



УДК 539.4

## Моделирование вязкоупругопластического деформирования гибких пологих оболочек с пространственными структурами армирования


© А. П. Янковский

Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН, Россия, 630090, Новосибирск, ул. Институтская, 4/1.

### Аннотация

На базе процедуры шагов по времени построена математическая модель вязкоупругопластического поведения пологих оболочек с пространственными структурами армирования. Пластическое деформирование компонентов композиции описывается теорией течения с изотропным упрочнением; вязкоупругое деформирование — уравнениями модели Максвелла—Больцмана. Возможное ослабленное сопротивление композитных искривленных панелей поперечному сдвигу учитывается в рамках гипотез теории Редди, а геометрическая нелинейность задачи — в приближении Кармана. Решение сформулированной начально-краевой задачи строится с использованием явной численной схемы типа «крест». Исследовано упругопластическое и вязкоупругопластическое изгибное динамическое поведение «плоско»- и пространственно-армированных стеклопластиковых цилиндрических панелей под действием нагрузок взрывного типа. На примере относительно тонких композитных конструкций показано, что в зависимости от того, к какой лицевой поверхности (выпуклой или вогнутой) прикладывается нагрузка, замена традиционной «плоской» структуры армирования на пространственную может приводить как к увеличению, так и к уменьшению величины остаточного прогиба. Однако в обоих случаях такая замена позволяет существенно уменьшить интенсивность остаточных деформаций связующего материала и волокон некоторых семейств. Продемонстрировано, что амплитуды колебаний искривленных композитных панелей в окрестности начального момента времени значительно превосходят максимальные по модулю значения остаточных прогибов. При этом эпюры остаточных прогибов имеют достаточно сложный вид. Показано, что расчеты, проведенные в рамках теории упругопластического деформирования компонентов композиции, не позволяют даже приближенно определить величины остаточных деформаций материалов, составляющих композицию.

### Научная статья

 Контент публикуется на условиях лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru) (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

### Образец для цитирования

Янковский А. П. Моделирование вязкоупругопластического деформирования гибких пологих оболочек с пространственными структурами армирования // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2020. Т. 24, № 3. С. 506–527. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1709>.

### Сведения об авторе

*Андрей Петрович Янковский*  <https://orcid.org/0000-0002-2602-8357>

доктор физико-математических наук; ведущий научный сотрудник; лаб. физики быстропротекающих процессов; e-mail: [lab4nemir@rambler.ru](mailto:lab4nemir@rambler.ru)

**Ключевые слова:** пологие оболочки, «плоское» армирование, пространственное армирование, динамическое деформирование, вязкоупругопластическое деформирование, теория Редди, модель Максвелла—Больцмана, схема типа «крест».

Получение: 5 июня 2019 г. / Исправление: 3 июня 2020 г. /

Принятие: 24 августа 2020 г. / Публикация онлайн: 30 сентября 2020 г.

---

**Введение.** Изделия из композиционных материалов (КМ) все более широко используются в инженерных приложениях [1–6]. Основные преимущества КМ (сочетание легкости и прочности) особенно ярко проявляются в тонкостенных конструкциях типа пластин и оболочек [1, 2, 4–13]. В последнее время в конструкторской практике активно применяются КМ с пространственными структурами армирования [14–17], так как позволяют устранить серьезный недостаток слоистых и армированных в плоскости композитов — слабое сопротивление сдвигу и отрыву в поперечном направлении. Следовательно, актуальной является проблема математического моделирования механического поведения КМ-конструкций с пространственными структурами армирования.

Линейно-упругое деформирование пространственно-армированных КМ моделировалось в [18–20]. Однако современные КМ-конструкции могут подвергаться высокоинтенсивному нагружению [5], при котором КМ ведет себя неупруго. В связи с этим в [21] была построена модель упругопластического поведения пластин с пространственными структурами армирования, которая адаптирована под применение численной схемы типа «крест». Для описания неупругого деформирования компонентов композиции в [21] использовались определяющие соотношения теории Прандтля—Рейсса—Хилла (ТПРХ), не учитывающие демпфирование реальных материалов при вибрациях [22]. Поэтому такая модель не позволяет определять остаточные перемещения, деформации и напряжения в КМ-конструкции. Демпфирующие свойства материалов компонентов композиции могут быть учтены за счет использования вязкоупругих соотношений [23], т. е. построения модели вязкоупругопластического деформирования КМ. На сегодняшний день такая структурная модель КМ отсутствует.

Тонкостенные элементы КМ-конструкций даже с пространственными структурами армирования (например ортогональным 3D-армированием [14, 15, 17]) могут слабо сопротивляться поперечным сдвигам. Традиционно это обстоятельство учитывают в рамках теории Рейсснера [4, 5, 9, 10, 12, 24] или теории Редди [7, 8, 11, 13, 21]. Теория Редди в первом приближении учитывает искривление поперечной нормали тонкостенной конструкции и позволяет учесть граничные условия на лицевых поверхностях по касательным силам. В рамках теории Рейсснера никакие граничные условия на лицевых поверхностях удовлетворить нельзя, однако сложность реализации этих теорий практически одинакова [7].

Для численного интегрирования задач динамики тонкостенных конструкций используют как явные, так и неявные схемы. Среди явных методов наибольшее распространение получила схема типа «крест» [10, 13, 21], а из неявных — методы Ньюмарка [2, 25, 26].

В связи со всем вышеизложенным настоящее исследование посвящено математическому моделированию вязкоупругопластического поведения гибких пологих оболочек с пространственными структурами армирования при учете их слабого сопротивления поперечным сдвигам в рамках гипотез теории Редди. Сформулированные при этом начально-краевые задачи предполагается численно интегрировать с помощью явной схемы типа «крест».

**1. Моделирование вязкоупругопластического поведения гибкой полой оболочки с пространственной структурой армирования.** Рассматривается деформирование полой КМ-оболочки толщиной  $2h$ , с которой связана ортогональная криволинейная система координат  $x_i$  так, что отсчетная поверхность  $x_1x_2$  ( $x_3 = 0$ ) совпадает со срединной поверхностью ( $|x_3| \leq h$ ) и направление  $x_3$  перпендикулярно этой поверхности;  $x_1, x_2$  — координаты вдоль линий главной кривизны. Конструкция «плоско» или пространственно армирована, и структура армирования в направлении  $x_3$  однородна (рис. 1, на котором изображены малые элементы такой оболочки, причем их искривленность в силу малости не изображена).

Искривленная панель усилена  $K$  семействами волокон с плотностями армирования  $\omega_k$ ,  $1 \leq k \leq K$ . (На рис. 1, а изображено ортогональное «плоское» 2D-армирование при  $K = 2$ , на рис. 1, б — ортогональное пространственное 3D-армирование при  $K = 3$  [14, 15, 17], на рис. 1, с — неортогональное пространственное 4D-армирование при  $K = 4$  [15].) Относительное объемное со-

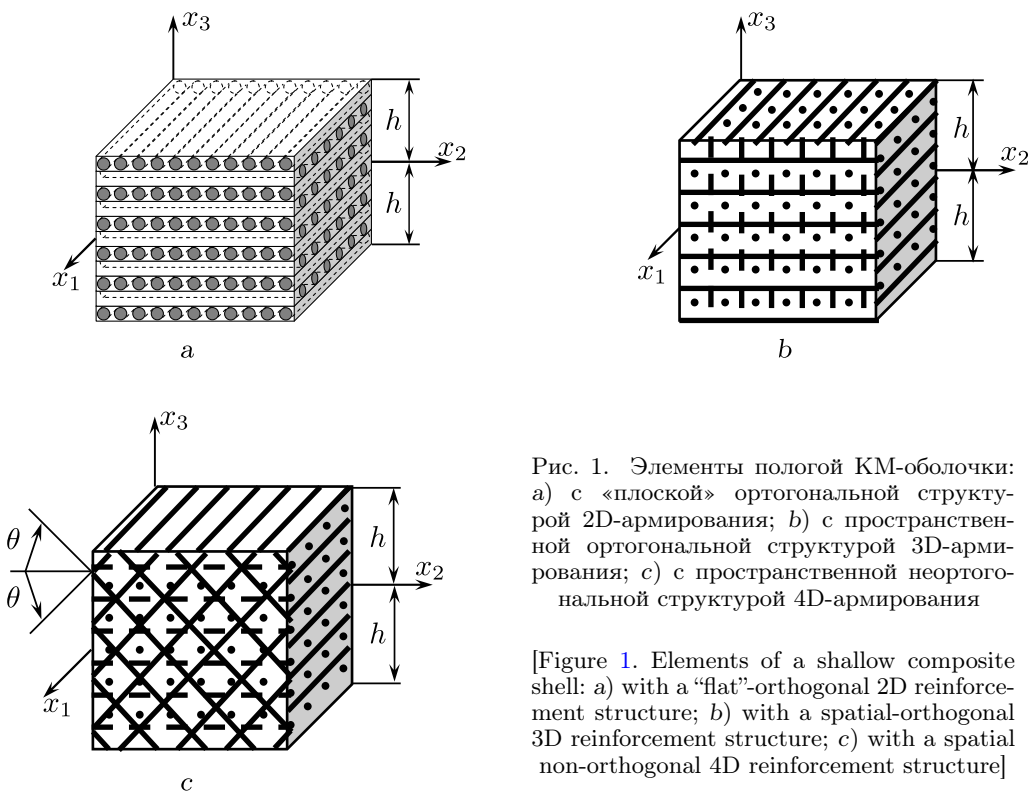


Рис. 1. Элементы полой КМ-оболочки: а) с «плоской» ортогональной структурой 2D-армирования; б) с пространственной ортогональной структурой 3D-армирования; с) с пространственной неортогональной структурой 4D-армирования

[Figure 1. Elements of a shallow composite shell: a) with a “flat”-orthogonal 2D reinforcement structure; b) with a spatial-orthogonal 3D reinforcement structure; c) with a spatial non-orthogonal 4D reinforcement structure]

держание связующего материала в ячейке периодичности композиции определяется так [14, 15]:

$$\omega_0 = 1 - \sum_{k=1}^K \omega_k. \quad (1)$$

Рассматривается частный, но практически важный случай, когда на лицевых поверхностях  $x_3 = \pm h$  заданы только нормальные распределенные нагрузки. Для описания возможного слабого (например в случаях структур армирования, изображенных на рис. 1, а и б) сопротивления полой КМ-оболочки поперечным сдвигам используем кинематические соотношения теории Редди [11], учитывая при этом геометрическую нелинейность задачи в приближении Кармана. В этом случае деформации композиции  $\varepsilon_{ij}$  и перемещения точек  $U_i$  искривленной КМ-панели аппроксимируются так [13]:

$$\varepsilon_{ij}(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{2}(\partial_i u_j + \partial_j u_i) - x_3 \partial_i \partial_j w + \frac{x_3}{3h^2}(3h^2 - x_3^2)(\partial_i \varepsilon_{j3}^0 + \partial_j \varepsilon_{i3}^0) + \delta_{ij} \frac{w}{R_i} + \frac{1}{2} \partial_i w \partial_j w, \quad \varepsilon_{i3}(t, \mathbf{r}) = \frac{h^2 - x_3^2}{h^2} \varepsilon_{i3}^0(t, \mathbf{x}), \quad i, j = 1, 2; \quad (2)$$

$$U_i(t, \mathbf{r}) = u_i(t, \mathbf{x}) - x_3 \partial_i w + \frac{2x_3}{3h^2}(3h^2 - x_3^2) \varepsilon_{i3}^0, \quad U_3(t, \mathbf{r}) = w(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in G, \quad |x_3| \leq h, \quad t \geq t_0, \quad \mathbf{x} = \{x_1, x_2\}, \quad \mathbf{r} = \{x_1, x_2, x_3\}, \quad i = 1, 2, \quad (3)$$

где  $\varepsilon_{i3}^0$  — деформации поперечных сдвигов точек срединной поверхности;  $w$  — прогиб;  $u_i$  — тангенциальные перемещения точек срединной поверхности;  $R_i$  — главные радиусы кривизны срединной поверхности;  $t_0$  — начальный момент времени  $t$ ;  $\partial_i$  — оператор дифференцирования по  $x_i$  ( $i = 1, 2$ );  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера;  $G$  — область, занимаемая полой оболочкой в плане. В равенствах (2) и (3) неизвестны функции  $w$ ,  $u_i$ ,  $\varepsilon_{i3}^0$ , зависящие от двух пространственных переменных  $x_i$  ( $i = 1, 2$ ) и времени  $t$ .

Уравнения динамического равновесия элемента искривленной панели в приближении Кармана с учетом (3) имеют вид [13]:

$$2h\rho\ddot{w} = \sum_{l=1}^2 \left[ \partial_l \left( F_{l3} + \sum_{j=1}^2 F_{lj} \partial_j w \right) + \frac{F_l}{R_l} \right] + X_3(t, \mathbf{x}) + \sigma_{33}^{(+)} - \sigma_{33}^{(-)}, \quad 2h\rho\ddot{u}_i = \sum_{j=1}^2 \partial_j (F_{ij} - F_{j3} \partial_i w) + \frac{F_{i3}}{R_i} + X_i(t, \mathbf{x}), \quad (4)$$

$$\frac{2}{3} h^3 \rho \ddot{\gamma}_{i3} = \sum_{j=1}^2 \partial_j M_{ij} - F_{i3} + m_i(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in G, \quad t \geq t_0, \quad i = 1, 2,$$

где

$$F_{il}(t, \mathbf{x}) = \int_{-h}^h \sigma_{il}(t, \mathbf{r}) dx_3, \quad M_{ij}(t, \mathbf{x}) = \int_{-h}^h \sigma_{ij}(t, \mathbf{r}) x_3 dx_3, \quad \gamma_{i3}(t, \mathbf{x}) \equiv \frac{8}{5} \varepsilon_{i3}^0 - \partial_i w, \quad \rho = \rho_0 \omega_0 + \sum_{k=1}^K \rho_k \omega_k, \quad i, j = 1, 2, \quad l = \overline{1, 3}; \quad (5)$$

$\sigma_{il}$  — осредненные напряжения в композиции оболочки;  $\sigma_{33}^{(\pm)} = \sigma_{33}(t, \mathbf{x}, \pm h)$  — известные нормальные распределенные нагрузки на верхней (+) и нижней (–) лицевых поверхностях;  $X_i$  — приведенные внешние нагрузки, порожденные объемными силами (определяются по правилу смеси по аналогии с  $\rho$ );  $m_i$  — внешние моменты от объемных сил;  $\rho_0, \rho_k$  — объемная плотность материала связующего и волокон  $k$ -того семейства;  $F_{ij}, F_{i3}$  — мембранные и поперечные силы;  $M_{ij}$  — изгибающие и крутящие моменты;  $\gamma_{i3}$  — введенные для удобства функции; точка — дифференцирование по времени  $t$ .

Для однозначного интегрирования исследуемой задачи на кромках искривленной панели необходимо задать силовые [13]

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^2 n_j (F_{ij} - F_{j3} \partial_i w) &= F_i, & \sum_{l=1}^2 n_l \left( F_{l3} + \sum_{j=1}^2 F_{lj} \partial_j w \right) &= F_{n3}, \\ M_{11} n_1^2 + M_{22} n_2^2 + 2M_{12} n_1 n_2 &= M_{nn}, \\ (M_{22} - M_{11}) n_1 n_2 + M_{12} (n_1^2 - n_2^2) &= M_{n\tau}, \\ n_1 = \cos \alpha, \quad n_2 = \sin \alpha, \quad \mathbf{x} \in \Gamma, \quad t \geq t_0, \quad i = 1, 2 \end{aligned} \quad (6)$$

и кинематические (см. соотношения (3) и (5))

$$\begin{aligned} w(t, \mathbf{x}) &= U_{*3}(t, \mathbf{x}), \quad 2hu_i(t, \mathbf{x}) = u_{*i}(t, \mathbf{x}), \\ \frac{2}{3}h^3 \gamma_{i3}(t, \mathbf{x}) &= \bar{u}_{*i}(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Gamma, \quad t \geq t_0, \quad i = 1, 2 \end{aligned} \quad (7)$$

граничные условия, а также начальные условия в момент времени  $t = t_0$  [13]

$$\begin{aligned} w(t_0, \mathbf{x}) &= U_{03}(\mathbf{x}), \quad \dot{w}(t_0, \mathbf{x}) = V_{03}(\mathbf{x}), \quad 2hu_i(t_0, \mathbf{x}) = u_{0i}(\mathbf{x}), \\ \frac{2}{3}h^3 \gamma_{i3}(t_0, \mathbf{x}) &= \bar{u}_{0i}(\mathbf{x}), \quad 2h\dot{u}_i(t_0, \mathbf{x}) = v_{0i}(\mathbf{x}), \quad \frac{2}{3}h^3 \dot{\gamma}_{i3}(t_0, \mathbf{x}) = \bar{v}_{0i}(\mathbf{x}), \\ \mathbf{x} \in G, \quad i = 1, 2, \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} u_{*i}(t, \mathbf{x}) &\equiv \int_{-h}^h U_{*i}(t, \mathbf{r}) dx_3, \quad \bar{u}_{*i}(t, \mathbf{x}) \equiv \int_{-h}^h U_{*i}(t, \mathbf{r}) x_3 dx_3, \\ u_{0i}(\mathbf{x}) &\equiv \int_{-h}^h U_{0i}(\mathbf{r}) dx_3, \quad \bar{u}_{0i}(\mathbf{x}) \equiv \int_{-h}^h U_{0i}(\mathbf{r}) x_3 dx_3, \\ v_{0i}(\mathbf{x}) &\equiv \int_{-h}^h V_{0i}(\mathbf{r}) dx_3, \quad \bar{v}_{0i}(\mathbf{x}) \equiv \int_{-h}^h V_{0i}(\mathbf{r}) x_3 dx_3, \quad i = 1, 2; \end{aligned} \quad (9)$$

$\Gamma$  — контур, ограничивающий область  $G$ ;  $F_i$  — мембранные силы, заданные на  $\Gamma$  и действующие в направлениях  $x_i$  ( $i = 1, 2$ );  $F_{n3}$  — поперечная сила, заданная на  $\Gamma$ ;  $M_{nn}, M_{n\tau}$  — изгибающий и крутящий моменты, заданные на  $\Gamma$ ;  $\alpha$  — угол, задающий направление внешней нормали к  $\Gamma$  и отсчитываемый от оси  $x_1$ ;  $U_{*j}$  — заданные на кромке полой оболочки перемещения;  $U_{0j}, V_{0j}$  ( $j = \bar{1}, \bar{3}$ ) — перемещения и скорости точек панели, заданные в начальный момент времени. Возможно задание и пяти смешанных из (6) и (7) граничных условий, например при моделировании свободного опирания кромки [8].

Для замыкания системы уравнений (2), (4) при учете (5) необходимо построить определяющие соотношения для композитной среды, связывающие

между собой осредненные напряжения  $\sigma_{ij}$  и деформации  $\varepsilon_{ij}$  композиции пологой оболочки и/или их скоростей. Определить фактическое распределение напряжений и деформаций в КМ, в котором связующее усилено достаточно произвольно ориентированными волокнами (рис. 1), затруднительно даже в линейно-упругом случае [7], тем более это касается случая вязкоупругопластического деформирования компонентов композиции. Поэтому для получения практически пригодных в инженерных приложениях определяющих соотношений неупругого поведения рассматриваемой КМ-среды используем исходные предпосылки, аналогичные принятым в [7, 21].

1. В пределах репрезентативной ячейки на макроуровне КМ является квазиоднородным анизотропным телом. (При достаточно густом и равномерном усилении связующей матрицы тонкими волокнами данная гипотеза вполне приемлема [7].)
2. Волокна и связующее контактируют без отрыва и проскальзывания.
3. В пределах представительного элемента, выделенного из КМ на микроуровне, деформации, напряжения и их скорости во всех компонентах и в композиции кусочно-постоянны. Эффекты высших порядков, обусловленные изменением полей деформаций и напряжений на микроуровне в малых окрестностях границ контакта арматуры со связующим, не учитываются.
4. Поля деформаций, напряжений и их скоростей в композиции усредняются по объему репрезентативной ячейки. Согласно допущению 3, — пропорционально относительному объемному содержанию каждого составляющего композиции  $\omega_k$ ,  $0 \leq k \leq K$  (см. (1)).
5. Материалы компонентов композиции однородны и изотропны; их вязкоупругопластическое поведение определяется соотношениями [21, 23]:

$$\dot{\sigma}_{ij}^{(k)} = 2G^{(k)}\dot{\varepsilon}_{ij}^{(k)} + \delta_{ij}\lambda^{(k)}\dot{\varepsilon}_{ll}^{(k)} - B^{(k)}\sigma_{ij}^{(k)} + \delta_{ij}D^{(k)}\sigma_{ll}^{(k)} - A^{(k)}s_{ij}^{(k)}s_{ml}^{(k)}\dot{\varepsilon}_{ml}^{(k)}, \quad (10)$$

$$i, j = 1, 2, 3, \quad 0 \leq k \leq K,$$

где

$$A^{(k)} = \frac{G^{(k)}\kappa^{(k)}}{T_k^2}, \quad B^{(k)} = \frac{G^{(k)}}{\eta^{(k)}}(1 - \kappa^{(k)}), \quad D^{(k)} = \frac{1}{3}\left(B^{(k)} - \frac{K^{(k)}}{\mu^{(k)}}\right),$$

$$\kappa^{(k)} = \frac{c^{(k)}}{1 + g^{(k)}}, \quad g^{(k)} = \frac{\bar{G}^{(k)}}{G^{(k)}}, \quad \lambda^{(k)} = \frac{\nu^{(k)}E^{(k)}}{(1 + \nu^{(k)})(1 - 2\nu^{(k)})},$$

$$G^{(k)} = \frac{E^{(k)}}{2(1 + \nu^{(k)})}, \quad K^{(k)} = \frac{E^{(k)}}{3(1 - 2\nu^{(k)})}, \quad (11)$$

$$c^{(k)} = \begin{cases} 0, & T_k < \tau_s^{(k)}(\chi^{(k)}) \text{ или } T_k = \tau_s^{(k)}(\chi^{(k)}), \\ & s_{ij}^{(k)}\dot{\varepsilon}_{ij}^{(k)} \leq (\tau_s^{(k)}(\chi^{(k)}))^2(\eta^{(k)})^{-1}, \\ 1, & T_k = \tau_s^{(k)}(\chi^{(k)}), s_{ij}^{(k)}\dot{\varepsilon}_{ij}^{(k)} > (\tau_s^{(k)}(\chi^{(k)}))^2(\eta^{(k)})^{-1}, \end{cases}$$

$$T_k = \sqrt{\frac{1}{2}s_{ij}^{(k)}s_{ij}^{(k)}}, \quad \chi^{(k)} = \int_{t_0}^t \sqrt{2\dot{p}_{ij}^{(k)}\dot{p}_{ij}^{(k)}} dt,$$

$$s_{ij}^{(k)} = \sigma_{ij}^{(k)} - \delta_{ij}\sigma_0^{(k)}, \quad \sigma_0^{(k)} = \frac{1}{3}\sigma_{ll}^{(k)};$$

$\sigma_{ij}^{(k)}, \varepsilon_{ij}^{(k)}$  — компоненты тензоров напряжений и деформаций;  $p_{ij}^{(k)}$  — компоненты тензора пластических деформаций, причем  $p_{ll}^{(k)} = 0$ ;  $E^{(k)}$ ,  $\nu^{(k)}$  — модуль Юнга и коэффициент Пуассона;  $\eta^{(k)}, \mu^{(k)}$  — коэффициенты линейной вязкости при сдвиге и объемном расширении-сжатии;  $\tau_s^{(k)}$  — функция упрочнения при чистом сдвиге, зависящая от параметра упрочнения  $\chi^{(k)}$  (параметра Одквиста [23]);  $\bar{G}^{(k)}$  — касательный модуль на диаграмме чистого сдвига  $\tau^{(k)} \sim \gamma_p^{(k)}$ ;  $\gamma_p^{(k)}$  — пластическая составляющая полной угловой деформации при чистом сдвиге;  $\tau^{(k)}$  — касательное напряжение при чистом сдвиге; индекс  $k$  — номер компонента композиции ( $k = 0$  — связующее,  $k \geq 1$  — арматура  $k$ -того семейства).

Равенства (10) при учете (11) получены в предположении, что малые деформации  $\varepsilon_{ij}^{(k)}$  могут быть представлены в виде суммы вязкоупругих  $e_{ij}^{(k)}$  и пластических  $p_{ij}^{(k)}$  составляющих, причем  $p_{ij}^{(k)}$  определяются соотношениями теории пластического течения с изотропным упрочнением, а  $e_{ij}^{(k)}$  описываются уравнениями модели тела Максвелла–Больцмана [23]:

$$\dot{e}_{ij}^{(k)} = \frac{\dot{s}_{ij}^{(k)}}{2G^{(k)}} + \frac{s_{ij}^{(k)}}{2\eta^{(k)}}, \quad \dot{e}_0^{(k)} = \varepsilon_0^{(k)} = \frac{\dot{\sigma}_0^{(k)}}{3K^{(k)}} + \frac{\sigma_0^{(k)}}{3\mu^{(k)}}, \quad j = \overline{1, 3}, \quad 0 \leq k \leq K, \quad (12)$$

где

$$e_0^{(k)} = \frac{1}{3}\varepsilon_{ll}^{(k)}, \quad e_{ll}^{(k)} = \frac{1}{3}e_{ll}^{(k)}, \quad \bar{e}_{ij}^{(k)} = e_{ij}^{(k)} - \delta_{ij}e_0^{(k)}. \quad (13)$$

Если вязкими свойствами  $k$ -го компонента композиции пренебрегаем ( $\eta^{(k)} \rightarrow \infty, \mu^{(k)} \rightarrow \infty$ ), то соотношения (12) при учете (13) редуцируются в закон Гука, а уравнения (10) — в определяющие соотношения ТПРХ, так как на основании (11) имеем  $B^{(k)} = D^{(k)} = 0$  ( $0 \leq k \leq K$ ).

Для удобства дальнейшего изложения равенства (10) перепишем в матричной форме [21]:

$$\dot{\sigma}_k = \mathbf{Z}_k \dot{\varepsilon}_k + \mathbf{V}_k \sigma_k \quad (\mathbf{Z}_k = \bar{\mathbf{Z}}_k - \bar{\bar{\mathbf{Z}}}_k), \quad k = 0, 1, \dots, K. \quad (14)$$

Здесь и далее:

$$\begin{aligned} \sigma_k &= \{\sigma_1^{(k)}, \sigma_2^{(k)}, \sigma_3^{(k)}, \sigma_4^{(k)}, \sigma_5^{(k)}, \sigma_6^{(k)}\}^\top \equiv \{\sigma_{11}^{(k)}, \sigma_{22}^{(k)}, \sigma_{33}^{(k)}, \sigma_{23}^{(k)}, \sigma_{31}^{(k)}, \sigma_{12}^{(k)}\}^\top, \\ \varepsilon_k &= \{\varepsilon_1^{(k)}, \varepsilon_2^{(k)}, \varepsilon_3^{(k)}, \varepsilon_4^{(k)}, \varepsilon_5^{(k)}, \varepsilon_6^{(k)}\}^\top \equiv \{\varepsilon_{11}^{(k)}, \varepsilon_{22}^{(k)}, \varepsilon_{33}^{(k)}, 2\varepsilon_{23}^{(k)}, 2\varepsilon_{31}^{(k)}, 2\varepsilon_{12}^{(k)}\}^\top, \\ \mathbf{s}_k &= \{s_1^{(k)}, s_2^{(k)}, s_3^{(k)}, s_4^{(k)}, s_5^{(k)}, s_6^{(k)}\}^\top \equiv \{s_{11}^{(k)}, s_{22}^{(k)}, s_{33}^{(k)}, s_{23}^{(k)}, s_{31}^{(k)}, s_{12}^{(k)}\}^\top; \end{aligned} \quad (15)$$

$\mathbf{Z}_k = (z_{ij}^{(k)})$ ,  $\bar{\mathbf{Z}}_k = (\bar{z}_{ij}^{(k)})$ ,  $\bar{\bar{\mathbf{Z}}}_k = (\bar{\bar{z}}_{ij}^{(k)})$ ,  $\mathbf{V}_k = (v_{ij}^{(k)})$  — симметричные матрицы  $6 \times 6$ , ненулевые компоненты которых выражаются так (см. (10) и (11)):

$$\begin{aligned} v_{ij}^{(k)} &= D^{(k)} - \delta_{ij}B^{(k)}, \quad v_{ll}^{(k)} = -B^{(k)}, \quad \bar{z}_{ij}^{(k)} = 2\delta_{ij}G^{(k)} + \lambda^{(k)}, \\ \bar{\bar{z}}_{ll}^{(k)} &= G^{(k)} \quad (i, j = \overline{1, 3}, l = \overline{4, 6}), \quad \bar{\bar{z}}_{ij}^{(k)} = A^{(k)} s_i^{(k)} s_j^{(k)} \quad (i, j = \overline{1, 6}); \end{aligned} \quad (16)$$

$A^{(k)}$  определяется выражением (11), где с учетом (15) имеем

$$T_k^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 (s_i^{(k)})^2 + \sum_{i=4}^6 (s_i^{(k)})^2, \quad (17)$$

$$c^{(k)} = \begin{cases} 0, & T_k < \tau_s^{(k)}(\chi^{(k)}) \text{ или } T_k = \tau_s^{(k)}(\chi^{(k)}), \\ & \mathbf{s}_k^\top \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_k \leq (\tau_s^{(k)}(\chi^{(k)}))^2 (\eta^{(k)})^{-1}, \\ 1, & T_k = \tau_s^{(k)}(\chi^{(k)}), \mathbf{s}_k^\top \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_k > (\tau_s^{(k)}(\chi^{(k)}))^2 (\eta^{(k)})^{-1}; \end{cases}$$

$\top$  — символ операции транспонирования. Равенства (15) определяют соответствия между шестью компонентами  $f_i^{(k)}$  ( $i = \overline{1,6}$ ) некоторого вектора  $\mathbf{f}_k$  и компонентами соответствующего симметричного тензора второго ранга  $f_{jl}^{(k)}$  ( $j, l = \overline{1,3}, 0 \leq k \leq K$ ). В соотношениях (16) по повторяющемуся индексу  $l$  суммирование нет.

Как и в [13, 21], для интегрирования рассматриваемой задачи используем алгоритм шагов по времени [2, 10, 25, 26], вычисляя значения неизвестных функций в дискретные моменты времени  $t_{n+1} = t_n + \Delta$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ), где  $\Delta$  — шаг по времени. Предполагаем, что в предыдущий момент времени  $t_{n-1}$  уже известны значения функций:

$$\boldsymbol{\sigma}_k^{n-1}(\mathbf{r}) \equiv \boldsymbol{\sigma}_k(t_{n-1}, \mathbf{r}), \quad \dot{\boldsymbol{\sigma}}_k^{n-1}(\mathbf{r}) \equiv \dot{\boldsymbol{\sigma}}_k(t_{n-1}, \mathbf{r}), \quad 0 \leq k \leq K. \quad (18)$$

Далее разрабатывается явная численная схема типа «крест» на трехточечном шаблоне по времени  $\{t_{n-1}, t_n, t_{n+1}\}$ , имеющая второй порядок точности по  $\Delta$  [10, 13, 21], поэтому преобразуем второе слагаемое в правой части соотношения (14), используя для этого формулу трапеций, которая также имеет второй порядок точности по  $\Delta$  [27]. Согласно этой формуле, для текущего момента времени  $t_n$  имеем

$$\boldsymbol{\sigma}_k^n - \boldsymbol{\sigma}_k^{n-1} = \frac{\Delta}{2} (\dot{\boldsymbol{\sigma}}_k^n + \dot{\boldsymbol{\sigma}}_k^{n-1}), \quad 0 \leq k \leq K. \quad (19)$$

При  $t = t_n$  исключим из (14) за счет (19) вектор-столбец  $\boldsymbol{\sigma}_k^n$ , тогда получим преобразованное матричное соотношение

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}_k^n = \mathbf{B}_k^n \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_k^n + \mathbf{p}_k^n, \quad 0 \leq k \leq K, \quad (20)$$

где

$$\mathbf{B}_k^n \equiv \bar{\mathbf{V}}_k^{n-1} \mathbf{Z}_k^n, \quad \mathbf{p}_k^n \equiv \bar{\mathbf{V}}_k^{n-1} \mathbf{V}_k^n \boldsymbol{\sigma}_k^{n-1/2}, \quad \bar{\mathbf{V}}_k^n \equiv \mathbf{I} - \frac{\Delta}{2} \mathbf{V}_k^n; \quad (21)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_k^{n-1/2} = \boldsymbol{\sigma}_k^{n-1} + \frac{\Delta}{2} \dot{\boldsymbol{\sigma}}_k^{n-1}, \quad 0 \leq k \leq K; \quad (22)$$

$\mathbf{I}$  — единичная матрица  $6 \times 6$ ;  $\bar{\mathbf{V}}_k^{n-1}$  — матрица  $6 \times 6$ , обратная матрице  $\bar{\mathbf{V}}_k^n$ .

Согласно выражению (22) с учетом (18), вектор-столбец  $\boldsymbol{\sigma}_k^{n-1/2}$  в (21) известен.



Элементы матриц  $\mathbf{Z}_k$  и  $\mathbf{V}_k$  зависят от решения задачи (см. (11), (14), (16) и (17)), поэтому в текущий момент времени  $t_n$  эти матрицы, а следовательно, в силу (21)  $6 \times 6$ -матрица  $\mathbf{B}_k^n$  и шестикомпонентный вектор-столбец  $\mathbf{p}_k^n$  предполагаются линейаризованными по методу, аналогичному методу переменных параметров упругости [28]. А значит, при  $t = t_n$  на каждой итерации этого метода вектор  $\mathbf{p}_k^n$  в равенстве (20) с учетом (21) и (22) известен. При  $\mathbf{p}_k^n = \mathbf{0}$  уравнение (20) редуцируется в матричное определяющее соотношение ТПРХ (см. (3) в [21]).

Линейаризованное уравнение (20) формально совпадает с соотношениями Дюамеля—Неймана для анизотропной среды [7, 20], причем компоненты вектора-столбца  $\mathbf{p}_k^n$  можно трактовать как известные на текущей итерации скорости температурных напряжений. Так как исходные допущения 1–5 аналогичны предпосылкам, принятым в [20, 21], повторяя рассуждения из [20, 21] с учетом (1) и (20), в данный момент времени  $t_n$  на текущей итерации получим линейаризованное матричное уравнение, описывающее вязкоупругопластическое поведение КМ:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{B} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \mathbf{p}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (23)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &\equiv \left( \omega_0 \mathbf{B}_0 + \sum_{k=1}^K \omega_k \mathbf{B}_k \mathbf{E}_k \right) \mathbf{H}^{-1}, \quad \mathbf{p} \equiv \mathbf{f} - \mathbf{B} \mathbf{g}, \\ \mathbf{f} &\equiv \omega_0 \mathbf{p}_0 + \sum_{k=1}^K \omega_k (\mathbf{p}_k + \mathbf{B}_k \mathbf{r}_k), \\ \mathbf{H} &\equiv \omega_0 \mathbf{I} + \sum_{k=1}^K \omega_k \mathbf{E}_k, \quad \mathbf{g} \equiv \sum_{k=1}^K \omega_k \boldsymbol{\Gamma}_k, \\ \mathbf{r}_k &\equiv \mathbf{D}_k^{-1} \boldsymbol{\varsigma}_k, \quad \mathbf{E}_k \equiv \mathbf{D}_k^{-1} \mathbf{C}_k, \quad 1 \leq k \leq K; \end{aligned} \quad (24)$$

$\dot{\boldsymbol{\sigma}}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$  — шестикомпонентные векторы-столбцы скоростей осредненных напряжений  $\dot{\sigma}_{ij}$  и деформаций  $\dot{\varepsilon}_{ij}$  композиции, по структуре аналогичные (15);  $\mathbf{B}, \mathbf{E}_k, \mathbf{C}_k$  — матрицы  $6 \times 6$ ;  $\mathbf{D}_k^{-1}, \mathbf{H}^{-1}$  — матрицы  $6 \times 6$ , обратные матрицам  $\mathbf{D}_k$  и  $\mathbf{H}$ ;  $\mathbf{p}, \mathbf{f}, \mathbf{g}, \mathbf{r}_k, \boldsymbol{\varsigma}_k$  — шестикомпонентные векторы-столбцы. Элементы  $c_{ij}^{(k)}, d_{ij}^{(k)}$  и  $\varsigma_i^{(k)}$  матриц  $\mathbf{C}_k, \mathbf{D}_k$  и векторов-столбцов  $\boldsymbol{\varsigma}_k$  вычисляются так:

$$\begin{aligned} c_{1j}^{(k)} = d_{1j}^{(k)} = q_{1j}^{(k)}, \quad c_{ij}^{(k)} = \sum_{l=1}^6 g_{il}^{(k)} b_{lj}^{(0)}, \quad d_{ij}^{(k)} = \sum_{l=1}^6 g_{il}^{(k)} b_{lj}^{(k)}, \quad \varsigma_1^{(k)} = 0, \\ \varsigma_i^{(k)} = \sum_{l=1}^6 g_{il}^{(k)} (p_l^{(0)} - p_l^{(k)}), \quad i = \overline{2, 6}, \quad j = \overline{1, 6}, \quad 1 \leq k \leq K; \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} g_{11}^{(k)} = q_{11}^{(k)} = l_{11}^{(k)} l_{11}^{(k)}, \quad g_{12}^{(k)} = q_{12}^{(k)} = l_{12}^{(k)} l_{12}^{(k)}, \quad \dots, \\ g_{16}^{(k)} = 2q_{16}^{(k)} = 2l_{12}^{(k)} l_{11}^{(k)}, \quad \dots, \quad 2g_{61}^{(k)} = q_{61}^{(k)} = 2l_{21}^{(k)} l_{11}^{(k)}, \quad \dots, \\ g_{66}^{(k)} = q_{66}^{(k)} = l_{11}^{(k)} l_{22}^{(k)} + l_{12}^{(k)} l_{21}^{(k)}, \quad 1 \leq k \leq K; \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned}
 l_{11}^{(k)} &= \sin \theta_k \cos \varphi_k, & l_{12}^{(k)} &= \sin \theta_k \sin \varphi_k, & l_{13}^{(k)} &= \cos \theta_k, \\
 l_{21}^{(k)} &= -\sin \varphi_k, & l_{22}^{(k)} &= \cos \varphi_k, & l_{23}^{(k)} &= 0, & l_{31}^{(k)} &= -\cos \theta_k \cos \varphi_k, \\
 l_{32}^{(k)} &= -\cos \theta_k \sin \varphi_k, & l_{33}^{(k)} &= \sin \theta_k, & & & & 1 \leq k \leq K;
 \end{aligned} \tag{27}$$

$p_i^{(k)}$  — элементы вектора-столбца  $\mathbf{p}_k$  (см. (20)). Невыписанные в (26) элементы  $g_{ij}^{(k)}, q_{ij}^{(k)}$   $6 \times 6$ -матриц  $\mathbf{G}_k, \mathbf{Q}_k$  приведены в табл. (21.40) и (21.44) в [7]. Матрицы  $\mathbf{G}_k$  и  $\mathbf{Q}_k$  определяют преобразование (см. (7) в [21]) векторов-столбцов  $\boldsymbol{\sigma}_k$  и  $\boldsymbol{\varepsilon}_k$  (см. (15)) при переходе от глобальной системы координат  $x_j$  к локальной системе  $x_i^{(k)}$ , связанной с волокнами  $k$ -того семейства. При этом ось  $x_1^{(k)}$  направлена вдоль траектории армирования и задается углами сферической системы координат  $\theta_k$  и  $\varphi_k$  (рис. 2). В этом случае направляющие косинусы  $l_{ij}^{(k)}$  между осями  $x_i^{(k)}$  и  $x_j$  ( $i, j = \overline{1, 3}$ ) вычисляются по формулам (27). (В равенствах (24) и (25) для упрощения записи опущен верхний индекс  $n$ ).

Как и в работах [20, 21], при выводе соотношений (23) и (24) попутно получают линейризованные матричные равенства

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_0^n = \mathbf{H}^{-1} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^n - \mathbf{H}^{-1} \mathbf{g}, \quad \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_k^n = \mathbf{E}_k \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_0^n + \mathbf{r}_k^n, \quad 1 \leq k \leq K. \tag{28}$$

В текущий момент времени  $t_n$  на данной итерации первое соотношение (28) определяет скорости деформаций связующего  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_0$  через скорости осредненных деформаций КМ  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ . Второе равенство (28) выражает скорости деформаций арматуры  $k$ -того семейства  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_k$  через скорости деформаций связующего материала  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_0$ .

Согласно формулам (16), (17) и (24)–(27), при  $t = t_n$  на текущей итерации матрицы  $\mathbf{B}, \mathbf{H}^{-1}, \mathbf{E}_k$  и векторы-столбцы  $\mathbf{p}, \mathbf{g}, \mathbf{r}_k$  в равенствах (23) и (28) известны. Если вязкоупругие свойства материалов, составляющих композицию, не учитываются ( $\eta^{(k)} \rightarrow \infty, \mu^{(k)} \rightarrow \infty, 0 \leq k \leq K$ ), то на основании (11), (12), (16), (17), (24) и (25) в равенстве (23) получаем  $\mathbf{P}^n \equiv \mathbf{0}$  и оно редуцируется в матричное определяющее уравнение для пространственно армированного КМ, полученное ранее в рамках ТПРХ (см. соотношение (10) в [21]). Таким

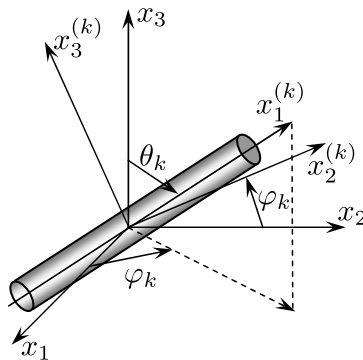


Рис. 2. Локальная система координат, связанная с волокнами  $k$ -того семейства  
 [Figure 2. Local coordinate system associated with  $k$ -th family of fibers]

образом, уравнение (23) является обобщением структурных соотношений, выведенных в [21].

Так как исследуется механическое поведение полой КМ-оболочки как гибкой тонкостенной системы, напряжение  $\sigma_{33}(t, \mathbf{r})$  с приемлемой для практических приложений точностью можно аппроксимировать так [9]:

$$\sigma_{33}(t, \mathbf{r}) \equiv \sigma_3(t, \mathbf{r}) = \frac{\sigma_{33}^{(+)}(t, \mathbf{x}) - \sigma_{33}^{(-)}(t, \mathbf{x})}{2h} x_3 + \frac{\sigma_{33}^{(+)}(t, \mathbf{x}) + \sigma_{33}^{(-)}(t, \mathbf{x})}{2}, \quad |x_3| \leq h. \quad (29)$$

Матричное уравнение (23) — система шести алгебраических равенств. На основании соотношений соответствия, аналогичных (15), при  $t = t_n$  из третьего уравнения этой системы получаем

$$\dot{\varepsilon}_{33}^n \equiv \varepsilon_3^n = \frac{1}{b_{33}} \left( \dot{\sigma}_3^n - \sum_{i=1}^6 (1 - \delta_{3i}) b_{3i}^n \varepsilon_i^n - p_3^n \right), \quad (30)$$

где  $b_{3i}, p_3$  ( $i = \overline{1, 6}$ ) — элементы матрицы  $\mathbf{B}$  и вектора-столбца  $\mathbf{p}$  в (23); производная  $\dot{\sigma}_3$  известна после дифференцирования (29) по времени  $t$ . Скорости деформаций  $\dot{\varepsilon}_i$  в правой части равенства (30) получаются путем дифференцирования по  $t$  равенств (2), т. е. выражаются через  $w, \dot{w}, \dot{u}_l, \dot{\varepsilon}_{l3}^0$  ( $l = 1, 2$ ).

**2. Метод численного интегрирования.** Как отмечалось в предыдущем разделе, для решения рассматриваемой задачи используется метод шагов по времени [2, 10, 13, 21, 25, 26, 28]. В связи с этим предполагаем, что в моменты времени  $t_m$  помимо (18) уже известны значения следующих функций:

$$\begin{aligned} u_l^m(\mathbf{x}) &\equiv u_l(t_m, \mathbf{x}), & w^m(\mathbf{x}) &\equiv w(t_m, \mathbf{x}), & \gamma_{l3}^m(\mathbf{x}) &\equiv \gamma_{l3}(t_m, \mathbf{x}), \\ \sigma_{ij}^m(\mathbf{r}) &\equiv \sigma_{ij}(t_m, \mathbf{r}), & \sigma_k^m(\mathbf{r}) &\equiv \sigma_k(t_m, \mathbf{r}), & l = 1, 2, & i, j = \overline{1, 3}, \\ m = n - 1, n, & 0 \leq k \leq K, & \mathbf{x} \in G, & |x_3| \leq h, \end{aligned} \quad (31)$$

тогда, используя формулы (5), при  $t = t_n$  можем определить все силовые факторы и внешние силы в правых частях уравнений (4).

Как и в работах [13, 21, 29], для аппроксимации производных по  $t$  используем соответствующие центральные разности на трехточечном шаблоне. Такой подход позволяет разработать явную численную схему интегрирования исследуемой задачи. После замены вторых производных по времени  $t$  в левых частях уравнений (4) их конечно-разностными аналогами, учитывая обозначения, аналогичные (18) и (31), получим

$$\begin{aligned} \frac{2h\rho}{\Delta^2} (w^{n+1} - 2w^n + w^{n-1}) &= \sum_{l=1}^2 \left[ \partial_l \left( F_{l3}^n + \sum_{j=1}^2 F_{lj}^n \partial_j w^n \right) + R_l^{-1} F_{ll}^n \right] + \\ &+ X_3^n + \sigma_{33}^{(+)} - \sigma_{33}^{(-)}, \end{aligned}$$

$$\frac{2h\rho}{\Delta^2}(u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1}) = \sum_{j=1}^2 \partial_j (F_{ij}^n - F_{j3}^n \partial_i w) + R_i^{-1} F_{i3}^n + X_i^n, \quad (32)$$

$$\frac{2h^3\rho}{3\Delta^2}(\gamma_{i3}^{n+1} - 2\gamma_{i3}^n + \gamma_{i3}^{n-1}) = \sum_{j=1}^2 \partial_j M_{ij}^n - F_{i3}^n + m_i, \quad \mathbf{x} \in G, \quad i = 1, 2, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Правые части в равенствах (32) известны, поэтому из них вычисляем функции  $w^{n+1}$ ,  $u_i^{n+1}$  и  $\gamma_{i3}^{n+1}$ , зная которые, по формулам (2) и (5) определяем осредненные деформации композиции  $\varepsilon_{ij}^{n+1}$ . В силу того что при  $t = t_{n-1}$  деформации  $\varepsilon_{ij}^{n-1}$  также уже известны (см. (2) и (5) с учетом (31)), применяя формулы численного дифференцирования и используя (30), вычисляем скорости осредненных деформаций  $\dot{\varepsilon}_{ij}^n$ . Далее по формулам (28) при учете соответствий (15) определяем скорости деформаций составляющих элементов композиции  $\dot{\varepsilon}_k^n$ , а по формулам (20) — скорости напряжений в компонентах композиции  $\dot{\sigma}_k^n$  ( $0 \leq k \leq K$ ).

Структура левых частей уравнений (32) свидетельствует о том, что для начала расчетов по предложенной численной схеме необходимо знать значения функций  $w^m$ ,  $u_i^m$ ,  $\gamma_{i3}^m$  ( $m = 0, 1$ ). Функции  $w^0$ ,  $u_i^0$  и  $\gamma_{i3}^0$  определяются начальными условиями (8) с учетом (9), а функции  $w^1$ ,  $u_i^1$  и  $\gamma_{i3}^1$  можно рассчитать по формуле Тейлора:

$$\begin{aligned} w^1(\mathbf{x}) &= w^0(\mathbf{x}) + \Delta \dot{w}^0(\mathbf{x}) + \frac{\Delta^2}{2} \ddot{w}^0(\mathbf{x}) + O(\Delta^3) \approx 0, \\ u_i^1(\mathbf{x}) &= u_i^0(\mathbf{x}) + \Delta \dot{u}_i^0(\mathbf{x}) + \frac{\Delta^2}{2} \ddot{u}_i^0(\mathbf{x}) + O(\Delta^3) \approx 0, \\ \gamma_{i3}^1(\mathbf{x}) &= \gamma_{i3}^0(\mathbf{x}) + \Delta \dot{\gamma}_{i3}^0(\mathbf{x}) + \frac{\Delta^2}{2} \ddot{\gamma}_{i3}^0(\mathbf{x}) + O(\Delta^3) \approx 0, \quad i = 1, 2, \quad \mathbf{x} \in G, \end{aligned} \quad (33)$$

где производные  $\dot{w}^0$ ,  $\dot{u}_i^0$  и  $\dot{\gamma}_{i3}^0$  также известны из начальных условий (8), а ускорения  $\ddot{w}^0$ ,  $\ddot{u}_i^0$  и  $\ddot{\gamma}_{i3}^0$  вычисляются на основе уравнений (4) при  $t = t_0$ . Приближенные равенства в (33) выполняются, если до начального момента времени  $t_0$  конструкция покоится и внешние нагрузки отсутствуют ( $\sigma_{33}^{(\pm)} = 0$ ,  $X_i = 0$ ,  $m_j = 0$ ,  $i = \overline{1, 3}$ ,  $j = 1, 2$ ).

Если область  $G$  является прямоугольной, то после замены в соотношениях (6) и (32) производных  $\partial_i(\cdot)$  их конечно-разностными аналогами получим явную численную схему «крест» [10, 13, 21, 29]. В случае неканонической области  $G$  для дискретизации равенств (6) и (32) по переменным  $x_i$  ( $i = 1, 2$ ) целесообразно использовать вариационно-разностный подход [10]. Необходимые условия устойчивости построенной численной схемы типа «крест» следуют из критерия устойчивости Куранта [10] и для исследуемой полой КМ-оболочки определяются неравенствами, аналогичными (60) из [29]. В остальном разработанная схема реализуется так же, как и в [13, 21, 29].

**3. Обсуждение результатов расчетов.** В качестве конкретных примеров исследуем динамическое поведение цилиндрических удлиненных КМ-панелей толщиной  $2h = 2$  см, имеющих в плане прямоугольную форму ( $G: |x_1| \leq a, |x_2| \leq b, a = 3b$ ). Панели изогнуты в направлении  $Ox_2$  ( $1/R_1 = 0, R_2 \equiv R = \text{const}$ ). При этом радиус кривизны  $R$  выражается через стрелу подъема  $f$  над кромками  $|x_2| = b$  так:  $R = (b^2 + f^2)/(2f)$ , причем  $0 \leq f \leq 2b/5$  [8]. В расчетах принято  $b = 25$  см и  $f = 12$  см.

Пологие оболочки жестко закреплены по всей кромке (см. (7), (9) при учете  $U_{*i} \equiv 0$ ) и до начального момента времени  $t_0 = 0$  покоятся (см. (8), (9) при учете  $U_{0i} \equiv 0$  и  $V_{0i} \equiv 0$ ). Массовые нагрузки не учитываются (см. (4), (32) при учете  $X_i \equiv 0$  и  $m_j \equiv 0, i = 1, 3, j = 1, 2$ ). Панели нагружаются внешним давлением, вызванным приходом воздушной взрывной волны [25]:

$$p(t) = \begin{cases} p_{\max} t/t_{\max}, & 0 \leq t \leq t_{\max}, \\ p_{\max} \exp[-\alpha(t - t_{\max})], & t > t_{\max}, \end{cases} \quad (34)$$

где

$$\alpha = -\ln(0.01)/(t_{\min} - t_{\max}) > 0, \quad t_{\min} \gg t_{\max}. \quad (35)$$

Нагрузка прикладывается к верхней (выпуклой) или нижней (вогнутой) лицевой поверхности (см. (4), (29) и (32)), причем

$$\sigma_{33}^{(+)}(t) = \begin{cases} 0, & p_{\max} > 0, \\ p(t), & p_{\max} < 0, \end{cases} \quad \sigma_{33}^{(-)}(t) = \begin{cases} -p(t), & p_{\max} > 0, \\ 0, & p_{\max} < 0. \end{cases} \quad (36)$$

Здесь  $t_{\max}$  — время, при котором  $p(t)$  достигает наибольшего по модулю значения  $|p_{\max}|$ ;  $t_{\min}$  — время, при превышении которого нагрузкой  $|p(t)|$  можно пренебречь по сравнению с  $|p_{\max}|$  (равенство (35) получено при условии  $p(t_{\min}) = 0.01p_{\max}$ ). Согласно экспериментальным данным [25], в расчетах примем  $t_{\max} = 0.1$  мс и  $t_{\min} = 2$  мс. Из соотношений (36) следует, что при  $p_{\max} < 0$  давление (34) действует на верхнюю ( $x_3 = h$ ), а при  $p_{\max} > 0$  — на нижнюю ( $x_3 = -h$ ) лицевую поверхность.

Панели изготовлены из эпоксидной смолы и армированы стекловолокнами марки S-994 [30, 31]. Мгновенное упругопластическое поведение материалов, составляющих композицию, при активном нагружении определяется билинейной диаграммой:

$$\sigma = \begin{cases} E^{(k)}\varepsilon, & |\varepsilon| \leq \varepsilon_s^{(k)} \equiv \sigma_s^{(k)}/E^{(k)}, \\ \text{sign}(\varepsilon)\sigma_s^{(k)} + E_s^{(k)}(\varepsilon - \text{sign}(\varepsilon)\varepsilon_s^{(k)}), & |\varepsilon| > \varepsilon_s^{(k)}, \quad 0 \leq k \leq K, \end{cases} \quad (37)$$

где  $\sigma, \varepsilon$  — напряжение и деформация при растяжении-сжатии;  $E_s^{(k)}$  — модуль линейного упрочнения  $k$ -того компонента композиции;  $\sigma_s^{(k)}, \varepsilon_s^{(k)}$  — условный предел текучести и соответствующая мгновенная деформация. Физико-механические характеристики материалов компонентов композиции приведены в таблице. (Формулы пересчета мгновенной диаграммы деформирования при чистом сдвиге  $\tau \sim \gamma$  через характеристики диаграммы (37) приведены в [29].) Согласно приведенным в таблице данным,  $\mu^{(k)} \rightarrow \infty$ , т. е. объемная вязкость материалов, составляющих композицию, не учитывается (см. (12)).

Структуры армирования квазиоднородны:  $\theta_k = \text{const}, \varphi_k = \text{const}, \omega_k = \text{const}, 1 \leq k \leq K$  (см. (1), (27)). Рассматриваются две структуры:

Physico-mechanical characteristics of the components of composite cylindrical panel [30,31]

Components	$\rho$ , kg/m <sup>3</sup>	$\nu$	$\sigma_s$ , МПа	$E$ , МПа	$E_s$ , МПа	$\eta$ , МПа·с	$\mu$ , МПа·с
Epoxy	1210	0.33	20	2.8	1.114	50	$\infty$
Fiberglass S-994	2520	0.25	4500	86.8	6.230	200	$\infty$

- 1) «плоское» ортогональное 2D-армирование (рис. 1, а), когда два ( $K = 2$ ) семейства волокон укладываются по направлениям  $Ox_1$  и  $Ox_2$  с плотностями армирования  $\omega_1 = \omega_2 = 0.2$ ;
- 2) пространственное 4D-армирование (рис. 1, с), когда два первых семейства волокон укладываются вдоль направлений  $Ox_1$  и  $Ox_2$ , а третье и четвертое семейства — вдоль направлений, задаваемых углами (см. (27) и рис. 2):  $\theta_3 = \pi/4$ ,  $\theta_4 = 3\pi/4$ ,  $\varphi_3 = \varphi_4 = \pi/2$  (т. е. на рис. 1, с угол  $\theta = \pi/4$ ).

В последнем случае плотности армирования имеют значения:  $\omega_1 = 0.1$ ,  $\omega_2 = 0.2$  и  $\omega_3 = \omega_4 = 0.05$ . В обеих структурах армирования общий расход волокон одинаков.

На рис. 3 изображены поперечные колебания центральных точек пологих КМ-оболочек ( $w_0(t) \equiv w(t, 0, 0)$ ), рассчитанные при  $p_{\max} = 15$  МПа (рис. 3, а и при  $p_{\max} = -15$  МПа (рис. 3, б) в окрестности начального момента времени и в окрестности  $t = 150$  мс (рис. 3, с) при  $|p_{\max}| = 15$  МПа. На рис. 4 изображены определенные для тех же случаев осцилляции максимальных значений интенсивности деформаций  $\varepsilon_*^{(k)}$  ( $\varepsilon_m^{(k)}(t) = \max_{\mathbf{r}} \varepsilon_*^{(k)}(t, \mathbf{r})$ ,  $|x_1| \leq a$ ,  $|x_2| \leq b$ ,  $|x_3| \leq h$ ) компонентов композиции. Номера кривых на рис. 3 и 4 (кроме кривой 3) соответствуют номерам структур армирования. Кривые, номера которых не помечены штрихом, соответствуют случаю  $p_{\max} = 15$  МПа (нагружение со стороны нижней вогнутой лицевой поверхности), а кривые, номера которых помечены одним штрихом, — случаю  $p_{\max} = -15$  МПа (нагружение со стороны верхней выпуклой лицевой поверхности). Кривые 1, 1', 2 и 2' на рис. 4, с рассчитаны для связующего ( $k = 0$ ), а кривые 1'', 1''', 2'' и 2''' — для волокон второго семейства ( $k = 2$ ), испытывающих наибольшее деформирование, причем линии 1'' и 2'' соответствуют нагрузке  $p_{\max} = 15$  МПа, а 1''' и 2''' — нагрузке  $p_{\max} = -15$  МПа. Кривые 1'', 1''' на рис. 3, с и кривая 3 на рис. 4, с приведены для сравнения и получены при тех же условиях, что и кривые 1, 1' на рис. 3, с и кривая 1''' на рис. 4, с соответственно, но в рамках ТПРХ [13, 21]:  $\eta^{(k)} \rightarrow \infty$ ,  $0 \leq k \leq K$ ,  $K = 2, 4$ . (Аналогичные кривые на рис. 3, а, 3, б, 4, а и 4, б не изображены, чтобы их не загромождать.)

Поведение кривых 1'', 1''' на рис. 3, с и кривой 3 на рис. 4, с демонстрирует, что в рамках расчетов по ТПРХ пологие КМ-оболочки неограниченно долго колеблются в окрестности нового положения, которое определяется величиной остаточного прогиба. Однако достоверно рассчитать величину остаточного прогиба и остаточных деформаций компонентов композиции в рамках этой теории нельзя. Поведение же остальных кривых на рис. 3 и 4 свидетельствует о том, что, согласно расчетам по разработанной математической модели вязкоупругопластического деформирования пологих КМ-оболочек, их колебания со временем затухают и к моменту времени  $t = 150$  мс фактически прекращаются. Это обстоятельство позволяет определить расчетные остаточные прогибы и остаточные деформации компонентов композиций исследуемых КМ-конструкций.

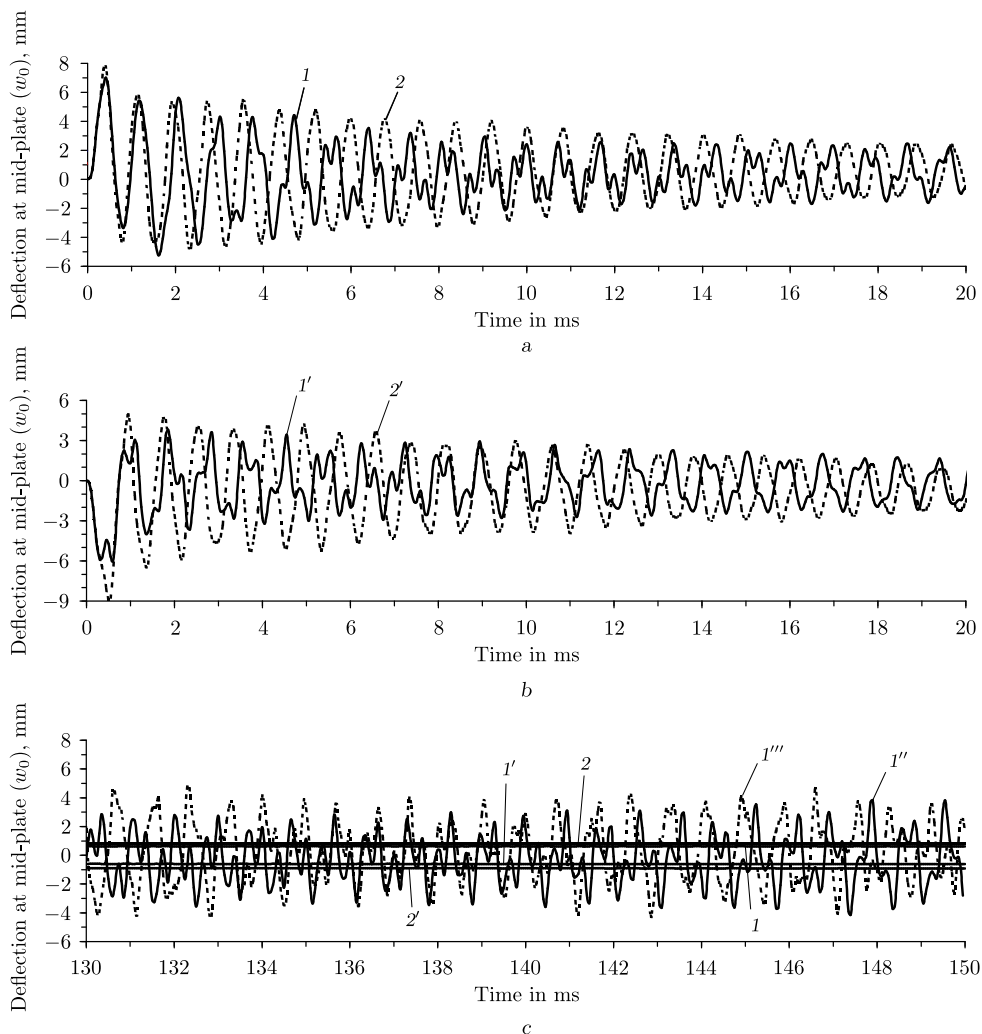


Рис. 3. Поперечные колебания центральных точек пологих КМ-оболочек в окрестности начального момента времени при нагружении снизу (а) и сверху (b) и в окрестности момента времени  $t = 150$  мс (с) — оба варианта нагружения

[Figure 3. The transverse oscillations of the central points of shallow composite shells in the vicinity of the initial moment of time when loading from the bottom (a) and from above (b) and in the vicinity of the time  $t = 150$  ms (c) — both loading options]

Сравнение кривых  $1'''$  и 3 на рис. 4, с, рассчитанных при одних и тех же условиях, но по разным теориям, показывает, что на базе расчетов по ТПРХ даже приближенно невозможно оценить величину остаточных деформаций волокон второго семейства панели с 2D-структурой армирования. Действительно, если осреднить значения локальных максимумов и минимумов кривой 3, то рассчитанная таким образом кривая будет лежать значительно выше линии  $1'''$ . Аналогичный результат справедлив и для кривых на рис. 3, с: осреднение кривых  $1''$  и  $1'''$  приводит к линиям, отличным от кривых 1 и  $1'$  соответственно.

Поведение кривых 1, 2 и  $1'$ ,  $2'$  на рис. 3 показывает, что замена «плоской» 2D-структуры армирования (кривые 1 и  $1'$ ) на пространственную 4D-струк-

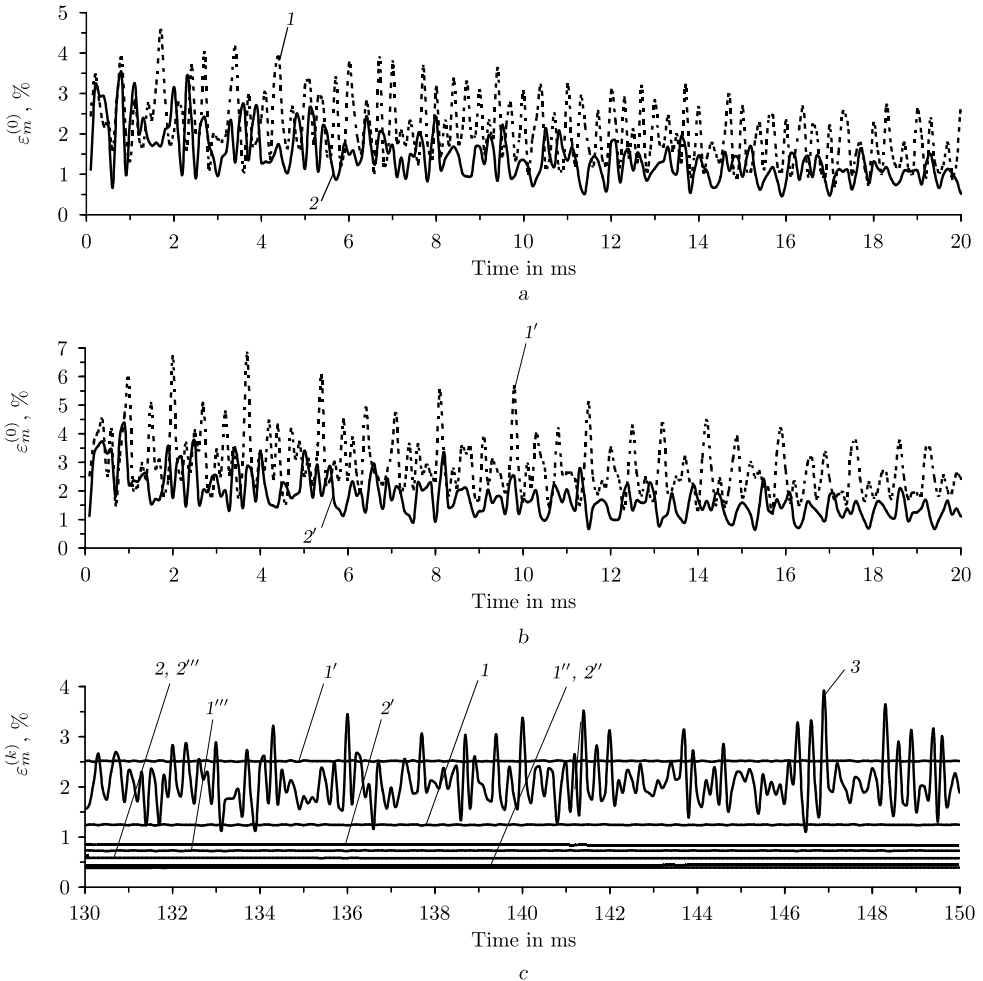


Рис. 4. Зависимость от времени максимального значения интенсивности деформаций компонентов композиций цилиндрической панели в окрестности начального момента времени при нагружении снизу (a) и сверху (b) и в окрестности момента времени  $t = 150$  мс (c) — оба варианта нагружения

[Figure 4. The time dependence of the maximum intensity value of the deformations of the components of the compositions of a cylindrical panel in the vicinity of the initial moment of time when loading from the bottom (a) and from above (b) and in the vicinity of the time  $t = 150$  ms (c) — both loading options]

туру (кривые 2 и 2') для рассматриваемых относительно тонких КМ-панелей не приводит к уменьшению по модулю значений максимального и остаточного прогибов центральных точек соответствующих конструкций.

На рис. 5 изображены эпюры остаточных прогибов  $w(x_2)$ , рассчитанные при  $t = 150$  мс в сечении  $x_1 = 0$ . Номера кривых на рис. 5 соответствуют номерам кривых на рис. 3. Так как решения рассматриваемых задач обладают симметрией ( $w(t, x_1, x_2) = w(t, x_1, -x_2)$ ), на рис. 5 изображены только правые части зависимостей  $w(x_2)$ ,  $0 \leq x_2 \leq b$ . Из рис. 5 видно, что кривые 1, 1' и 2' ведут себя немонотонно. Сравнение кривых на этом рисунке показывает, что при нагружении КМ-конструкции со стороны вогнутой лицевой поверхности (см. кривые 1 и 2) максимальный остаточный прогиб в цилиндри-



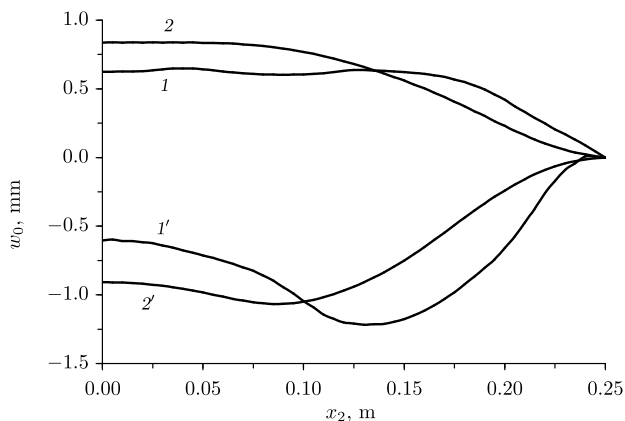


Рис. 5. Зависимость остаточного прогиба от координаты  $x_2$  в поперечном сечении КМ-панели  $x_1 = 0$

[Figure 5. Dependence of residual deflection on the coordinate  $x_2$  in the cross section of the composite panel  $x_1 = 0$ ]

ческой КМ-панели с 4D-структурой армирования больше, чем в конструкции с 2D-структурой, а при нагружении пологой оболочки со стороны выпуклой лицевой поверхности (см. кривые  $1'$  и  $2'$ ), наоборот, максимальный по модулю остаточный прогиб в КМ-панели с 4D-структурой меньше аналогичной величины в оболочке с 2D-структурой армирования.

Сравнение же кривых  $1$ ,  $2$  и  $1'$ ,  $2'$  на рис. 4 показывает, что замена «плоской» структуры 2D-армирования на пространственную 4D-структуру позволяет существенно уменьшить максимальные и остаточные значения интенсивности деформаций связующего материала даже в относительно тонких пологих КМ-оболочках при нагружении их со стороны любой лицевой поверхности.

При неупругом деформировании КМ-конструкции величину остаточных деформаций можно рассматривать как меру поврежденности соответствующего компонента композиции. Согласно этому, поведение кривых  $1$ ,  $2$  и  $1'$ ,  $2'$  на рис. 4 свидетельствует о том, что в пологих КМ-оболочках с 4D-структурами армирования связующее повреждено в гораздо меньшей степени, чем в КМ-панелях с «плоскими» 2D-структурами армирования.

**Заключение.** Разработана математическая модель вязкоупругопластического поведения пространственно армированных пологих оболочек, позволяющая рассчитывать их затухающие колебания, порожденные действием интенсивных кратковременных нагрузок, и определять остаточные прогибы таких конструкций, а также остаточные напряжения и деформации компонентов композиции.

Расчеты показали, что абсолютная величина остаточного прогиба и интенсивности остаточных деформаций материалов компонентов композиции существенно зависят от структуры армирования и от того, к какой лицевой поверхности (выпуклой или вогнутой) прикладывается динамическая нагрузка. Продемонстрировано, что в случае стеклопластиковой композиции замена «плоской» структуры 2D-армирования (рис. 1, а) даже в относительно тонкой искривленной панели на пространственную 4D-структуру (рис. 1, с) может приводить как к увеличению, так и к уменьшению величины макси-

мума остаточного прогиба (в зависимости от того, к какой лицевой поверхности приложена нагрузка). Однако при такой замене структуры армирования всегда наблюдается существенное уменьшение интенсивности остаточных деформаций в связующем материале композиции, что можно трактовать как значительное уменьшение поврежденности этого материала.

Так как высокопрочные стеклянные волокна имеют большие пределы текучести, то при деформировании они запасают упругую энергию в значительном количестве. Поэтому амплитуды осцилляций пологих КМ-оболочек в окрестности начального момента времени в разы превышают абсолютные значения остаточных прогибов. Аналогичное поведение во времени характерно и для максимальных значений интенсивности деформаций компонентов композиции.

**Конкурирующие интересы.** У меня нет конфликта интересов в авторстве и публикации этой статьи.

**Авторская ответственность.** Я несу полную ответственность за предоставление окончательной версии рукописи в печать. Окончательная версия рукописи мною одобрена.

**Финансирование.** Работа выполнена в рамках Программы фундаментальных научных исследований государственных академий наук на 2017–2020 годы (проект 23.4.1 — Механика деформирования и разрушения материалов, сред при механических нагрузках, воздействии физических полей и химически активных сред).

## Библиографический список

1. Qatu M. S., Sullivan R. W., Wang W. Recent research advances on the dynamic analysis of composite shells: 2000–2009 // *Compos. Struct.*, 2010. vol. 93, no. 1. 14–31. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2010.05.014>.
2. Kazanci Z. Dynamic response of composite sandwich plates subjected to time-dependent pressure pulses // *Int. J. Nonlin. Mech.*, 2011. vol. 46, no. 5. pp. 807–817. <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2011.03.011>.
3. Gill S. K., Gupta M., Satsangi P. Prediction of cutting forces in machining of unidirectional glass-fiber-reinforced plastic composites // *Front. Mech. Eng.*, 2013. vol. 8, no. 2. pp. 187–200. <https://doi.org/10.1007/s11465-013-0262-x>.
4. Vasiliev V. V., Morozov E. *Advanced Mechanics of Composite Materials and Structural Elements*. Elsevier: Amsterdam, 2013. xii+412 pp. <https://doi.org/10.1016/C2016-0-04497-2>.
5. Соломонов Ю. С., Георгиевский В. П., Недбай А. Я., Андрюшин В. А. *Прикладные задачи механики композитных цилиндрических оболочек*. М.: Физматлит, 2014. 408 с.
6. Gibson R. F. *Principles of Composite Material Mechanics*. Boca Raton: CRC Press, 2016. <https://doi.org/10.1201/b19626>.
7. Малмейстер А. К., Тамуж В. П., Терерс Г. А. *Сопrotивление жестких полимерных материалов*. Рига: Зинатне, 1972. 500 с.
8. Амбарцумян С. А. *Теория анизотропных пластин. Прочность, устойчивость и колебания*. М.: Наука, 1987. 360 с.
9. Богданович А. Е. *Нелинейные задачи динамики цилиндрических композитных оболочек*. Рига: Зинатне, 1987. 295 с.
10. Абросимов Н. А., Баженов В. Г. *Нелинейные задачи динамики композитных конструкций*. Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2002. 400 с.
11. Reddy J. N. *Mechanics of laminated composite plates. Theory and analysis*. Boca Raton: CRC Press, 2004. xxiii+831 pp. <https://doi.org/10.1201/b12409>.

12. Каледин В. О., Аульченко С. М., Миткевич А. Б. и др. *Моделирование статике и динамики оболочечных конструкций из композиционных материалов*. М.: Физматлит, 2014. 196 с.
13. Янковский А. П. Моделирование динамического упругопластического поведения гибких армированных пологих оболочек // *Конструкции из композиционных материалов*, 2018. №2. С. 3–14.
14. Жигун И. Г., Душин М. И., Поляков В. А., Якушин В. А. Композиционные материалы, армированные системой прямых взаимно ортогональных волокон. 2. Экспериментальное изучение // *Механика полимеров*, 1973. №6. С. 1011–1018.
15. Тарнопольский Ю. М., Жигун И. Г., Поляков В. А. *Пространственно-армированные композиционные материалы: Справочник*. М.: Машиностроение, 1987. 224 с.
16. Mohamed M. H., Bogdanovich A. E., Dickinson L. C., Singletary J. N., Lienhart R. R. A new generation of 3D woven fabric preforms and composites // *Sampe J.*, 2001. vol. 37, no. 3. pp. 3–17.
17. Schuster J., Heider D., Sharp K., Glowania M. Measuring and modeling the thermal conductivities of three-dimensionally woven fabric composites // *Mech. Compos. Mater.*, 2009. vol. 45, no. 2. pp. 241–254. <https://doi.org/10.1007/s11029-009-9072-y>.
18. Тарнопольский Ю. М., Поляков В. А., Жигун И. Г. Композиционные материалы, армированные системой прямых взаимно ортогональных волокон. 1. Расчет упругих характеристик // *Механика полимеров*, 1973. №5. С. 853–860.
19. Крегерс А. Ф., Тетерс Г. А. Структурная модель деформирования анизотропных, пространственно армированных композитов // *Мех. композ. матер.*, 1982. №1. С. 14–22.
20. Янковский А. П. Определение термоупругих характеристик пространственно армированных волокнистых сред при общей анизотропии материалов компонент композиции. 1. Структурная модель // *Мех. композ. матер.*, 2010. Т. 46, №5. С. 663–678.
21. Янковский А. П. Упругопластическое деформирование гибких пластин с пространственными структурами армирования // *ПМТФ*, 2018. Т. 59, №6. С. 112–122. <https://doi.org/10.15372/PMTF20180611>.
22. Писаренко Г. С., Яковлев А. П., Матвеев В. В. *Вибропоглощающие свойства конструкционных материалов: Справочник*. Киев: Наукова думка, 1971. 375 с.
23. Freudenthal A. M., Geiringer H. The Mathematical Theories of the Inelastic Continuum / *Elasticity and Plasticity. Encyclopedia of Physics*; ed. S. Flügge. Berlin, Heidelberg: Springer, 1958. pp. 229–433. [https://doi.org/10.1007/978-3-662-43081-1\\_3](https://doi.org/10.1007/978-3-662-43081-1_3).
24. Reissner E. On transverse vibrations of thin, shallow elastic shells // *Quart. Appl. Math.*, 1955. vol. 13, no. 2. pp. 169–176. <https://doi.org/10.1090/qam/69715>.
25. Houlston R., DesRochers C. G. Nonlinear structural response of ship panels subjected to air blast loading // *Comput. Struct.*, 1987. vol. 26, no.1–2. pp. 1–15. [https://doi.org/10.1016/0045-7949\(87\)90232-X](https://doi.org/10.1016/0045-7949(87)90232-X).
26. Zeinkiewicz O. C., Taylor R. L. *The Finite Element Method*. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2000. 707 pp.
27. Dekker K., Verwer J. G. *Stability of Runge–Kutta Methods for Stiff Nonlinear Differential Equations*. Amsterdam, New York: North-Holland, 1984. x+308 pp.
28. Хажинский Г. М. *Модели деформирования и разрушения металлов*. М.: Научный мир, 2011. 231 с.
29. Янковский А. П. Применение явного по времени метода центральных разностей для численного моделирования динамического поведения упругопластических гибких армированных пластин // *Вычисл. мех. сплош. сред*, 2016. Т. 9, №3. С. 279–297. <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2016.9.3.24>.
30. *Handbook of composites* / ed. G. Lubin. New York: Van Nostrand Reinhold Company Inc., 1982. 786 pp.
31. *Композиционные материалы: Справочник* / ред. Д. М. Карпинос. Киев: Наукова думка, 1985. 592 с.

MSC: 74K20

## Modeling of viscoelastoplastic deformation of flexible shallow shells with spatial-reinforcements structures

© A. P. Yankovskii


Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics,  
Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences,  
4/1, Institutskaya st., Novosibirsk, 630090, Russian Federation.

### Abstract

Based on the procedure of time steps, a mathematical model of the viscoelastoplastic behavior of shallow shells with spatial reinforcement structures is constructed. Plastic deformation of the components of the composition is described by flow theory with isotropic hardening; viscoelastic deformation by the equations of the Maxwell–Boltzmann model. The possible weakened resistance of composite curved panels to transverse shear is taken into account in the framework of the hypotheses of Reddy’s theory, and the geometric nonlinearity of the problem is taken into account in the Karman approximation. The solution of the formulated initial-boundary value problem is constructed using an explicit numerical scheme of the “cross” type. The elastoplastic and viscoelastoplastic flexural dynamic behavior of “flat” and spatially reinforced fiberglass cylindrical panels under the action of explosive loads has been investigated. Using the example of relatively thin composite structures, it is shown that, depending on which of the front surface (convex or concave), a load is applied, replacing the traditional “flat” reinforcement structure with a spatial one can lead to both an increase and a decrease in the residual deflection. However, in both cases, such a replacement can significantly reduce the intensity of residual deformations of the binder material and fibers of some families. It was demonstrated that the amplitudes of oscillations of curved composite panels in the neighborhood of the initial moment of time significantly exceed the maximum absolute values of the residual deflections. In this case, the residual deflections are rather complicated. It is shown that the calculations carried out within the framework of the elastoplastic deformation theory of the composition components do not even allow an approximate the magnitude determination of the residual deformations of the materials making up the composition.

**Keywords:** shallow shells, “flat” reinforcement, spatial reinforcement, dynamic deformation, viscoelastoplastic deformation, Reddy’s theory, Maxwell–Boltzmann model, “cross” type scheme.

### Research Article

 The content is published under the terms of the [Creative Commons Attribution 4.0 International License](http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

#### Please cite this paper in press as:

Yankovskii A. P. Modeling of viscoelastoplastic deformation of flexible shallow shells with spatial-reinforcements structures, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2020, vol. 24, no. 3, pp. 506–527. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1709> (In Russian).

#### Author’s Details:

Andrei P. Yankovskii  <https://orcid.org/0000-0002-2602-8357>

Dr. Phys. & Math. Sci.; Leading Research Scientist; Lab. of Fast Processes Physics;

e-mail: [lab4nemir@rambler.ru](mailto:lab4nemir@rambler.ru)

Received: 5<sup>th</sup> June, 2019 / Revised: 3<sup>rd</sup> June, 2020 /

Accepted: 24<sup>th</sup> August, 2020 / First online: 30<sup>th</sup> September, 2020

**Competing interests.** I hereby declare that I have no conflicts of interest in the authorship and publication of this article.

**Author's Responsibilities.** I take full responsibility for submitting the final manuscript in print. I approved the final version of the manuscript.

**Funding.** The research was (partly) carried out within the framework Program of the fundamental scientific research of the state academies of sciences for the years 2017–2020 (project no. 23.4.1 “Mechanics of deformation and destruction of materials, media, under mechanical loads, the influence of physical fields and chemically active media”).

## References

1. Qatu M. S., Sullivan R. W., Wang W. Recent research advances on the dynamic analysis of composite shells: 2000–2009, *Compos. Struct.*, 2010, vol. 93, no. 1, 14–31. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2010.05.014>.
2. Kazanci Z. Dynamic response of composite sandwich plates subjected to time-dependent pressure pulses, *Int. J. Nonlin. Mech.*, 2011, vol. 46, no. 5, pp. 807–817. <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2011.03.011>.
3. Gill S. K., Gupta M., Satsangi P. Prediction of cutting forces in machining of unidirectional glass-fiber-reinforced plastic composites, *Front. Mech. Eng.*, 2013, vol. 8, no. 2, pp. 187–200. <https://doi.org/10.1007/s11465-013-0262-x>.
4. Vasiliev V. V., Morozov E. *Advanced Mechanics of Composite Materials and Structural Elements*. Elsevier, Amsterdam, 2013, xii+412 pp. <https://doi.org/10.1016/C2016-0-04497-2>.
5. Solomonov Yu. S., Georgievskii V. P., Nedbai A. Ya., Andryushin V. A. *Prikladnye zadachi mekhaniki kompozitnykh tsilindricheskikh obolochek* [Applied Problems of Mechanics of Composite Cylindrical Shells]. Moscow, Fizmatlit, 2014, 408 c. (In Russian)
6. Gibson R. F. *Principles of Composite Material Mechanics*. Boca Raton, CRC Press, 2016. <https://doi.org/10.1201/b19626>.
7. Malmeister A. K., Tamuzh V. P., Teters G. A. *Soprotivlenie zhestkikh polimernykh materialov* [The Strength of Polymeric and Composite Materials]. Riga, Zinatne, 1972, 500 pp. (In Russian)
8. Ambartsumyan S. A. *Theory of Anisotropic Plates: Strength, Stability, and Vibration*, vol. 2, Progress in Materials Science Series. Stamford, Technomic, 1970, 248 pp.
9. Bogdanovich A. E. *Nelineinye zadachi dinamiki tsilindricheskikh kompozitnykh obolochek* [Non-Linear Dynamic Problems for Composite Cylindrical Shells]. Riga, Zinatne, 1987, 295 pp. (In Russian)
10. Abrosimov N. A., Bazhenov V. G. *Nelineinye zadachi dinamiki kompozitnykh konstrukt-sii* [Nonlinear Problems of Dynamics of Composite Structures]. Nizhni Novgorod, Nizhni Novgorod State Univ., 2002, 400 pp. (In Russian)
11. Reddy J. N. *Mechanics of laminated composite plates. Theory and analysis*. Boca Raton, CRC Press, 2004, xxiii+831 pp. <https://doi.org/10.1201/b12409>.
12. Kaledin V. O., Aul'chenko S. M., Mitkevich A. B., et. al. *Modelirovanie statiki i dinamiki obolochechnykh konstrukt-sii iz kompozitsionnykh materialov* [Modeling Statics and Dynamics of Shell Structures Made of Composite Materials]. Moscow, Fizmatlit, 2014, 196 pp. (In Russian)
13. Yankovskii A. P. Modeling of dynamic elastic-plastic behavior of flexible reinforced shallow shells, *Composite Materials Constructions*, 2018, no. 2, pp. 3–14 (In Russian).

14. Zhigun I. G., Dushin M. I., Polyakov V. A., Yakushin V. A. Composites reinforced with a system of three straight mutually orthogonal fibers. 2. Experimental study, *Polymer Mechanics*, 1973, vol. 9, no. 6, pp. 895–900. <https://doi.org/10.1007/BF00856974>.
15. Tarnopol'skii Yu. M., Zhigun I. G., Polyakov V. A. *Prostranstvenno-armirovannye kompozitsionnye materialy* [Spatially Reinforced Composite Materials]. Moscow, Mashinostroenie, 1987, 224 pp. (In Russian)
16. Mohamed M. H., Bogdanovich A. E., Dickinson L. C., Singletary J. N., Lienhart R. R. A new generation of 3D woven fabric preforms and composites, *Sampe J.*, 2001, vol. 37, no. 3, pp. 3–17.
17. Schuster J., Heider D., Sharp K., Glowania M. Measuring and modeling the thermal conductivities of three-dimensionally woven fabric composites, *Mech. Compos. Mater.*, 2009, vol. 45, no. 2, pp. 241–254. <https://doi.org/10.1007/s11029-009-9072-y>.
18. Tarnopol'skii Y. M., Polyakov V. A., Zhigun I. G. Composite materials reinforced with a system of three straight, mutually orthogonal fibers. 1. Calculation of the elastic characteristics, *Polymer Mechanics*, 1973, vol. 9, no. 5, pp. 754–759. <https://doi.org/10.1007/BF00856271>.
19. Kregers A. F. Teters G. A. Structural model of deformation of anisotropic three-dimensionally reinforced composites, *Mech. Compos. Mater.*, 1982, vol. 18, no. 1, pp. 10–17. <https://doi.org/10.1007/BF00605085>.
20. Yankovskii A. P. Determination of the thermoelastic characteristics of spatially reinforced fibrous media in the case of general anisotropy of their components. 1. Structural model, *Mech. Compos. Mater.*, 2010, vol. 46, no. 5, pp. 451–460. <https://doi.org/10.1007/s11029-010-9162-x>.
21. Yankovskii A. P. Elastic-plastic deformation of flexible plates with spatial reinforcement structures, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2018, vol. 59, no. 6, pp. 1058–1066. <https://doi.org/10.1134/S0021894418060111>.
22. Pisarenko G. S., Yakovlev A. P., Matveev V. V. *Vibropogloshchayushchie svoystva konstruktivnykh materialov: Spravochnik* [Vibration-Absorbing Properties of Structural Materials: A Handbook]. Kiev, Naukova dumka, 1971, 375 pp. (In Russian)
23. Freudenthal A. M., Geiringer H. The Mathematical Theories of the Inelastic Continuum, In: *Elasticity and Plasticity. Encyclopedia of Physics*; ed. S. Flügge. Berlin, Heidelberg, Springer, 1958, pp. 229–433. [https://doi.org/10.1007/978-3-662-43081-1\\_3](https://doi.org/10.1007/978-3-662-43081-1_3).
24. Reissner E. On transverse vibrations of thin, shallow elastic shells, *Quart. Appl. Math.*, 1955, vol. 13, no. 2, pp. 169–176. <https://doi.org/10.1090/qam/69715>.
25. Houlston R., DesRochers C. G. Nonlinear structural response of ship panels subjected to air blast loading, *Comput. Struct.*, 1987, vol. 26, no. 1–2, pp. 1–15. [https://doi.org/10.1016/0045-7949\(87\)90232-X](https://doi.org/10.1016/0045-7949(87)90232-X).
26. Zeinkiewicz O. C., Taylor R. L. *The Finite Element Method*. Oxford, Butterworth-Heinemann, 2000, 707 pp.
27. Dekker K., Verwer J. G. *Stability of Runge–Kutta Methods for Stiff Nonlinear Differential Equations*. Amsterdam, New York, North-Holland, 1984, x+308 pp.
28. Khazhinskii G. M. *Modeli deformirovaniia i razrusheniia metallov* [Deformation and Long-Term Strength of Metals]. Moscow, Nauchnyi Mir, 2011, 231 pp. (In Russian)
29. Yankovskii A. P. Using of explicit time-central difference method for numerical simulation of dynamic behavior of elasto-plastic flexible reinforced plates, *Computational Continuum Mechanics*, 2016, vol. 9, no. 3, pp. 279–297 (In Russian). <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2016.9.3.24>.
30. *Handbook of composites*, ed. G. Lubin. New York, Van Nostrand Reinhold Company Inc., 1982, 786 pp.
31. *Kompozitsionnye materialy* [Composite Materials], ed. D. M. Karpinos. Kiev, Naukova Dumka, 1985, 592 pp. (In Russian)