧ (21) имеет единственный экстремум. В самом деле (выкладки опущены),

$$m'(s) = (1 - \bar{r})e^{-s} \frac{\bar{r}s^2 + s + 2\bar{r} - 1 - \bar{r}e^s + (1 - \bar{r})e^{-s}}{[(1 - \bar{r})(1 - e^{-s}) + \bar{r}s]^2};$$

при $\bar{r} > 0$ выражение $m'(s) = 0$ равносильно $\bar{r}(s^2 + 2 - e^s - e^{-s}) = 1 - s - e^{-s}$, или $y(s) = \bar{r}$, где

$$y(s) := (1 - s - e^{-s})/(s^2 + 2 - e^s - e^{-s}), \quad s > 0, \quad \bar{r} \in (0; 1).$$

Для любого $\bar{r} \in (0; 1)$ решение уравнения $y(s) = \bar{r}$ единственно, так как $y(0+) = +\infty$, $y(+\infty) := +0$ и функция $y(s)$ монотонно убывает (доказывается исследованием производных $y(s)$). Отметим также, что ПСЧ (21) убывает с ростом \bar{r} при любом s , поскольку $\partial m / \partial \bar{r} = -e^{-s} [(1 - \bar{r})(1 - e^{-s})s^{-1} + \bar{r}]^{-2} < 0$.

На рис. 4 приведены КСЧ $m(x)$ шести моделей вида (10) с $\mu = 1$ и $\bar{r} = 0; 0.1; 0.2; 0.3; 0.4; 0.5$ (линии 0–5; кривая 0 с $r = 0$ соответствует модели Максвелла, остальные – РеМ-3). Красные штриховые линии 6–8 – ФСЧ $m = 1/(1 + \lambda x)$ трех моделей Фойгта с $\lambda := r/\eta = 0.01; 0.1; 0.5$. У модели Максвелла $m(x)$ возрастает при всех $x > 0$, а для моделей с $r \neq 0$ $m(x)$ имеет точку максимума. Чем больше \bar{r} , тем меньше $m(x)$ на всей полуоси. Очевидно, модель Максвелла демонстрирует наивысший ПСЧ при всех x , стабильно близкий к единице вне некоторой окрестности точки $x = 0$. Единственный ее «конкурент» – модель Фойгта с большим временем ретардации (кривая 6). Штрих-пунктирные кривые 10, 11 – КСЧ при увеличении времени релаксации (вязкости) в 10 раз, т.е. при $1/\mu = 10$ для $\bar{r} = 0$ и $\bar{r} = 1$; увеличение времени релаксации $1/\mu$ вызывает растяжение КСЧ (21) вдоль оси x и делает КСЧ более пологой.

На рис. 5 приведены зависимости ПСЧ от деформации $m(\varepsilon)$ при фиксированных $a = 0.01; 0.03; 0.05; 0.10$ и от скорости $m(a)$ при $\varepsilon = 0.01; 0.05; 0.1; 0.2; 0.3$ для двух моделей: РеМ-3 с $\bar{r} = 0.1$ (кривые 1–4 и 5–9) и Максвелла с $\bar{r} = 0$ (синие кривые 11–14 и 15–19). Стрелками указаны направления смещения кривых с ростом параметров a и ε . Для модели Максвелла $m(\varepsilon)$ возрастает при всех $\varepsilon > 0$, а $m(a)$ убывает при всех $a > 0$. У модели РеМ-3 $m(\varepsilon)$ и $m(a)$ имеют точку максимума, максимальная величина ПСЧ \hat{m} для конкретной модели не зависит ни от a , ни от ε . У модели Фойгта $m(\varepsilon)$ убывает (красные штриховые кривые 21 и 24 – для модели с $r/\eta = 0.1$ при $a = 0.01$ и $a = 0.1$), а $m(a)$ возрастает при всех $a > 0$ (красные штриховые кривые 25 и 29 – при $\varepsilon = 0.01$ и $\varepsilon = 0.3$). Голубая штрих-пунктирная кривая – $m(\varepsilon)$ РеМ-3 с $\bar{r} = 0.3$ при $a = 0.10$.

6. Функции скоростной чувствительности сингулярных и фрактальных моделей. Для сингулярных или неограниченных ФР многие свойства ФСЧ, доказанные для регулярных ФР (пп. 4, 5), могут нарушаться. Свойства ФСЧ сингулярных моделей «ортогональны» (двойственны) свойствам ФСЧ регулярных. В частности, у всех СиМ $m(0+) = 1$ (а не $m(0+) = 0$, как у РеМ), поскольку наличие слагаемого $\eta\delta(t)$ в ФР влечет наличие слагаемого ηt^{-1} в представлении P и свойство $R(x)/P(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow 0$. Поэтому в окрестности точки $x = 0$ ФСЧ СиМ убывает, а не возрастает, как у РеМ.

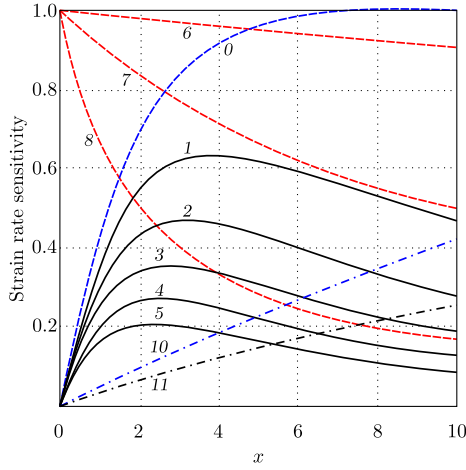


Рис. 4. Кривые скоростной чувствительности $m(x)$ для пяти моделей Кельвина (10) (ReM-3) с $r/E = 0.1; 0.2; 0.3; 0.4; 0.5$, модели Максвелла (с $r = 0$) и трех моделей Фойгта с $r/\eta = 0.01; 0.1; 0.5$

[Figure 4. Strain rate sensitivity curves $m(x)$ generated by five standard linear solid models (10) (ReM-3) with $\mu = 1$ and $r/E = 0.1; 0.2; 0.3; 0.4; 0.5$ (curves 1–5), by the Maxwell model ($r = 0$, the blue curve 0) and by three Voigt models with $r/\eta = 0.01; 0.1; 0.5$ (red curves 6–8). Curves 10, 11 are strain rate sensitivity curves $m(x)$ generated by the models (10) with $1/\mu = 10$ (relaxation time ten times greater) and $\bar{r} = 0$ or $\bar{r} = 1$. Equalities $m(0) = 1$ and $m(\infty) = 0$ hold for all curves $m(x)$ since the model (10) is regular and $R(\infty) \neq 0$]

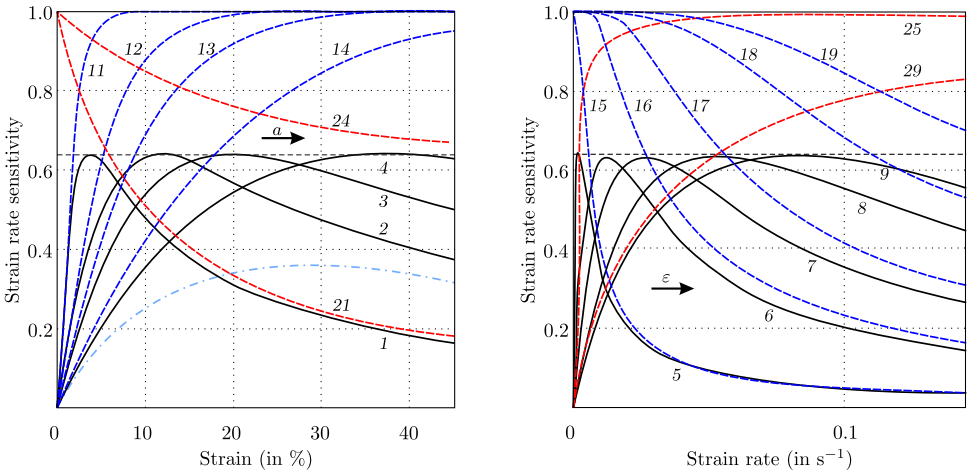


Рис. 5. Зависимости ПСЧ от деформации и скорости деформации для моделей Кельвина (10) с $\bar{r} = 0.1$ и Максвелла ($r = 0$): слева — $m(\varepsilon)$ при $a = 0.01; 0.03; 0.05; 0.10$; справа — $m(a)$ при $\varepsilon = 0.01; 0.05; 0.1; 0.2; 0.3$

[Figure 5. Strain rate sensitivity index $m(a, \varepsilon)$ as a function of strain or strain rate for the standard linear solid model (10) with $\mu = 1$ and $r/E = 0.1$ (curves 1–4 and 5–9) and for the Maxwell model with $\mu = 1$ and $r = 0$ (blue curves 11–14 and 15–19): left — graphs $m(\varepsilon)$ for fixed $a = 0.01; 0.03; 0.05; 0.10$; right — graphs $m(a)$ for fixed $\varepsilon = 0.01; 0.05; 0.1; 0.2; 0.3$. Red dashed lines 21, 24, 25, and 29 are graphs $m(\varepsilon)$ and $m(a)$ for the Voigt model with $r/\eta = 0.1$ for fixed rate $a = 0.01$ or $a = 0.1$ and for fixed strain $\varepsilon = 0.01$ or $\varepsilon = 0.3$. The blue curve is the graph $m(\varepsilon)$ for the model (10) with $r/E = 0.3$ and given $a = 0.1$]

Для модели Фойгта (Сим-2) $R = \eta\delta(t) + rh(t)$, $P = r + \eta t^{-1}$, и ДД (8) и ФСЧ (12) имеют вид

$$\sigma(\varepsilon, a) = r\varepsilon + \eta a, \quad m(x) = (1 + \lambda x)^{-1}, \quad x := \varepsilon/a > 0, \quad \lambda := r/\eta > 0 \quad (22)$$

ФСЧ (22) зависит не от двух параметров, а только от времени ретардации $\tau = 1/\lambda$. Очевидно, $m(x)$ убывает при всех $x \geq 0$, причем $m(0) = 1$ и $m(\infty) = 0$ (КСЧ 6–8 на рис. 4). Зависимость $m(a)$ от СД возрастает при всех $a > 0$, $m \rightarrow 0$ при $a \rightarrow 0$ и $m \rightarrow 1$ при $a \rightarrow \infty$ (кривые 25 и 29 на рис. 5 справа). При $\lambda \rightarrow 0$ семейство ФСЧ (22) равномерно сходится к $m(x) \equiv 1$ (т.е. к ФСЧ вязкого элемента) на любом отрезке.

Для модели Сим-3 (параллельного соединения модели Максвелла с вязким элементом или его последовательного соединения с моделью Фойгта)

$$\begin{aligned} R &= \eta\delta(t) + Ee^{-\mu t}, \quad E, \mu, \eta > 0; \quad P(t) = \eta t^{-1} + E\mu^{-1}t^{-1}(1 - e^{-\mu t}); \\ \sigma(\varepsilon, a) &= \eta a + E\mu^{-1}a(1 - e^{-\mu\varepsilon/a}); \\ m(x) &= 1 - \frac{\mu x e^{-\mu x}}{\mu\eta E^{-1} + 1 - e^{-\mu x}} = 1 - \frac{\mu x}{(\mu\eta E^{-1} + 1)e^{\mu x} - 1}. \end{aligned} \quad (23)$$

ФСЧ (23) всегда имеет хотя бы одну точку минимума, поскольку $m(0) = 1$ и $m(\infty) = 1$. Свойства ФСЧ Сим-3 (как и Сим-2) кардинально отличаются от свойств ФСЧ регулярных моделей (рис. 4, 5).

На рис. 6 слева приведены КСЧ (23) пяти моделей Сим-3 с $\mu = 1$ и $\eta/E = 0.01; 0.1; 0.5; 1; 10$ (кривые 1–5), КСЧ модели Максвелла с $\eta = 0$ (штриховая голубая кривая 0) и (для сравнения) КСЧ модели РеМ-3 (10) с $r/E = 0.01; 0.1; 0.3; 0.5$ (кривые 11–14). Стрелками указаны направления смещения кривых с ростом η/E и r/E . С ростом η/E КСЧ Сим-3 смещаются вверх, минимум становится менее выраженным, выход на асимптоту $m = 1$ — более быстрым, а при $\eta/E \rightarrow \infty$ семейство КСЧ Сим-3 равномерно сходится к прямой $m = 1$ на луче $x \geq 0$. С ростом r/E КСЧ РеМ-3 смещаются вниз, максимум становится менее выраженным, выход на асимптоту $m = 0$ более быстрым, а при $r/E \rightarrow 1$ семейство КСЧ РеМ-3 равномерно сходится к прямой $m = 0$ на луче $x \geq 0$.

На рис. 6 справа приведены зависимости ПСЧ от скорости $m(a)$ при $\varepsilon = 0.01; 0.05; 0.1; 0.2; 0.3$ для трех моделей: Сим-3 с $\eta/E = 1$ (кривые 1–5), Максвелла (штриховые кривые 1'–5') и РеМ-3 с $r/E = 0.1$ (кривые 11–15). Стрелкой указаны направления смещения кривых с ростом ε . Для модели Максвелла $m(a)$ убывает при всех $a > 0$. У РеМ-3 функции $m(a)$ имеют точку максимума и асимптоту $m = 0$ при $a \rightarrow \infty$. У Сим-3 $m(a)$ имеют точку минимума и асимптоту $m = 1$. Точка экстремума смещается вправо с ростом ε , но максимальная (РеМ-3) или минимальная (Сим-3) величина ПСЧ для конкретной модели не зависит от ε .

У модели Скотт–Блэра (6) $P(t) = Kt^{-\alpha}$, $K := A/(1 - \alpha)$, и ДД (8) и КСЧ (14) имеют вид

$$\sigma(\varepsilon, a) = K\varepsilon(\varepsilon/a)^{-\alpha} = K\varepsilon^{1-\alpha}a^\alpha, \quad m(x) \equiv \alpha, \quad x > 0. \quad (24)$$

ПСЧ фрактального элемента (а также отношение $E_T(\varepsilon, a)/E_S(\varepsilon, a) \equiv 1 - \alpha$) не зависит от a и ε (как и ПСЧ нелинейной модели (3)); можно доказать,

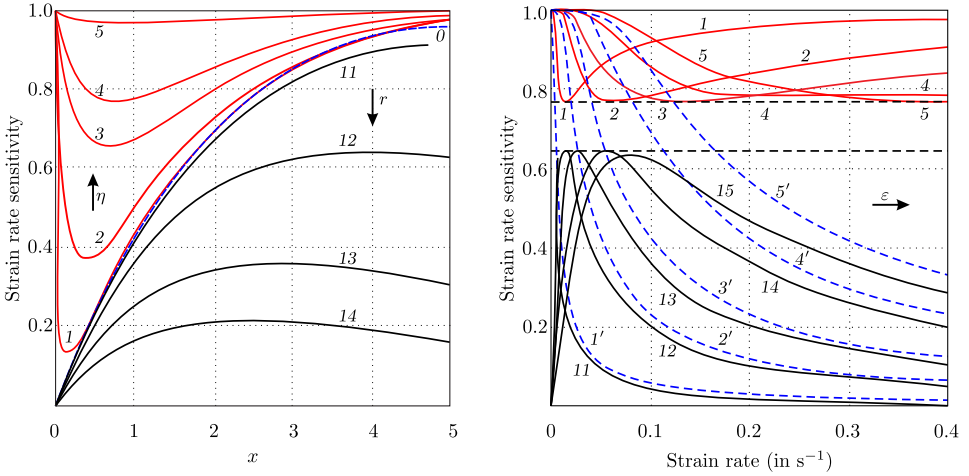


Рис. 6. Слева — КСЧ (23) пяти моделей СиМ-3 с $\mu = 1$ и $\eta/E = 0.01; 0.1; 0.5; 1; 10$ (кривые 1–5), модели Максвелла с $\eta = 0$ (кривая 0) и модели РеМ-3 с $r/E = 0.01; 0.1; 0.3; 0.5$ (кривые 11–14); справа — зависимость $m(a)$ при $\varepsilon = 0.01; 0.05; 0.1; 0.2; 0.3$ для моделей СиМ-3 с $\eta/E = 1$ (кривые 1–5), Максвелла (штриховые кривые 1'–5') и РеМ-3 с $r/E = 0.1$ (кривые 11–15)

[Figure 6. Left — strain rate sensitivity curves $m(x)$ (23) generated by five singular three-parametric models SiM-3 with $\mu = 1$ and $\eta/E = 0.01; 0.1; 0.5; 1; 10$ (red curves 1–5, $m(\infty) = 1$), by the Maxwell model ($\eta = 0$, the blue dashed curve 0) and by the regular three-parametric model (10) with $r/E = 0.01; 0.1; 0.3; 0.5$ (curves 11–14, $m(\infty) = 0$); right — graphs $m(a)$ for fixed $\varepsilon = 0.01; 0.05; 0.1; 0.2; 0.3$ generated by the model SiM-3 with $\eta/E = 1$ (red curves 1–5), by the Maxwell model (blue dashed curves 1'–5') and by the regular model (10) with $r/E = 0.1$ (curves 11–15)]

что среди линейных моделей (1) это свойство присуще только фрактальному элементу. Для ФР (6) линейное ОС (1) совпадает на одномерном пространстве процессов деформирования $\varepsilon = at$ с нелинейной моделью (3) при $N = \alpha$ и $M = 1 - N$ ($N + M$ — степень однородности модели (3)).

Фрактальная модель Фойгта (fractional Kelvin-Voigt model) [6–12] — параллельное соединение упругого элемента с фрактальным элементом Скотт–Блэра (6); эта модель описывается интегральным оператором (1) с неограниченной трехпараметрической ФР вида

$$R(t) = r + At^{-\alpha}, \quad A > 0, \quad r \geq 0, \quad \alpha \in (0; 1), \quad (25)$$

или дифференциальным уравнением с дробной производной $\sigma = r\varepsilon + \eta D^\alpha \varepsilon$, $\eta = A/(1 - \alpha)$. При $\alpha \in (0; 1)$ интеграл (7) для осреднения ФР (25) сходится, $P = r + A(1 - \alpha)^{-1}t^{-\alpha}$ и семейства ДД и ФСЧ модели (25) задаются формулами

$$\begin{aligned} \sigma(\varepsilon, a) &= r\varepsilon + A(1 - \alpha)^{-1}a^\alpha \varepsilon^{1-\alpha}; \\ m(x) &= \frac{A\alpha(1 - \alpha)^{-1}x^{-\alpha}}{r + A(1 - \alpha)^{-1}x^{-\alpha}} = \frac{\alpha}{1 + \bar{r}(1 - \alpha)x^\alpha}, \quad x > 0, \quad \bar{r} := r/A \end{aligned} \quad (26)$$

(при $\varepsilon \rightarrow \infty$ асимптоты у ДД (26) нет, длительный модуль $\sigma'_\varepsilon(\infty, a) = r$). Очевидно, что $m(0) = \alpha$. Если $r > 0$, то $m(x)$ монотонно убывает при всех $x > 0$, $m(x) \sim cx^{-\alpha}$ при $x \rightarrow \infty$ и $m(\infty) = 0$. Если $r = 0$, то $m(x) \equiv \alpha$ — константа. При $\alpha \rightarrow 0+$ семейства ДД и ФСЧ (24) фрактального элемента сходятся

к ДД и ФСЧ упругого элемента с модулем $E = r + A$, а если наложить на параметры ФР связь $A/(1 - \alpha) = \eta$, где $\eta > 0$ — фиксированная постоянная (равная интегралу $R(t)$ по $[0; 1]$), то при $\alpha \rightarrow 1 - 0$ семейства ДД и ФСЧ (24) сходятся к ДД и ФСЧ ньютоновского вязкого элемента с $R = \eta\delta(t)$, $P(t) = \eta/t$ и $m(x) \equiv 1$. Соответственно, семейства ДД и ФСЧ фрактальной модели Фойгта (26) и (27) сходятся к ДД и ФСЧ (22) классической модели Фойгта (с сингулярной ФР).

Для параллельных соединений любого количества фрактальных моделей Фойгта (25) с произвольными тройками параметров $\alpha_i \in (0; 1)$, $A_i > 0$, $r_i \geq 0$, $i = 1, \dots, N$, $N > 1$ (в частности, фрактальных элементов (6) с $r_i = 0$) $R = \Sigma R_i$, $P = \Sigma P_i$, а ФСЧ имеет вид

$$m(x) = \frac{\Sigma(P_i - R_i)}{\Sigma P_i} = \frac{\Sigma A_i \alpha_i (1 - \alpha_i)^{-1} x^{-\alpha_i}}{\Sigma (r_i + A_i (1 - \alpha_i)^{-1} x^{-\alpha_i})} \quad (28)$$

и всегда убывает по x (т.е. возрастает с ростом скорости a при любом фиксированном ε) [70], причем $m(0+) = \alpha$, $\alpha := \max \alpha_i$, и $m(+\infty) = 0$, если $r > 0$, где $r := \Sigma r_i$ и $m(+\infty) = \alpha_0$, $\alpha_0 := \min \alpha_i$, если $r = 0$ (все $r_i = 0$). Убывание ФСЧ (28) следует из формулы для $m'(x)$, приведенной к виду

$$m'(x)S(x)^2 = -r \sum_{i=1}^n A_i \alpha_i^2 (1 - \alpha_i)^{-1} x^{-\alpha_i - 1} - \sum_{i=1}^n \sum_{j>i}^n A_i A_j (\alpha_i - \alpha_j)^2 (1 - \alpha_i)^{-1} (1 - \alpha_j)^{-1} x^{-\alpha_i - \alpha_j - 1},$$

где $S(x)$ — знаменатель дроби (28) (преобразования опущены). Это влечет, в частности, отсутствие максимума у ПСЧ $m(a)$ и точки перегиба у кривых $\lg \sigma - \lg a$ и невозможность моделирования кривых $\lg \sigma - \lg a$ сигмоидальной формы (см. п. 1) с помощью таких линейных моделей с произвольным количеством параметров. Этот результат аналогичен доказанному в статье [69] возрастанию ПСЧ любых параллельных соединений *нелинейных* степенных вязких элементов вида (3) с $N = 0$: ПСЧ параллельного соединения любого числа моделей (3) всегда строго возрастает на полуоси $a > 0$ и потому не имеет точки максимума. Последний результат можно обобщить на параллельные соединения любого числа вязкопластических моделей Гершеля—Балкли $\sigma = \bar{\sigma} + K\dot{\varepsilon}^M$ (и моделей Шведова—Бингама $\sigma = \sigma_0 + K\dot{\varepsilon}$): оказывается, что учет в таких моделях пороговых напряжений $\bar{\sigma}_i > 0$ (роль которых в моделировании сверхпластичности может быть существенной [72]) не нарушает возрастания ПСЧ, а кривая скорости чувствительности $\lg \sigma - \lg a$ не имеет точек перегиба (точнее, выпукла вниз) при произвольных $M \in (0; 1]$, $K > 0$ и $\bar{\sigma}_i \geq 0$. Отметим также, что ПСЧ (14) параллельного соединения (даже лишь двух) моделей Максвелла с разными временами релаксации (РеМ-2n) не обязан быть монотонной функцией и может иметь точку максимума и другие точки экстремума.

7. Кривые скоростной чувствительности четырехзвенных моделей РеМ-4 и СиМ-4. Сопоставление ФСЧ моделей Максвелла и Фойгта (рис. 4) приводит к гипотезе, что их гибриды (параллельное или последовательное соединения) могут обладать высоким ПСЧ (близким к единице) как при малых, так и при больших x и a . Вычислим их ФСЧ (14) и покажем, что они могут иметь более одного экстремума.

Рассмотрим сначала параллельное соединение моделей Максвелла и Фойгта (СиМ-4). При параллельном соединении моделей их ФР складываются:

$$R(t) = \eta\delta(t) + r + Ee^{-\mu t}, \quad \eta, \mu, E, r > 0, \quad (29)$$

их осреднения и ДД (8) — тоже:

$$P = r + \eta t^{-1} + E\mu^{-1}t^{-1}(1 - e^{-\mu t}),$$

$$\sigma(\varepsilon, a) = r\varepsilon + a\eta + aE\mu^{-1}(1 - e^{-\mu\varepsilon/a}).$$

ФР (29) отличается от ФР РеМ-3 (10) лишь слагаемым $\eta\delta(t)$ (осреднение P — слагаемым η/t): СиМ-4 можно получить параллельным соединением РеМ-3 с вязким элементом, и потому ДД СиМ-4 получаются сдвигом на $a\eta$ вдоль оси σ из ДД РеМ-3 (рис. 3) и $\sigma(0, a) = a\eta \neq 0$, как и у ДД модели Фойгта (рис. 3). В силу (14) ФСЧ СиМ-4 имеет вид

$$m(x) = 1 - \frac{rx + E\eta e^{-\mu x}}{rx + \eta + E\mu^{-1}(1 - e^{-\mu x})}, \quad x > 0. \quad (30)$$

Очевидно, $m(0) = 1$ и $m(\infty) = 0$ (как и у модели Фойгта). Однако ФСЧ (30) может не быть монотонной и выпуклой на всем интервале $x > 0$: она может иметь две точки экстремума и две точки перегиба. При $r = 0$ модель (29) вырождается СиМ-3 и $m(\infty) = 1$ в силу (23).

На рис. 7 приведены КСЧ моделей Фойгта (22) ($\lambda = r/\eta$, $1/\lambda$ — время ретардации) с разными значениями $\lambda = 0.001; 0.01; 0.1; 0.3; 0.5; 1; 10$ (штриховые кривые $\theta'-\theta'$, кривая θ' для $\lambda = 0.001$ почти совпадает с прямой $m = 1$) и КСЧ (30) параллельных соединений этих моделей Фойгта и модели Максвелла (29) с $E = 1000$, $\mu = 1$ (кривые $\theta-\theta$). С ростом параметра λ КСЧ опускаются вниз. Любопытно, что каждая кривая $\theta-\theta$ проходит через точку пересечения КСЧ моделей Фойгта и КСЧ модели Максвелла (штрих-пунктирная кривая $11'$) $m = 1 - \mu x(e^{\mu x} - 1)^{-1}$, которые соединяются параллельно. Абсцисса x_* точки пересечения убывает с ростом λ . Как видим, присоединение модели Максвелла уменьшает ПСЧ каждой модели Фойгта при $x \in (0, x_*)$ и увеличивает его на интервале $x > x_*$ (при сохранении свойств $m(0) = 1$ и $m(\infty) = 0$). При $\lambda = 0.001; 0.01; 0.1$ КСЧ имеют *два экстремума*; при увеличении λ они исчезают и КСЧ становится монотонно убывающей (см. кривые 3–6 с $\lambda = 0.3; 0.5; 1; 10$). У КСЧ с $\lambda = 0.3; 0.5$ (кривые 3, 4) еще сохраняются две точки перегиба, у КСЧ с $\lambda = 1; 10$ (кривые 5, 6) их уже нет. Кривая 35 — КСЧ модели РеМ-3 с $\mu = 1$, $r/E = 0.5$ (КСЧ 5 с рис. 4), получающейся соединением модели Максвелла с упругим элементом.

Для последовательного соединения моделей Максвелла и Фойгта («модель стандартного тела») их функции ползучести складываются и модель регулярна (РеМ-4). Она эквивалентна параллельному соединению двух моделей

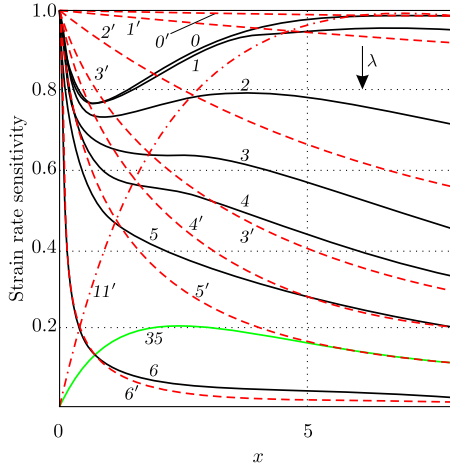


Рис. 7. КСЧ (30) семи моделей СиМ-4 и моделей Фойгта (22) с разными временами релардации $\tau = 1/\lambda = \eta/r$, $\lambda = 0.001; 0.01; 0.1; 0.3; 0.5; 1; 10$

[Figure 7. Strain rate sensitivity curves $m(x)$ (22) generated by seven Voigt models (SiM-2) with $\lambda = 0.001; 0.01; 0.1; 0.3; 0.5; 1; 10$ (red dashed curves $0'-6'$, $\lambda = r/\eta$, $1/\lambda$ is the retardation time) and curves $m(x)$ (30) generated by seven four-parametric singular models SiM-4 (29) with $\mu = 1$, $E = 1000$ and the same values of λ (black curves $0-6$). Every model SiM-4 is equivalent to parallel connection of the Voigt model with the same λ to the Maxwell model $R = E \exp(-\mu t)$ (with $\mu = 1$, $E = 1000$, see the curve $11'$) or to serial connection of two Voigt model and so SiM-4 is characterized by two retardation times. Equalities $m(0) = 1$ and $m(\infty) = 0$ are valid for all curves $m(x)$ generated by models SiM-4 and SiM-2 with $r > 0$. Curves $0-2$ have got two extremum points, curves $3-6$ are decreasing]

Максвелла с разными временами релаксации $\tau_i = 1/\mu_i$, и потому $R = R_1 + R_2$, где $R_i = E_i \exp(-\mu_i t)$, $\mu_i := E_i/\eta_i > 0$, $E_i > 0$, $P = P_1 + P_2$, $P_i(x) = = x^{-1} E_i \mu_i^{-1} [1 - \exp(-\mu_i x)]$ и

$$m(x) = 1 - x \left[\sum_{i=1}^n E_i \exp(-\mu_i x) \right] \left[\sum_{i=1}^n E_i \mu_i^{-1} [1 - \exp(-\mu_i x)] \right]^{-1} \quad (31)$$

с $n = 2$. Формула (31) верна для КСЧ любого числа моделей Максвелла, соединенных параллельно (РеМ-2n). Для любого n $m(\infty) = 1$ (так как $R(\infty) = 0$), а $m(0+) = 0$ (так как модель регулярна). Таким образом, КСЧ модели РеМ-2n при малых и больших x ведет себя так же, как КСЧ модели Максвелла с $E = \Sigma E_i$. Однако КСЧ (31) уже может не быть монотонной и выпуклой на всем интервале $x > 0$: она может иметь две точки экстремума и две точки перегиба при малых и при больших значениях отношения времен релаксации $q = \tau_2/\tau_1 = \mu_1/\mu_2$ (рис. 8).

На рис. 8 слева приведены КСЧ (31) нескольких моделей РеМ-4, т.е. параллельного соединения той же модели Максвелла с $E_1 = 1000$, $\mu_1 = 1$, что и на рис. 7 (ее КСЧ – штрих-пунктирная линия $11'$), с другой моделью Максвелла (кривые $1-5$). Параметры μ_2 и E_2 второй модели меняются с сохранением вязкости $E_2/\mu_2 = E_1/\mu_1 = \text{const}$, причем $E_2 < E_1$ и $\mu_2 < \mu_1 = 1$: $E_2 = 500; 100; 50; 10; 5$ и $q := \mu_1/\mu_2 = 2; 10; 20; 50; 100$ (стрелка на рисунке указывает направление смещения КСЧ с ростом μ_2 , т.е. с убыванием отношения времен релаксации $q = \tau_2/\tau_1$). При условии $E_2 < E_1$ все КСЧ (31) модели стандартного тела лежат ниже и правее КСЧ первой модели Макс-

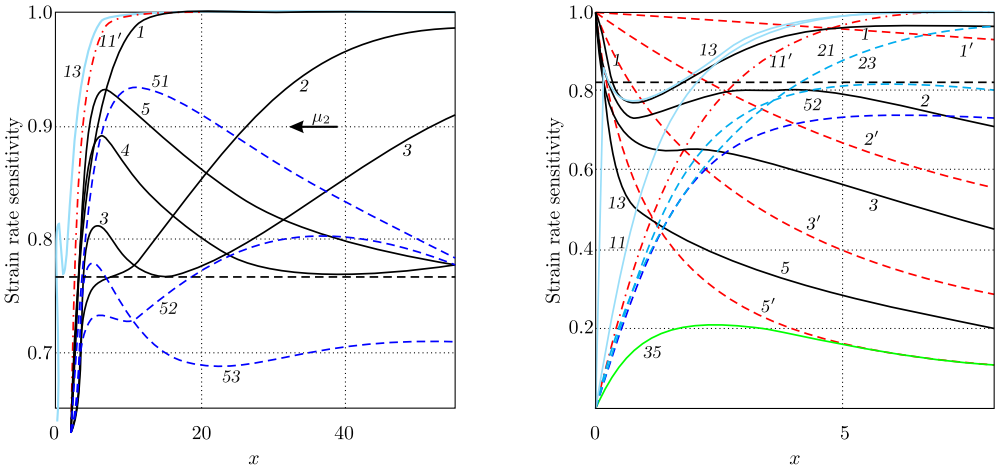


Рис. 8. Слева — КСЧ (31) моделей РеМ-4 (1–5): параллельных соединений модели Максвелла с $\mu_1 = 1$ (кривая 11') с другой моделью Максвелла с разными μ_2 ; кривые 51–53 — КСЧ (33) модели РеМ-5 (32) при $r/E_1 = 0.01$; справа — сопоставление КСЧ РеМ-4 с разными $q = \mu_1/\mu_2$ и СиМ-4 с разными λ

[Figure 8. *Left* — strain rate sensitivity curves (SSC) $m(x)$ (31) generated by five four-parametric regular models ReM-4 (it is governed by two relaxation times $\tau_i = 1/\mu_i$ and is equivalent to connection of the Voigt model to the Maxwell model $R = E \exp(-\mu t)$ in series or to parallel connection of two Maxwell models) with different ratio $q = \tau_2/\tau_1 = \mu_1/\mu_2$ of relaxation times. Namely, marks 1–5 refer to the graphs of $m(x)$ generated by parallel connection of the Maxwell model with $\mu_1 = 1$, $E_1 = 1000$ (see the dot-dashed red curve 11' in Fig. 7 and Fig. 8) and the Maxwell models with different parameters $E_2 < E_1$ and $\mu_2 < \mu_1 = 1$ varied so to preserve viscosity constant: $E_2/\mu_2 = E_1/\mu_1 = \text{const}$, $E_2 = 500; 100; 50; 10; 5$ and $q = 2; 10; 20; 50; 100$. Equalities $m(0) = 0$ and $m(\infty) = 1$ are valid for all curves $m(x)$ generated by models ReM-4 (since $R(\infty) = 0$). Curves 1 and 2 increase and curves 3–5 have got two extremum points (it is valid for all $q > q_*$). Condition $q > 1$ implies that curves $m(x)$ lies below the curve 11' of the Maxwell model. Curve 13 is produced by the model ReM-4 with $q = 1/20 < 1$ and lies higher than the curve 11'; it has got two extremum points (it is valid for all $q < q_0 < 0.1$). Marks 51–53 denote SSC (33) generated by five-parametric regular models ReM-5 (32) (i.e. parallel connection of spring and ReM-4) with $r/E_1 = 0.01$ and $q := \mu_1/\mu_2 = 2; 10; 20$. Curves 52, 53 have got three extremum points. *Right* — comparison of SSC (30) generated by singular models SiM-4 (29) with different λ (black curves 1–5 are the same as at Fig. 7) and SSC (31) generated by regular models ReM-4 with different q : blue curves 11, 13 — for $q = 1/2$ or $q = 1/20$ and dashed curves 21, 23 — for $q = 2$ or $q = 20$ (curves 21, 23 are the same curves 1, 3 shown at Fig. 8 (left)). Curves 11' and 52 are copied from Fig. 8 (left) and red curves 1', 2', 3', 5' are SSC produced by the Voigt model with $\lambda = 0.01; 0.1; 0.3; 1.0$ copied from Fig. 7 (curve numbers are preserved)]

велла. КСЧ при $q = 2; 10$ (линии 1 и 2) монотонны (при $q = 2$ еще нет и точек перегиба). При $q = 20$ монотонность КСЧ нарушается и появляются два экстремума. При дальнейшем увеличении $q > 20$ точка максимума движется вверх и вправо («рог» растет), а точка минимума — вправо, расстояние между точками экстремума увеличивается. Значения всех КСЧ в точках минимума одинаковы (и весьма велики). Все КСЧ имеют одинаковые начальные значения $m(+0) = 0$ и общую горизонтальную асимптоту $m(\infty) = 1$ — в том числе и КСЧ моделей с $q < 1$, лежащие выше и левее КСЧ модели Максвелла (см. КСЧ 13 для $q = 1/20$) и имеющие два экстремума при достаточно малом q (на рис. 8 справа лучше видны особенности поведения КСЧ при $\mu_2 > \mu_1$ и малых x).

Нетрудно привести пример КСЧ с двумя точками максимума. Достаточно присоединить параллельно к РеМ-4 упругий элемент, т.е. рассмотреть модель РеМ-5 с ФР

$$R(t) = r + E_1 e^{-\mu_1 t} + E_2 e^{-\mu_2 t}. \quad (32)$$

Она эквивалентна параллельному соединению двух моделей РеМ-3 с ФР (10). У нее $R(\infty) = \Sigma r_i \neq 0$ и потому $m(\infty) = 0$. ФСЧ моделей РеМ- $(2n + 1)$ имеет вид

$$m(x) = 1 - x \left[\sum_{i=1}^n [r_i + E_i \exp(-\mu_i x)] \right] \times \\ \times \left[\sum_{i=1}^n [r_i x + E_i \mu_i^{-1} (1 - \exp(-\mu_i x))] \right]^{-1}. \quad (33)$$

Кривые 51–53 на рис. 8 слева — КСЧ РеМ-5 при $r/E_1 = 0.01$ ($r = \Sigma r_i$, $n = 2$) и разных $q := \mu_1/\mu_2 = 2; 10; 20$ (т.е. $E_2 = 500; 100; 50 < E_1 = 1000$). Полезно сравнить их с КСЧ 1–3 исходных моделей РеМ-4, к которым добавляется упругий элемент с малым модулем r : ПСЧ понизился, форма КСЧ сильно изменилась. КСЧ моделей РеМ-5 с $q = 10$ и $q = 20$ имеют две точки максимума.

На рис. 8 справа сведены воедино для наглядности сопоставления КСЧ моделей РеМ-4 с разными μ_2 и СиМ-4 с разными λ , изображенные на рис. 7 и 8 слева. Штрих-пунктирная линия 11' — КСЧ все той же модели Максвелла с $\mu = \mu_1 = 1$, $E_1 = 1000$. Штриховые красные кривые 1', 2', 3', 5' — КСЧ моделей Фойгта с $\lambda = 0.01; 0.1; 0.3; 1.0$ (сохранена нумерация кривых рис. 7), кривые 1, 2, 3, 5 — КСЧ (30) параллельного соединения этих моделей Фойгта и модели Максвелла (СиМ-4) — см. кривые 1, 2, 3, 5 на рис. 7. КСЧ 1, 2 (при $\lambda = 0.01$ и $\lambda = 0.1$) имеют два экстремума; при увеличении λ они исчезают, и КСЧ становится монотонно убывающей (см. КСЧ 3, 5). У кривой 3 ($\lambda = 0.3$) еще сохраняются две точки перегиба, у кривой 5 ($\lambda = 1.0$) их уже нет. Голубые кривые — КСЧ четырех моделей РеМ-4: параллельных соединений указанной модели Максвелла с другой моделью Максвелла, параметры μ_2 и E_2 которой меняются так, что сохраняется та же вязкость $E_2 \mu_2^{-1} = E_1 \mu_1^{-1} = \text{const}$, что и у первой модели (как на рис. 8 слева): $\mu_2 = 2; 20 > \mu_1$ ($q = 1/2$ и $q = 1/20$ — кривые 11, 13) и $\mu_2 = 1/2; 1/20 < \mu_1$ (т.е. $q = 2$ и $q = 20$ (кривые 21 и 23)). Последние две кривые совпадают с КСЧ 1 и 3 с рис. 8 слева, эти две КСЧ намечены штриховыми линиями, они лежат по другую сторону от КСЧ 11' первой модели Максвелла. При $\mu_2 = 20$ и $\mu_2 = 1/20$ монотонность КСЧ нарушается и появляются два экстремума (при $\mu_2 = 10$ и $\mu_2 = 0.1$ КСЧ еще монотонны). При дальнейшем уменьшении $q < 1/20$ КСЧ меняется лишь в малой окрестности точки $x = 0$: точка максимума движется вверх и влево к точке $(0; 1)$, левый склон КСЧ приближается к вертикали, а правый склон визуально не меняется вне малой окрестности точки $x = 0$).

8. Заключение. В работе аналитически исследована скоростная чувствительность семейства диаграмм деформирования (8), порождаемых физически линейным определяющим соотношением вязкоупругости (1) с произвольной функцией релаксации в одноосных испытаниях с постоянными скоростями деформации (их свойства собраны в теореме 1). Выведено общее

выражение (14) для показателя скоростной чувствительности (ПСЧ) $m(a, \varepsilon)$, определяемого формулой (2), исследованы его общие качественные свойства и их зависимость от деформации, скорости деформации a и характеристик функций релаксации. Установлено, что в рамках линейной теории вязкоупругости ПСЧ зависит не от двух, а от одного аргумента $x := \varepsilon/a$ (формула (14)), выражается через отношение касательного модуля к секущему (см. (20)) и может быть вычислен по одной диаграмме деформирования с произвольной скоростью a . Доказано, что значения функции скоростной чувствительности (ФСЧ) $m(x)$ всегда лежат в интервале от нуля до единицы и что по заданной ФСЧ можно однозначно восстановить функцию релаксации ОС (1) и таким образом построить модель с заданной формой КСЧ (зарегистрированной в испытаниях материала). Основные обнаруженные свойства ПСЧ собраны в следующей теореме.

ТЕОРЕМА 2. Пусть функция релаксации $R(t)$ в ОС (1) — положительна, дифференцируема, убывает и выпукла вниз на интервале $(0; \infty)$. Тогда ПСЧ выражается формулой (14), зависит не от двух аргументов, а лишь от их отношения $x := \varepsilon/a$, и функция скоростной чувствительности $m(x)$ обладает следующими свойствами.

- 1) Функция $m(x)$ непрерывна при $x > 0$ и $0 < m(x) < 1$ при $x > 0$ (т.е. ОС (1) описывает только псевдопластические среды).
- 2) Если $R(t)$ непрерывна справа в точке $t = 0$ (т.е. модель регулярна), то $m(0+) = 0$; если модель сингулярна, то $m(0+) = 1$, а если $R(t) \sim x^{-\alpha}$ при $t \rightarrow 0+$, $\alpha \in (0; 1)$, то $m(0+) = \alpha$ (в частности, для всех параллельных соединений фрактальных моделей Фойгта (25)).
- 3) Если $R(\infty) \neq 0$, то $m(\infty) = 0$; если $R(t) \sim t^{-p}$ при $t \rightarrow \infty$, $p > 0$, то $m(\infty) = \min\{p, 1\}$ (в частности, для всех параллельных соединений фрактальных элементов (6) и их сдвигов вдоль оси времени); если $R(t) = O(t^{-(1+h)})$ при $t \rightarrow \infty$, $h > 0$, то $m(\infty) = 1$ (в частности, для всех параллельных соединений моделей Максвелла).
- 4) ФСЧ $m(x)$ может возрастать на всей полуоси $x > 0$, может убывать, может иметь точку максимума или минимума или несколько точек экстремума; $m(x)$ постоянна только для фрактальных элементов (для ФР $R = At^{-\alpha}$, $\alpha \in (0; 1)$).
- 5) Если $R(t)$ непрерывна справа в точке $t = 0$ и $R(\infty) \neq 0$, то $m(0) = 0$, $m(\infty) = 0$ и ФСЧ $m(x)$ имеет хотя бы один локальный максимум.
- 6) ФСЧ выражается формулой (20) через отношение касательного модуля к секущему, определяемых по одной диаграмме деформирования $\sigma = \sigma(\varepsilon, a)$ с произвольной скоростью.
- 7) $R(t)$ однозначно определяется по заданной ФСЧ и начальному значению $R(t_0) = R_0 > 0$ по формуле (16); критерии убывания функции релаксации (16) и ее выпуклости вниз — неравенства (18) и (19) для ФСЧ.
- 8) Для функции релаксации верна двусторонняя оценка (17) через ФСЧ.

Из п. 5 теоремы 2 следует, что зависимость ПСЧ от скорости деформации $m(a)$ имеет локальный максимум (для любой фиксированной деформации ε), т.е. линейное ОС (1) способно, как ни странно, моделировать «сигмоидальную» форму зависимости напряжения от скорости деформации (в осях

$\lg \sigma - \lg a$) и очень высокую скоростную чувствительность с показателем $m \in (0.5; 1)$ (см. шп. 4–6), характерные для режима сверхпластичности материалов, причем без каких-либо обременительных ограничений на функцию релаксации (эти требования выполняются даже для классической модели Кельвина—Пойтинга (10)), получаемой присоединением упругого элемента к модели Максвелла). Этот результат выявляет важность учета упругих деформаций (которыми традиционно пренебрегают в моделировании сверхпластичности) для описания максимума ПСЧ и указывает на возможность использования линейных интегральных операторов вида (1) как полезного инструмента («элемента») при построении ОС сверхпластичности, связывающих истории тензоров напряжений и деформаций (конечных, больших), температуры и эволюции параметров структуры материала.

Конкурирующие интересы. Я заявляю об отсутствии явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

Авторская ответственность. Я несу полную ответственность за предоставление окончательной версии рукописи в печать. Окончательная версия рукописи мною одобрена.

Финансирование. Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 17–08–01146_a).

Библиографический список

1. Хохлов А. В. Общие свойства диаграмм деформирования линейных моделей вязкоупругости при постоянной скорости деформации // *Проблемы прочности и пластичности*, 2015. Т. 77, №1. С. 60–74. <https://doi.org/10.32326/1814-9146-2015-77-1-60-74>.
2. Хохлов А. В. Анализ общих свойств кривых ползучести при циклических ступенчатых нагружениях, порождаемых линейной теорией наследственности // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2017. Т. 21, №2. С. 326–361. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1533>.
3. Хохлов А. В. Двусторонние оценки для функции релаксации линейной теории наследственности через кривые релаксации при гамп-деформировании и методики ее идентификации // *Изв. РАН. МТТ*, 2018. №3. С. 81–104. <https://doi.org/10.7868/S0572329918030108>.
4. Хохлов А. В. Анализ влияния объемной ползучести на кривые нагружения с постоянной скоростью и эволюцию коэффициента поперечной деформации в рамках линейной теории вязкоупругости // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2019. Т. 23, №4. С. 671–704. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1710>.
5. Хохлов А. В. Индикаторы неприменимости линейной теории вязкоупругости по данным испытаний материала на ползучесть при растяжении с наложением гидростатического давления // *Механика композиционных материалов и конструкций*, 2019. Т. 25, №2. С. 259–280. https://doi.org/10.33113/mkmk.ras.2019.25.02.259_280.09.
6. Scott-Blair G. W., Caffyn J. Significance of power-law relations in rheology // *Nature*, 1945. vol. 155. pp. 171–172. <https://doi.org/10.1038/155171c0>.
7. Работнов Ю. Н. Равновесие упругой среды с последствием // *ПММ*, 1948. Т. 12, №1. С. 53–62.
8. Герасимов А. Н. Обобщение линейных законов деформирования и его применение к задачам внутреннего трения // *ПММ*, 1948. Т. 12, №3. С. 251–260.
9. Podlubny I. *Fractional differential equations. An introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications* / Mathematics in Science and Engineering. vol. 198. San Diego: Academic Press, 1999. xxiv+340 pp.

10. Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations* / North-Holland Mathematics Studies. vol. 204. Amsterdam: Elsevier, 2006. xx+523 pp.
11. Mainardi F., Spada G. Creep, relaxation and viscosity properties for basic fractional models in rheology // *Eur. Phys. J. Spec. Top.*, 2011. vol. 193, no. 1. pp. 133–160. <https://doi.org/10.1140/epjst/e2011-01387-1>.
12. Огородников Е. Н., Радченко В.П., Унгарова Л. Г. Математическое моделирование наследственно упругого деформируемого тела на основе структурных моделей и аппарата дробного интегро-дифференцирования Римана–Лиувилля // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2016. Т. 20, № 1. С. 167–194. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1456>.
13. Astarita G., Marrucci G. *Principles of non-Newtonian Fluid Mechanics*. London, New York: McGraw-Hill, 1974. 289 pp.
14. Pearson C. E. The viscous properties of extruded eutectic alloys of Pb-Sn and Bi-Sn // *J. Inst. Metals*, 1934. vol. 54. pp. 111–123.
15. Бочвар А. А., Сви́дерская З. А. Явление сверхпластичности в сплавах цинка с алюминием // *Изв. АН СССР. ОТН*, 1945. № 9. С. 821–824.
16. Zehr S. W., Backofen W. A. Superplasticity in Lead-Tin alloys // *Trans. ASM*, 1968. vol. 61. pp. 300–313.
17. Hedworth J., Stowell M. J. The measurement of strain rate sensitivity in superplastic alloys // *J. Mater. Sci.*, 1971. vol. 6. pp. 1061–1069. <https://doi.org/10.1007/BF00980604>.
18. Грабский М. В. *Структурная сверхпластичность металлов*. М.: Металлургия, 1975. 272 с.
19. Смирнов О. М. *Обработка металлов давлением в состоянии сверхпластичности*. М.: Машиностроение, 1979. 184 с.
20. Padmanabhan K. A., Davies J. J. *Superplasticity*. Berlin: Springer-Verlag, 1980. xiv+314 pp. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-81456-3>.
21. Новиков И. И., Портной В. К. *Сверхпластичность сплавов с ультрамелким зерном*. М.: Металлургия, 1981. 168 с.
22. Кайбышев О. А. *Сверхпластичность промышленных сплавов*. М.: Металлургия, 1984. 264 с.
23. Сегал В. М., Резников В. И., Копылов В. И., Павлик Д.А. *Процессы пластического структурообразования металлов*. Минск: Наука и техника, 1994. 232 с.
24. Nieh T. G., Wadsworth J., Sherby O. D. *Superplasticity in Metals and Ceramics* / Cambridge Solid State Science Series. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1997. xiv+287 pp. <https://doi.org/10.1017/CB09780511525230>.
25. Васин Р. А., Еникеев Ф. У. *Введение в механику сверхпластичности*. Уфа: Гилем, 1998. 280 с.
26. Padmanabhan K. A., Vasin R. A., Enikeev F. U. *Superplastic Flow: Phenomenology and Mechanics*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2001. xix+363 pp. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-04367-7>.
27. Чумаченко Е. Н., Смирнов О. М., Цепин М. А. *Сверхпластичность: Материалы, теория, технологии*. М.: КомКнига, 2005. 320 с.
28. Segal V. M., Beyerlein I. J., Tome C. N., et al. *Fundamentals and Engineering of Severe Plastic Deformation*. New York: Nova Science Publ., 2010. 542 pp.
29. Langdon T. G. Forty-five years of superplastic research: Recent developments and future prospects // *Mater. Sci. Forum*, 2016. vol. 838–839. pp. 3–12. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/MSF.838-839.3>.
30. Шарифуллина Э. Р., Швейкин А. И., Трусов П. В. Обзор экспериментальных исследований структурной сверхпластичности: эволюция микроструктуры материалов и механизмы деформирования // *Вестник ПНИПУ. Механика*, 2018. № 3. С. 103–127. <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2018.3.11>.




31. Wang G. C., Fu M. W., Dong H. B., et al. Superplasticity deformation of Ti-6Al-2Zr-1Mo-1V induced by the cyclic change of strain-rate and MaxmSPD // *J. Alloys Compd.*, 2010. vol. 491, no. 1–2. pp. 213–217. <https://doi.org/10.1016/j.jallcom.2009.11.046>.
32. Sotoudeh K., Bate P. S. Diffusion creep and superplasticity in aluminium alloys // *Acta Mater.*, 2010. vol. 58, no. 6. pp. 1909–1920. <https://doi.org/10.1016/j.actamat.2009.11.034>.
33. Sun Q. J., Wang G. C. Microstructure and superplasticity of TA15 alloy // *Mater. Sci. Eng. A.*, 2014. vol. 606. pp. 401–408. <https://doi.org/10.1016/j.msea.2014.03.117>.
34. Blandin J. J. Superplasticity of metallic alloys: Some current findings and open questions // *Mater. Sci. Forum*, 2016. vol. 838–839. pp. 13–22. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/MSF.838-839.13>.
35. Mikhaylovskaya A. V., Mosleh A. O., Kotov A. D., et al. Superplastic deformation behaviour and microstructure evolution of near- α Ti-Al-Mn alloy // *Mater. Sci. Eng. A*, 2017. vol. 708. pp. 469–477. <https://doi.org/10.1016/j.msea.2017.10.017>.
36. Mosleh A. O., Mikhaylovskaya A. V., Kotov A. D., et al. Experimental investigation of the effect of temperature and strain rate on the superplastic deformation behavior of Ti-based alloys in the ($\alpha + \beta$) temperature field // *Metals*, 2018. vol. 8, no. 10, 819. <https://doi.org/10.3390/met8100819>.
37. Сегал В. М., Резников В. И., Дробышевский А. Е., Копылов В. И. Пластическая обработка металлов простым сдвигом // *Изв. АН СССР. Металлы*, 1981. № 1. С. 115–123.
38. Громов Н. П. *Теория обработки металлов давлением*. М.: Металлургия, 1967. 340 с.
39. Кайбышев О. А., Утяшев Ф. З. *Сверхпластичность, измельчение структуры и обработка труднодеформируемых сплавов*. М.: Наука, 2002. 438 с.
40. Валиев Р. З., Александров И. В. *Объемные наноструктурные металлические материалы: получение, структура и свойства*. М.: Академкнига, 2007. 398 с.
41. Ефимов О. Ю., Громов В. Е., Иванов Ю. Ф. *Формирование структуры, фазового состава и свойств сталей и сплавов в упрочняющих технологиях обработки давлением*. Новокузнецк: Интер-Кузбасс, 2012. 345 с.
42. Faraji G., Kim H. S., Kashi H. T. *Severe Plastic Deformation: Methods, Processing and Properties*. Amsterdam: Elsevier, 2018. 324 pp. <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-813518-1.00010-2>.
43. Валиев Р. З., Исламгалиев Р. К. Структура и механическое поведение ультрамелкозернистых металлов и сплавов, подвергнутых интенсивной пластической деформации // *Физ. метал. металловед.*, 1998. Т. 85, № 3. С. 161–177.
44. Глезер А. М., Метлов Л. С. Мегапластическая деформация твердых тел // *Физика и техника высоких давлений*, 2008. Т. 18, № 4. С. 21–35.
45. Малинин Н. Н. *Ползучесть в обработке металлов давлением*. М.: Машиностроение, 1986. 221 с.
46. Криштал М. М. Прерывистая текучесть как причина аномалий скоростной и температурной зависимостей сопротивления деформированию // *Физ. метал. металловед.*, 1998. Т. 85, № 1. С. 127–139.
47. Баженов С. Л., Ковальчук Е. П. Автоколебательное пластическое деформирование полимеров // *ДАН*, 2007. Т. 417, № 3. С. 353–356.
48. Рудской А. М., Рудаев Я. И. *Механика динамической сверхпластичности алюминиевых сплавов*. СПб.: Наука, 2009. 218 с.
49. Yu D., Chen X., Yu W., Chen G. Thermo-viscoplastic modeling incorporating dynamic strain aging effect on the uniaxial behavior of Z2CND18.12N stainless steel // *Int. J. Plast.*, 2012. vol. 37. pp. 119–139. <https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2012.05.001>.
50. Трусов П. В., Чечулина Е. А. Прерывистая текучесть: физические механизмы, экспериментальные данные, макрофеноменологические модели // *Вестник ПНИПУ. Механика*, 2014. № 3. С. 186–232. <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2014.3.10>.
51. Yang H. K., Zhang Z. J., Tian Y. Z., Zhang Z. F. Negative to positive transition of strain rate sensitivity in Fe-22Mn-0.6C-x(Al) twinning-induced plasticity steels // *Mater. Sci. Eng. A*, 2017. vol. 690, no. 6. pp. 146–157. <https://doi.org/10.1016/j.msea.2017.02.014>.

52. Peng J., Peng J., Li K.-S., et al. Temperature-dependent SRS behavior of 316L and its constitutive model // *Acta Metall. Sin. (Engl. Lett.)*, 2018. vol. 31. 234–244. <https://doi.org/10.1007/s40195-017-0697-x>.
53. Васин Р. А., Еникеев Ф. У., Круглов А. А., Сафиуллин Р. В. Об идентификации определяющих соотношений по результатам технологических экспериментов // *Изв. РАН. МТТ*, 2003. № 2. С. 111–124.
54. Khokhlov A. V. Properties of a nonlinear viscoelastoplastic model of Maxwell type with two material functions // *Moscow Univ. Mech. Bull.*, 2016. vol. 71, no. 6. pp. 132–136. <https://doi.org/10.3103/S0027133016060029>.
55. Khokhlov A. V. Applicability indicators and identification techniques for a nonlinear Maxwell-type elasto-viscoplastic model using loading-unloading curves // *Mech. Compos. Mater.*, 2019. vol. 55, no. 2. pp. 195–210. <https://doi.org/10.1007/s11029-019-09809-w>.
56. Vasin R. A., Enikeev F. U., Mazurski M. I. Determination of the strain rate sensitivity of a superplastic material at constant load test // *Mater. Sci. Eng. A*, 1997. vol. 224, no. 1–2. pp. 131–135. [https://doi.org/10.1016/S0921-5093\(96\)10555-4](https://doi.org/10.1016/S0921-5093(96)10555-4).
57. Бхатгачария С. С., Быля О. И., Васин Р. А., Подманабхан К. А. Механическое поведение титанового сплава с неподготовленной структурой при скачкообразном изменении скорости деформации в режиме сверхпластичности // *Изв. РАН. МТТ*, 2009. № 6. С. 169–177.
58. Соснин О. В., Горев Б. В., Любашевская И. В. Высокотемпературная ползучесть и сверхпластичность материалов // *ПМТФ*, 1997. Т. 38, № 2. С. 140–145.
59. Vasin R. A., Enikeev F. U., Mazurski M. I., Munirova O. S. Mechanical modelling of the universal superplastic curve // *J. Mater. Sci.*, 2000. vol. 35, no. 10. pp. 2455–2466. <https://doi.org/10.1023/A:1004761501240>.
60. Bylya O. I., Sarangi M. K., Ovchinnikova N. V., et al. FEM simulation of microstructure refinement during severe deformation // *IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng.*, 2014. vol. 63, 012033. <https://doi.org/10.1088/1757-899X/63/1/012033>.
61. Alabort E., Putman D., Reed R. C. Superplasticity in Ti-6Al-4V: Characterisation, modelling and applications // *Acta Mater.*, 2015. vol. 95. pp. 428–442. <https://doi.org/10.1016/j.actamat.2015.04.056>.
62. Bylya O. I., Vasin R. A., Blackwell P. L. The mechanics of superplastic forming — How to incorporate and model superplastic and superplastic-like conditions // *Mater. Sci. Forum*, 2016. vol. 838. pp. 468–476. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/MSF.838-839.468>.
63. Lin Y. C., Chen X.-M. A critical review of experimental results and constitutive descriptions for metals and alloys in hot working // *Mater. Design*, 2011. vol. 32, no. 4. pp. 1733–1759. <https://doi.org/10.1016/j.matdes.2010.11.048>.
64. Cheng Y. Q., Zhang H., Chen Z. H., Xian K. F. Flow stress equation of AZ31 magnesium alloy sheet during warm tensile deformation // *J. Mater. Process. Technol.*, 2008. vol. 208, no. 1–3. pp. 29–34. <https://doi.org/10.1016/j.jmatprotec.2007.12.095>.
65. Работнов Ю. Н. *Ползучесть элементов конструкций*. М.: Наука, 1966. 752 с.
66. Локощенко А. М. *Ползучесть и длительная прочность металлов*. М.: Физматлит, 2016. 504 с.
67. Никитенко А. Ф., Соснин О. В., Торшенов Н. Г., Шокало И. К. О ползучести упрочняющихся материалов с разными свойствами на растяжение и сжатие // *ПМТФ*, 1971. Т. 12, № 2. С. 118–122.
68. Takagi H., Dao M., Fujiwara M. Prediction of the constitutive equation for uniaxial creep of a power-law material through instrumented microindentation testing and modeling // *Mater. Trans.*, 2014. vol. 55, no. 2. pp. 275–284. <https://doi.org/10.2320/matertrans.M2013370>.
69. Белякова Т. А., Гончаров И. А., Хохлов А. В. О невозможности моделирования сигмоидальных кривых сверхпластичности параллельным или последовательным соединениями степенных вязких элементов // *Механика композиционных материалов и конструкций*, 2019. Т. 25, № 3. С. 299–315. https://doi.org/10.33113/mknc.ras.2019.25.03.299_315.01.

70. Хохлов А. В. Монотонное возрастание показателя скоростной чувствительности любых параллельных соединений линейных моделей вязкоупругости со степенными функциями релаксации // *Вестн. Южно-Ур. ун-та. Сер. Матем. Мех. Физ.*, 2019. Т. 11, № 3. С. 56–67. <https://doi.org/10.14529/mmph190307>.
71. Хохлов А. В. Характеристика скоростной чувствительности диаграмм деформирования в линейной теории вязкоупругости и построение по ней функции релаксации // *Проблемы прочности и пластичности*, 2019. Т. 81, № 4. С. 521–536. <https://doi.org/10.32326/1814-9146-2019-81-4-521-536>.
72. Murty G. S., Banerjee S. Evaluation of threshold stress from the stress-strain rate data of superplastic materials // *Scripta Metallurgica et Materialia*, 1994. vol. 31, no. 6. pp. 707–712. [https://doi.org/10.1016/0956-716X\(94\)90214-3](https://doi.org/10.1016/0956-716X(94)90214-3).

Математический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук приступает к работе в рамках Государственного контракта № 13.597.11.0043 по теме «Создание электронного архива выпусков научных журналов по тематическому направлению «Математика, физика, информационные технологии». Архив будет размещен на Общероссийском портале Math-Net.Ru.

Предполагается пополнить коллекцию Math-Net.Ru архивами ряда ведущих журналов по математике, физике и информационным технологиям, а также материалами научных мероприятий.

Проект представлен в социальных сетях:  @MathNetRu,  @MathNetRu,  Math-Net.Ru.

MSC: 74D05, 74A20

Properties of the strain rate sensitivity function produced by the linear viscoelasticity theory and existence of its maximum with respect to strain and strain rate


© A. V. Khokhlov

Lomonosov Moscow State University,
Institute of Mechanics,
1, Michurinsky prospekt, Moscow, 119192, Russian Federation.

Abstract

Strain rate sensitivity of stress-strain curves family generated by the Boltzmann–Volterra linear viscoelasticity constitutive equation (with an arbitrary relaxation modulus) under uni-axial loadings at constant strain rates is studied analytically as the function of strain and strain rate. The general expression for strain rate sensitivity index is derived and analyzed assuming relaxation modulus being arbitrary. Dependence of the strain rate sensitivity index on strain and strain rate and on relaxation modulus qualitative characteristics is examined, conditions for its monotonicity and for existence of extrema, the lower and the upper bounds and the limit values of the strain rate sensitivity as strain rate tends to zero or to infinity are studied. It is found out that (within the framework of the linear viscoelasticity) the strain rate sensitivity index which is, generally speaking, the function of two independent variables (namely strain and strain rate), depends on the single argument only that is the ratio of strain to strain rate. So defined function of one real variable is termed the strain rate sensitivity function and it may be regarded as a material function. The explicit integral expression (and the two-sided bound) for relaxation modulus in terms of strain rate sensitivity function is derived which enables one to restore relaxation modulus assuming a strain rate sensitivity function is given. The strain rate sensitivity function is represented as a linear function of ratio of tangent modulus to secant modulus of a stress-strain curve at any fixed constant strain rate and can be evaluated in such a way using experimental data. It is proved that the strain rate sensitivity value is confined in the interval from zero to unity (the upper bound of strain rate sensitivity index for pseudoplastic media) whatever strain and strain rate magnitudes. It is found out that the linear theory can reproduce increasing or decreasing or non-monotone dependences of strain rate sensitivity on strain rate (for any fixed strain) and it can provide existence of local maximum or minimum or several extrema

Research Article

 The content is published under the terms of the [Creative Commons Attribution 4.0 International License](http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this paper in press as:

Khokhlov A. V. Properties of the strain rate sensitivity function produced by the linear viscoelasticity theory and existence of its maximum with respect to strain and strain rate, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2020, vol. 24, no. 3, pp. 469–505. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1726> (In Russian).

Author's Details:

[Andrew V. Khokhlov](mailto:andrey-khokhlov@ya.ru)  <https://orcid.org/0000-0002-9212-2579>

Cand. Techn. Sci.; Leading Researcher; Lab. of Elasticity and Plasticity;

e-mail: andrey-khokhlov@ya.ru

as well without any complex restrictions on the relaxation modulus. General properties and peculiarities of the theoretic strain rate sensitivity function are illustrated by the examination of the classical regular and singular rheological models (consisting of two, three or four spring and dashpot elements) and fractional models. Namely, the Maxwell, Kelvin–Voigt, standard linear solid, Zener, anti-Zener, Burgers, anti-Burgers, Scott–Blair, fractional Kelvin–Voigt models and their parallel connections are considered.

The carried out analysis let us to conclude that the linear viscoelasticity theory (supplied with common relaxation function which are non-exotic from any point of view) is able to produce high values of strain rate sensitivity index close to unity (the upper bound of strain rate sensitivity index for pseudoplastic media) and to provide existence of the strain rate sensitivity index maximum with respect to strain rate. Thus, it is able to simulate qualitatively existence of a flexure point on log-log graph of stress dependence on strain rate and its sigmoid shape which is one of the most distinctive features of superplastic deformation regime observed in numerous materials tests.

Keywords: viscoelasticity, stress-strain curves at constant strain rates, strain hardening, strain rate sensitivity index (function), pseudoplastic media, fractional models, fractional differential equations, superplasticity, sigmoid curve, titanium and aluminum alloys, ceramics.

Received: 25th July, 2019 / Revised: 23rd June, 2020 /

Accepted: 24th August, 2020 / First online: 31st August, 2020

Competing interests. I declare that I have no apparent or potential conflicts of interest related to the publication of this article.

Author's Responsibilities. I take full responsibility for submitting the final manuscript in print. I approved the final version of the manuscript.

Funding. This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 17–08–01146_a).

References

1. Khokhlov A. V. General properties of stress-strain curves at constant strain rate yielding from linear theory of viscoelasticity, *Probl. Prochn. Plast.* [Problems of Strength and Plasticity], 2015, vol. 77, no. 1, pp. 60–74 (In Russian). <https://doi.org/10.32326/1814-9146-2015-77-1-60-74>.
2. Khokhlov A. V. Analysis of creep curves produced by the linear viscoelasticity theory under cyclic stepwise loadings, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2017, vol. 21, no. 2, pp. 326–361 (In Russian). <https://doi.org/10.14498/vsgtu1533>.
3. Khokhlov A. V. Two-sided estimates for the relaxation function of the linear theory of heredity via the relaxation curves during the ramp-deformation and the methodology of identification, *Mech. Solids*, 2018, vol. 53, no. 3, pp. 307–328. <https://doi.org/10.3103/S0025654418070105>.
4. Khokhlov A. V. Analysis of the bulk creep influence on stress-strain curves under tensile loadings at constant rates and on Poisson's ratio evolution based on the linear viscoelasticity theory, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2019, vol. 23, no. 4, pp. 671–704 (In Russian). <https://doi.org/10.14498/vsgtu1710>.

5. Khokhlov A. V. Applicability indicators of the linear viscoelasticity theory using creep curves under tensile load combined with constant hydrostatic pressure, *Mekh. Komp. Mater. Konstr.*, 2019, vol. 25, no. 2, pp. 259–280 (In Russian). https://doi.org/10.33113/mkmk.ras.2019.25.02.259_280.09.
6. Scott-Blair G. W., Caffyn J. Significance of power-law relations in rheology, *Nature*, 1945, vol. 155, pp. 171–172. <https://doi.org/10.1038/155171c0>.
7. Rabotnov Yu. N. Equilibrium of an elastic medium with after-effect, *Fractional Calculus and Applied Analysis*, 2014, vol. 17, no. 3, pp. 684–696. <https://doi.org/10.2478/s13540-014-0193-1>.
8. Gerasimov A. N. A generalization of linear laws of deformation and its application to internal friction problem, *Prikl. Mat. Mekh.*, 1948, vol. 12, no. 3, pp. 251–260 (In Russian).
9. Podlubny I. *Fractional differential equations. An introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications*, Mathematics in Science and Engineering, vol. 198. San Diego, Academic Press, 1999, xxiv+340 pp.
10. Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, North-Holland Mathematics Studies, vol. 204. Amsterdam, Elsevier, 2006, xx+523 pp.
11. Mainardi F., Spada G. Creep, relaxation and viscosity properties for basic fractional models in rheology, *Eur. Phys. J. Spec. Top.*, 2011, vol. 193, no. 1, pp. 133–160. <https://doi.org/10.1140/epjst/e2011-01387-1>.
12. Ogorodnikov E. N., Radchenko V. P., Ungarova L. G. Mathematical modeling of hereditary elastically deformable body on the basis of structural models and fractional integro-differentiation Riemann–Liouville apparatus, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2016, vol. 20, no. 1, pp. 167–194 (In Russian). <https://doi.org/10.14498/vsgtu1456>.
13. Astarita G., Marrucci G. *Principles of non-Newtonian Fluid Mechanics*. London, New York, McGraw-Hill, 1974, 289 pp.
14. Pearson C. E. The viscous properties of extruded eutectic alloys of Pb-Sn and Bi-Sn, *J. Inst. Metals*, 1934, vol. 54, pp. 111–123.
15. Bochvar A. A., Sviderskaya Z. A. The phenomenon of superplasticity in alloys of zinc with aluminum, *Izv. Akad. Nauk SSSR, Otdel. Tekh. Nauk*, 1945, no. 9, pp. 821–824 (In Russian).
16. Zehr S. W., Backofen W. A. Superplasticity in Lead-Tin alloys, *Trans. ASM*, 1968, vol. 61, pp. 300–313.
17. Hedworth J., Stowell M. J. The measurement of strain rate sensitivity in superplastic alloys, *J. Mater. Sci.*, 1971, vol. 6, pp. 1061–1069. <https://doi.org/10.1007/BF00980604>.
18. Grabski M. V. *Strukturnaia sverkhplastichnost' metallov* [Structural Superplasticity of Metals]. Moscow, Metallurgiiia, 1975, 272 pp. (In Russian)
19. Smirnov O. M. *Obrabotka metallov davleniem v sostoianii sverkhplastichnosti* [Pressure Treatment of Metals in the State of Superplasticity]. Moscow, Mashinostroenie, 1979, 184 pp. (In Russian)
20. Padmanabhan K. A., Davies J. J. *Superplasticity*. Berlin, Springer-Verlag, 1980, xiv+314 pp. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-81456-3>.
21. Novikov I. I., Portnoi V. K. *Sverkhplastichnost' splavov s ul'tramelkim zernom* [Superplasticity of Alloys with Ultrafine Grain]. Moscow, Metallurgiiia, 1981, 168 pp. (In Russian)
22. Kaibyshev O. A. *Sverkhplastichnost' promyshlennykh splavov* [Superplasticity of Industrial Alloys]. Moscow, Metallurgiiia, 1984, 264 pp. (In Russian)
23. Segal V. M., Reznikov V. I., Kopylov V. I., Pavlik D.A. *Protsessy plasticheskogo strukturoobrazovaniia metallov* [Plastic Structure Formation in Metals]. Minsk, Nauka i tekhnika, 1994, 232 pp. (In Russian)
24. Nieh T. G., Wadsworth J., Sherby O. D. *Superplasticity in Metals and Ceramics*, Cambridge Solid State Science Series. Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1997, xiv+287 pp. <https://doi.org/10.1017/CB09780511525230>.

25. Vasin R. A., Enikeev F. U. *Vvedenie v mekhaniku sverkhplastichnosti* [Introduction to the Superplasticity Mechanics]. Ufa, Gilem, 1998, 280 pp. (In Russian)
26. Padmanabhan K. A., Vasin R. A., Enikeev F. U. *Superplastic Flow: Phenomenology and Mechanics*. Berlin, Heidelberg, Springer-Verlag, 2001, xix+363 pp. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-04367-7>.
27. Chumachenko E. N., Smirnov O. M., Tsepina M. A. *Sverkhplastichnost': Materialy, teoriia, tekhnologii* [Superplasticity: Materials, Theory, Technology]. Moscow, KomKniga, 2005, 320 pp. (In Russian)
28. Segal V. M., Beyerlein I. J., Tome C. N., et al. *Fundamentals and Engineering of Severe Plastic Deformation*. New York, Nova Science Publ., 2010, 542 pp.
29. Langdon T. G. Forty-five years of superplastic research: Recent developments and future prospects, *Mater. Sci. Forum*, 2016, vol. 838–839, pp. 3–12. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/MSF.838-839.3>.
30. Sharifullina E. R., Shveikin A. I., Trusov P. V. Review of experimental studies on structural superplasticity: Internal structure evolution of material and deformation mechanisms, *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2018, no. 3, pp. 103–127 (In Russian). <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2018.3.11>.
31. Wang G. C., Fu M. W., Dong H. B., et al. Superplasticity deformation of Ti-6Al-2Zr-1Mo-1V induced by the cyclic change of strain-rate and MaxmSPD, *J. Alloys Compd.*, 2010, vol. 491, no. 1–2, pp. 213–217. <https://doi.org/10.1016/j.jallcom.2009.11.046>.
32. Sotoudeh K., Bate P. S. Diffusion creep and superplasticity in aluminium alloys, *Acta Mater.*, 2010, vol. 58, no. 6, pp. 1909–1920. <https://doi.org/10.1016/j.actamat.2009.11.034>.
33. Sun Q. J., Wang G. C. Microstructure and superplasticity of TA15 alloy, *Mater. Sci. Eng. A.*, 2014, vol. 606, pp. 401–408. <https://doi.org/10.1016/j.msea.2014.03.117>.
34. Blandin J. J. Superplasticity of metallic alloys: Some current findings and open questions, *Mater. Sci. Forum*, 2016, vol. 838–839, pp. 13–22. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/MSF.838-839.13>.
35. Mikhaylovskaya A. V., Mosleh A. O., Kotov A. D., et al. Superplastic deformation behaviour and microstructure evolution of near- α -Ti-Al-Mn alloy, *Mater. Sci. Eng. A*, 2017, vol. 708, pp. 469–477. <https://doi.org/10.1016/j.msea.2017.10.017>.
36. Mosleh A. O., Mikhaylovskaya A. V., Kotov A. D., et al. Experimental investigation of the effect of temperature and strain rate on the superplastic deformation behavior of Ti-based alloys in the ($\alpha + \beta$) temperature field, *Metals*, 2018, vol. 8, no. 10, 819. <https://doi.org/10.3390/met8100819>.
37. Segal V. M., Reznikov V. I., Dobryshevskiy A. E., Kopylov V. I. Plastic working of metals by simple shear, *Russian Metallurgy (Metally)*, 1981, vol. 1, no. 1, pp. 99–105.
38. Gromov N. P. *Teoriia obrabotki metallov davleniem* [Theory of Metal Forming]. Moscow, Metallurgiya, 1967, 340 pp. (In Russian)
39. Kaibyshev O. A., Utyashev F. Z. *Sverkhplastichnost', izmel'chenie struktury i obrabotka trudnodeformiruemyykh splavov* [Superplasticity, Structure Refinement and Processing of Hardly-Deformed Alloys]. Moscow, Nauka, 2002, 438 pp. (In Russian)
40. Valiev R. Z., Aleksandrov I. V. *Ob"emnye nanostrukturnye metallicheskie materialy: poluchenie, struktura i svoystva* [Bulk Nanostructured Metallic Materials: Fabrication, Structure and Properties]. Moscow, Akademkniga, 2007, 398 pp. (In Russian)
41. Efimov O. Yu., Gromov V. E., Ivanov Yu. F. *Formirovanie struktury, fazovogo sostava i svoystv staley i splavov v uprochniaiyushchikh tekhnologiakh obrabotki davleniem* [Formation of the Structure, Phase Composition and Properties of Steels and Alloys in Hardening Technologies of Pressure Treatment]. Novokuznetsk, Inter-Kuzbass, 2012, 345 pp. (In Russian)
42. Faraji G., Kim H. S., Kashi H. T. *Severe Plastic Deformation: Methods, Processing and Properties*. Amsterdam, Elsevier, 2018, 324 pp. <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-813518-1.00010-2>.
43. Valiev R. Z., Islamgaliev R. K. Structure and mechanical behavior of ultrafine-grained metals and alloys subjected to severe plastic deformation, *Fiz. Metal. Metaloved.*, 1998, vol. 85, no. 3, pp. 161–177 (In Russian).

44. Glezer A. M., Metlov L. S. Megaplastic deformation of solids, *Fiz. Tekh. Vys. Davl.*, 2008, vol. 18, no. 4, pp. 21–35 (In Russian).
45. Malinin N. N. *Polzuchest' v obrabotke metallov davleniem* [Creep theories in metal forming]. Moscow, Mashinostroenie, 1986, 221 pp. (In Russian)
46. Krishtal M. M. Discontinuous fluidity as the reason for anomalies of high-speed and temperature dependences of deformation resistance, *Fiz. Metal. Metaloved.*, 1998, vol. 85, no. 1, pp. 127–139 (In Russian).
47. Bazhenov S. L., Koval'chuk E. P. Self-oscillating plastic deformation of polymers, *Dokl. Phys. Chem.*, 2007, vol. 417, no. 1, pp. 308–310. <https://doi.org/10.1134/S001250160711005X>.
48. Rudskoy A. M., Rudaev Ya. I. *Mekhanika dinamicheskoi sverkhplastichnosti aliuminievyykh splavov* [Mechanics of Dynamic Superplasticity of Aluminum Alloys]. St. Petersburg, Nauka, 2009, 218 pp. (In Russian)
49. Yu D., Chen X., Yu W., Chen G. Thermo-viscoplastic modeling incorporating dynamic strain aging effect on the uniaxial behavior of Z2CND18.12N stainless steel, *Int. J. Plast.*, 2012, vol. 37, pp. 119–139. <https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2012.05.001>.
50. Trusov P. V., Chechulina E. A. Serrated yielding: physical mechanisms, experimental dates, macro-phenomenological models, *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2014, no. 3, pp. 185–231 (In Russian). <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2014.3.10>.
51. Yang H. K., Zhang Z. J., Tian Y. Z., Zhang Z. F. Negative to positive transition of strain rate sensitivity in Fe-22Mn-0.6C-x(Al) twinning-induced plasticity steels, *Mater. Sci. Eng. A*, 2017, vol. 690, no. 6, pp. 146–157. <https://doi.org/10.1016/j.msea.2017.02.014>.
52. Peng J., Peng J., Li K.-S., et al. Temperature-dependent SRS behavior of 316L and its constitutive model, *Acta Metall. Sin. (Engl. Lett.)*, 2018, vol. 31, 234–244. <https://doi.org/10.1007/s40195-017-0697-x>.
53. Vasin R. A., Enikeev F. U., Kruglov A. A., Safullin R. V. On the identification of constitutive relations by the results of technological experiments, *Mech. Solids*, 2003, vol. 38, no. 2, pp. 90–100.
54. Khokhlov A. V. Properties of a nonlinear viscoelastoplastic model of Maxwell type with two material functions, *Moscow Univ. Mech. Bull.*, 2016, vol. 71, no. 6, pp. 132–136. <https://doi.org/10.3103/S0027133016060029>.
55. Khokhlov A. V. Applicability indicators and identification techniques for a nonlinear Maxwell-type elastoviscoplastic model using loading-unloading curves, *Mech. Compos. Mater.*, 2019, vol. 55, no. 2, pp. 195–210. <https://doi.org/10.1007/s11029-019-09809-w>.
56. Vasin R. A., Enikeev F. U., Mazurski M. I. Determination of the strain rate sensitivity of a superplastic material at constant load test, *Mater. Sci. Eng. A*, 1997, vol. 224, no. 1–2, pp. 131–135. [https://doi.org/10.1016/S0921-5093\(96\)10555-4](https://doi.org/10.1016/S0921-5093(96)10555-4).
57. Bkhattacharya S. S., Bylya O. I., Vasin R. A., Padmanabhan K. A. Mechanical behavior of titanium alloy Ti-6Al-4V with unprepared microstructure under jumpwise variations of the strain rate in the superplastic state, *Mech. Solids*, 2009, vol. 44, no. 6, pp. 951–958. <https://doi.org/10.3103/S0025654409060120>.
58. Sosnin O. V., Gorev B. V., Lyubashevskaya I. V. High-temperature creep and superplasticity of materials, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 1997, vol. 38, no. 2, pp. 293–297. <https://doi.org/10.1007/BF02467915>.
59. Vasin R. A., Enikeev F. U., Mazurski M. I., Munirova O. S. Mechanical modelling of the universal superplastic curve, *J. Mater. Sci.*, 2000, vol. 35, no. 10, pp. 2455–2466. <https://doi.org/10.1023/A:1004761501240>.
60. Bylya O. I., Sarangi M. K., Ovchinnikova N. V., et al. FEM simulation of microstructure refinement during severe deformation, *IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng.*, 2014, vol. 63, 012033. <https://doi.org/10.1088/1757-899X/63/1/012033>.
61. Alabort E., Putman D., Reed R. C. Superplasticity in Ti-6A-4V: Characterisation, modelling and applications, *Acta Mater.*, 2015, vol. 95, pp. 428–442. <https://doi.org/10.1016/j.actamat.2015.04.056>.

62. Bylya O. I., Vasin R. A., Blackwell P. L. The mechanics of superplastic forming — How to incorporate and model superplastic and superplastic-like conditions, *Mater. Sci. Forum*, 2016, vol. 838, pp. 468–476. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/MSF.838-839.468>.
63. Lin Y. C., Chen X.-M. A critical review of experimental results and constitutive descriptions for metals and alloys in hot working, *Mater. Design*, 2011, vol. 32, no. 4, pp. 1733–1759. <https://doi.org/10.1016/j.matdes.2010.11.048>.
64. Cheng Y. Q., Zhang H., Chen Z. H., Xian K. F. Flow stress equation of AZ31 magnesium alloy sheet during warm tensile deformation, *J. Mater. Process. Technol.*, 2008, vol. 208, no. 1–3, pp. 29–34. <https://doi.org/10.1016/j.jmatprotec.2007.12.095>.
65. Rabotnov Yu. N. *Creep of Structural Members*, North-Holland Series in Applied Mathematics and Mechanics. Amsterdam, North-Holland, 1969, ix+822 pp.
66. Lokoshchenko A. M. *Creep and long-term strength of metals*. Boca, Raton, CRC Press, 2018, xviii+545 pp. <https://doi.org/10.1201/b22242>.
67. Nikitenko A. F., Sosnin O. V., Torshenov N. G., Shokalo I. K. Creep of hardening materials with different properties in tension and compression, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 1971, vol. 12, no. 2, pp. 277–281. <https://doi.org/10.1007/BF00850702>.
68. Takagi H., Dao M., Fujiwara M. Prediction of the constitutive equation for uniaxial creep of a power-law material through instrumented microindentation testing and modeling, *Mater. Trans.*, 2014, vol. 55, no. 2, pp. 275–284. <https://doi.org/10.2320/matertrans.M2013370>.
69. Beliakova T. A., Goncharov I. A., Khokhlov A. V. The impossibility of modelling of sigmoid superplasticity curves using only parallel or series connections of power-law viscous elements, *Mekh. Komp. Mater. Konstr.*, 2019, vol. 25, no. 3, pp. 299–315 (In Russian). https://doi.org/10.33113/mkmk.ras.2019.25.03.299_315.01.
70. Khokhlov A. V. Monotone increase of the strain rate sensitivity value of any parallel connection of the fractional Kelvin–Voigt models, *Vestn. Yuzhno-Ural. Gos. Un-ta. Ser. Matem. Mekh. Fiz.*, 2019, vol. 11, no. 3, pp. 56–67 (In Russian). <https://doi.org/10.14529/mmph190307>.
71. Khokhlov A. V. The characteristic of the strain rate sensitivity of stress-strain curves in the linear viscoelasticity theory and its interrelation with relaxation modulus, *Probl. Prochn. Plast.* [Problems of Strength and Plasticity], 2019, vol. 81, no. 4, pp. 521–536 (In Russian). <https://doi.org/10.32326/1814-9146-2019-81-4-521-536>.
72. Murty G. S., Banerjee S. Evaluation of threshold stress from the stress-strain rate data of superplastic materials, *Scripta Metallurgica et Materialia*, 1994, vol. 31, no. 6, pp. 707–712. [https://doi.org/10.1016/0956-716X\(94\)90214-3](https://doi.org/10.1016/0956-716X(94)90214-3).