Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2020. Т. 24, № 4. С. 621–643
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1803

УДК 517.956.25

Существование решений квазилинейных эллиптических уравнений в пространствах Музилака–Орлича–Соболева для неограниченных областей

© Л. М. Кожевникова[1,2], А. П. Кашникова[1]

[1] Башкирский государственный университет, Стерлитамакский филиал, Россия, 453103, Стерлитамак, проспект Ленина, 49.
[2] Елабужский институт (филиал) Казанского (Приволжского) федерального университета, Россия, 423600, Елабуга, ул. Казанская, 89.

Аннотация

Рассматривается вопрос существования решений задачи Дирихле для нелинейных эллиптических уравнений второго порядка в неограниченных областях. Ограничения на структуру квазилинейных уравнений формулируются в терминах специального класса выпуклых функций — обобщенных N-функций. А именно, нелинейности определяются функциями Музилака–Орлича такими, что дополнительные к ним функции подчиняются Δ_2-условию. Соответствующее пространство Музилака–Орлича–Соболева не обязано быть рефлексивным. Именно этот факт является существенной проблемой, поскольку теорема для псевдомонотонных операторов здесь не применима.

Для рассматриваемого класса уравнений доказательство теоремы существования проводится на основе абстрактной теоремы для дополнительных систем. Важным инструментом, который позволил обобщить имеющиеся результаты существования решений рассматриваемых уравнений для ограниченных областей на неограниченные области, является теорема вложения пространств Музилака–Орлича–Соболева. Таким образом, в работе найдены условия на структуру квазилинейных уравнений в терминах функций Музилака–Орлича, достаточные для разрешимости задачи Дирихле в неограниченных областях. Кроме того, приведены примеры уравнений, показывающие, что класс нелинейностей, рассматриваемый в работе, шире, чем нестепенные и степенные нелинейности.

Научная статья

Образец для цитирования
Кожевникова Л. М., Кашникова А. П. Существование решений квазилинейных эллиптических уравнений в пространствах Музилака–Орлича–Соболева для неограниченных областей // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2020. Т. 24, № 4. С. 621–643. https://doi.org/10.14498/vsgtu1803.

Сведения об авторах
Лариса Михайловна Кожевникова https://orcid.org/0000-0002-6458-5998
доктор физико-математических наук, профессор; профессор каф. математического анализа; e-mail: kosul@mail.ru

Анастасия Павловна Кашникова; студент; e-mail: a.kashnikova98@yandex.ru

Ключевые слова: Музилака–Орлича–Соболева пространство, задача Дирихле, существование решения, нерефлексивное пространство, неограниченная область.

Получение: 20 июля 2020 г. / Исправление: 20 сентября 2020 г. / Принятие: 16 ноября 2020 г. / Публикация онлайн: 25 декабря 2020 г.

Введение. Пусть Ω — произвольная неограниченная область пространства $\mathbb{R}^n = \{\mathrm{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)\}$, $n \geqslant 2$, $\Omega \neq \mathbb{R}^n$. В работе рассматривается задача Дирихле для квазилинейного эллиптического уравнения второго порядка вида

$$-\operatorname{div} \mathrm{a}(\mathrm{x}, u, \nabla u) + a_0(\mathrm{x}, u, \nabla u) = F(\mathrm{x}), \quad \mathrm{x} \in \Omega, \tag{1}$$

с однородным краевым условием

$$u\big|_{\partial\Omega} = 0. \tag{2}$$

Ограничения на функции $\mathrm{a}(\mathrm{x}, s_0, \mathrm{s})$, $a_0(\mathrm{x}, s_0, \mathrm{s})$, входящие в уравнение (1), формулируются в терминах специального класса выпуклых функций, называемых обобщенными N-функциями, они будут приведены ниже.

Общая краевая задача вариационного типа для квазилинейного эллиптического уравнения высокого порядка в дивергентной форме с нелинейностями полиномиального вида была рассмотрена Ф. Браудером [1] в произвольной области без условий ограниченности или гладкости границы области. Соответствующий оператор из рефлексивного банахова пространства в его двойственное является псевдомонотонным, и из этого факта следует результат существования решения рассматриваемой задачи.

Следуя работе [1] Л. М. Кожевниковой, А. Ш. Камалетдиновым [2] установлено существование слабого решения задачи Дирихле в произвольной области Ω для анизотропного уравнения (1) с переменными показателями нелинейностей. Ранее Л. М. Кожевниковой, А. А. Хаджи в работе [3] доказано существование слабого решения задачи Дирихле в произвольной неограниченной области Ω для анизотропного эллиптического уравнения (1) с нелинейностями, определяемыми N-функциями.

Для квазилинейных эллиптических уравнений в пространствах Музилака—Орлича—Соболева известны следующие результаты существования слабых решений. В работах [4, 5] доказано существование решений при некоторых предположениях, таких как Δ_2-условие, а также равномерная выпуклость обобщенной N–функции M, которые гарантируют, что пространство Музилака—Орлича—Соболева является рефлексивным. Исследованию вопросов существования решений вариационных краевых задач для квазилинейных эллиптических уравнений в нерефлексивных пространствах (при условии, что дополнительная функция $\overline{M}$ подчиняется Δ_2-условию) посвящены работы [6, 7]. Существование слабых решений для дифференциальных уравнений второго порядка с граничным условием Дирихле или Неймана методом построения супер- и субрешений в рефлексивном и нерефлексивном сепарабельных пространствах установлено в работах [8] и [9] соответственно.

Содержательный обзор проблем, возникающих в вопросах существования решений нелинейных эллиптических и параболических уравнений в пространствах Музилака—Орлича—Соболева, приведен в работе [10].

Следует отметить, что авторам неизвестны результаты исследований существования решений нелинейных уравнений в пространствах Музилака—Орлича—Соболева для неограниченных областей. В настоящей работе доказана теорема существования решения задачи (1), (2) для произвольной неограниченной области Ω в пространстве Музилака—Орлича—Соболева, которое может быть нерефлексивным.

1. Пространства Музилака—Орлича—Соболева. В этом параграфе будут приведены необходимые сведения из теории обобщенных N-функций и пространств Музилака—Орлича [11–13].

Пусть функция $M(\mathrm{x}, z) : \Omega\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ удовлетворяет следующим условиям:

1) $M(\mathrm{x}, \,\cdot\,)$ — N-функция по $z \in \mathbb{R}$, то есть она является выпуклой вниз, неубывающей, четной, непрерывной, $M(\mathrm{x}, 0) = 0$ для п.в. $\mathrm{x} \in \Omega$ и

$$\inf_{\mathrm{x}\in\Omega} M(\mathrm{x}, z) > 0 \quad \text{для всех} \quad z \neq 0,$$

$$\lim_{z\to 0} \sup_{\mathrm{x}\in\Omega} \frac{M(\mathrm{x}, z)}{z} = 0,$$

$$\lim_{z\to \infty} \inf_{\mathrm{x}\in\Omega} \frac{M(\mathrm{x}, z)}{z} = \infty;$$

2) $M(\,\cdot\,, z)$ — измеримая функция по $\mathrm{x} \in \Omega$ для любых $z \in \mathbb{R}$.

Такая функция $M(\mathrm{x}, z)$ называется функцией Музилака—Орлича или обобщенной N-функцией.

Дополнительная функция $\overline{M}(\mathrm{x}, \cdot)$ к функции Музилака—Орлича $M(\mathrm{x}, \cdot)$ в смысле Юнга для п.в. $\mathrm{x} \in \Omega$ и любых $z \geqslant 0$ определяется равенством

$$\overline{M}(\mathrm{x}, z) = \sup_{y\geqslant 0}\big(yz - M(\mathrm{x}, y)\big).$$

Отсюда следует неравенство Юнга:

$$|zy| \leqslant M(\mathrm{x}, z) + \overline{M}(\mathrm{x}, y), \quad z, y \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{x} \in \Omega. \tag{3}$$

Пусть $P(\mathrm{x}, z)$ и $M(\mathrm{x}, z)$ — функции Музилака—Орлича. Если для каждой положительной константы l имеем

$$\lim_{z\to\infty} \sup_{\mathrm{x}\in\Omega} \frac{P(\mathrm{x}, lz)}{M(\mathrm{x}, z)} = 0, \tag{4}$$

то это обозначается $P \prec\!\prec M$ и говорят, что P растет медленнее, чем M на ∞.

Функция Музилака—Орлича M удовлетворяет Δ_2-условию, если существуют константы $c > 0$, $z_0 \geqslant 0$ и функция $H \in L_1(\Omega)$ такие, что для п.в. $\mathrm{x} \in \Omega$ и любых $|z| \geqslant z_0$ справедливо неравенство

$$M(\mathrm{x}, 2z) \leqslant cM(\mathrm{x}, z) + H(\mathrm{x}).$$

Δ_2-условие эквивалентно выполнению для п.в. $\mathrm{x} \in \Omega$ и любых $|z| \geqslant z_0$ неравенства

$$M(\mathrm{x}, lz) \leqslant c(l)M(\mathrm{x}, z) + H_l(\mathrm{x}), \quad H_l \in L_1(\Omega),$$

где l — любое число, большее единицы, $c(l) > 0$.

В настоящей работе предполагается, что дополнительная N-функция $\overline{M}(\mathrm{x}, z)$ удовлетворяет Δ_2-условию при всех значениях $z \in \mathbb{R}$ (т.е. $z_0 = 0$). Таким образом, для любого $l > 0$ имеет место неравенство

$$\overline{M}(\mathrm{x}, lz) \leqslant c(l)\overline{M}(\mathrm{x}, z) + H_l(\mathrm{x}), \quad H_l \in L_1(\Omega), \quad \mathrm{x} \in \Omega, \quad z \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

Существуют три класса Музилака—Орлича:

— $\mathscr{L}_M(\Omega)$ — обобщенный Музилака—Орлича класс измеримых функций $v : \Omega \to \mathbb{R}$ таких, что

$$\varrho_{M,\Omega}(v) = \int_\Omega M(\mathrm{x}, v(\mathrm{x}))d\mathrm{x} < \infty;$$

— $L_M(\Omega)$ — обобщенное Музилака—Орлича пространство, являющееся наименьшим линейным пространством, которое содержит класс $\mathscr{L}_M(\Omega)$, с нормой Люксембурга

$$\|v\|_{M,\Omega} = \inf\left\{\lambda > 0 \;\Big|\; \varrho_{M,\Omega}\left(\frac{v}{\lambda}\right) \leqslant 1\right\};$$

— $E_M(\Omega)$ — замыкание по норме $\|\cdot\|_{M,\Omega}$ ограниченных измеримых функций с компактным носителем в $\overline{\Omega}$.

Справедливы вложения $E_M(\Omega) \subset \mathscr{L}_M(\Omega) \subset L_M(\Omega)$. Ниже в обозначениях $\|\cdot\|_{M,Q}$, $\varrho_{M,Q}(\,\cdot\,)$ будем опускать индекс $Q = \Omega$.

Функция Музилака—Орлича $M(\mathrm{x}, z)$ называется локально интегрируемой, если

$$\varrho_{M,Q}(z) = \int_Q M(\mathrm{x}, z)d\mathrm{x} < \infty$$

для любого $z \in \mathbb{R}$ и любого измеримого множества $Q \subset \Omega$ такого, что $\operatorname{meas} Q < \infty$. Если Q может совпадать с Ω, то $M(\mathrm{x}, z)$ называется интегрируемой в Ω.

Пусть M и $\overline{M}$ — локально интегрируемые дополнительные обобщенные N-функции. Пространство $E_M(\Omega)$ сепарабельное и $(E_M(\Omega))^* = L_{\overline{M}}(\Omega)$. Если M удовлетворяет Δ_2-условию, то $E_M(\Omega) = \mathscr{L}_M(\Omega) = L_M(\Omega)$ и $L_M(\Omega)$ сепарабельное. Пространство $L_M(\Omega)$ рефлексивное тогда и только тогда, когда функции Музилака—Орлича M и $\overline{M}$ удовлетворяет Δ_2-условию.

Для $v \in L_M(\Omega)$ справедливы неравенства:

$$\|v\|_M \leqslant \varrho_M(v) + 1, \tag{6}$$

если $\|v\|_M \leqslant 1$, то

$$\varrho_M(v) \leqslant \|v\|_M, \tag{7}$$

если $\|v\|_M > 1$, то

$$\|v\|_M \leqslant \varrho_M(v).$$

Последовательность функций $\{v^j\}_{j\in\mathbb{N}} \in L_M(\Omega)$ модулярно сходится к функции $v \in L_M(\Omega)$, если существует положительная константа $k > 0$ такая, что

$$\lim_{j\to\infty} \varrho_M\Big(\frac{v^j - v}{k}\Big) = 0.$$

Если M удовлетворяет Δ_2-условию, то модулярная топология и топология по норме совпадают.

Также для двух сопряженных функций Музилака—Орлича M и $\overline{M}$, если $u \in L_M(\Omega)$ и $v \in L_{\overline{M}}(\Omega)$, выполняется неравенство Гельдера:

$$\left|\int_\Omega u(\mathrm{x})v(\mathrm{x})d\mathrm{x}\right| \leqslant 2\|u\|_M\|v\|_{\overline{M}}. \tag{8}$$

Определим пространства Музилака—Орлича—Соболева:

$$W^1L_M(\Omega) = \big\{v \in L_M(\Omega) \ \mid \ |\nabla v| \in L_M(\Omega)\big\},$$
$$W^1E_M(\Omega) = \big\{v \in E_M(\Omega) \ \mid \ |\nabla v| \in E_M(\Omega)\big\}$$

с нормой

$$\|v\|^1_M = \|v\|_M + \||\nabla v|\|_M.$$

Пространство $W^1L_M(\Omega)$ отождествляется с подпространством произведения $(L_M(\Omega))^{n+1}$ и является замкнутым по топологии $\sigma\big((L_M)^{n+1}, (E_{\overline{M}})^{n+1}\big)$.

Пространство $\mathring{W}^1L_M(\Omega)$ определим как замыкание $C_0^\infty(\Omega)$ по топологии $\sigma\big((L_M)^{n+1}, (E_{\overline{M}})^{n+1}\big)$ в $W^1L_M(\Omega)$. Наконец, пространство $\mathring{W}^1E_M(\Omega)$ определим как замыкание $C_0^\infty(\Omega)$ по норме $\|\cdot\|^1_M$ в $W^1L_M(\Omega)$.

Пространства $\mathring{W}^1L_M(\Omega)$, $\mathring{W}^1E_M(\Omega)$ банаховы (см. [12, Theorem 10.2]).

Определим также следующие банаховы пространства:

$$W^{-1}L_{\overline{M}}(\Omega) = \big\{F = f_0 - \operatorname{div}\mathrm{f} \ \mid \ f_0 \in L_{\overline{M}}(\Omega),\ \mathrm{f} = (f_1,\ldots,f_n) \in (L_{\overline{M}}(\Omega))^n\big\},$$

$$W^{-1}E_{\overline{M}}(\Omega) = \big\{F = f_0 - \operatorname{div}\mathrm{f} \ \mid \ f_0 \in E_{\overline{M}}(\Omega),\ \mathrm{f} = (f_1,\ldots,f_n) \in (E_{\overline{M}}(\Omega))^n\big\}.$$

Справедлива следующая теорема вложения (см. [6, Theorem 4]).

Лемма 1. *Пусть функция Музилака—Орлича $M(\mathrm{x}, z)$ удовлетворяет следующим условиям*:

$$\int_1^\infty \frac{M^{-1}(\mathrm{x}, z)}{z^{\frac{n+1}{n}}}dz = \infty, \quad \int_0^1 \frac{M^{-1}(\mathrm{x}, z)}{z^{\frac{n+1}{n}}}dz < \infty \tag{9}$$

и

$$M_*^{-1}(\mathrm{x}, z) = \int_0^z \frac{M^{-1}(\mathrm{x}, \tau)}{\tau^{\frac{n+1}{n}}}d\tau, \quad \mathrm{x} \in \Omega, \quad z \geqslant 0.$$

Тогда функция $M_*(\mathrm{x}, z)$ является обобщенной N-функцией и $\mathring{W}^1L_M(\Omega) \hookrightarrow L_{M_*}(\Omega)$. Более того, для любой ограниченной подобласти $Q \subset \Omega$ вложение $\mathring{W}^1L_M(Q) \hookrightarrow L_P(Q)$ существует и компактно для любой функции Музилака—Орлича $P \prec\prec M_*$ такой, что $P(\,\cdot\,, z)$ интегрируема на Q.

2. Формулировка результата. Предположим, что функции $\mathrm{a}(\mathrm{x}, s_0, \mathrm{s}) = (a_1(\mathrm{x}, s_0, \mathrm{s}), \ldots, a_n(\mathrm{x}, s_0, \mathrm{s}))$, $a_0(\mathrm{x}, s_0, \mathrm{s})$ измеримы по $\mathrm{x} \in \Omega$ для $\mathbf{s} = (s_0, \mathrm{s}) = (s_0, s_1, \ldots, s_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, непрерывны по $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^{n+1}$ для почти всех $\mathrm{x} \in \Omega$.

Условия M. *Пусть для любого* $\mathbf{w} = (w_0, \mathrm{w}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ *существуют неотрицательные функции* Ψ, Ψ_0, $\phi \in L_1(\Omega)$ *и положительные константы* $\widehat{A}$, $\widehat{A}_0$, $\overline{a}$, $\overline{d}$, $\widehat{d}$ *такие, что для п.в.* $\mathrm{x} \in \Omega$ *и для любых* $s_0 \in \mathbb{R}$, s, $\mathrm{t} \in \mathbb{R}^n$, $\mathrm{s} \neq \mathrm{t}$ *справедливы следующие неравенства*:

$$\mathrm{a}(\mathrm{x}, s_0, \mathrm{s}) \cdot (\mathrm{s} - \mathrm{w}) + a_0(\mathrm{x}, s_0, \mathrm{s})(s_0 - w_0) \geqslant \geqslant \overline{a} M(\mathrm{x}, \overline{d} s_0) + \overline{a} M(\mathrm{x}, \overline{d}|\mathrm{s}|) - \phi(\mathrm{x}); \tag{10}$$

$$\overline{M}(\mathrm{x}, |\mathrm{a}(\mathrm{x}, s_0, \mathrm{s})|) \leqslant \Psi(\mathrm{x}) + \widehat{A} M(\mathrm{x}, \widehat{d}|\mathrm{s}|) + \widehat{A} P(\mathrm{x}, \widehat{d} s_0); \tag{11}$$

$$\overline{M}(\mathrm{x}, |a_0(\mathrm{x}, s_0, \mathrm{s})|) \leqslant \Psi_0(\mathrm{x}) + \widehat{A}_0 P(\mathrm{x}, \widehat{d}|\mathrm{s}|) + \widehat{A}_0 M(\mathrm{x}, \widehat{d} s_0); \tag{12}$$

$$(\mathrm{a}(\mathrm{x}, s_0, \mathrm{s}) - \mathrm{a}(\mathrm{x}, s_0, \mathrm{t})) \cdot (\mathrm{s} - \mathrm{t}) > 0. \tag{13}$$

Здесь $M(\mathrm{x}, z)$ — *функция Музилака—Орлича, интегрируемая в* Ω, *дополнительная к ней функция* $\overline{M}$ *удовлетворяет* Δ_2*-условию;* $P(\mathrm{x}, z)$ — *функция Музилака—Орлича, интегрируемая в* Ω *такая, что* $P \prec\prec M$, $\mathrm{s} \cdot \mathrm{t} = \sum_{i=1}^{n} s_i t_i$, $|\mathrm{s}| = \left(\sum_{i=1}^{n} s_i^2\right)^{1/2}$.

Условиям M удовлетворяют, например, функции

$$a_0(\mathrm{x}, s_0, \mathrm{s}) = M'(\mathrm{x}, s_0) + P'(\mathrm{x}, |\mathrm{s}|) + f_0(\mathrm{x}), \quad f_0 \in L_{\overline{M}}(\Omega),$$
$$a_i(\mathrm{x}, \mathrm{s}) = M'(\mathrm{x}, |\mathrm{s}|) \frac{s_i}{|\mathrm{s}|} + f_i(\mathrm{x}), \quad f_i \in L_{\overline{M}}(\Omega), \quad i = 1, \ldots, n,$$

с непрерывно дифференцируемыми по z функциями Музилака—Орлича $P(\mathrm{x}, z)$, $M(\mathrm{x}, z)$ (см. Приложение A).

Определим дифференциальный оператор $\mathbf{A} : \mathring{W}^1 L_M(\Omega) \to W^{-1} L_{\overline{M}}(\Omega)$ с областью определения

$$D(\mathbf{A}) = \left\{ u \in \mathring{W}^1 L_M(\Omega) \;\middle|\; a_i(\mathrm{x}, u, \nabla u) \in L_{\overline{M}}(\Omega),\ i = \overline{0, n} \right\}$$

равенством

$$\langle \mathbf{A}(u), v \rangle = \int_\Omega \big(\mathrm{a}(\mathrm{x}, u, \nabla u) \cdot \nabla v + a_0(\mathrm{x}, u, \nabla u) v \big) d\mathrm{x}, \quad v \in \mathring{W}^1 L_M(\Omega). \tag{14}$$

Используя неравенство Гельдера (8), для функций u, $v \in \mathring{W}^1 L_M(\Omega)$ выводим неравенства

$$|\langle \mathbf{A}(u), v \rangle| \leqslant 2\|a_0\|_{\overline{M}} \|v\|_M + 2\||\mathrm{a}|\|_{\overline{M}} \|\nabla v\|_M \leqslant 2\big(\|a_0\|_{\overline{M}} + \||\mathrm{a}|\|_{\overline{M}}\big)\|v\|_M^1,$$

следовательно, интегралы в равенстве (14) конечны.

Будем считать, что $F = f_0 - \operatorname{div} \mathrm{f} \in W^{-1} L_{\overline{M}}(\Omega)$, тогда можно определить функционал $\mathbf{F}$:

$$\langle \mathbf{F}, v \rangle = \int_\Omega (\mathrm{f} \cdot \nabla v + f_0 v)\, d\mathrm{x}, \quad v \in \mathring{W}^1 L_M(\Omega).$$

Определение. Обобщенным решением задачи (1), (2) с $F = f_0 - \operatorname{div} \mathrm{f} \in W^{-1}L_{\overline{M}}(\Omega)$ назовем функцию $u \in \mathring{W}^1 L_M(\Omega)$, удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\langle \mathbf{A}(u), v \rangle = \langle \mathbf{F}, v \rangle$$

для любой функции $v \in \mathring{W}^1 L_M(\Omega)$.

В работе доказана следующая

Теорема. *Пусть выполнены условия* M *и условия* (9). *Тогда для любого* $F \in W^{-1}L_{\overline{M}}(\Omega)$ *существует хотя бы одно решение задачи* (1), (2).

Замечание 1. Условие (9) накладывает ограничение на рост функции $M(\mathrm{x}, z)$ при $z \to \infty$. В качестве примера можно взять функцию $M(\mathrm{x}, z) = a(\mathrm{x})|z| \ln(1 + |z|) + b(\mathrm{x})|z|^p$, $p \in [2, n]$, с интегрируемыми ограниченными функциями a, $b : \Omega \to (0, \infty)$.

Замечание 2. Следует отметить, что при условии

$$\widehat{d} \leqslant \overline{d} \tag{$*$}$$

или

$$\text{функция } M \text{ удовлетворяет } \Delta_2\text{-условию} \tag{$**$}$$

выполнение неравенства (10) для фиксированного $\mathbf{w}$ и неравенств (11), (12) влечет справедливость (10) для любого $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^{n+1}$ (см. [16, Remark 8]).

3. Основные леммы и утверждения.

Лемма 2. *Пусть* $\{v^j\}_{j\in\mathbb{N}}$, v — *такие функции из* $L_M(\Omega)$, *что*

$$\|v^j\|_M \leqslant C, \quad j \in \mathbb{N},$$
$$v^j \to v \quad \text{п.в. в} \quad \Omega, \quad j \to \infty.$$

Тогда $v^j \rightharpoonup v$ *в топологии* $\sigma(L_M, E_{\overline{M}})$ *пространства* $L_M(\Omega)$.

Лемма 3. *Пусть* $0 < \varepsilon < 1$ *и* M_0 — *функция Музилака—Орлича такая, что*

$$\int_0^1 \frac{M_0^{-1}(\mathrm{x}, z)}{z^{1+\varepsilon}} dz < \infty, \quad \int_1^\infty \frac{M_0^{-1}(\mathrm{x}, z)}{z^{1+\varepsilon}} dz = \infty.$$

Тогда обобщенная N*-функция* M_ε*, определяющаяся как*

$$M_\varepsilon^{-1}(\mathrm{x}, z) = \int_0^z \frac{M_0^{-1}(\mathrm{x}, \tau)}{\tau^{1+\varepsilon}} d\tau < \infty, \quad \mathrm{x} \in \Omega,$$

такова, что $M_0 \prec\prec M_\varepsilon$.

Доказательство леммы 3 для N-функции приведено в [14, Lemma 4.14]. Для функции Музилака—Орлича оно проводится аналогично.

Ниже будет использоваться теорема Витали в следующей форме (см. [15, гл. III, §6, теорема 15]).

Лемма 4. *Пусть* $\{v^j\}_{j\in\mathbb{N}}$, v — *измеримые функции в ограниченной области* Q *такие, что*

$$v^j \to v \quad \text{п.в. в} \quad Q, \quad j \to \infty,$$

и интегралы

$$\int_Q |v^j(\mathrm{x})|d\mathrm{x}, \quad j \in \mathbb{N},$$

равномерно абсолютно непрерывны. Тогда

$$v^j \to v \quad \textit{сильно в} \quad L_1(Q), \quad j \to \infty.$$

Если $P \prec\prec M$ и P интегрируема в Ω, то по определению (4) найдется $h_P \in L_1(\Omega)$ такая, что для любых $l_M > 0$, $\epsilon > 0$ имеем

$$P(\mathrm{x}, z) \leqslant h_P(\mathrm{x}) + \epsilon M(\mathrm{x}, l_M z), \quad \mathrm{x} \in \Omega, \ z \in \mathbb{R}. \tag{15}$$

Применяя (15), перепишем (11), (12) в виде

$$\overline{M}(\mathrm{x}, |\mathrm{a}(\mathrm{x}, s_0, \mathrm{s})|) \leqslant \Phi(\mathrm{x}) + \widehat{A}M(\mathrm{x}, \widehat{d}|\mathrm{s}|) + \epsilon\widehat{A}M(\mathrm{x}, \widehat{d}l_M s_0), \tag{$\widehat{11}$}$$

$$\overline{M}(\mathrm{x}, |a_0(\mathrm{x}, s_0, \mathrm{s})|) \leqslant \Phi_0(\mathrm{x}) + \epsilon\widehat{A}_0 M(\mathrm{x}, \widehat{d}l_M|\mathrm{s}|) + \widehat{A}_0 M(\mathrm{x}, \widehat{d}s_0), \tag{$\widehat{12}$}$$

где $\Phi, \ \Phi_0 \in L_1(\Omega)$.

Утверждение. *Пусть выполнены условия* M, $\{u^j\}_{j\in\mathbb{N}}$, $u \in \mathring{W}^1 L_M(\Omega)$ *и*

$$u^j \to u \quad \textit{п.в. в} \quad \Omega, \quad j \to \infty. \tag{16}$$

Предположим, что

$$q^j(\mathrm{x}) = \big(\mathrm{a}(\mathrm{x}, u^j, \nabla u^j) - \mathrm{a}(\mathrm{x}, u^j, \nabla u)\big) \cdot \nabla(u^j - u) \to 0 \ \textit{п.в. в} \ \Omega, \ j \to \infty. \tag{17}$$

Тогда по некоторой подпоследовательности

$$\nabla u^j \to \nabla u \quad \textit{п.в. в} \quad \Omega, \quad j \to \infty. \tag{18}$$

Доказательство. Пользуясь неравенствами (3), (5) и (10), для $\varepsilon\in(0,1)$ получаем

$$\begin{gathered}
q^j(\mathrm{x}) = \big(\mathrm{a}(\mathrm{x}, s_0^j, \mathrm{s}^j) - \mathrm{a}(\mathrm{x}, s_0^j, \mathrm{s})\big) \cdot (\mathrm{s}^j - \mathrm{s}) \geqslant \\
\geqslant \mathrm{a}(\mathrm{x}, s_0^j, \mathrm{s}^j) \cdot (\mathrm{s}^j - \mathrm{s}) + a_0(\mathrm{x}, s_0^j, \mathrm{s}^j)(\mathrm{s}_0^j - \mathrm{s}_0) - \varepsilon M(\mathrm{x}, \overline{d}|\mathrm{s}^j|) - M(\mathrm{x}, |\mathrm{s}|) - \\
- \overline{M}(\mathrm{x}, (\varepsilon\overline{d})^{-1}|\mathrm{a}(\mathrm{x}, s_0^j, \mathrm{s})|) - \overline{M}(\mathrm{x}, |\mathrm{a}(\mathrm{x}, s_0^j, \mathrm{s})|) - \\
- 2\varepsilon\overline{M}(\mathrm{x}, |a_0(\mathrm{x}, s_0^j, \mathrm{s}^j)|) - M(\mathrm{x}, \varepsilon^{-1}s_0^j) - M(\mathrm{x}, \varepsilon^{-1}s_0) \geqslant \\
\geqslant \overline{a}M(\mathrm{x}, \overline{d}s_0^j) + (\overline{a} - \varepsilon)M(\mathrm{x}, \overline{d}|\mathrm{s}^j|) - M(\mathrm{x}, \varepsilon^{-1}s_0^j) - \\
- C_1(\varepsilon)\overline{M}(\mathrm{x}, |\mathrm{a}(\mathrm{x}, s_0^j, \mathrm{s})|) - 2\varepsilon\overline{M}(\mathrm{x}, |a_0(\mathrm{x}, s_0^j, \mathrm{s}^j)|) - C_2(\varepsilon, \mathrm{x}).
\end{gathered}$$

Применяя ($\widehat{11}$), ($\widehat{12}$) с $\epsilon = 1, l_M < \overline{d}/\widehat{d}$, выводим

$$q^j(\mathrm{x}) \geqslant (\overline{a} - \varepsilon C_3)M(\mathrm{x}, \overline{d}|\mathrm{s}^j|) - C_4(\varepsilon)M(\mathrm{x}, C_5(\varepsilon)s_0^j) - C_6(\varepsilon, \mathrm{x}).$$

Выбирая $\varepsilon < \overline{a}/C_3$, устанавливаем оценку

$$q^j(\mathrm{x}) \geqslant C_7 M(\mathrm{x}, \overline{d}|\mathrm{s}^j|) - C_4 M(\mathrm{x}, C_5|s_0^j|) - C_6(\mathrm{x}).$$

Обозначим через $\Omega' \subset \Omega$ подмножество точек полной меры, для которых имеют место сходимости (16), (17) и выполнено последнее неравенство. Установим сходимость

$$\nabla u^j \to \nabla u \quad \text{всюду в} \quad \Omega', \quad j \to \infty.$$

От противного, пусть в некоторой точке $\mathrm{x}^* \in \Omega'$ нет сходимости. Положим $s_0^j = u^j(\mathrm{x}^*)$, $s_0 = u(\mathrm{x}^*)$, $\mathrm{s}^j = \nabla u^j(\mathrm{x}^*)$, $\mathrm{s} = \nabla u(\mathrm{x}^*)$. Тогда имеем

$$q^j(\mathrm{x}^*) \geqslant C_7 M(\mathrm{x}^*, \overline{d}|\mathrm{s}^j|) - C_4 M(\mathrm{x}^*, C_5|s_0^j|) - C_6.$$

Предположим, что последовательность $\{M(\mathrm{x}^*, \overline{d}|\mathrm{s}^j|)\}_{j\in\mathbb{N}}$ не ограничена. Ввиду предположения из последнего неравенства получаем, что $\{q^j(\mathrm{x}^*)\}_{j\in\mathbb{N}}$ не ограничена, что противоречит (17). Следовательно, последовательность $\{\mathrm{s}^j\}_{j\in\mathbb{N}}$ ограничена.

Пусть $\mathrm{s}^* = (s_1^*, s_2^*, \ldots, s_n^*)$ — один из частичных пределов $\mathrm{s}^j = (s_1^j, \ldots, s_n^j)$ при $j \to \infty$, тогда, с учетом (16), имеем

$$s_0^j \to s_0, \quad \mathrm{s}^j \to \mathrm{s}^*, \quad j \to \infty. \tag{19}$$

Поэтому из (17), (19) и непрерывности $\mathrm{a}(\mathrm{x}^*, s_0, \mathrm{s})$ по $\mathbf{s} = (s_0, \mathrm{s})$ вытекает, что

$$\big(\mathrm{a}(\mathrm{x}^*, s_0, \mathrm{s}^*) - \mathrm{a}(\mathrm{x}^*, s_0, \mathrm{s})\big) \cdot (\mathrm{s}^* - \mathrm{s}) = 0,$$

следовательно, согласно (13), $\mathrm{s} = \mathrm{s}^*$. Это противоречит тому, что в точке x^* нет сходимости. Таким образом, сходимость (18) установлена. □

Замечание 3. Заметим, что только в утверждении неравенство (10) применяется для любого $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^{n+1}$. В доказательстве теоремы неравенство (10) используется для фиксированного $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^{n+1}$. Для простоты полагаем $\mathbf{w} = \mathbf{0}$:

$$\mathrm{a}(\mathrm{x}, s_0, \mathrm{s}) \cdot \mathrm{s} + a_0(\mathrm{x}, s_0, \mathrm{s}) s_0 \geqslant \overline{a} M(\mathrm{x}, \overline{d} s_0) + \overline{a} M(\mathrm{x}, \overline{d}|\mathrm{s}|) - \phi(\mathrm{x}). \tag{10_0}$$

4. Абстрактный результат. Доказательство теоремы основано на утверждениях для дополнительных систем.

Система (Y, Y_0, Z, Z_0) называется дополнительной, если выполняется следующее:

– Y, Z банаховы и находятся в двойственности относительно непрерывного спаривания $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$;
– $Y_0 \subseteq Y$ — подпространство в Y и Z можно отождествить с помощью спаривания $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$ с сопряженным пространством Y_0^*;
– $Z_0 \subseteq Z$ — подпространство в Z и Y можно отождествить с помощью спаривания $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$ с сопряженным пространством Z_0^*.

Пусть (Y, Y_0, Z, Z_0) — дополнительная система и $A : Y \to Z$ — отображение с областью определения $D(A) \subset Y$, которые удовлетворяют следующим условиям относительно некоторых элементов $y_0 \in Y_0$ и $z_0 \in Z_0$:

(i) (конечная непрерывность) $Y_0 \subset D(A)$ и A непрерывно для всех конечномерных подпространств в Y_0 по топологии $\sigma(Z, Y_0)$ в Z;

(ii) (последовательная псевдомонотонность) для любой последовательности $\{y_i\} \subset Y$, $y_i \rightharpoonup y \in Y$ в топологии $\sigma(Y, Z_0)$, $A(y_i) \rightharpoonup z \in Z$ в топологии $\sigma(Z, Y_0)$ и $\limsup\limits_{i\to\infty} \langle A(y_i), y_i\rangle \leqslant \langle z, y\rangle$ следует, что $A(y) = z$ и $\langle A(y_i), y_i\rangle \to \langle z, y\rangle$;

(iii) $A(y)$ остается ограниченным в Z всегда, когда $y \in D(A)$ остается ограниченным в Y и $\langle y - y_0, A(y)\rangle$ остается ограниченным сверху;

(iv) $\langle y - y_0, A(y) - z_0\rangle > 0$, когда $y \in D(A)$ имеет достаточно большую норму в Y.

Важно отметить, что условие (iii) слабее, чем условие того, что A переводит каждое ограниченное множество в Y в ограниченное множество в Z, а также условие (iv) слабее, чем предположение о коэрцитивности, потому что отображение A, как правило, не преобразует ограниченное множество в ограниченное множество.

Предложение. *Пусть (Y, Y_0, Z, Z_0) — дополнительная система, Y_0, Z_0 сепарабельные и отображение $A : D(A) \subset Y \to Z$ удовлетворяет условиям* (i)–(iv). *Тогда Z_0 содержится в $R(A)$* [16, Proposition 1].

5. Доказательство существования решения.

Лемма 5. *Пусть выполнены условия* (11), (12), *тогда отображение*

$$\mathbf{A} : \mathbf{s} = (s_0, \mathrm{s}) \to \mathbf{a}(\mathrm{x}, \mathbf{s}) = \big(a_0(\mathrm{x}, s_0, \mathrm{s}), \mathrm{a}(\mathrm{x}, s_0, \mathrm{s})\big)$$

переводит $(E_M(\Omega))^{n+1}$ в $(L_{\overline{M}}(\Omega))^{n+1}$ и является конечнонепрерывным на $(E_M(\Omega))^{n+1}$ по топологии $\sigma((L_{\overline{M}})^{n+1}, (E_M)^{n+1})$ в $(L_{\overline{M}}(\Omega))^{n+1}$.

Доказательство. Пусть $\mathbf{s} = (s_0, \mathrm{s}) \in (E_M(\Omega))^{n+1}$, запишем ($\widehat{11}$) с $\epsilon = l_M = 1$, получим

$$\overline{M}(\mathrm{x}, |\mathrm{a}(\mathrm{x}, s_0, \mathrm{s})|) \leqslant \Phi(\mathrm{x}) + \widehat{A}M(\mathrm{x}, \widehat{d}|\mathrm{s}|) + \widehat{A}M(\mathrm{x}, \widehat{d}s_0). \tag{20}$$

Отсюда следует, что

$$\mathrm{a}(\mathrm{x}, s_0, \mathrm{s}) \in (L_{\overline{M}}(\Omega))^n.$$

Аналогично устанавливается, что $a_0(\mathrm{x}, s_0, \mathrm{s}) \in L_{\overline{M}}(\Omega)$.

Пусть $\sum = \{\mathbf{s}^1, \mathbf{s}^2, \ldots, \mathbf{s}^r\}$ симплекс в $(E_M(\Omega))^{n+1}$, тогда

$$\mathbf{s} = \sum_{j=1}^{r} \lambda^j \mathbf{s}^j \in \sum,$$

где $\lambda^j \geqslant 0$, $\sum_{j=1}^r \lambda^j = 1$. Покажем, что отображение $\mathbf{A}$ непрерывно для каждого симплекса $\sum$. Применяя (20), для $(s_0, \mathrm{s}) \in \sum$ выводим

$$\overline{M}(\mathrm{x}, |\mathrm{a}(\mathrm{x}, s_0, \mathrm{s})|) \leqslant \Phi(\mathrm{x}) + \widehat{A}M\left(\mathrm{x}, \widehat{d}\left|\sum_{j=1}^{r} \lambda^j \mathrm{s}^j\right|\right) + \widehat{A}M\left(\mathrm{x}, \widehat{d}\sum_{j=1}^{r} \lambda^j \mathrm{s}_0^j\right) \leqslant$$
$$\leqslant \Phi(\mathrm{x}) + \sum_{j=1}^{r} \lambda^j M(\mathrm{x}, \widehat{d}|\mathrm{s}^j|) + \sum_{j=1}^{r} \lambda^j M(\mathrm{x}, \widehat{d}|s_0^j|).$$

Поскольку $M(\mathrm{x},\widehat{d}|\mathrm{s}^j|), M(\mathrm{x},\widehat{d}|s_0^j|)$, $j=1,\dots,r$, принадлежат пространству $L_1(\Omega)$, функция $\overline{M}(\mathrm{x},|\mathrm{a}(\mathrm{x},\mathbf{s})|)$ ограничена в $L_1(\Omega)$ для $\mathbf{s}\in\sum$. Отсюда благодаря неравенству (6) $\mathrm{a}(\mathrm{x},\mathbf{s})$ ограничена в $(L_{\overline{M}}(\Omega))^n$ для $\mathbf{s}\in\sum$. Аналогично устанавливается, что $a_0(\mathrm{x},\mathbf{s})$ ограничена в $L_{\overline{M}}(\Omega)$ для $\mathbf{s}\in\sum$. Применяя лемму 2, устанавливаем непрерывность отображения $\mathbf{A}$ на симплексе $\sum$ по топологии $\sigma\big((L_{\overline{M}})^{n+1},(E_M)^{n+1}\big)$. $\square$

Доказательство теоремы. Благодаря Δ_2-свойству на функцию $\overline{M}$ система

$$\big(\mathring{W}^1L_M(\Omega),\ \mathring{W}^1E_M(\Omega),\ W^{-1}L_{\overline{M}}(\Omega),\ W^{-1}E_{\overline{M}}(\Omega)\big) \tag{21}$$

является дополнительной [14, Lemma 1.2]. Спаривание между $v\in\mathring{W}^1L_M(\Omega)$ и $F\in W^{-1}L_{\overline{M}}(\Omega)$ задается формулой

$$\langle F,v\rangle=\int_\Omega(\mathrm{f}\cdot\nabla v+f_0v)d\mathrm{x}.$$

Для системы (21) проверим условия (i)–(iv) предложения ($y_0=0$). Из леммы 5 следует условие (i).

Далее проверим условия (ii). Пусть $\{u^j\}\subset\mathring{W}^1L_M(\Omega)$ и выполнено следующее:

1) $u^j\rightharpoonup u$ в топологии $\sigma\big((L_M)^{n+1},(E_{\overline{M}})^{n+1}\big)$;
2) $\mathbf{A}(u^j)\rightharpoonup\mathbf{G}\in W^{-1}L_{\overline{M}}(\Omega)$ в топологии $\sigma\big((L_{\overline{M}})^{n+1},(E_M)^{n+1}\big)$;
3) $\limsup\limits_{j\to\infty}\langle\mathbf{A}(u^j),u^j\rangle\leqslant\langle\mathbf{G},u\rangle$.

Докажем, что $\lim\limits_{j\to\infty}\langle\mathbf{A}(u^j),u^j\rangle=\langle\mathbf{G},u\rangle,\ \mathbf{G}=\mathbf{A}(u),\ u\in D(\mathbf{A})$.

Разобьем доказательство условия (ii) на несколько этапов.

1. Докажем ограниченность $\{\mathbf{a}(\mathrm{x},u^j,\nabla u^j)\}_{j\in\mathbb{N}}$ в $(L_{\overline{M}}(\Omega))^{n+1}$. Из 1) по теореме Банаха—Штейнгауза следует, что $\{u^j\}_{j\in\mathbb{N}}$ ограничена:

$$\|u^j\|_M^1=\|u^j\|_M+\||\nabla u^j|\|_M\leqslant C_1,\quad j\in\mathbb{N}. \tag{22}$$

Отсюда следует $\|\frac{1}{C_1}u^j\|_M+\|\frac{1}{C_1}|\nabla u^j|\|_M\leqslant1$, а значит, согласно (7), имеем

$$\varrho_M\Big(\frac{1}{C_1}u^j\Big)+\varrho_M\Big(\frac{1}{C_1}|\nabla u^j|\Big)\leqslant1,\quad j\in\mathbb{N}. \tag{23}$$

Кроме этого, применяя лемму 1, устанавливаем $\|u^j\|_{M_*}\leqslant C_2\|u^j\|_M^1\leqslant C_2C_1=$ $=C_3$. Отсюда благодаря (7) получим

$$\varrho_{M_*}\Big(\frac{1}{C_3}u^j\Big)\leqslant1,\quad j\in\mathbb{N}. \tag{24}$$

Поскольку $M\prec\prec M_*$, для любого $l_M^*>0$ имеем неравенство (см. (15))

$$M(\mathrm{x},z)\leqslant h_M^*(\mathrm{x})+M_*(\mathrm{x},l_M^*z),\quad z\in\mathbb{R},\ \mathrm{x}\in\Omega,\quad h_M^*\in L_1(\Omega). \tag{25}$$

Применяя ($\widehat{12}$) с $\epsilon=1$ и (25), выводим неравенство

$$\varrho_{\overline{M}}(|a_0(\mathrm{x},u^j,\nabla u^j)|)\leqslant\|\Phi_0+\widehat{A}_0h_M^*\|_1+\widehat{A}_0\varrho_M(\widehat{d}l_M|\nabla u^j|)+\widehat{A}_0\varrho_{M_*}(\widehat{d}l_M^*|u^j|).$$

Отсюда ввиду (6) получаем

$$\|a_0(\mathrm{x},u^j,\nabla u^j)\|_{\overline{M}} \leqslant C_4+\widehat{A}_0\varrho_M(\widehat{d}l_M|\nabla u^j|)+\widehat{A}_0\varrho_{M_*}(\widehat{d}l^*_M|u^j|).$$

Выбирая l_M и l^*_M так, чтобы выполнялись неравенства $\widehat{d}l_M<C_1^{-1}$ и $\widehat{d}l^*_M<C_3^{-1}$, и применяя (23), (24), выводим

$$\|a_0(\mathrm{x},u^j,\nabla u^j)\|_{\overline{M}} \leqslant C_4+\widehat{A}_0\varrho_M\Big(\frac{|\nabla u^j|}{C_1}\Big)+\widehat{A}_0\varrho_{M_*}\Big(\frac{u^j}{C_3}\Big)\leqslant C_5. \qquad (26)$$

Ограниченность $\{a_0(\mathrm{x},u^j,\nabla u^j)\}_{j\in\mathbb{N}}$ в $L_{\overline{M}}(\Omega)$ установлена. Докажем ограниченность $\{\mathrm{a}(\mathrm{x},u^j,\nabla u^j)\}_{j\in\mathbb{N}}$ в $(L_{\overline{M}}(\Omega))^n$.

По свойству (13) для $w\in \mathring{W}^1E_M(\Omega)$ имеем

$$\big(\mathrm{a}(\mathrm{x},u^j,\nabla u^j)-\mathrm{a}(\mathrm{x},u^j,\nabla w)\big)\cdot\nabla(u^j-w)\geqslant 0.$$

Отсюда выводим

$$\int_\Omega \mathrm{a}(\mathrm{x},u^j,\nabla u^j)\cdot\nabla w d\mathrm{x}\leqslant\int_\Omega \mathrm{a}(\mathrm{x},u^j,\nabla u^j)\cdot\nabla u^j d\mathrm{x}+\int_\Omega a_0(\mathrm{x},u^j,\nabla u^j)u^j d\mathrm{x}-$$
$$-\int_\Omega a_0(\mathrm{x},u^j,\nabla u^j)u^j d\mathrm{x}-\int_\Omega \mathrm{a}(\mathrm{x},u^j,\nabla w)\cdot\nabla(u^j-w)d\mathrm{x}=$$
$$=\langle \mathbf{A}(u^j),u^j\rangle-\int_\Omega a_0(\mathrm{x},u^j,\nabla u^j)u^j d\mathrm{x}-\int_\Omega \mathrm{a}(\mathrm{x},u^j,\nabla w)\cdot\nabla(u^j-w)d\mathrm{x}. \qquad (27)$$

Оценим второе и третье слагаемые правой части (27). Применяя неравенство Гельдера и учитывая (22), (26), выводим

$$\left|\int_\Omega a_0(\mathrm{x},u^j,\nabla u^j)u^j d\mathrm{x}\right|\leqslant 2\|a_0(\mathrm{x},u^j,\nabla u^j)\|_{\overline{M}}\|u^j\|_M\leqslant C_6, \qquad (28)$$

$$\left|\int_\Omega \mathrm{a}(\mathrm{x},u^j,\nabla w)\cdot\nabla(u^j-w)d\mathrm{x}\right|\leqslant 2\|\mathrm{a}(\mathrm{x},u^j,\nabla w)\|_{\overline{M}}\|\nabla u^j-\nabla w\|_M\leqslant$$
$$\leqslant 2\|\mathrm{a}(\mathrm{x},u^j,\nabla w)\|_{\overline{M}}C_7. \qquad (29)$$

Используя $(\widehat{11})$ ($\epsilon=1$, $l_M<(\widehat{d}C_1)^{-1}$), (6) и (23), имеем

$$\|\mathrm{a}(\mathrm{x},u^j,\nabla w)\|_{\overline{M}}\leqslant\|\Phi\|_1+1+\widehat{A}\varrho_M(\widehat{d}|\nabla w|)+\widehat{A}\varrho_M(C_1^{-1}u^j)\leqslant C_8. \qquad (30)$$

Соединяя (27), (28), (29), (30) и учитывая 3), устанавливаем, что последовательность $\{\mathrm{a}(\mathrm{x},u^j,\nabla u^j)\}_{j\in\mathbb{N}}$ ограничена по топологии $\sigma\big((L_{\overline{M}})^n,(E_M)^n\big)$ в $(L_{\overline{M}}(\Omega))^n$. Отсюда из принципа равномерной ограниченности следует, что $\{\mathrm{a}(\mathrm{x},u^j,\nabla u^j)\}_{j\in\mathbb{N}}$ ограничена по норме пространства $(L_{\overline{M}}(\Omega))^n$.

2. Поскольку $\{a_i(\mathrm{x},u^j,\nabla u^j)\}_{j\in\mathbb{N}}$, $i=\overline{0,n}$, ограничены в $L_{\overline{M}}(\Omega)$, то

$$a_i(\mathrm{x},u^j,\nabla u^j)\rightharpoonup g_i \quad \text{в топологии} \quad \sigma(L_{\overline{M}},E_M),\quad g_i\in L_{\overline{M}}(\Omega),\ i=\overline{0,n}. \qquad (31)$$

Следовательно, линейный функционал $\mathbf{G} \in W^{-1}L_{\overline{M}}(\Omega)$ можно отождествить с $\mathbf{g} = (g_0, \mathrm{g}) \in (L_{\overline{M}}(\Omega))^{n+1} = (E_{\overline{M}}(\Omega))^{n+1}$, то есть

$$\langle \mathbf{G}, v\rangle = \int_\Omega (\mathrm{g}\cdot\nabla v + g_0 v)d\mathrm{x}, \quad v \in \mathring{W}^1 L_M(\Omega). \tag{32}$$

3. Покажем, что $u^j \to u$, $\nabla u^j \to \nabla u$ п.в в Ω. Зафиксируем произвольное $k > 0$, обозначим $\Omega(k) = \{\mathrm{x} \in \Omega \ \mid \ |\mathrm{x}| < k\}$. Согласно лемме 1, пространство $\mathring{W}^1 L_M(\Omega(k+1))$ компактно вложено в $L_P(\Omega(k+1))$ для любой функции Музилака—Орлича $P(\mathrm{x}, z)$ такой, что $P \prec\prec M_*$. Согласно лемме 3, $M \prec\prec M_*$ и пространство $\mathring{W}^1 L_M(\Omega(k+1))$ компактно вложено в пространство $L_M(\Omega(k+1))$.

Пусть $\eta_k(r) = \min\big(1, \max(0, k+1-r)\big)$. Пользуясь (22), выводим неравенства

$$\|u^j\eta_k\|^1_M \leqslant \|u^j\nabla\eta_k\|_M + \|\nabla u^j\eta_k\|_M + \|u^j\eta_k\|_M \leqslant \\ \leqslant 2\|u^j\|_M + \|\nabla u^j\|_M \leqslant C_9, \quad j = 1, 2, \ldots .$$

Следовательно, последовательность функций $\{u^j\eta_k\}_{j=1}^\infty$ ограничена в пространстве $\mathring{W}^1 L_M(\Omega(k+1))$. Ввиду компактности вложения

$$\mathring{W}^1 L_M(\Omega(k+1)) \subset L_M(\Omega(k+1))$$

имеют место выборочные сильные сходимости

$$u^j\eta_k \to u\eta_k \quad \text{в} \quad L_M(\Omega(k+1)), \quad j \to \infty,$$

из которых следуют сильные сходимости

$$u^j \to u \quad \text{в} \quad L_M(\Omega(k)), \quad j \to \infty, \tag{33}$$

а также выборочная сходимость $u^j \to u$ почти всюду в $\Omega(k)$. Диагональным процессом устанавливается сходимость (16):

$$u^j \to u \quad \text{п.в. в} \quad \Omega, \quad j \to \infty.$$

Далее докажем справедливость (18):

$$\nabla u^j \to \nabla u \quad \text{п.в. в} \quad \Omega, \quad j \to \infty.$$

Для этого установим (17). Тогда, применяя утверждение, выводим (18). Ввиду условия (13) $q^j(\mathrm{x}) \geqslant 0$, $\forall \mathrm{x} \in \Omega$, поэтому достаточно показать

$$\lim_{j\to\infty} \sup \int_{\Omega_k} q^j(\mathrm{x})d\mathrm{x} \leqslant \varepsilon_k, \quad \varepsilon_k \to 0,\ k \to \infty, \tag{34}$$
$$\Omega_k = \big\{\mathrm{x} \in \Omega(k) \ \mid \ |u| \leqslant k, |\nabla u| \leqslant k\big\}.$$

Представим $q^j(\mathrm{x}) = p^j(\mathrm{x}) + r^j(\mathrm{x}) + s^j(\mathrm{x})$, где

$$p^j(\mathrm{x}) = a_0(\mathrm{x}, u^j, \nabla u^j)(u^j - u) + \mathrm{a}(\mathrm{x}, u^j, \nabla u^j)\nabla(u^j - u);$$

$$r^j(\mathrm{x}) = \mathrm{a}(\mathrm{x}, u^j, \nabla u) \cdot \nabla(u - u^j); \quad s^j(\mathrm{x}) = a_0(\mathrm{x}, u^j, \nabla u^j)(u - u^j).$$

Утверждение (34) будет доказано, если установим следующее:

$$\limsup_{j\to\infty} \int_{\Omega_k} p^j(\mathrm{x}) d\mathrm{x} \leqslant \varepsilon_k; \tag{35}$$

$$\lim_{j\to\infty} \int_{\Omega_k} r^j(\mathrm{x}) d\mathrm{x} = 0; \tag{36}$$

$$\lim_{j\to\infty} \int_{\Omega_k} s^j(\mathrm{x}) d\mathrm{x} = 0. \tag{37}$$

4. Докажем (35), для этого запишем

$$\int_{\Omega_k} p^j(\mathrm{x}) d\mathrm{x} = \int_{\Omega} \left(a_0(\mathrm{x}, u^j, \nabla u^j) u^j + \mathrm{a}(\mathrm{x}, u^j, \nabla u^j) \cdot \nabla u^j\right) d\mathrm{x} -$$
$$- \int_{\Omega\setminus\Omega_k} \left(a_0(\mathrm{x}, u^j, \nabla u^j) u^j + \mathrm{a}(\mathrm{x}, u^j, \nabla u^j) \cdot \nabla u^j\right) d\mathrm{x} -$$
$$- \int_{\Omega_k} \left(a_0(\mathrm{x}, u^j, \nabla u^j) u + \mathrm{a}(\mathrm{x}, u^j, \nabla u^j) \cdot \nabla u\right) d\mathrm{x} =$$
$$= H_1(j) + H_2(j,k) + H_3(j,k). \tag{38}$$

По предположению 3) и (32) имеем

$$\limsup_{j} H_1(j) \leqslant \langle \mathbf{G}, u\rangle = \int_{\Omega} (g_0 u + \mathrm{g} \cdot \nabla u) d\mathrm{x}. \tag{39}$$

По условию (10_0) имеем

$$H_2(j,k) \leqslant -\overline{a} \int_{\Omega\setminus\Omega_k} \left(M(\mathrm{x}, \overline{d} u^j) + M(\mathrm{x}, \overline{d}|\nabla u^j|)\right) d\mathrm{x} +$$
$$+ \int_{\Omega\setminus\Omega_k} \phi(\mathrm{x}) d\mathrm{x} \leqslant \int_{\Omega\setminus\Omega_k} \phi(\mathrm{x}) d\mathrm{x}. \tag{40}$$

Кроме этого, можно записать

$$H_3(j,k) = - \int_{\Omega} \chi_k \left(a_0(\mathrm{x}, u^j, \nabla u^j) u + \mathrm{a}(\mathrm{x}, u^j, \nabla u^j) \cdot \nabla u\right) d\mathrm{x},$$

где χ_k — характеристическая функция множества Ω_k.

Поскольку функция $M(\mathrm{x}, z)$ интегрируема по $\mathrm{x} \in \Omega$, $\forall z \in \mathbb{R}$, то $\forall \lambda > 0$

$$\int_{\Omega} M(\mathrm{x}, \lambda \chi_k u) d\mathrm{x} \leqslant \int_{\Omega} M(\mathrm{x}, \lambda k) d\mathrm{x} < \infty,$$

следовательно, $\chi_k u \in E_M(\Omega)$.

Аналогично устанавливается, что $\chi_k \nabla u \in (E_M(\Omega))^n$. Тогда ввиду слабой сходимости (31) имеем

$$\lim_{j\to\infty} H_3(j,k) = -\int_{\Omega_k} (g_0 u + \mathrm{g}\cdot\nabla u)d\mathrm{x}. \tag{41}$$

Соединяя (38), (39), (40), (41), выводим

$$\limsup_j \int_{\Omega_k} p^j(\mathrm{x})d\mathrm{x} \leqslant \int_{\Omega\setminus\Omega_k} (g_0 u + \mathrm{g}\cdot\nabla u)d\mathrm{x} + \int_{\Omega\setminus\Omega_k} \phi(\mathrm{x})d\mathrm{x},$$

где $g_0 u + \mathrm{g}\cdot\nabla u \in L_1(\Omega)$. Ввиду абсолютной непрерывности интегралов в правой части последнего неравенства имеем (35).

5. Докажем (36), для этого достаточно показать, что

$$\chi_k \mathrm{a}(\mathrm{x}, u^j, \nabla u) \to \chi_k \mathrm{a}(\mathrm{x}, u, \nabla u) \quad \text{в} \quad E_{\overline{M}}(\Omega), \quad j\to\infty. \tag{42}$$

Воспользуемся (20):

$$\overline{M}(\mathrm{x}, |\mathrm{a}(\mathrm{x}, u, \nabla u)|\chi_k) \leqslant \Phi(\mathrm{x}) + \widehat{A}M(\mathrm{x}, \widehat{d}|\nabla u|\chi_k) + \widehat{A}M(\mathrm{x}, \widehat{d}u\chi_k) \leqslant \\ \leqslant \Phi(\mathrm{x}) + 2\widehat{A}M(\mathrm{x}, \widehat{d}k).$$

Отсюда следует, что $\mathrm{a}(\mathrm{x}, u, \nabla u)\chi_k \in (L_{\overline{M}}(\Omega))^n$, но $\overline{M}$ удовлетворяет Δ_2-условию, значит

$$\mathrm{a}(\mathrm{x}, u, \nabla u)\chi_k \in (E_{\overline{M}}(\Omega))^n. \tag{43}$$

Далее, применяя ($\widehat{11}$), получим

$$\overline{M}(\mathrm{x}, \mathrm{a}(\mathrm{x}, u^j, \nabla u)\chi_k) \leqslant \Phi(\mathrm{x}) + \widehat{A}M(\mathrm{x}, \widehat{d}|\nabla u)|\chi_k) + \epsilon\widehat{A}M(\mathrm{x}, l_M\widehat{d}|u^j|).$$

Учитывая (23) и выбирая $l_M\widehat{d} < C_1^{-1}$, для любого измеримого подмножества $E \subset \Omega$ получим

$$\int_E \overline{M}(\mathrm{x}, \mathrm{a}(\mathrm{x}, u^j, \nabla u)\chi_k)d\mathrm{x} \leqslant \int_{E\cap\{\Omega:|\mathrm{x}|<k\}} \big(\Phi(\mathrm{x}) + \widehat{A}M(\mathrm{x}, \widehat{d}k)\big)d\mathrm{x} + \\ + \epsilon\widehat{A}\int_E M\Big(\mathrm{x}, \frac{u^j}{C_1}\Big)d\mathrm{x} \leqslant \int_{E\cap\{\Omega:|\mathrm{x}|<k\}} h_1(\mathrm{x})d\mathrm{x} + \epsilon C_{10},$$

где $h_1 \in L_1(\Omega)$. Отсюда следует, что $\mathrm{a}(\mathrm{x}, u^j, \nabla u)\chi_k \in (E_{\overline{M}}(\Omega))^n$ и равномерная абсолютная непрерывность интегралов $\int_\Omega \overline{M}(\mathrm{x}, \mathrm{a}(\mathrm{x}, u^j, \nabla u)\chi_k)d\mathrm{x}$. Кроме того, ввиду непрерывности $\mathrm{a}(\mathrm{x}, s_0, \mathrm{s})$ по s_0 и сходимости (16) имеем $\mathrm{a}(\mathrm{x}, u^j, \nabla u) \to \mathrm{a}(\mathrm{x}, u, \nabla u)$, $j\to\infty$, п.в. в Ω.

Применяя теорему Витали (лемма 4) для ограниченной области Ω_k, устанавливаем модулярную сходимость, из которой следует сходимость (42).

Далее имеем

$$\int_{\Omega_k} r^j(\mathrm{x})d\mathrm{x} = \int_{\Omega_k} a(\mathrm{x}, u^j, \nabla u)\cdot\nabla(u-u^j)d\mathrm{x} =$$
$$= \int_{\Omega} \chi_k\big(\mathrm{a}(\mathrm{x}, u^j, \nabla u) - \mathrm{a}(\mathrm{x}, u, \nabla u)\big)\cdot\nabla(u-u^j)d\mathrm{x}+$$
$$+\int_{\Omega} \chi_k \mathrm{a}(\mathrm{x}, u, \nabla u)\cdot\nabla(u-u^j)d\mathrm{x} \leqslant$$
$$\leqslant 2\|\mathrm{a}(\mathrm{x}, u^j, \nabla u)\chi_k - \mathrm{a}(\mathrm{x}, u, \nabla u)\chi_k\|_{\overline{M}}\|\nabla(u-u^j)\|_M+$$
$$+\left|\int_{\Omega} \chi_k \mathrm{a}(\mathrm{x}, u, \nabla u)\cdot\nabla(u-u^j)d\mathrm{x}\right|.$$

Первое слагаемое стремится к 0 при $j\to\infty$ благодаря (42) и (22). Второе слагаемое стремится к 0 при $j\to\infty$ ввиду (43) и слабой сходимости 1). Таким образом, (36) доказано.

6. Докажем (37). Ввиду сходимости (33) имеем

$$u^j\chi_k \to u\chi_k \text{ в } L_M(\Omega), \quad j\to\infty. \tag{44}$$

Применяя неравенство Гельдера, (26), выводим

$$\int_{\Omega_k} s^j(\mathrm{x})d\mathrm{x} \leqslant 2\|\chi_k u - u^j\chi_k\|_M\|a_0(\mathrm{x}, u^j, \nabla u^j)\|_{\overline{M}} \leqslant C_{11}\|\chi_k u - u^j\chi_k\|_M.$$

Отсюда, применяя (44), устанавливаем (37).

7. Благодаря сходимостям (16), (18) ввиду непрерывности $a_i(\mathrm{x}, s_0, \mathrm{s})$, $i=\overline{0,n}$, по (s_0, s), имеем

$$a_i(\mathrm{x}, u^j, \nabla u^j) \to a_i(\mathrm{x}, u, \nabla u) \text{ п.в. в } \Omega, \quad j\to\infty,\ i=0,\ldots,n.$$

Поскольку $\{a_i(\mathrm{x}, u^j, \nabla u^j)\}_{j\in\mathbb{N}}$, $i=\overline{0,n}$, ограничены в $L_{\overline{M}}(\Omega)$, по лемме 2 имеем

$$a_i(\mathrm{x}, u^j, \nabla u^j) \rightharpoonup a_i(\mathrm{x}, u, \nabla u) \text{ в топологии } \sigma(L_{\overline{M}}, E_M),\ j\to\infty,\ i=0,\ldots,n. \tag{45}$$

Сравнивая (45) с (31), устанавливаем

$$a_i(\mathrm{x}, u, \nabla u) = g_i \in L_{\overline{M}}(\Omega), \quad i=0,\ldots,n.$$

Отсюда заключаем, что $u\in D(\mathbf{A})$ и $\mathbf{A}(u)=\mathbf{G}$ (см. (32)).

8. Докажем, что $\langle\mathbf{A}(u^j), u^j\rangle \to \langle\mathbf{G}, u\rangle = \langle\mathbf{A}(u), u\rangle$. Ввиду условия 3) имеем

$$\limsup_{j\to\infty}\langle\mathbf{A}(u^j), u^j\rangle \leqslant \langle\mathbf{A}(u), u\rangle,$$

потому достаточно показать, что

$$\liminf_{j\to\infty}\langle\mathbf{A}(u^j), u^j\rangle \geqslant \langle\mathbf{A}(u), u\rangle. \tag{46}$$

Тогда

$$\langle \mathbf{A}(u), u\rangle \leqslant \liminf_{j\to\infty} \langle \mathbf{A}(u^j), u^j\rangle \leqslant \limsup_{j\to\infty} \langle \mathbf{A}(u^j), u^j\rangle \leqslant \langle \mathbf{A}(u), u\rangle.$$

Из условия (13) имеем

$$\mathrm{a}(\mathrm{x}, u^j, \nabla u^j)\cdot\nabla u^j \geqslant \mathrm{a}(\mathrm{x}, u^j, \nabla u)\cdot\nabla(u^j - u) + \mathrm{a}(\mathrm{x}, u^j, \nabla u^j)\cdot\nabla u. \tag{47}$$

Далее выводим

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{A}(u^j), u^j\rangle &= \int_\Omega (\mathrm{a}(\mathrm{x}, u^j, \nabla u^j)\cdot\nabla u^j + a_0(\mathrm{x}, u^j, \nabla u^j)u^j)d\mathrm{x} = \\ &= \int_{\Omega_k} \mathrm{a}(\mathrm{x}, u^j, \nabla u^j)\cdot\nabla u^j d\mathrm{x} + \int_{\Omega_k} a_0(\mathrm{x}, u^j, \nabla u^j)u^j d\mathrm{x} + \\ &\quad + \int_{\Omega\setminus\Omega_k} \big(\mathrm{a}(\mathrm{x}, u^j, \nabla u^j)\cdot\nabla u^j + a_0(\mathrm{x}, u^j, \nabla u^j)u^j\big)d\mathrm{x}.\end{aligned}$$

Применяя (47), (10_0), получаем

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{A}(u^j), u^j\rangle &\geqslant \int_{\Omega_k} \mathrm{a}(\mathrm{x}, u^j, \nabla u)\cdot\nabla(u^j - u)d\mathrm{x} + \\ &+ \int_{\Omega_k} \mathrm{a}(\mathrm{x}, u^j, \nabla u^j)\cdot\nabla u d\mathrm{x} + \int_{\Omega_k} a_0(\mathrm{x}, u^j, \nabla u^j)u^j d\mathrm{x} - \int_{\Omega\setminus\Omega_k} \phi(\mathrm{x})d\mathrm{x} = \\ &= I_1(j) + I_2(j) + I_3(j) - \int_{\Omega\setminus\Omega_k} \phi(\mathrm{x})d\mathrm{x}.\end{aligned}$$

Ввиду сильной сходимости (42) и слабой сходимости 1) имеем

$$\lim_{j\to\infty} I_1(j) = 0.$$

Благодаря слабой сходимости (45) и принадлежности $\chi_k\nabla u \in (E_M(\Omega))^n$ находим

$$\lim_{j\to\infty} I_2(j) = \int_{\Omega_k} \mathrm{a}(\mathrm{x}, u, \nabla u)\cdot\nabla u d\mathrm{x}.$$

Применяя слабую сходимость (45) и сильную сходимость (33), устанавливаем

$$\lim_{j\to\infty} I_3(j) = \int_{\Omega_k} a_0(\mathrm{x}, u, \nabla u)u d\mathrm{x}.$$

Таким образом, имеем

$$\begin{aligned}\liminf_{j\to\infty} \langle \mathbf{A}(u^j), u^j\rangle &\geqslant \int_{\Omega_k} \big(\mathrm{a}(\mathrm{x}, u, \nabla u)\cdot\nabla u + a_0(\mathrm{x}, u, \nabla u)u\big)d\mathrm{x} - \int_{\Omega\setminus\Omega_k} \phi(\mathrm{x})d\mathrm{x} \geqslant \\ &\geqslant \langle \mathbf{A}(u), u\rangle - \int_{\Omega\setminus\Omega_k} \big(\mathrm{a}(\mathrm{x}, u, \nabla u)\cdot\nabla u + a_0(\mathrm{x}, u, \nabla u)u + \phi(\mathrm{x})\big)d\mathrm{x}.\end{aligned}$$

Ввиду того, что $\mathrm{a}(\mathrm{x}, u, \nabla u) \cdot \nabla u + a_0(\mathrm{x}, u, \nabla u)u + \phi(\mathrm{x}) \in L_1(\Omega)$ и интеграл абсолютно непрерывен, устремляя $k \to \infty$, устанавливаем (46).

(iii) Покажем, что если $u^j \in D(\mathbf{A})$, $\|u^j\|_M^1 \leqslant C_1$, $\langle \mathbf{A}(u^j), u^j \rangle \leqslant C_{12}$, то $\mathbf{A}(u^j)$ ограничено в $W^{-1}L_{\overline{M}}(\Omega)$.

Методом, аналогичным шагу 1 в (ii), заключаем, что последовательность $\{a_0(\mathrm{x}, u^j, \nabla u^j), \mathrm{a}(\mathrm{x}, u^j, \nabla u^j)\}_{j\in\mathbb{N}}$ ограничена в $(L_{\overline{M}}(\Omega))^{n+1}$. Отсюда следует, что $\mathbf{A}(u^j)$ ограничена в $W^{-1}L_{\overline{M}}(\Omega)$.

(iv) Осталось показать, что $\langle \mathbf{A}(v) - \mathbf{F}, v \rangle > 0$ для любого $v \in D(\mathbf{A})$ с достаточно большой нормой $\|v\|_M^1$ и любого $\mathbf{F} \in W^{-1}E_{\overline{M}}(\Omega)$.

Рассмотрим множество

$$V = \left\{ v \in D(\mathbf{A}) \;\middle|\; \langle \mathbf{A}(v) - \mathbf{F}, v \rangle \leqslant 0 \right\}.$$

Покажем, что V ограничено в $\mathring{W}^1 L_M(\Omega)$, тогда, если $\|v\|_M^1$ достаточно большая, то $v \notin V$, то есть $\langle \mathbf{A}(v) - \mathbf{F}, v \rangle > 0$.

Для $v \in V$ имеем

$$\int_\Omega ((\mathrm{a}(\mathrm{x}, v, \nabla v) - \mathrm{f}) \cdot \nabla v + (a_0(\mathrm{x}, v, \nabla v) - f_0)v)\, d\mathrm{x} \leqslant 0. \tag{48}$$

Применяя (10_0), выводим

$$\mathrm{a}(\mathrm{x}, v, \nabla v) \cdot \nabla v + a_0(\mathrm{x}, v, \nabla v)v \geqslant \overline{a}M(\mathrm{x}, \overline{d}v) + \overline{a}M(\mathrm{x}, \overline{d}|\nabla v|) - \phi(\mathrm{x}).$$

Отсюда, учитывая (48) и применяя неравенство Юнга, находим

$$\begin{gathered}
\int_\Omega \big(\overline{a}M(\mathrm{x}, \overline{d}v) + \overline{a}M(\mathrm{x}, \overline{d}|\nabla v|)\big) d\mathrm{x} \leqslant \\
\leqslant \int_\Omega \big(\mathrm{a}(\mathrm{x}, v, \nabla v) \cdot \nabla v + a_0(\mathrm{x}, v, \nabla v)v + \phi(\mathrm{x})\big) d\mathrm{x} \leqslant \\
\leqslant \int_\Omega (\mathrm{f} \cdot \nabla v + f_0 v + \phi(\mathrm{x})) d\mathrm{x} \leqslant \varepsilon \int_\Omega \left(\overline{M}\left(\mathrm{x}, \frac{|\mathrm{f}|}{\varepsilon^2}\right) + \overline{M}\left(\mathrm{x}, \frac{f_0}{\varepsilon^2}\right) \right) d\mathrm{x} + \\
+ \varepsilon \int_\Omega \big(M(\mathrm{x}, \varepsilon|\nabla v|) + M(\mathrm{x}, \varepsilon v)\big) d\mathrm{x} + \int_\Omega \phi(\mathrm{x}) d\mathrm{x}.
\end{gathered}$$

Выберем $\varepsilon < \min(\overline{d}, \overline{a})$, получим

$$\int_\Omega M\big((\mathrm{x}, \overline{d}v) + M(\mathrm{x}, \overline{d}|\nabla v|)\big) d\mathrm{x} \leqslant C_{16}.$$

Отсюда следует, что $\|v\|_M^1 \leqslant C_{17}$. Ограниченность множества V установлена.

Таким образом, для дополнительной системы (21) выполнены все условия предложения, теорема доказана. □

Приложение A. Здесь покажем, что функции

$$\begin{gathered}
a_0(\mathrm{x}, s_0, \mathrm{s}) = M'(\mathrm{x}, s_0) + P'(\mathrm{x}, |\mathrm{s}|) + f_0(\mathrm{x}), \quad f_0 \in L_{\overline{M}}(\Omega), \\
a_i(\mathrm{x}, \mathrm{s}) = M'(\mathrm{x}, |\mathrm{s}|)\frac{s_i}{|\mathrm{s}|} + f_i(\mathrm{x}), \quad f_i \in L_{\overline{M}}(\Omega), \quad i = 1, \ldots, n,
\end{gathered}$$

с непрерывно дифференцируемыми по z функциями Музилака—Орлича $P(\mathrm{x}, z)$, $M(\mathrm{x}, z)$[1] подчиняются условиям M.

Для функции Музилака—Орлича $M(\mathrm{x}, z)$ имеет место интегральное представление

$$M(\mathrm{x}, z) = \int_0^{|z|} M'(\mathrm{x}, \theta) d\theta, \tag{49}$$

где $M'(\mathrm{x}, \theta) : \Omega \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, причем $M'(\mathrm{x}, \cdot\,)$ неубывающая, непрерывная, $M'(\mathrm{x}, 0) = 0$ для п.в. $\mathrm{x} \in \Omega$ и

$$\inf_{\mathrm{x}\in\Omega} M'(\mathrm{x}, \theta) > 0 \quad \text{для всех} \quad \theta > 0,$$

$$\lim_{\theta\to\infty} \inf_{\mathrm{x}\in\Omega} M'(\mathrm{x}, \theta) = \infty.$$

Из (49) для $\mathrm{x} \in \Omega$, $z \in \mathbb{R}$ следуют простейшие неравенства:

$$M(\mathrm{x}, z) \leqslant M'(\mathrm{x}, z)z, \tag{50}$$

$$M'(\mathrm{x}, z)z \leqslant M(\mathrm{x}, 2z), \tag{51}$$

$$\overline{M}(\mathrm{x}, M'(\mathrm{x}, z)) \leqslant M'(\mathrm{x}, z)z. \tag{52}$$

Кроме этого, из условия $P \prec\prec M$ следует $\overline{M} \prec\prec \overline{P}$, поэтому найдется функция $h_{\overline{M}} \in L_1(\Omega)$ такая, что

$$\overline{M}(\mathrm{x}, z) \leqslant h_{\overline{M}}(\mathrm{x}) + \overline{P}(\mathrm{x}, z), \quad \mathrm{x} \in \Omega,\ z \in \mathbb{R}. \tag{53}$$

Соединяя (53), (52), (51), выводим

$$\overline{M}(\mathrm{x}, P'(\mathrm{x}, z)) \leqslant P(\mathrm{x}, 2z) + h_{\overline{M}}(\mathrm{x}). \tag{54}$$

Применяя (15) и выбирая $l_M < 1/2$, для любых $\epsilon > 0$, $\mathrm{x} \in \Omega$, $z \in \mathbb{R}$ получаем неравенство

$$\overline{M}(\mathrm{x}, P'(\mathrm{x}, z)) \leqslant \epsilon M(\mathrm{x}, 2l_M z) + h_{\overline{M}}(\mathrm{x}) + h_P(\mathrm{x}) \leqslant \epsilon M(\mathrm{x}, z) + h(\mathrm{x}) \tag{55}$$

с функцией $h \in L_1(\Omega)$.

Благодаря (5), (54), (52), (51) выводим неравенства

$$\begin{aligned}
&\overline{M}(\mathrm{x}, |a_0(\mathrm{x}, s_0, \mathrm{s})|) \leqslant \\
&\qquad \leqslant C_1(\overline{M}(\mathrm{x}, M'(\mathrm{x}, s_0)) + \overline{M}(\mathrm{x}, P'(\mathrm{x}, |\mathrm{s}|)) + \overline{M}(\mathrm{x}, f_0)) + H_3(\mathrm{x}) \leqslant \\
&\qquad\qquad \leqslant C_1 M(\mathrm{x}, 2s_0) + C_1 P(\mathrm{x}, 2|\mathrm{s}|) + \Psi_0(\mathrm{x}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\overline{M}(\mathrm{x}, |\mathrm{a}(\mathrm{x}, s_0, \mathrm{s})|) \leqslant C_2\overline{M}(\mathrm{x}, M'(\mathrm{x}, |\mathrm{s}|)) + C_2\overline{M}(\mathrm{x}, |\mathrm{f}|) + H_2(\mathrm{x}) \leqslant \\
&\qquad\qquad \leqslant C_2 M(\mathrm{x}, 2|\mathrm{s}|) + \Psi(\mathrm{x}),
\end{aligned}$$

$\Psi_0, \Psi \in L_1(\Omega)$. Таким образом, оценки (11), (12) установлены.

Далее проверим справедливость неравенства (10). Применяя неравенство Юнга и (5), выводим

[1] Функции M, $\overline{M}$, P интегрируемы в Ω; $\overline{M}$ удовлетворяет Δ_2-условию; $P \prec\prec M$.

$$
\begin{aligned}
&a_0(\mathrm{x}, s_0, \mathrm{s})(s_0 - w_0) + \mathrm{a}(\mathrm{x}, s_0, \mathrm{s}) \cdot (\mathrm{s} - \mathrm{w}) \geqslant \\
&\geqslant \big(M'(\mathrm{x}, s_0) + P'(\mathrm{x}, |\mathrm{s}|) + f_0(\mathrm{x})\big)(s_0 - w_0) + \Big(M'(\mathrm{x}, |\mathrm{s}|)\frac{\mathrm{s}}{|\mathrm{s}|} + \mathrm{f}(\mathrm{x})\Big) \cdot (\mathrm{s} - \mathrm{w}) \geqslant \\
&\geqslant M'(\mathrm{x}, s_0)s_0 + (P'(\mathrm{x}, |\mathrm{s}|) + f_0)s_0 - \big(M'(\mathrm{x}, s_0) + P'(\mathrm{x}, |\mathrm{s}|) + f_0\big)w_0 + \\
&+ M'(\mathrm{x}, |\mathrm{s}|)|\mathrm{s}| - |\mathrm{f}||\mathrm{s}| - M'(\mathrm{x}, |\mathrm{s}|)|\mathrm{w}| - |\mathrm{f}||\mathrm{w}| \geqslant \\
&\geqslant M'(\mathrm{x}, s_0)s_0 - 2\varepsilon M(\mathrm{x}, s_0) - C_1(\varepsilon)\overline{M}(\mathrm{x}, P'(\mathrm{x}, |\mathrm{s}|)) - \varepsilon\overline{M}(\mathrm{x}, M'(\mathrm{x}, s_0)) + \\
&+ M'(\mathrm{x}, |\mathrm{s}|)|\mathrm{s}| - \varepsilon M(\mathrm{x}, |\mathrm{s}|) - \varepsilon\overline{M}(\mathrm{x}, M'(\mathrm{x}, |\mathrm{s}|)) - \\
&- C_2\big(\varepsilon\big)(\overline{M}(\mathrm{x}, f_0) + \overline{M}(\mathrm{x}, |\mathrm{f}|)\big) - C_3\big(M(\mathrm{x}, C_4(\varepsilon)w_0) + M(\mathrm{x}, C_4(\varepsilon)|\mathrm{w}|)\big) - \phi(\mathrm{x}).
\end{aligned}
$$

Используя неравенства (52), (55), (50), получаем

$$
\begin{aligned}
&a_0(\mathrm{x}, s_0, \mathrm{s})(s_0 - w_0) + \mathrm{a}(\mathrm{x}, s_0, \mathrm{s}) \cdot (\mathrm{s} - \mathrm{w}) \geqslant \\
&\qquad \geqslant (1 - 3\varepsilon)M(\mathrm{x}, s_0) + (1 - 2\varepsilon - \epsilon C_1(\varepsilon))M(\mathrm{x}, |\mathrm{s}|) - H_\varepsilon(\mathrm{x}).
\end{aligned}
$$

Выбирая $\varepsilon < 1/3$, $\epsilon < 1/(3C_1)$, устанавливаем неравенство (10) для любого $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^{n+1}$.

Кроме того, если $M'(\mathrm{x}, z)$ строго возрастающая, то условие (13) также выполнено. Действительно, применяя неравенство Коши—Буняковского, выводим

$$
\begin{aligned}
&\big(\mathrm{a}(\mathrm{x}, s_0, \mathrm{s}) - \mathrm{a}(\mathrm{x}, s_0, \mathrm{t})\big) \cdot (\mathrm{s} - \mathrm{t}) = \Big(M'(\mathrm{x}, |\mathrm{s}|)\frac{\mathrm{s}}{|\mathrm{s}|} - M'(\mathrm{x}, |\mathrm{t}|)\frac{\mathrm{t}}{|\mathrm{t}|}\Big) \cdot (\mathrm{s} - \mathrm{t}) \geqslant \\
&\qquad \geqslant \big(M'(\mathrm{x}, |\mathrm{s}|) - M'(\mathrm{x}, |\mathrm{t}|)\big)\,(|\mathrm{s}| - |\mathrm{t}|).
\end{aligned}
$$

Отметим, что последнее неравенство строгое для неколлинеарных векторов s, t и ввиду монотонности $M'(\mathrm{x}, z)$ условие (13) выполнено. Для коллинеарных векторов $\mathrm{s} \neq \mathrm{t}$ условие (13) также справедливо.

Конкурирующие интересы. Мы заявляем, что у нас нет конфликта интересов в отношении авторства и публикации этой статьи.

Авторский вклад и ответственность. Все авторы принимали участие в разработке концепции статьи и в написании рукописи. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18–01–00428_а).

Библиографический список

1. Browder F. E. Pseudo-monotone operators and nonlinear elliptic boundary value problems on unbounded domains // *Proc. Nati. Acad. Sci. USA*, 1977. vol. 74, no. 7. pp. 2659–2661. https://doi.org/10.1073/pnas.74.7.2659.
2. Кожевникова Л. М., Камалетдинов А. Ш. Существование решений анизотропных эллиптических уравнений с переменными показателями нелинейностей в неограниченных областях // *Вестн. Волгогр. гос. ун-та, Сер. 1. Мат. Физ.*, 2016. №5(36). С. 29–41. https://doi.org/10.15688/jvolsu1.2016.5.4.

3. Кожевникова Л. М., Хаджи А. А. Существование решений анизотропных эллиптических уравнений с нестепенными нелинейностями в неограниченных областях // *Матем. сб.*, 2015. Т. 206, № 8. С. 99–126. https://doi.org/10.4213/sm8482.
4. Mihăilescu M., Rădulescu V. Neumann problems associated to nonhomogeneous differential operators in Orlicz–Sobolev spaces // *Ann. Inst. Fourier, Grenoble*, 2008. vol. 58, no. 6. pp. 2087–2111, arXiv: 0712.2185 [math.AP]. https://doi.org/10.5802/aif.2407.
5. Fan X., Guan C.-X. Uniform convexity of Musielak–Orlicz–Sobolev spaces and applications // *Nonlinear Anal.*, 2010. vol. 73, no. 1. pp. 163–175. https://doi.org/10.1016/j.na.2010.03.010.
6. Benkirane A., Sidi El Vally M. An existence result for nonlinear elliptic equations in Musielak–Orlicz–Sobolev spaces // *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin*, 2013. vol. 20, no. 1. pp. 57–75. https://doi.org/10.36045/bbms/1366306714.
7. Sidi El Vally M. Strongly nonlinear elliptic problems in Musielak–Orlicz–Sobolev spaces // *Adv. Dyn. Syst. Appl.*, 2013. vol. 8, no. 1. pp. 115–124.
8. Fan X. Differential equations of divergence form in Musielak–Sobolev spaces and a sub-supersolution method // *J. Math. Anal. Appl.*, 2012. vol. 386, no. 2. pp. 593–604. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2011.08.022.
9. Dong G., Fang X. Differential equations of divergence form in separable Musielak–Orlicz–Sobolev spaces // *Bound. Value Probl.*, 2016. vol. 2016, 106. https://doi.org/10.1186/s13661-016-0612-9.
10. Chlebicka I. A pocket guide to nonlinear differential equations in Musielak–Orlicz spaces // *Nonlinear Anal.*, 2018. vol. 175. pp. 1–27. https://doi.org/10.1016/j.na.2018.05.003.
11. Diening L., Harjulehto P., Hästö P., Ruzicka M. *Lebesgue and Sobolev Spaces with Variable Exponents* / Lecture Notes in Mathematics. vol. 2017. Berlin: Springer, 2011. ix+509 pp. https://doi.org/10.1007/978-3-642-18363-8.
12. Musielak J. *Orlicz Spaces and Modular Space* / Lecture Notes in Mathematics. vol. 1034. Berlin: Springer, 1983. vi+226 pp. https://doi.org/10.1007/BFb0072210.
13. Рутицкий Я. Б., Красносельский М. А. *Выпуклые функции и пространства Орлича.* М.: Физматлит, 1958. 271 с.
14. Gossez J.P. Nonlinear elliptic boundary value problems for equations with rapidly (or slowly) increasing coefficients // *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1974. vol. 190, no. 1. pp. 163–205. https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1974-0342854-2.
15. Данфорд Н., Шварц Дж. Т. *Линейные операторы.* Т. I: Общая теория. М.: ИЛ, 1962. 895 с.
16. Gossez J.-P., Mustonen V. Variational inequalities in Orlicz–Sobolev spaces // *Nonlinear Anal.*, 1987. vol. 11, no. 3. pp. 379–392. https://doi.org/10.1016/0362-546X(87)90053-8.

Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2020, vol. 24, no. 4, pp. 621–643
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1803

MSC: 35J20, 35J25, 35J62

Existence of solutions to quasilinear elliptic equations in the Musielak–Orlicz–Sobolev spaces for unbounded domains

© *L. M. Kozhevnikova*[1,2], *A. P. Kashnikova*[1]

[1] Sterlitamak Branch of Bashkir State University,
49, Lenin Avenue, Sterlitamak, 453103, Russian Federation.
[2] Elabuga Branch of Kazan (Volga Region) Federal University,
89, Kazanskaya st., Elabuga, 423600, Russian Federation.

Abstract

The paper considers the existence of solutions of the Dirichlet problem for nonlinear elliptic equations of the second order in unbounded domains. Restrictions on the structure of quasilinear equations are formulated in terms of a special class of convex functions (generalized N-functions). Namely, nonlinearities are determined by the Musilak–Orlicz functions such that the complementaries functions obeys the condition Δ_2. The corresponding Musielak–Orlicz–Sobolev space does not have to be reflexive. This fact is a significant problem, since the theorem for pseudomonotone operators is not applicable here.

For the class of equations under consideration, the proof of the existence theorem is based on an abstract theorem for additional systems. An important tool which allowed to generalize available results on the existence of solutions of the considered equations for bounded domains to the case of unbounded domains is an embedding theorem for Musielak–Orlicz–Sobolev spaces. Thus, in this paper, we find conditions on the structure of quasilinear equations in terms of the Musielak–Orlicz functions sufficient for the solvability of the Dirichlet problem in unbounded domains. In addition, we provide examples of equations which demonstrate that the class of nonlinearities considered in the paper is wider than non-power nonlinearities and variable exponent nonlinearities.

Keywords: Musielak–Orlicz–Sobolev spaces, Dirichlet problem, existence solution, non-reflective space, unbounded domain.

Received: 20th July, 2020 / Revised: 20th September, 2020 /
Accepted: 16th November, 2020 / First online: 25th December, 2020

Competing interests. We declare that we have no conflicts of interest in the authorship and publication of this article.

Research Article

Please cite this article in press as:

Kozhevnikova L. M., Kashnikova A. P. Existence of solutions to quasilinear elliptic equations in the Musielak–Orlicz–Sobolev spaces for unbounded domains, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2020, vol. 24, no. 4, pp. 621–643. https://doi.org/10.14498/vsgtu1803 (In Russian).

Authors' Details:

Larisa M. Kozhevnikova https://orcid.org/0000-0002-6458-5998
Doctor Phys. & Math. Sci., Professor; Professor; Dept. of Mathematical Analysis;
e-mail: kosul@mail.ru

Anastasiya P. Kashnikova; Student; e-mail: a.kashnikova98@yandex.ru

Authors' contributions and responsibilities. Each author has participated in the article concept development and in the manuscript writing. The authors are absolutely responsible for submitting the final manuscript in print. Each author has approved the final version of manuscript.

Funding. This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 18–01–00428_a).

References

1. Browder F. E. Pseudo-monotone operators and nonlinear elliptic boundary value problems on unbounded domains, *Proc. Nati. Acad. Sci. USA*, 1977, vol. 74, no. 7, pp. 2659–2661. https://doi.org/10.1073/pnas.74.7.2659.
2. Kozhevnikova L. M., Kamaletdinov A. Sh. Existence of solutions of anisotropic elliptic equations with variable exponents of nonlinearity in unbounded domains, *Vestn. Volgogr. Gos. Univ., Ser. 1. Math. Phys.*, 2016, no. 5(36), pp. 29–41 (In Russian). https://doi.org/10.15688/jvolsu1.2016.5.4.
3. Kozhevnikova L. M., Khadzhi A. A. Existence of solutions of anisotropic elliptic equations with nonpolynomial nonlinearities in unbounded domains, *Sb. Math.*, 2015, vol. 206, no. 8, pp. 1123–1149. https://doi.org/10.1070/SM2015v206n08ABEH004491.
4. Mihăilescu M., Rădulescu V. Neumann problems associated to nonhomogeneous differential operators in Orlicz–Sobolev spaces, *Ann. Inst. Fourier, Grenoble*, 2008, vol. 58, no. 6, pp. 2087–2111, arXiv: 0712.2185 [math.AP]. https://doi.org/10.5802/aif.2407.
5. Fan X., Guan C.-X. Uniform convexity of Musielak–Orlicz–Sobolev spaces and applications, *Nonlinear Anal.*, 2010, vol. 73, no. 1, pp. 163–175. https://doi.org/10.1016/j.na.2010.03.010.
6. Benkirane A., Sidi El Vally M. An existence result for nonlinear elliptic equations in Musielak–Orlicz–Sobolev spaces, *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin*, 2013, vol. 20, no. 1, pp. 57–75. https://doi.org/10.36045/bbms/1366306714.
7. Sidi El Vally M. Strongly nonlinear elliptic problems in Musielak–Orlicz–Sobolev spaces, *Adv. Dyn. Syst. Appl.*, 2013, vol. 8, no. 1, pp. 115–124.
8. Fan X. Differential equations of divergence form in Musielak–Sobolev spaces and a sub-supersolution method, *J. Math. Anal. Appl.*, 2012, vol. 386, no. 2, pp. 593–604. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2011.08.022.
9. Dong G., Fang X. Differential equations of divergence form in separable Musielak–Orlicz–Sobolev spaces, *Bound. Value Probl.*, 2016, vol. 2016, 106. https://doi.org/10.1186/s13661-016-0612-9.
10. Chlebicka I. A pocket guide to nonlinear differential equations in Musielak–Orlicz spaces, *Nonlinear Anal.*, 2018, vol. 175, pp. 1–27. https://doi.org/10.1016/j.na.2018.05.003.
11. Diening L., Harjulehto P., Hästö P., Ruzicka M. *Lebesgue and Sobolev Spaces with Variable Exponents*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 2017. Berlin, Springer, 2011, ix+509 pp. https://doi.org/10.1007/978-3-642-18363-8.
12. Musielak J. *Orlicz Spaces and Modular Space*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1034. Berlin, Springer, 1983, vi+226 pp. https://doi.org/10.1007/BFb0072210.
13. Krasnosel'skii M. A., Rutickii Ja. B. *Convex functions and Orlicz spaces.* Groningen, Noordhoff, 1961, xi+249 pp.
14. Gossez J.P. Nonlinear elliptic boundary value problems for equations with rapidly (or slowly) increasing coefficients, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1974, vol. 190, no. 1, pp. 163–205. https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1974-0342854-2.
15. Dunford N., Schwartz J. T. *Linear Operators.* I: General Theory, Pure and Applied Mathematics, vol. 7. New York, Interscience Publ., 1958, xiv+858 pp.
16. Gossez J.-P., Mustonen V. Variational inequalities in Orlicz–Sobolev spaces, *Nonlinear Anal.*, 1987, vol. 11, no. 3, pp. 379–392. https://doi.org/10.1016/0362-546X(87)90053-8.