



УДК 539.3

О решении одной не удовлетворяющей условиям Адамара задачи деформирования стержневых систем методом простой итерации

© В. В. Стружанов, А. В. Коркин

Институт машиноведения УрО РАН,
Россия, 620049, Екатеринбург, ул. Комсомольская, 34.

Аннотация

Рассматривается стержневая система под действием квазистатически возрастающего растягивающего нагружения. Нагрузка осуществляется по мягкой и жесткой схемам. Один из стержней системы обладает свойством деформационного разупрочнения, то есть его диаграмма растяжения обладает падающей до нуля ветвью. В результате уравнения равновесия не удовлетворяют условиям Адамара. Система имеет несколько положений равновесия, в том числе и неустойчивых. Показано применение метода простых итераций для определения параметров всех возможных положений равновесия и их устойчивости при решении данных уравнений, не удовлетворяющих условиям Адамара.

Ключевые слова: уравнения равновесия, стержневая система, условия Адамара, простые итерации, устойчивость равновесий, параметры положений равновесия.

Получение: 25 мая 2020 г. / Исправление: 10 сентября 2020 г. /

Принятие: 14 сентября 2020 г. / Публикация онлайн: 30 сентября 2020 г.

Введение. Задача считается корректно поставленной, если она удовлетворяет условиям Адамара [1], то есть решение существует, оно единственное и устойчивое. Как правило, в механике деформируемого твердого тела такими свойствами обладают задачи, учитывающие только стадию упрочнения деформируемых материалов. Однако в процессе нагружения материал может переходить на стадию разупрочнения (закритическую стадию деформирования) [2–5]. Свойства таких материалов описываются полной диаграммой деформирования, состоящей из восходящей (упрочнение) и падающей до нуля (разупрочнение) ветвей [2, 4]. На падающей ветви материал физически

Краткое сообщение

  Контент публикуется на условиях лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 International \(https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru)

Образец для цитирования

Стружанов В. В., Коркин А. В. О решении одной не удовлетворяющей условиям Адамара задачи деформирования стержневых систем методом простой итерации // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2020. Т. 24, № 3. С. 595–603. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1787>.

Сведения об авторах

Валерий Владимирович Стружанов  <https://orcid.org/0000-0002-3669-2032>
доктор физико-математических наук, профессор; главный научный сотрудник; лаб. микромеханики материалов; e-mail: stru@imach.uran.ru

Александр Владимирович Коркин  <https://orcid.org/0000-0003-3533-4257>
инженер; лаб. микромеханики материалов; e-mail: alexkorkin@list.ru

неустойчив и может существовать только в составе устойчивой в целом системы. Очевидно, что появление зон разупрочнения приводит к появлению у системы нескольких возможных положений равновесия, как устойчивых, так и неустойчивых. Таким образом, нарушаются условия Адамара. При решении задач механики деформирования с учетом разупрочнения, естественно, возникают математические трудности, связанные с определением параметров всех положений равновесия тела и их устойчивости.

Для решения нелинейных задач, удовлетворяющих условиям Адамара, применяются различные численные методы, в том числе и метод простых итераций [6–9]. Однако их прямое применение для решения задач, не удовлетворяющих условиям Адамара, невозможно, то есть нельзя найти параметры всех положений равновесия. Требуется определенная их модификация.

В данной работе рассмотрена простая стержневая система с разупрочняющим элементом под действием квазистатически возрастающего растягивающего нагружения, уравнения равновесия которой не удовлетворяют условиям Адамара. Приведена методика определения параметров всех возможных положений равновесия и их устойчивости методом простых итераций.

1. Механическая система. Рассмотрим механическую систему, состоящую из двух последовательно соединенных стержней AB и BD (рис. 1) [10]. Стержень AB присоединен шарнирами к абсолютно жесткой стенке (в точке A) и к абсолютно упругому стержню BD (в точке B), жесткость которого при растяжении равна C . Стержень AB выполнен из материала, обладающего свойством деформационного разупрочнения, то есть диаграмма растяжения $q(x)$ стержня AB , полученная в абсолютно жесткой машине [4], обладает восходящей и падающей до нуля ветвями (x — удлинение стержня). Таким образом, при некотором $x = x^B$ функция q имеет максимум, а при $x = x^Z > x^B$ функция $q = 0$. При этом $q_{,x} = \lambda^P(x) > 0$ на восходящей ветви ($0 \leq x < x^B$), $q_{,x} = \lambda^P(x) < 0$ на падающей ветви ($x^B < x \leq x^Z$) и $q_{,x} = 0$ для $x > x^Z$. Здесь λ^P — касательный модуль (касательная к кривой $q(x)$), а запятой (здесь и далее) обозначена производная по соответствующему аргументу. Вся система растягивается посредством задания монотонно возрастающего перемещения u правому концу стержня BD (жесткое нагружение) либо приложением к точке D монотонно возрастающего усилия p (мягкое нагружение). Растяжение осуществляется квазистатически при постоянной температуре.

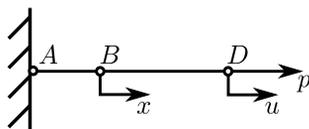


Рис. 1. Механическая система [Figure 1. Mechanical system]

2. Уравнение равновесия. При жестком нагружении системы параметром состояния является удлинение x (одна обобщенная координата), а параметром управления — перемещение u . В этом случае поведение системы при отсутствии кинетической энергии описывает потенциальная функция (лагранжиан)

$$W_1 = \int_0^x q(x) dx + \frac{C}{2}(u - x)^2.$$

Используя теперь уравнение Лагранжа второго рода [11], получаем уравнение равновесия

$$W_{1,x} = q(x) - C(u - x) = 0. \quad (1)$$

Для мягкого нагружения имеем два параметра состояния x , u (две обобщенные координаты) и один параметр управления p . Лагранжиан системы равен

$$W_2 = W_1 - \int_0^u p du.$$

Здесь второй член есть работа внешней силы, взятая со знаком минус. Тогда получаем систему уравнений равновесия

$$W_{2,x} = q(x) - C(u - x) = 0, \quad W_{2,u} = C(u - x) - p = 0. \quad (2)$$

3. Метод простых итераций (жесткое нагружение). Применим метод простых итераций для решения уравнения (1). Представим это уравнение в виде

$$x = \varphi(x, u), \quad (3)$$

где $\varphi(x, u) = \psi(x) + u$, $\psi(x) = -C^{-1}q(x)$. Тогда для каждого фиксированного значения параметра u решениями уравнения (3) являются координаты точек пересечения прямой $y = x$ и кривой $y = \varphi(x, u)$ [9].

Очевидно, что кривая $y = \varphi(x, u)$ при возрастании параметра u перемещается параллельно графику функции $\psi(x)$ в направлении увеличения значения u . Так как $\psi_{,x} = \varphi_{,x}$, качественное поведение функции $\varphi(x)$ тождественно поведению $\psi(x)$. В интервале $(0, x^B)$ имеем $\psi_{,x} = -C^{-1}q_{,x} = -C^{-1}\lambda^p < 0$. Кроме того, $\lambda^p < C$, так как в противном случае растяжение стержня AB в данной системе невозможно. Следовательно, функция $\psi(x)$ и, соответственно, функция $\varphi(x, u)$ монотонно убывают и $|\psi_{,x}| = |\varphi_{,x}| < 1$. В интервале (x^B, x^Z) , где $\lambda^p < 0$, функция $\psi(x)$ и функция $\varphi(x, u)$ монотонно возрастают ($\psi_{,x} > 0$). В точке $x = x^B$ эти функции имеют минимум. При $x = 0$ и $x = x^Z$ функция $\psi = 0$. Отсюда $\varphi(0, u) = \varphi(x^Z, u) = u$. А также $\varphi(x, u) = u$, если $x > x^Z$.

Будем теперь для каждого значения u искать решение уравнения (3), применяя метод простых итераций в форме $x_{k+1} = \varphi(x_k, u)$, $k = \overline{1, \infty}$, [9]. Рассмотрим несколько возможных случаев, которые могут быть реализованы в зависимости от поведения функции $y = \varphi(x, u)$ на интервале (x^B, x^Z) . Допустим, что падающая ветвь диаграммы $q(x)$ достаточно пологая ($\lambda^p > -C$). Тогда $|\varphi_{,x}| < 1$ на всем интервале $(0, x^Z)$. При малых значениях u график функции $y = \varphi(x, u)$ на интервале (x^B, x^Z) всегда расположен ниже прямой $y = x$ и не пересекает ее (кривая 1, рис. 2). Пересечение происходит только в интервале $(0, x^B)$ в одной точке. При увеличении параметра u кривая 1 перемещается вверх. Пересечение с прямой $y = x$ всегда происходит только в одной точке. Следовательно, в данном случае решение уравнения (1) является единственным и система имеет одно положение равновесия. Так как везде $|\varphi_{,x}| < 1$, функция φ удовлетворяет условиям сжатия [12]. Определяемая методом простых итераций последовательность x_k сходится к единственному решению уравнения (3) при любом начальном приближении.

Если падающая ветвь диаграммы $q(x)$ такова, что существуют два значения x' и x'' (решения уравнения $\lambda^p(x) = -C$), где $\varphi_{,x} = 1$, тогда в интервале

$(x', x'') \subset (x^B, x^Z)$ производная $\varphi_{,x} > 1$. В двух остальных интервалах $(0, x')$ и (x'', x^Z) по-прежнему $|\varphi_{,x}| < 1$. Пусть $u < x'' - \psi(x'')$, т. е. кривая $y = \varphi(x, u)$ на интервале (x^B, x^Z) расположена ниже прямой $y = x$ (кривая 2, рис. 2). В этом случае пересечение кривой $y = \varphi(x, u)$ и прямой $y = x$ происходит только в одной точке. Уравнение (3) имеет единственное решение. Сходимость итераций на интервалах $(0, x')$ и (x'', x^Z) происходит согласно принципу сжимающихся отображений, а на интервале (x', x'') — согласно признаку Даламбера [13]. Таким образом, при любом начальном приближении члены итерационной последовательности необходимо попадают в интервал $(0, x')$ и в дальнейшем сходятся к искомому решению.

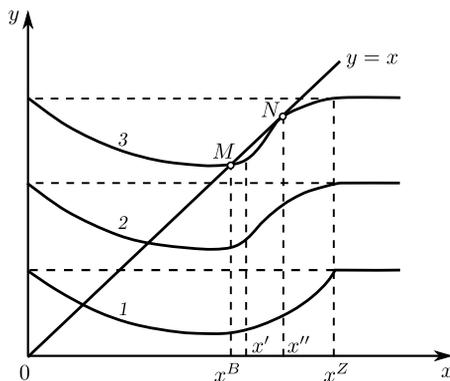


Рис. 2. Качественный вид графиков функций $y = \varphi(x, u)$ при $\lambda^p > -C$ (кривая 1), $u < x'' - \psi(x'')$ (кривая 2), $u = x'' - \psi(x'')$, $x' - \psi(x') > x'' - \psi(x'')$ (кривая 3)

[Figure 2. Qualitative graphs of functions $y = \varphi(x, u)$ when $\lambda^p > -C$ (line 1), $u < x'' - \psi(x'')$ (line 2), $u = x'' - \psi(x'')$, $x' - \psi(x') > x'' - \psi(x'')$ (line 3)]

Заметим, что все рассмотренные решения являются устойчивыми, поскольку при их возмущении при возобновлении итерационного процесса снова получаем эти же решения.

4. Метод простых итераций и неединственные решения (жесткое нагружение). Пусть $u = x'' - \psi(x'')$ и $x' - \psi(x') > x'' - \psi(x'')$. Тогда кривая $y = \varphi(x, u)$ пересекает прямую $y = x$ в точке M и касается ее в точке N (кривая 3, рис. 2). Уравнение (3) имеет два решения (механическая система — два положения равновесия). Если начальное приближение $x_0 \in (0, x')$, где $|\varphi_{,x}| < 1$, то последовательность x_k сходится к решению, отвечающему точке M . Когда $x_0 \in (x', x'')$, где $|\varphi_{,x}| > 1$, и функция $y = \varphi(x, u)$ расположена строго ниже прямой $y = x$, последовательность x_k сначала сходится согласно критерию Даламбера, а после попадания в интервал (x^B, x') сходится к точке M согласно принципу сжимающихся отображений. Если начальное приближение $x_0 \in (x'', x^Z)$, где $|\varphi_{,x}| < 1$, то реализуется сходимость к решению, отвечающему точке N .

Отметим, что равновесие системы в точке M является устойчивым, так как итерационный процесс после его возмущения снова попадает в точку M . Равновесие же в точке N неустойчивое. После его возмущения посредством уменьшения величины x итерационный процесс приводит к устойчивому равновесию в точке M .

Рассмотрим теперь случай, когда $u > x'' - \psi(x'')$, $x' - \psi(x') > x'' - \psi(x'')$ и кривая $y = \varphi(x, u)$ пересекает прямую $y = x$ в трех точках S , E , F (кри-

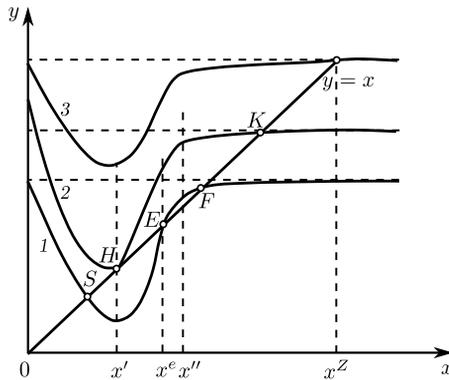


Рис. 3. Качественный вид графиков функции $y = \varphi(x, u)$ при $u > x'' - \psi(x'')$ (кривая 1), $u = x' - \psi(x')$ (кривая 2), $u > x' - \psi(x')$ (кривая 3) ($x' - \psi(x') > x'' - \psi(x'')$)

[Figure 3. Qualitative graphs of functions $y = \varphi(x, u)$ when $u > x'' - \psi(x'')$ (line 1), $u = x' - \psi(x')$ (line 2), $u > x' - \psi(x')$ (line 3) ($x' - \psi(x') > x'' - \psi(x'')$)]

вая 1, рис. 3). То есть механическая система имеет три положения равновесия, а уравнение (3) — три решения. Отрезок $[0, x^Z]$ делится на интервалы $(0, x')$, (x'', x^Z) , где $|\varphi_{,x}| < 1$, интервал (x', x^e) (рис. 3), на котором функция $y = \varphi(x, u)$ расположена ниже прямой $y = x$, и интервал (x^e, x'') , на котором функция $y = \varphi(x, u)$ расположена выше прямой $y = x$. Используя рассуждения, приведенные выше, находим, что, выбрав начальное приближение $x_0 \in (0, x^e)$, итерационный процесс сходится к устойчивому равновесию, отвечающему точке S (рис. 3). Когда $x_0 \in (x^e, x^Z)$, итерации сходятся к устойчивому положению равновесия, отвечающему точке F . Решение уравнения (3), соответствующее точке E (рис. 3), нельзя получить методом простых итераций, так как равновесие неустойчивое и любое его возмущение приводит к переходу системы в устойчивое равновесие (либо к точке S , либо к точке F). Поэтому для определения равновесия в точке E следует воспользоваться методом половинного деления [9], согласно которому приближенное решение уравнения (3), отвечающее точке E неустойчивого равновесия (рис. 3), будет равно середине отрезка $2^{-n}(x'' - x')$ при достаточно больших n .

Пусть теперь параметр u достигает значения $u = x' - \psi(x')$. В этом случае кривая $y = \varphi(x, u)$ касается прямой $y = x$ в точке H и пересекает ее в точке K (кривая 2, рис. 3). Если $x_0 \in (0, x')$, то итерации сходятся к точке H . Когда $x_0 \in (x', x^Z)$, согласно рассуждениям, приведенным выше, итерации сходятся к точке K . Положение равновесия системы, отвечающее точке K , является устойчивым, а в точке H — неустойчивым. Любое его возмущение посредством увеличения параметра x приводит к тому, что в результате итераций получаем равновесие, соответствующее точке K . Наконец, если $u > x' - \psi(x')$, то кривая $y = \varphi(x, u)$ пересекает прямую $y = x$ в одной точке (кривая 3, рис. 3). Итерации сходятся к устойчивому положению равновесия при любом начальном приближении.

5. Метод простых итераций (мягкое нагружение). Исключим параметр u из уравнений системы (2). В результате получим уравнение

$$x = \beta(x, p), \tag{4}$$

где $\beta(x, p) = \gamma(x) + C^{-1}p$, $\gamma(x) = x - C^{-1}q(x)$. Тогда для каждого фиксированного значения параметра p решениями уравнения (4) являются координаты

точек пересечения прямой $y = x$ и кривой $y = \beta(x, p)$ [9]. Кривая $y = \beta(x, p)$ при возрастании параметра p перемещается параллельно графику функции $\gamma(x)$ (кривая 1, рис. 4) в направлении увеличения значения p (например кривые 2, 3, рис. 4).

При $\beta(x, p) = \gamma(x)$ ($p = 0$) кривая $\gamma(x)$ пересекает прямую $y = x$ в двух точках, где $x = 0$ и $x = x^Z$ (кривая 1, рис. 4).

Когда $0 < p < x^B - \gamma(x^B)$ (кривая 2, рис. 4), кривая $y = \beta(x, p)$ пересекает прямую $y = x$ в двух точках L и R (рис. 4), т. е. система под действием данной нагрузки имеет два положения равновесия. Отметим, что на отрезке $(0, x^B)$ имеем $\gamma_{,x} = 1 - C^{-1}\lambda^p < 1$. Если в методе простой итерации при решении уравнения (4) начальное приближение $x_0 \in (0, x^B)$, то итерационная последовательность сходится согласно принципу сжимающихся отображений к равновесию, отвечающему точке L . Когда $x_0 \in (x^B, x^r)$, итерации сначала сходятся согласно принципу Даламбера. Затем итерации попадают на отрезок $(0, x^B)$, начинается процедура сжатия, в результате которой получаем опять решение, соответствующее точке L . Отметим, что равновесие в точке L устойчиво, т. к. при любом отклонении от него, осуществляя итерационный процесс, снова приходим к точке L . В случае, когда $x_0 \in (x^r, x^Z)$, итерационный процесс расходится. Равновесие невозможно. Таким образом, равновесие, отвечающее точке R , неустойчиво. Его возмущение на $x < x^r$ приводит к равновесию в точке L , а на $x > x^r$ получаем отсутствие равновесия. Для определения параметров равновесия в точке R следует воспользоваться методом половинного деления [9], согласно которому приближенное решение уравнения (4), отвечающее точке R неустойчивого равновесия, будет равно середине отрезка $2^{-n}(x^r - \delta, x^r + \delta)$ при достаточно больших n (δ — некоторое малое число).

Пусть $p = x^B$ (кривая 3, рис. 4). Тогда график функции $y = \beta(x, p)$ касается прямой $y = x$ в одной точке Q . Система имеет единственное положение равновесия (уравнение (4) — единственное решение). Если $x_0 \in (0, x^B)$, то итерации сходятся к точке Q (реализуются сжимающие отображения). При $x_0 \in (x^B, x^Z)$ итерации расходятся (по Даламберу). Таким образом, система находится на границе между устойчивостью и неустойчивостью. Уменьшая значение x ($x < x^B$) и проводя итерационный процесс снова, приходим в точ-

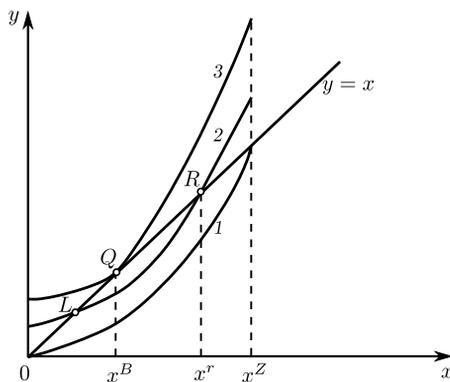


Рис. 4. Качественный вид графиков функции $y = \beta(x, p)$ при некоторых характерных значениях p : $p = 0$ (кривая 1), $0 < p < x^B - \gamma(x^B)$ (кривая 2), $p = x^B$ (кривая 3)

[Figure 4. Qualitative graphs of functions $y = \beta(x, p)$ for some characteristic values of p : $p = 0$ (line 1), $0 < p < x^B - \gamma(x^B)$ (line 2), $p = x^B$ (line 3)]

ку Q . При увеличении значения x ($x > x^B$) итерации расходятся и у системы отсутствует положение равновесия.

Наконец, если $p > x^B$, то у системы вообще нет положений равновесия. Уравнение (4) не имеет решения.

Заключение. На примере растягиваемой стержневой системы с разупрочняющимся элементом, нелинейные уравнения равновесия которой не удовлетворяют условиям Адамара, показано применение метода простых итераций для определения параметров всех положений равновесия — как устойчивых, так и неустойчивых.

Конкурирующие интересы. Заявляем, что в отношении авторства и публикации этой статьи конфликта интересов не имеем.

Авторский вклад и ответственность. Все авторы принимали участие в разработке концепции статьи и в написании рукописи. Авторы несут ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Исследование не имело финансирования.

Библиографический список

1. Арсенин В. Я. *Методы математической физики и специальные функции*. М.: Наука, 1974. 431 с.
2. Стружанов В. В., Миронов В. И. *Деформационное разупрочнение материала в элементах конструкций*. Екатеринбург: УрО РАН, 1995. 192 с.
3. Вильдеман В. Э., Чаусов Н. Г. Условия деформационного разупрочнения материала при растяжении образца специальной конфигурации // *Зав. лаб. Diagn. матер.*, 2007. Т. 73, № 10. С. 55–59.
4. Вильдеман В. Э., Третьяков М. П. Испытания материалов с построением полных диаграмм деформирования // *Пробл. машиностр. и надежн. машин*, 2013. № 2. С. 93–98.
5. Андреева Е. А. Решение одномерных задач пластичности для разупрочняющегося материала // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2008. № 2(17). С. 152–160. <https://doi.org/10.14498/vsgtu642>.
6. Самарский А. А., Гулин А. В. *Численные методы*. М.: Наука, 1989. 432 с.
7. Калиткин Н. Н., Гольцов Н. А. *Введение в численный анализ*. М.: МГУЛ, 2003. 143 с.
8. Калиткин Н. Н. *Численные методы*. М.: Наука, 1978. 512 с.
9. Вержбицкий В. М. *Численные методы. Линейная алгебра и нелинейные уравнения*. М.: Высш. шк., 2000. 266 с.
10. Стружанов В. В., Коркин А. В. Об устойчивости процесса растяжения одной стержневой системы с разупрочняющимися элементами // *Вестник Уральского государственного университета путей сообщения*, 2016. № 3(31). С. 4–17. <https://doi.org/10.20291/2079-0392-2016-3-4-17>.
11. Pars L. A. *A treatise on analytical dynamics* / Heinemann Educational Books: London, 1965. xxi+641 pp.
12. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. *Элементы теории функций и функционального анализа*. М.: Наука, 1989. 624 с.
13. Фихтенгольц Г. М. *Курс дифференциального и интегрального исчисления*. Т. 2. М.: Физматлит, 1959. 808 с.

MSC: 74C10

On the solution of one problem of deformation of rod systems that does not satisfy the Hadamard conditions by the simple iteration method

© V. V. Struzhanov, A. V. Korkin

Institute of Engineering Science, Ural Branch of RAS,
34, Komsomolskaya st., Ekaterinburg, 620049, Russian Federation.

Abstract

A rod system under the action of a quasi-statically increasing tensile tension is considered. The load is carried out according to soft and hard schemes. One of the rods of the system has the property of deformation softening, that is, its tension diagram has a branch falling to zero. As a result, the equilibrium equations do not satisfy the Hadamard conditions. The system has several equilibrium positions, including unstable ones. The application of the simple iterations method is shown to determine the parameters of all possible equilibrium positions and their stability when solving these equations that do not satisfy the Hadamard conditions.

Keywords: equilibrium equations, rod system, Hadamard conditions, simple iterations, stability of equilibria, parameters of equilibrium positions.

Received: 25th May, 2020 / Revised: 10th September, 2020 /

Accepted: 14th September, 2020 / First online: 30th September, 2020

Competing interests. We declare that we have no conflicts of interest in the authorship and publication of this article.

Authors' contributions and responsibilities. Each author has participated in the article concept development and in the manuscript writing. The authors are absolutely responsible for submitting the final manuscript in print. Each author has approved the final version of manuscript.

Funding. The research has no funding from any party.

Short Communication

 The content is published under the terms of the [Creative Commons Attribution 4.0 International License](http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Struzhanov V. V., Korkin A. V. On the solution of one problem of deformation of rod systems that does not satisfy the Hadamard conditions by the simple iteration method, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2020, vol. 24, no. 3, pp. 595–603. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1787> (In Russian).

Authors' Details:

Valery V. Struzhanov   <https://orcid.org/0000-0002-3669-2032>

Dr. Phys. & Math. Sci., Professor; Chief Researcher; Lab. of Material Micromechanics;
e-mail: stru@imach.uran.ru

Aleksandr V. Korkin  <https://orcid.org/0000-0003-3533-4257>

Engineer; Lab. of Material Micromechanics; e-mail: alexkorkin@list.ru

References

1. Metody matematicheskoi fiziki i spetsial'nye funktsii [Methods of Mathematical Physics and Special Functions], 1974, 431 pp. (In Russian)
2. Struzhanov V. V., Mironov V. I. *Deformatsionnoe razuprochnenie materiala v elementakh konstruktsii* [Deformational Softening of Material in Structural Elements]. Ekaterinburg, UrO RAN, 1995, 192 pp. (In Russian)
3. Vil'deman V. E., Chausov N. G. Conditions of deformation failure for special configuration stretched sample, *Zavod. Lab., Diagn. Mater.*, 2007, vol. 73, no. 10, pp. 55–59 (In Russian).
4. Vil'deman V. E., Tretyakov M. P. Material testing by plotting total deformation curves, *J. Mach. Manuf. Reliab.*, 2013, vol. 42, no. 2, pp. 166–170. <https://doi.org/10.3103/S1052618813010159>.
5. Andreeva E. A. Solution of one-dimensional softening materials plasticity problems, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2008, no. 2(17), pp. 152–160 (In Russian). <https://doi.org/10.14498/vsgtu642>.
6. Samarskii A. A., Gulin A. V. *Chislennye metody* [Numerical Methods]. Moscow, Nauka, 1973, 432 pp. (In Russian)
7. Kalitkin N. N., Gol'tsov N. A. *Vvedenie v chislennyy analiz* [Introduction to Numerical Analysis]. Moscow, Moscow State Forest Univ., 2003, 143 pp.
8. Kalitkin N. N. *Chislennye metody* [Numerical Methods]. Moscow, Nauka, 1978, 512 pp. (In Russian)
9. Verzhbitsky V. M. *Chislennye metody. Lineinaya algebra i nelineinye uravneniia* [Numerical Methods. Linear Algebra and Nonlinear Equations]. Moscow, Vyssh. shk., 2000, 266 pp. (In Russian)
10. Struzhanov V. V., Korokin A. V. Regarding stretching process stability of one bar system with softening elements, *Herald of the Ural State University of Railway Transport*, no. 3(31), pp. 4–17 (In Russian). <https://doi.org/10.20291/2079-0392-2016-3-4-17>.
11. Pars L. A. *A treatise on analytical dynamics*, Heinemann Educational Books, London, 1965, xxi+641 pp.
12. Kolmogorov A. N., Fomin S. V. *Elementy teorii funktsii i funktsional'nogo analiza* [Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis]. Moscow, Nauka, 1989, 624 pp. (In Russian)
13. Fikhtengol'ts G. M. *Kurs differentsial'nogo i integral'nogo ischisleniia* [Course of Differential and Integral Calculus], vol. 2. Moscow, Fizmatlit, 1959, 808 pp. (In Russian)