Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2020. Т. 24, № 4. С. 607–620
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1821

Дифференциальные уравнения и математическая физика

УДК 517.953

Нелокальные задачи с интегральным условием для дифференциальных уравнений третьего порядка

© *А. И. Кожанов*[1], *А. В. Дюжева*[2]

[1] Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Россия, 630090, Новосибирск, пр. Академика Коптюга, 4.
[2] Самарский государственный технический университет, Россия, 443100, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

Аннотация

Работа посвящена исследованию разрешимости нелокальных задач с интегральным по переменной t условием для уравнений

$$u_{tt} + \Big(\alpha\frac{\partial}{\partial t} + \beta\Big)\Delta u = f(x,t)$$

(α, β — действительные постоянные, Δ — оператор Лапласа по пространственным переменным). Для изучаемых задач доказываются теоремы существования и единственности регулярных решений (имеющих все обобщенные по С. Л. Соболеву производные, входящие в уравнение).

Ключевые слова: дифференциальные уравнения третьего порядка, нелокальные задачи, интегральные условия, регулярные решения, единственность, существование.

Получение: 21 августа 2020 г. / Исправление: 17 октября 2020 г. / Принятие: 16 ноября 2020 г. / Публикация онлайн: 30 ноября 2020 г.

Научная статья

Образец для цитирования
Кожанов А. И., Дюжева А. В. Нелокальные задачи с интегральным условием для дифференциальных уравнений третьего порядка // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2020. Т. 24, № 4. С. 607–620. https://doi.org/10.14498/vsgtu1821.

Сведения об авторах
Александр Иванович Кожанов https://orcid.org/0000-0003-4376-4003
доктор физико-математических наук, профессор; главный научный сотрудник; лаб. дифференциальных и разностных уравнений; e-mail: kozhanov@math.nsc.ru

Александра Владимировна Дюжева https://orcid.org/0000-0002-3284-5302
кандидат физико-математических наук; доцент; каф. высшей математики; e-mail: aduzheva@rambler.ru

Введение. Пусть Ω есть ограниченная область из пространства $\mathbb{R}^n$ переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ с гладкой (для простоты — бесконечно-дифференцируемой) границей Γ; Q — цилиндр $\Omega \times (0, T)$ конечной высоты T; $S = \Gamma \times (0, T)$ — его боковая граница.

Хорошо известно [1–8], что для дифференциальных уравнений

$$u_{tt} + \Big(\alpha\frac{\partial}{\partial t} + \beta\Big)\Delta u = f(x, t) \tag{$*$}$$

(α, β — действительные постоянные, Δ — оператор Лапласа по переменным $x_1, x_2, \ldots, x_n$; $f(x,t)$ — заданная функция) в цилиндре Q корректными могут быть как гиперболическая смешанная задача с данными Коши на одном из оснований (при $t = 0$, если $\alpha < 0$, и при $t = T$, если $\alpha > 0$), так и эллиптические задачи с данными на всей границе Q.

В настоящей работе будет исследована разрешимость нелокальных задач для уравнения ($*$) с заданием одного локального условия по переменной t и одного нелокального условия интегрального вида. Подобные задачи для уравнения ($*$) ранее не изучались.

Целью настоящей работы является доказательство существования и единственности регулярных[1] решений изучаемых задач.

При исследовании разрешимости тех или иных нелокальных задач часто используется прием, основанный на применении к уравнению оператора, задающего нелокальное условие. Этот прием в случае нелокальных условий интегрального вида позволяет после использования интегрирования по частям свести исходную задачу к задаче с «полуинтегральными» условиями («полуинтегральными» условиями мы называем условия, связывающие граничные значения с некоторыми интегралами от решения, в отличие от чисто интегральных условий, в которых изначально граничные значения не участвуют; как правило, задачи с «полуиньегральными» условиями легче поддаются исследованию, чем задачи с чисто интегральными условиями). В настоящей работе этот прием применяться не будет, техника исследований будет соответствовать технике работы [9].

Все построения и рассуждения в настоящей работе ведутся с использованием пространств Лебега L_p, Соболева W_p^l, а также пространств $L_p(0, T; X)$. Необходимые сведения об этих пространствах можно найти в [10–12].

1. Разрешимость нелокальных задач I и II. В настоящем пункте выполняется исследование разрешимости нелокальных задач для уравнений ($*$) при задании одного нелокального условия интегрального вида.

Итак, пусть α и β есть заданные действительные числа, причем $\alpha \neq 0$, $f(x,t)$ и $N(t)$ есть заданные действительнозначные функции, определенные при $x \in \overline{\Omega}$, $t \in [0, T]$.

Нелокальная задача I. *Найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения*

$$u_{tt} + \Big(\alpha\frac{\partial}{\partial t} + \beta\Big)\Delta u = f(x, t) \tag{1}$$

[1] Регулярными решениями называем решения, имеющие все обобщенные по С. Л. Соболеву производные, входящие в уравнение.

и такую, что для нее выполняются условия

$$u(x,t)|_S = 0, \tag{2}$$

$$u(x,0) = 0, \quad x \in \Omega, \tag{3}$$

$$\int_0^T N(t)u(x,t)\,dt = 0, \quad x \in \Omega. \tag{4}$$

Нелокальная задача II. *Найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения* (1) *и такую, что для нее выполняются условия* (2) *и* (4), *а также условие*

$$u_t(x,0) = 0, \quad x \in \Omega. \tag{5}$$

В нелокальных задачах I и II условия (3) и (5) представляют собой обычные локальные (точечные) условия по переменной t, условие же (4) представляет собой интегральное условие. Как уже отмечалось выше, подобные задачи для уравнений (1) ранее не изучались.

Пусть $\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ есть соответственно ортонормированная в $L_2(\Omega)$ система собственных функций и система собственных чисел задачи

$$\Delta w = \lambda w \quad \text{в} \quad \Omega, \quad w|_{\Gamma} = 0,$$

причем собственные числа λ_k представлены в виде монотонно убывающей последовательности. Существование указанных систем собственных функций и собственных чисел известно — см. [12, с. 492], [13, с. 287]; более того, известно, что функции $w_k(x)$, $k = 1, 2\ldots$, образуют базис в пространстве $L_2(\Omega)$, а все собственные числа λ_k отрицательны, последовательность $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ не имеет конечных предельных точек.

Определим необходимое ниже пространство H:

$$H = \{v(x,t) : v(x,t) \in L_2(0,T; W_2^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)),$$

$$\Delta v_t(x,t) \in L_2(Q), \quad v_{tt}(x,t) \in L_2(Q)\}.$$

Будем считать, что H есть нормированное пространство с нормой

$$\|v\|_H = \left(\|v\|^2_{W_2^2(Q)} + \|\Delta v_t\|^2_{L_2(Q)}\right)^{1/2}.$$

Уточним, что регулярным решением нелокальных задач I и II будем называть решение, принадлежащее этому пространству.

Обсудим вопрос о единственности решений нелокальных задач I и II.

Положим для $j = 1, 2, \ldots$

$${}_{j,1} = \frac{-\alpha\lambda_j + \sqrt{\alpha^2\lambda_j^2 - 4\beta\lambda_j}}{2}, \quad z_{j,2} = \frac{-\alpha\lambda_j - \sqrt{\alpha^2\lambda_j^2 - 4\beta\lambda_j}}{2},$$

$$A_j^{(1)} = \int_0^T N(t)\left(e^{z_{j,1}t} - e^{z_{j,2}t}\right)\,dt,$$

$$A_j^{(2)} = \int_0^T N(t)\left(z_{j,2}e^{z_{j,1}t} - z_{j,1}e^{z_{j,2}t}\right)\,dt,$$

$$B_j^{(1)} = \int_0^T tN(t)e^{-\frac{\alpha\lambda_j t}{2}}\,dt, \quad B_j^{(2)} = \int_0^T N(t)\Big(1 + \frac{\alpha\lambda_j t}{2}\Big)e^{-\frac{\alpha\lambda_j t}{2}}\,dt.$$

Теорема 1. *Пусть выполняется условие*

$$N(t) \in C([0,T]) \tag{6}$$

и одно из условий

$$\beta \neq \frac{\alpha^2\lambda_j}{4}, \quad A_j^{(1)} \neq 0 \quad \text{при} \quad j \in \mathbb{N}; \tag{7}$$

$$\exists j_0 \in \mathbb{N} : \beta = \frac{\alpha^2\lambda_{j_0}}{4}; \quad A_j^{(1)} \neq 0 \quad \text{при} \quad j \in \mathbb{N}\setminus\{j_0\}, \quad B_{j_0}^{(1)} \neq 0. \tag{8}$$

Тогда нелокальная задача I не может иметь в пространстве H более одного решения.

Теорема 2. *Пусть выполняются условие (6) и одно из условий*

$$\beta \neq \frac{\alpha^2\lambda_j}{4}, \quad A_j^{(2)} \neq 0 \quad \text{при} \quad j \in \mathbb{N}; \tag{9}$$

$$\beta = \frac{\alpha^2\lambda_{j_0}}{4}, \quad A_j^{(2)} \neq 0 \quad \text{при} \quad j \in \mathbb{N}\setminus\{j_0\}, \quad B_{j_0}^{(2)} \neq 0. \tag{10}$$

Тогда нелокальная задача II не может иметь в пространстве H более одного решения.

Доказательство этих теорем основано на представлении решения $u(x,t)$ нелокальных задач I и II в виде ряда Фурье

$$u(x,t) = \sum_{j=1}^{\infty} c_j(t)w_j(x)$$

и на том факте, что функции $c_j(t)$ в случае $f(x,t) \equiv 0$ являются решениями обыкновенного дифференциального уравнения

$$c_j''(t) + \alpha\lambda_j c_j'(t) + \beta c_j(t) = 0.$$

Учитывая вид решений этого уравнения (определяющегося корнями $z_{j,1}$ и $z_{j,2}$ характеристического многочлена), используя далее порожденные соответствующей задачей I или II нелокальные условия, получим, что при выполнении соотношений (7) или (8), (9) или (10) функции $c_j(t)$ будут тождественно нулевыми на отрезке $[0,T]$ функциями. А это и означает, что каждая из задач I и II не может иметь в пространстве H более одного решения.

Сделаем два замечания к установленным теоремам единственности.

Прежде всего заметим, что если в условиях (7) или (8), (9) или (10) m чисел $A_j^{(1)}$, $B_{j_0}^{(1)}$, или $A_j^{(2)}$, $B_{j_0}^{(2)}$ равны нулю, то нетрудно показать, что соответствующие однородные нелокальные задачи I или II будут иметь семейство решений, определяющееся m произвольными постоянными.

И второе замечание. Нетрудно привести простые достаточные критерии для выполнения условий теорем 1 и 2. Например, условия теоремы 1 выполняются, если непрерывная на отрезке $[0, T]$ функция $N(t)$ отлична от тождественно нулевой функции и неотрицательна.

Перейдем к обсуждению разрешимости нелокальных задач I и II.

Нам понадобятся некоторые вспомогательные утверждения о корректности локальных краевых задач для уравнения (1).

Утверждение 1. *Пусть выполняется условие*

$$\alpha > 0, \quad \alpha + \frac{\beta T}{2} > 0. \tag{11}$$

Тогда для любой функции $f(x,t)$ из пространства $L_2(Q)$ краевая задача

$$v_{tt} + \Big(\alpha \frac{\partial}{\partial t} + \beta\Big)\Delta v = f(x,t), \quad (x,t) \in Q, \tag{12}$$

$$v(x,t)|_S = 0, \tag{13}$$

$$v(x,0) = 0, \quad v_t(x,T) = 0, \quad x \in \Omega, \tag{14}$$

имеет решение $v(x,t)$, принадлежащее пространству H.

Доказательство. Рассмотрим семейство задач с параметром μ из отрезка $[0,1]$: *найти функцию $\overline{v}(x,t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения*

$$\overline{v}_{tt} + \Big(\alpha \frac{\partial}{\partial t} + \mu\beta\Big)\Delta \overline{v} = f(x,t) \tag{12_μ}$$

и такую, что для нее выполняются условия (13) *и* (14). Имеет место следующее:

1) краевая задача (12_0), (13), (14) разрешима в пространстве H;
2) для всевозможных решений $\overline{v}(x,t)$ краевых задач (12_μ), (13), (14) выполняется равномерная по μ оценка

$$\|\overline{v}\|_H \leqslant R_0.$$

Выполнение пункта 1) очевидно, выполнение же пункта 2) показывается стандартным образом с применением неравенства

$$\sum_{i=1}^{n} \int_\Omega w_{x_i}^2(x,T)\,dx \leqslant T \sum_{i=1}^{n} \int_Q w_{x_i t}^2(x,t)\,dx\,dt,$$

справедливого для любой функции $w(x,t)$ из пространства H, удовлетворяющей условию $w(x,0) = 0$ при $x \in \Omega$).

Из этих фактов и из теоремы о методе продолжения по параметру [14, гл. III, § 14, с. 146] следует, что краевая задача (12_μ), (13), (14) разрешима в пространстве H для любого числа μ из отрезка $[0,1]$. А это и дает (при $\mu = 1$) требуемое. $\square$

Утверждение 2. *Пусть выполняется условие*

$$\alpha < 0. \tag{15}$$

Тогда для любой функции $f(x,t)$ из пространства $L_2(Q)$ краевая задача

$$v_{tt} + \Big(\alpha\frac{\partial}{\partial t} + \beta\Big)\Delta v = f(x,t), \quad (x,t) \in Q, \tag{16}$$

$$v(x,t)|_S = 0, \quad v(x,0) = 0, \quad v_t(x,0) = 0, \quad x \in \Omega, \tag{17}$$

имеет решение $v(x,t)$, принадлежащее пространству H.

Доказательство этого утверждения имеется в работе [5, с. 29].

Утверждение 3. *Пусть выполняется условие*

$$\alpha < 0, \quad \alpha + \frac{\beta T}{2} < 0. \tag{18}$$

Тогда для любой функции $f(x,t)$ из пространства $L_2(Q)$ краевая задача

$$v_{tt} + \left(\alpha\frac{\partial}{\partial t} + \beta\right)\Delta v = f(x,t), \quad (x,t) \in Q, \tag{19}$$

$$v(x,t)|_S = 0, \quad v_t(x,0) = 0, \quad v(x,T) = 0, \quad x \in \Omega, \tag{20}$$

имеет решение $v(x,t)$, принадлежащее пространству H.

Доказательство утверждения 3 проводится полностью аналогично доказательству утверждения 1.

Заметим, что решения задач (12)–(14); (16), (17); (19), (20) нетрудно построить с помощью классического метода Фурье [16, с. 59].

Перейдем непосредственно к исследованию разрешимости нелокальных задач I и II.

Будем считать, что выполняется одно из условий (11), (15) или (18). Обозначим через $v_k(x,t)$, $k = 1,2,3$, решение соответствующих краевых задач (12)–(14); (16), (17) или (19), (20). Как уже отмечалось выше, функции $v_k(x,t)$ можно представить в виде ряда Фурье:

$$v_k(x,t) = \sum_{j=1}^{\infty} v_{k,j}(t)w_j(x), \quad v_{k,j}(t) = \int_\Omega v_k(x,t)w_j(x)\,dx.$$

Далее определим числа $a_{k,j}$ соотношениями

$$a_{k,j} = \int_0^T N(t)v_{k,j}(t)\,dt, \quad k = 1,2,3, \quad j = 1,2,\ldots.$$

Теорема 3. *Пусть выполняются условия*

$$N(t) \in C([0,T]), \quad N(t) \geqslant N_0 > 0 \quad \text{при} \quad t \in [0,T]; \tag{6$'$}$$

$$\alpha > 0, \quad \beta > 0. \tag{11$'$}$$

Тогда для любой функции $f(x,t)$ из пространства $L_2\big(0,T; W_2^{2p}(\Omega)\cap \overset{\circ}{W}{}_2^{2p-1}(\Omega)\big)$ при $p \in \mathbb{N}$, $p > (n+6)/4$ (где n — размерность области Ω) нелокальная задача I имеет решение $u(x,t)$, принадлежащее пространству H.

Доказательство. Прежде всего заметим, что вследствие условий (6$'$) и (11$'$) функция $v_1(x,t)$ и числа $a_{1,j}$ будут корректно определены, числа $z_{j,1}$

и $z_{j,2}$ будут действительными и для них будут выполняться неравенства $z_{j,2} < 0 < z_{j,1}$, все числа $A_j^{(1)}$ будут отличны от нуля. Положим

$$\varphi_j(t) = \frac{e^{z_{j,1}t} - e^{z_{j,2}t}}{A_j^{(1)}}, \quad D_j = \alpha^2\lambda_j^2 - 4\beta\lambda_j, \quad u_1(x,t) = \sum_{j=1}^{\infty} a_{1,j}\varphi_j(t)w_j(x).$$

Имеет место очевидное неравенство

$$\int_0^T \varphi_j^2(t)\,dt \leqslant \frac{e^{2z_{j,1}T}}{z_{j,1}[A_j^{(1)}]^2}. \tag{21}$$

Далее

$$A_j^{(1)} = \int_0^T N(t)\left(e^{z_{j,1}t} - e^{z_{j,2}t}\right)\,dt \geqslant N_0\int_0^T \left(e^{z_{j,1}t} - e^{z_{j,2}t}\right)\,dt =$$
$$= N_0\Big(\frac{e^{z_{j,1}T}}{z_{j,1}} - \frac{e^{z_{j,2}T}}{z_{j,2}} + \frac{\sqrt{D_j}}{z_{j,1}z_{j,2}}\Big) \geqslant \frac{N_0}{z_{j,1}}\Big(e^{z_{j,1}T} + \frac{\sqrt{D_j}}{z_{j,2}}\Big).$$

Поскольку числа λ_j отрицательны и в совокупности образуют монотонно убывающую последовательность, существует положительное число γ, для которого выполняется неравенство

$$\frac{\sqrt{D_j}}{|z_{j,2}|} \leqslant \gamma z_{j,1}.$$

Для таких чисел[2] γ выполняется неравенство

$$A_j^{(1)} \geqslant \frac{N_0}{z_{j,1}}\left(e^{z_{j,1}T} - \gamma z_{j,1}\right),$$

и поскольку экспоненциальная функция растет быстрее любой степенной функции, найдется натуральное число j_0 такое, что при $j > j_0$ будет выполняться

$$A_j^{(1)} \geqslant \frac{N_0 e^{z_{j,1}T}}{2z_{j,1}}. \tag{22}$$

Очевидно, что из оценок (21) и (22) вытекает неравенство

$$\int_0^T \varphi_j^2(t)\,dt \leqslant N_1|\lambda_j|,$$

в котором $j > j_0$, число N_1 не зависит от j.

Действуя в целом аналогично, нетрудно показать, что существует натуральное число j_1 такое, что при $j > j_1$ имеет место оценка

$$\int_0^T {\varphi'_j}^2(t)\,dt \leqslant N_2|\lambda_j|^3$$

с постоянной N_2, не зависящей от j.

[2] В качестве искомого числа γ можно взять любое число такое, что $\gamma\beta > \left(\frac{4\beta}{|\lambda_1|} + \alpha^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

Вследствие неравенства Бесселя [14, с. 57], [15, с. 68] для функции $u_1(x,t)$ выполняются оценки

$$\int_Q (\Delta u_1)^2\,dx\,dt \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^2 a_{1,j}^2 \int_0^T \varphi_j^2(t)\,dt, \tag{23}$$

$$\int_Q (\Delta u_{1t})^2\,dx\,dt \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^2 a_{1,j}^2 \int_0^T {\varphi'_j}^2(t)\,dt. \tag{24}$$

Если $f(x,t) \in L_2\big(0,T; W_2^{2p}(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^{2p-1}(\Omega)\big)$, то для функции $v_1(x,t)$ будет выполняться включение $\Delta^{p+1}v_1(x,t) \in L_2(Q)$. Этот факт нетрудно доказать с помощью последовательного применения к уравнению (12) операторов $\Delta, \Delta^2, \ldots, \Delta^p$, умножения полученных равенств на функции $\Delta^2 v_1, \ldots, \Delta^{p+1}v_1$ соответственно и интегрирования по частям. Следовательно, справедливо равенство

$$v_{1,j}(t) = \frac{1}{\lambda_j^{p+1}} \int_\Omega \Delta^{p+1} v_1(x,t) w_j(x)\,dx,$$

из которого вытекают следующие оценки:

$$\int_0^T v_{1,j}^2(t)\,dt \leqslant \frac{C_1}{|\lambda_j|^{2(p+1)}}, \quad a_{1,j}^2 \leqslant \frac{C_2}{|\lambda_j|^{2(p+1)}}.$$

В свою очередь, из этих оценок и неравенств (23) и (24) вытекают неравенства

$$\int_Q (\Delta u_1)^2\,dx\,dt \leqslant C_3 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_j|^{2p-1}}, \tag{25}$$

$$\int_Q (\Delta u_{1t})^2\,dx\,dt \leqslant C_4 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_j|^{2p-3}}. \tag{26}$$

Для чисел λ_j имеет место свойство $|\lambda_j| \sim j^{\frac{2}{n}}$ (см., например, [12, с. 493]). Из этого свойства и из условия $(4p-6)/n > 1$ (вытекающего из условия теоремы на число p) следует, что ряды в правых частях неравенств (25) и (26) сходятся.

Из доказанного следует, что функции $\Delta u_1(x,t)$ и $\Delta u_{1t}(x,t)$ принадлежат пространству $L_2(Q)$. Далее, имеет место равенство

$$u_{1tt}(x,t) = -\Big(\alpha \frac{\partial}{\partial t} + \beta\Big) \Delta u_1(x,t).$$

Поскольку правая часть в этом равенстве принадлежит пространству $L_2(Q)$, то и левая часть будет элементом этого же пространства. Но тогда в целом функция $u_1(x,t)$ будет принадлежать пространству H.

Определим функцию $u(x,t)$:

$$u(x,t) = v_1(x,t) - u_1(x,t).$$

Эта функция будет принадлежать пространству H, для нее будут выполняться уравнение (1), краевые условия (2) и (3), а также интегральное условие (4). Следовательно, эта функция будет представлять собой искомое решение нелокальной задачи I. $\square$

Теорема 4. *Пусть выполняются условия* ($6'$) *и* (15). *Тогда для любой функции* $f(x,t)$ *из пространства* $L_2\big(0,T; W_2^{2p}(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^{2p-1}(\Omega)\big)$ *при* $p \in \mathbb{N}$, $p > (n+2)/4$, *нелокальная задача* I *имеет решение* $u(x,t)$, *принадлежащее пространству* H.

Доказательство. При выполнении условия (15) числа $z_{j,1}$ и $z_{j,2}$ могут совпадать, могут быть комплексными и могут быть действительными. Определим функции $\varphi_j(t)$ следующим образом:

$$\varphi_j(t) = \frac{1}{A_j^{(1)}} e^{-\alpha\lambda_j t} \sin\left(\sqrt{4\beta\lambda_j - \alpha^2\lambda_j^2}\, t\right), \quad \text{если} \quad \alpha^2\lambda_j^2 - 4\beta\lambda_j < 0,$$

$$\varphi_j(t) = \frac{1}{B_j^{(1)}} t e^{-\alpha\lambda_j t}, \qquad \text{если} \quad \alpha^2\lambda_j^2 - 4\beta\lambda_j = 0,$$

$$\varphi_j(t) = \frac{1}{A_j^{(1)}} \left(e^{z_{j,1}t} - e^{z_{j,2}t}\right), \quad \text{если} \quad \alpha^2\lambda_j^2 - 4\beta\lambda_j > 0.$$

Далее введем функцию

$$u_2(x,t) = \sum_{j=1}^{\infty} a_{2,j}\varphi_j(t) w_j(x).$$

Рассмотрим сначала случай, когда число β неположительно. Тогда существуют натуральное число j_1^* и положительные числа γ_1 и γ_2 такие, что при $j \geqslant j_1^*$ числа $z_{j,1}$ и $z_{j,2}$ будут действительными и различными и для них будут выполняться неравенства:

$$z_{j,2} + \gamma_1 \leqslant z_{j,1} \leqslant 0, \quad z_{j,1} \geqslant -\gamma_1. \tag{27}$$

Из данных свойств чисел $z_{j,1}$ и $z_{j,2}$ следует, что при $j \geqslant j_1^*$ будут выполняться неравенства

$$\int_0^T \left(e^{z_{j,1}t} - e^{z_{j,2}t}\right)^2 dt \leqslant 4T,$$

$$A_j^{(1)} \geqslant N_0 \int_0^T \left(e^{z_{j,1}t} - e^{z_{j,2}t}\right) dt \geqslant$$
$$\geqslant N_0 \int_0^T e^{z_{j,1}t}\left(1 - e^{-\gamma_1 t}\right) dt \geqslant N_0 \int_0^T e^{-\gamma_2 t}\left(1 - e^{-\gamma_1 t}\right) dt = N_0^*.$$

В свою очередь, эти неравенства означают, что при $j \geqslant j_1^*$ выполняется оценка

$$\int_0^T \varphi_j^2(t)\, dt \leqslant N_3 \tag{28}$$

с постоянной N_3, не зависящей от j. Далее, вновь используя неравенство (27) и учитывая, что отношение $\frac{|z_{2,j}|}{|\lambda_j|}$ ограничено, нетрудно показать, что выполняется вторая оценка

$$\int_0^T {\varphi'_j}^2(t)\,dt \leqslant N_4|\lambda_j|, \tag{29}$$

в которой $j \geqslant j_1^*$, N_4 не зависит от j.

Пусть теперь $\beta > 0$. В этом случае будут выполняться неравенства $z_{j,2} < 0 < z_{j,1}$, последовательность $\{z_{j,1}\}_{j=1}^{\infty}$ будет ограниченной отделенной от нуля последовательностью. Из этих свойств чисел $z_{j,1}$ и $z_{j,2}$ следует, что для функций $\varphi_j(t)$ будут выполняться как неравенства (28), так и неравенства (29).

Оценки (28) и (29), равенство

$$u_{2tt}(x,t) = -\Big(\alpha\frac{\partial}{\partial t} + \beta\Big)\Delta u_2,$$

а также условие $p > (n+2)/4$ означают, что функция $u_2(x,t)$ принадлежит пространству H (см. окончание доказательства теоремы 3). Положим

$$u(x,t) = v_2(x,t) - u_2(x,t).$$

Эта функция и есть искомое решение нелокальной задачи I. □

Теорема 5. *Пусть выполняются условие* ($6'$) *и* (15). *Тогда для любой функции $f(x,t)$ из пространства $L_2\big(0,T;W_2^{2p}(\Omega)\cap \overset{\circ}{W}{}_2^{2p-1}(\Omega)\big)$ при $p\in\mathbb{N}$, $p > n/4$, нелокальная задача II имеет решение $u(x,t)$, принадлежащее пространству H.*

Доказательство. Пусть $\beta > 0$. Положим

$$\varphi_j(t) = \frac{z_{j,1}e^{z_{j,2}t} - z_{j,2}e^{z_{j,1}t}}{A_j^{(2)}},\ \ \overline{u}_2(x,t) = \sum_{j=1}^{\infty} a_{2,j}\varphi_j(t)w_j(x).$$

Используя свойства чисел $z_{j,1}$ и $z_{j,2}$ (см. доказательство теоремы 4), нетрудно показать, что при достаточно больших j выполняется неравенство

$$\int_0^T \varphi_j^2(t)\,dt + \int_0^T {\varphi'_j}^2(t)\,dt \leqslant N_5 \tag{30}$$

с постоянной N_5, не зависящей от j.

Неравенства (30) и условие $p > n/4$ означают, что функция $\overline{u}_2(x,t)$ будет принадлежать пространству H. Определим функцию

$$u(x,t) = v_2(x,t) - \overline{u}_2(x,t). \tag{31}$$

Эта функция и будет искомым решением нелокальной задачи II из пространства H.

Если $\beta \leqslant 0$, то функции $\varphi_j(t)$ в случае $\alpha^2\lambda_j^2 - 4\beta\lambda_j > 0$ определим так же, как при $\beta > 0$, если же $\alpha^2\lambda_j^2 - 4\beta\lambda_j \leqslant 0$, то функции $\varphi_j(t)$ необходимо определить с учетом кратных или комплексных корней соответствующего характеристического уравнения. Используя свойства чисел $z_{j,1}$ и $z_{j,2}$, вновь нетрудно будет установить что при больших j для функций $\varphi_j(t)$ выполняются неравенства (30). Определим функцию $u(x,t)$ равенством (31). Эта функция вновь даст искомое решение нелокальной задачи II. □

Комментарии и дополнения.

1. Утверждение 3 при доказательстве существования решений нелокальных задач I и II не использовалось. Из теорем 4 и 5 следует, что при использовании утверждения 1 о разрешимости эллиптической задачи для дифференциального уравнения (1) третьего порядка требуются более сильные условия на функцию $f(x,t)$, нежели при использовании утверждения 2 о разрешимости гиперболической задачи. Именно поэтому авторы не обсуждали использование утверждения 3 для изучения разрешимости нелокальной задачи II.
2. Теоремы 1 и 2 фактически дают условия, при выполнении которых число 0 будет собственным числом для задач

$$u_{tt} + \Big(\alpha\frac{\partial}{\partial t} + \beta\Big)\Delta u = \lambda u,$$

$$u(x,t)|_S = 0, \quad u(x,0) = 0, \quad \int_0^T N(t)u(x,t)\,dt = 0,$$

и

$$u_{tt} + \Big(\alpha\frac{\partial}{\partial t} + \beta\Big)\Delta u = \lambda u,$$

$$u(x,t)|_S = 0, \quad u_t(x,0) = 0, \quad \int_0^T N(t)u(x,t)\,dt = 0.$$

Нетрудно привести условия, при выполнении которых действительное ненулевое число λ будет собственным числом нелокальных задач I или II (уточним лишь, что случай $\lambda \neq 0$ приводит к более громоздким условиям и выкладкам).
3. Граничное условие (2) можно заменить граничным условием второй или третьей краевых задач. Оператор Лапласа в уравнении (1) можно заменить общим эллиптическим оператором порядка $2m$ в самосопряженной форме (с естественным добавлением краевых условий, порождающих полную систему собственных функций).

Конкурирующие интересы. Конкурирующих интересов не имеем.

Авторский вклад и ответственность. Все авторы принимали участие в разработке концепции статьи и в написании рукописи. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках государственного задания № 0778–2020–0005.

Библиографический список

1. Дубля З. Д. О задаче Дирихле для некоторого класса уравнений третьего порядка // *Диффер. уравн.*, 1977. Т. 13, № 1. С. 50–55.

2. Ларькин Н. А., Новиков В. А., Яненко Н. Н. *Нелинейные уравнения переменного типа.* Новосибирск: Наука, 1983. 270 с.
3. Кожанов А. И. Краевые задачи и свойства решений для уравнений третьего порядка // *Диффер. уравн.*, 1989. Т. 25, № 12. С. 2143–2153.
4. Ларькин Н. А. Теоремы существования для квазилинейных псевдогиперболических уравнений // *Докл. АН СССР*, 1982. Т. 265, № 6. С. 1316–1319.
5. Kozhanov A. I. *Composite Type Equations and Inverse Problems* / Inverse and Ill-Posed Problems Series. Utrecht: VSP, 1999. x+171 pp.
6. Худавердиев К. И., Велиев А. А. *Исследование одномерной смешанной задачи для одного класса псевдогиперболических уравнений третьего порядка с нелинейной операторной правой частью.* Баку: Чашыоглу, 2010. 168 с.
7. Кожанов А. И., Потапова С. В. Задача Дирихле для одного класса уравнений составного типа с разрывным коэффициентом при старшей производной // *Дальневост. матем. журн.*, 2014. Т. 14, № 1. С. 48–65.
8. Жегалов В. И., Миронов А. Н., Уткина Е. А. *Уравнения с доминирующей частной производной.* Казань: Казан. ун-т, 2014. 385 с.
9. Kozhanov A. I. Nonlocal problems with integral conditions for elliptic equations // *Complex Variables and Elliptic Equations*, 2019. vol. 64, no. 5. pp. 741–752. https://doi.org/10.1080/17476933.2018.1501038.
10. Соболев С. Л. *Некоторые применения функционального анализа в математической физике.* М.: Наука, 1988. 337 с.
11. Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н. *Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа.* М.: Наука, 1973. 576 с.
12. Triebel H. *Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators* / North-Holland Mathematical Library. vol. 18. Amsterdam, New York, Oxford: North-Holland Publ., 1978. 528 pp.
13. Эванс Л. К. *Уравнения с частными производными.* Новосибирск: Тамара Рожковская, 2003. 562 с. ; оригинал: Evans L. C. *Partial Differential Equations* / Graduate Studies in Mathematics. vol. 19: American Mathematical Society, 2010. xxi+749 pp.
14. Треногин В. А. *Функциональный анализ.* М.: Наука, 1980. 495 с.
15. Лебедев В. И. *Функциональный анализ и вычислительная математика.* М.: Физматлит, 2005. 296 с.
16. Свешников А. Г., Боголюбов А. Н., Кравцов В. В. *Лекции по математической физике.* М.: Московск. ун-т, 2004. 416 с.

Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2020, vol. 24, no. 4, pp. 607–620
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1821

MSC: 35M10

Non-local problems with an integral condition for third-order differential equations

© *A. I. Kozhanov*[1], *A. V. Dyuzheva*[2]

[1] Sobolev Institute of Mathematics,
Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences,
4, Acad. Koptyug pr., Novosibirsk, 630090, Russian Federation.
[2] Samara State Technical University,
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russian Federation.

Abstract

The paper is devoted to the study of the solvability of nonlocal problems with an integral variable t condition for the equations

$$u_{tt} + \left(\alpha \frac{\partial}{\partial t} + \beta\right) \Delta u = f(x,t)$$

(α, β are valid constants, Δ is Laplace operator by spatial variables). Theorems are proved for the studied problems existence and non-existence, uniqueness and non-uniqueness solutions (having all derivatives generalized by S. L. Sobolev included in the equation).

Keywords: third-order differential equations, non-local problems, integral conditions, regular solutions, uniqueness, existence.

Received: 21st August, 2020 / Revised: 17th October, 2020 /
Accepted: 16th November, 2020 / First online: 30th November, 2020

Competing interests. We have no competing interests.

Authors' contributions and responsibilities. Each author has participated in the article concept development and in the manuscript writing. The authors are absolutely responsible for submitting the final manuscript in print. Each author has approved the final version of manuscript.

Research Article

Please cite this article in press as:
Kozhanov A. I., Dyuzheva A. V. Non-local problems with an integral condition for third-order differential equations, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2020, vol. 24, no. 4, pp. 607–620. https://doi.org/10.14498/vsgtu1821 (In Russian).

Authors' Details:

Alexander I. Kozhanov https://orcid.org/0000-0003-4376-4003
Dr. Phys. & Math. Sci., Professor; Chief Researcher; Lab. of Differential and Difference Equations; e-mail: kozhanov@math.nsc.ru

Alexandra V. Dyuzheva https://orcid.org/0000-0002-3284-5302
Cand. Phys. & Math. Sci.; Associate Professor; Dept. of Higher Mathematics;
e-mail: aduzheva@rambler.ru

Funding. The work was carried out with the financial support of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation in the framework of state task, no. 0778–2020–0005.

References

1. Dublya Z. D. The Dirichlet problem for a certain class of third order equations, *Differ. Uravn.*, 1977, vol. 13, no. 1, pp. 50–55 (In Russian).
2. Larkin N. A., Novikov V. A., Yanenko N. N. *Nelineinye uravneniia peremennogo tipa* [Nonlinear Equations of Variable Type]. Novosibirsk, Nauka, 1983, 270 pp. (In Russian)
3. Kozhanov A. I. Boundary value problems and properties of solutions for third-order equations, *Differ. Equ.*, 1989, vol. 25, no. 12, pp. 1528–1537.
4. Larkin N. A. Existence theorems for quasilinear pseudohyperbolic equations, *Sov. Math., Dokl.*, 1982, vol. 26, no. 260–263.
5. Kozhanov A. I. *Composite Type Equations and Inverse Problems*, Inverse and Ill-Posed Problems Series. Utrecht, VSP, 1999, x+171 pp.
6. Khudaverdiyev K. I.,Veliyev A. A. *Issledovanie odnomernoi smeshannoi zadachi dlia odnogo klassa psevdogiperbolicheskikh uravnenii tret'ego poriadka s nelineinoi operatornoi pravoi chast'iu* [Investigation of a One-Dimensional Mixed Problem for a Class of Pseudohyperbolic Equations of Third Order with Non-Linear Operator Right Hand Side]. Baku, Chashyogly, 2010, 168 pp. (In Russian)
7. Kozhanov A. I., Potapova S. V. The Dirichlet problem for a class of composite type equations with a discontinuous coefficient of the highest derivative, *Dal'nevost. Mat. Zh.*, 2014, vol. 14, no. 1, pp. 48–65 (In Russian).
8. Zhegalov V. I., Mironov A. N., Utkina E. A. *Uravneniia s dominiruiushchei chastnoi proizvodnoi* [Equations with Dominating Partial Derivative]. Kazan, Kazan Univ., 2014, 385 pp. (In Russian)
9. Kozhanov A. I. Nonlocal problems with integral conditions for elliptic equations, *Complex Variables and Elliptic Equations*, 2019, vol. 64, no. 5, pp. 741–752. https://doi.org/10.1080/17476933.2018.1501038.
10. Sobolev S. L. *Some Applications of Functional Analysis in Mathematical Physics*, Translations of Mathematical Monographs, vol. 90. Providence, American Mathematical Society, 1991, vii+286 pp.
11. Ladyzhenskaya O. A., Uraltseva N. N. *Linear and Quasilinear Elliptic Equations*, Mathematics in Science and Engineering, vol. 46. New York, Academic Press, 1968, xviii+495 pp.
12. Triebel H. *Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators*, North-Holland Mathematical Library, vol. 18. Amsterdam, New York, Oxford, North-Holland Publ., 1978, 528 pp.
13. Evans L. C. *Partial Differential Equations*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 19, American Mathematical Society, 2010, xxi+749 pp.
14. Trenogin V. A. *Funktsional'nyi analiz* [Functional Analysis]. Moscow, Nauka, 1980, 495 pp. (In Russian)
15. Lebedev V. I. *Funktsional'nyi analiz i vychislitel'naia matematika* [Functional Analysis and Computational Mathematics]. Moscow, Fizmatlit, 2005, 296 pp. (In Russian)
16. Sveshnikov A. G., Bogolyubov A. N., Kravtsov V. V. *Lektsii po matematicheskoi fizike* [Lectures on Mathematical Physics]. Moscow, Moscow Univ., 2004, 416 pp. (In Russian)