



Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

УДК 521.182

Математическое моделирование движения астероидов, принадлежащих к группам Аполлона и Атона


© А. Ф. Заусаев, М. А. Романюк, А. А. Заусаев

Самарский государственный технический университет,
Россия, 443100, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

Аннотация

Проведена оценка точности решений дифференциальных уравнений движения с учетом релятивистских эффектов, полученных на основе нового принципа взаимодействия, на примере исследований эволюции орбит пяти астероидов. Проведено численное интегрирование уравнений движения астероидов с начальными данными, отнесенными к различным моментам времени. На основании сопоставления полученных результатов исследования выявлены определенные закономерности. На интервалах времени при отсутствии сближений астероида с Землей менее 0.1 а.е. можно с одинаковой эффективностью применять приведенные в работе дифференциальные уравнения. Потеря точности численного интегрирования находится в прямой зависимости от величины сближения астероида с Землей. Вследствие того, что в правых частях уравнений движения присутствуют разности координат астероида и планеты, при достаточной их близости относительная точность координат астероида и планеты во много раз превосходит относительную точность их разности. Для исследуемых астероидов при сближении их с Землей относительная погрешность разности координат астероида и Земли примерно

Научная статья

 Контент публикуется на условиях лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru) (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Образец для цитирования

Заусаев А. Ф., Романюк М. А., Заусаев А. А. Математическое моделирование движения астероидов, принадлежащих к группам Аполлона и Атона // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2020. Т. 24, № 4. С. 692–717. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1779>.

Сведения об авторах

Анатолий Федорович Заусаев  <https://orcid.org/0000-0002-5035-9615>

доктор физико-математических наук; профессор; каф. прикладной математики и информатики; e-mail: zausaev_af@mail.ru

Мария Анатольевна Романюк  <https://orcid.org/0000-0003-0796-2061>

кандидат технических наук; доцент; каф. прикладной математики и информатики; e-mail: zausmasha@mail.ru

Артем Анатольевич Заусаев  <https://orcid.org/0000-0002-5184-3943>

кандидат физико-математических наук; доцент; каф. прикладной математики и информатики; e-mail: zausaevaa@mail.ru

от 227 до 44900 раз превышает предельную относительную погрешность самих координат астероида. Прогнозирование движение Апофиса после его тесного сближения с Землей на основе решения уравнений движения современными методами приводит к большим ошибкам, уменьшение которых возможно только путем улучшения начальных данных элементов орбит астероида. О возможности тесного сближения Апофиса с Землей на интервале времени с 14 апреля 2029 г. по 1 января 2100 г. можно утверждать лишь с определенной степенью вероятности. Результаты проведенных исследований можно обобщить на все астероиды групп Аполлона и Атона.

Ключевые слова: численное интегрирование, дифференциальные уравнения движения, астероиды, (99942) Апофис, (367943) Дуэнде, 2012 UE₃₄, 1999 AN₁₀, 2001 WN₅.

Получение: 6 апреля 2020 г. / Исправление: 3 ноября 2020 г. /

Принятие: 16 ноября 2020 г. / Публикация онлайн: 18 декабря 2020 г.

Основные положения и расчетные формулы. В настоящее время определены элементы орбит более чем у 20 тысяч астероидов, входящих в группы Аполлона, Амура и Атона. Большинство астероидов групп Аполлона, Амура и Атона в процессе эволюции могут сближаться с внутренними планетами, при этом не исключена вероятность столкновения с ними. Исследование эволюции орбит астероидов, сближающихся с Землей, важно для решения проблемы, связанной с астероидной опасностью [1–3].

Движение небесных тел в Солнечной системе описывается различными дифференциальными уравнениями [4–6]. От выбора конкретных дифференциальных уравнений существенно зависит точность прогнозирования движения исследуемого объекта. На примере движения больших планет и Луны показано, что решения уравнений в форме Ньютона не обладают достаточной точностью для прогнозирования движения Меркурия и Луны [7]. Решение дифференциальных уравнений движения с учетом релятивистских эффектов без использования дополнительных уравнений, учитывающих форму Земли и Луны, недостаточно точны для прогнозирования движения Луны [8].

В отличие от ньютоновых и релятивистских уравнений, решение уравнений, основанных на взаимодействии движущихся материальных тел с окружающим пространством, полностью согласуются с данными координат больших планет и Луны, полученных с использованием банка данных DE405 [9].

Уравнения движения, основанные на взаимодействии движущихся материальных тел с окружающим пространством, имеют следующий вид [10,11]:

$$\begin{cases} \frac{d^2 X}{dt^2} = \sum_i \left(\frac{X_i - X}{\Delta_i} \right) \frac{3a_{0i}r_{0i}^2}{\Delta_i^2 + \Delta_i \sqrt[3]{\Delta_i^3 - r_{0i}^3} + \sqrt[3]{(\Delta_i^3 - r_{0i}^3)^2}}, \\ \frac{d^2 Y}{dt^2} = \sum_i \left(\frac{Y_i - Y}{\Delta_i} \right) \frac{3a_{0i}r_{0i}^2}{\Delta_i^2 + \Delta_i \sqrt[3]{\Delta_i^3 - r_{0i}^3} + \sqrt[3]{(\Delta_i^3 - r_{0i}^3)^2}}, \\ \frac{d^2 Z}{dt^2} = \sum_i \left(\frac{Z_i - Z}{\Delta_i} \right) \frac{3a_{0i}r_{0i}^2}{\Delta_i^2 + \Delta_i \sqrt[3]{\Delta_i^3 - r_{0i}^3} + \sqrt[3]{(\Delta_i^3 - r_{0i}^3)^2}}, \end{cases} \quad (1)$$

где $\Delta_i^2 = (X_i - X)^2 + (Y_i - Y)^2 + (Z_i - Z)^2$, r_{0i} – эффективный радиус i -того

тела; a_{0i} — соответствующее ускорение для i -того тела на расстоянии r_{0i} от центра массы; X, Y, Z — барицентрические координаты возмущаемого тела; X_i, Y_i, Z_i — барицентрические координаты возмущающих тел.

Следует отметить, что произведение $a_{0i}r_{0i}^2$ по размерности и значениям полностью совпадает с k^2m_i , где k — постоянная Гаусса, а m_i — масса i -той планеты. Данное совпадение значительно упрощает решение уравнений (1), которые по своей форме близки к уравнениям движения задачи n тел, однако по сравнению с задачей n тел, в уравнениях (1) отсутствует наличие масс и силовых взаимодействий.

Уравнения движения небесных тел с учетом релятивистских поправок более сложны по сравнению с уравнениями (1). В барицентрической системе координат эти уравнения в векторной форме имеют следующий вид [12]:

$$\begin{aligned} \ddot{r}_i = & \sum_{j \neq i} \frac{\mu_j (r_j - r_i)}{r_{ij}^3} \left\{ 1 - \frac{2(\beta + \gamma)}{c^2} \sum_{k \neq i} \frac{\mu_k}{r_{ik}} - \frac{2\beta - 1}{c^2} \sum_{k \neq j} \frac{\mu_k}{r_{jk}} + \gamma \left(\frac{v_i}{c} \right)^2 + \right. \\ & + (1 + \gamma) \left(\frac{v_j}{c} \right)^2 - \frac{2(1 + \gamma)}{c^2} \dot{r}_i \dot{r}_j - \frac{3}{2c^2} \left[\frac{(r_i - r_j) \dot{r}_i}{r_{ij}} \right]^2 + \frac{1}{2c^2} (r_j - r_i) \ddot{r}_j \left. \right\} + \\ & + \frac{1}{c^2} \sum_{j \neq i} \frac{\mu_j}{r_{ij}^3} (r_i - r_j) [(2 + 2\gamma) \dot{r}_i - (1 + 2\gamma) \dot{r}_j] (\dot{r}_i - \dot{r}_j) + \\ & + \frac{3 + 4\gamma}{2c^2} \sum_{j \neq i} \frac{\mu_j \ddot{r}_j}{r_{ij}} + \sum_{m=1}^n \frac{\mu_m (r_m - r_i)}{r_{im}^3}, \quad (2) \end{aligned}$$

где $r_i, \dot{r}_i, \ddot{r}_i$ — векторы положения, скорости и ускорения i -того тела в барицентрической системе координат; $\mu_j = k^2m_j$, k^2 — гравитационная постоянная и m_j — масса j -того тела; $r_{ij} = |r_j - r_i|$; β и γ — релятивистские параметры; c — скорость света; $\beta = \gamma = 1$; $v_i = |\dot{r}_i|$.

Данные уравнения до 2018 г. использовались при создании каталога орбитальной эволюции астероидов групп Аполлона, Амура, Атона и короткопериодических комет, размещенного на сайте smallbodies.ru [13]. После 2018 г. при исследовании эволюции элементов орбит этих астероидов используются уравнения (1).

При исследовании эволюции орбит небесных тел важно, чтобы применяемый метод решения обладал высокой степенью точности и устойчивости. В качестве метода решения использовался модифицированный метод Эверхарта [14, 15]. Модификация метода Эверхарта заключалась в увеличении его порядка с 19-го по 33 [16]. Быстродействие работы программы достигалось путем создания банка данных барицентрических координат планет Луны и Солнца на интервале времени с 1600 по 2200 гг. Для удобства, связанного с интерполяцией, в банке данных вместо координат и скоростей возмущающих тел хранятся коэффициенты полиномов Эверхарта. Для нахождения координат и компонент скоростей на определенный момент времени в банке данных с шагом 10 дней хранятся коэффициенты полиномов Эверхарта. Внутри десятидневных интервалов координаты и компоненты скоростей находятся с помощью интерполяционных полиномов Эверхарта.

Разработанные алгоритмы и программный комплекс для исследования эволюции орбит небесных тел позволяют своевременно производить необходимые расчеты и результаты вычислений размещать на сайте smallbodies.ru.

Известно, что при численном решении обыкновенных дифференциальных уравнений значения начальных данных существенно отражаются на точности полученных результатов. В работе [11] показано, что начальные данные небесных тел при использовании уравнений (1) нуждаются в коррекции по формулам [11]

$$V^2 = \frac{2(c_0^* + c_1^*)}{r} + \frac{1}{6} \frac{c_0^* r_0^3 + c_1^* r_1^3}{r^4} - \frac{c_0^* + c_1^*}{a}, \quad r = \frac{2a(c_0^* + c_1^*)}{aV^2 + c_0^* + c_1^*}, \quad (3)$$

где V и r — скорость и радиус-вектор астероида в барицентрической системе координат; a — большая полуось орбиты астероида; $a_0 r_0^2 = c_0^*$, $a_1 r_1^2 = c_1^*$; a_0 , a_1 , r_0 , r_1 — ускорения и эффективные радиусы Солнца и астероида.

Цели данной работы следующие:

- а) оценка влияния коррекции начальных данных по формулам (3) на эволюцию орбит астероидов, сближающихся с Землей;
- б) исследование влияния сближения астероида с Землей на точность результатов интегрирования уравнений (1) и (2);
- в) сравнение результатов численного интегрирования на основе решения уравнений (1) и (2).

Для сопоставления результатов численного интегрирования с использованием уравнений (1) и (2) были отобраны пять астероидов (см. табл. 1) из групп Аполлона и Атона, имеющих различные размеры и минимальные сближения с Землей.

Таблица 1

Данные об астероидах, сближающихся с Землей
[Data for the near-Earth asteroids]

Asteroids	Earth close approaches date	Earth close approaches distance, r (in au)	Earth close approaches distance, r (in km)	Diameter (in m)
(99942) Apophis	2029 04 13	0.000253	37 833	440
2012 DA ₁₄	2013 02 15	0.000227	33 991	42
2012 UE ₃₄	2041 04 08	0.000717	107 188	63
1999 AN ₁₀	2027 08 07	0.002590	390 080	700
2001 WN ₅	2028 06 26	0.001660	249 805	610

Астероид (99942) Апофис (2004 MN₄). Астероид открыт в 2004 году. Исследованию его движения посвящен ряд работ [17–19]. Он является потенциально опасным для Земли астероидом, т.к. его диаметр около 440 м и 13 апреля 2029 г. он пройдет от Земли на расстоянии около 38 000 км (см. табл. 1). К настоящему времени по нему накоплен большой объем наблюдений, по которым регулярно вычисляются элементы орбит. На сайте smallbodies.ru данные об элементах орбит астероида Апофис приведены начиная с 2005 года. По мере накопления наблюдений точность элементов орбит астероида Апофис улучшается. Для определения элементов орбит астероида Апофис на момент 13 ноября 2019 г. использовалось 4 443 наблюдения. Представляет интерес, насколько согласуются элементы орбит Апофиса, найденные с помощью численного интегрирования различными методами, с данными элементами, полученными на основании наблюдений.

В первом блоке табл. 2 представлены элементы орбит астероида Апофис, полученные с использованием наблюдений и путем численного интегрирования уравнений (1), (2) и с учетом коррекции начальных данных на интервале времени с 5 августа 2019 г. по 13 ноября 2019 г.

Во втором блоке табл. 2 представлены аналогичные результаты вычислений с начальными данными на момент 5 августа 2019 г. Здесь интегрирование проводилось в обратном направлении — с 5 августа 2019 г. по 13 ноября 2019 г.

В первой строке блоков табл. 2 находятся элементы орбит, найденные по данным наблюдений, во второй, третьей и четвертой строках блока — элементы орбит, полученные с помощью интегрирования уравнений (1), (2) и с учетом коррекции (3).

Из сопоставления данных табл. 2 следует, что элементы орбит астероида Апофис, полученные с помощью численного интегрирования различными методами, вполне удовлетворительно согласуются с результатами оптических наблюдений.

На момент 13 ноября 2019 г. разность между вычисленными с помощью решения уравнений (1) (вторая строчка блока) и оптическими наблюдениями (первая строчка блока) составляет следующие величины: $\Delta M = -0.000001^\circ$, $\Delta a = 0.00000002$ а.е., $\Delta e = 0.00000002$, $\Delta \omega = 0.000002^\circ$, $\Delta \Omega = 0^\circ$, $\Delta i = 0^\circ$, а на момент 5 августа 2019 г. — $\Delta M = -0.000003^\circ$, $\Delta a = -0.00000002$ а.е., $\Delta e = -0.00000002$, $\Delta \omega = -0.000002^\circ$, $\Delta \Omega = 0^\circ$, $\Delta i = 0^\circ$. Для других методов интегрирования (см. табл. 2) различия между результатами наблюдений и полученными данными также малы. Данные разности можно рассматривать как абсолютные погрешности решений уравнений (1) и (2) на интервале времени 100 дней (с 5 августа 2019 г. по 13 ноября 2019 г.).

В табл. 3 представлены элементы орбит астероида Апофис, найденные с использованием решения уравнений движения (1) и (2) при различных начальных данных. Элементы орбит в первом блоке табл. 3 получены с помощью решения уравнений (1) и (2) с использованием начальных данных на эпоху 5 августа 2019 г. Во втором блоке табл. 3 приведены элементы орбит астероида Апофис, полученные при начальных данных на эпоху 13 ноября 2019 г. При этом календарной дате соответствуют элементы орбит астероида, найденные с использованием решения уравнений движения (1), а юлианской дате соответствуют элементы орбит, полученные на основании решения уравнений (2). Юлианская и календарная даты в табл. 2 соответствуют одному и тому же моменту времени. Элементы орбит астероида в первом и втором блоках табл. 3 приведены на начальный и конечный момент интервала интегрирования, а также на моменты до и после сближения с Землей.

Элементы орбит астероида Апофис через каждые 100 дней, найденные с использованием интегрирования дифференциальных уравнений (1) на стандартные даты, размещены на сайте smallbodies.ru.

Из сравнения элементов орбит астероида первого и второго блоков табл. 3, найденных с помощью решения уравнений (1), видно, что они отличаются между собой. Поскольку начальные данные элементов орбит на моменты 5 августа 2019 г. и 13 ноября 2019 г. имеют почти одинаковую точность, нельзя сказать, какие результаты, приведенные в этих блоках, более точные. По количеству совпадающих разрядов в элементах орбит, представленных в этих блоках, можно оценить степень точности проводимых исследований, а по разности соответствующих элементов найти погрешность численного интегрирования относительно различных начальных данных.

Сложность прогнозирования движения астероида Апофис связана с проблемой численной устойчивости при сближении астероида с Землей. Как видно из результатов численного интегрирования (см. табл. 1), 13 апреля 2029 г. Апофис сблизится с Землей на расстояние 0.000253 а.е. Правые части диф-

Таблица 2

Элементы орбит Апофиса, полученные решением уравнений движения (1) и (2) и с учетом коррекции (3)
 [Apophis' orbital elements calculated by the motion equations (1) and (2) with correction (3)]

Current date Initial date	Data sources (calculated by)	M (in degrees)	a (in au)	e	ω (in degrees)	Ω (in degrees)	i (in degrees)
2019 11 13	observations by the Eq. (1)	25.696976	0.92253315	0.19145964	126.676052	204.053469	3.336838
2019 08 05	by the Eq. (2) by the Eqs. (1), (3)	25.696975 25.696976 25.697016	0.92253317 0.92253315 0.92253317	0.19145966 0.19145963 0.19145964	126.676054 126.676052 126.676013	204.053469 204.053469 204.053469	3.336838 3.336838 3.336838
2019 08 05	observations by the Eq. (1)	274.463322	0.92252716	0.19146827	126.676625	204.054436	3.336876
2019 11 13	by the Eq. (2) by the Eqs. (1), (3)	274.463319 274.463322 274.463285	0.92252714 0.92252716 0.92252714	0.19146825 0.19146828 0.19146843	126.676623 126.676625 126.676656	204.054436 204.054436 204.054436	3.336876 3.336876 3.336876

Таблица 3

Элементы орбит Апофиса, полученные по различным начальным данным
 [Apophis' orbital elements calculated from different initial data]

Current date	Data sources (calculated by)	Initial date — August 5, 2019					
		M (in degrees)	a (in au)	e	ω (in degrees)	Ω (in degrees)	i (in degrees)
1900 03 22	by the Eq. (1)	279.1268	0.9260468	0.1903993	122.4825	207.7302	3.2884
JD 2415100.5	by the Eq. (2)	279.2317	0.9260726	0.1903836	122.4730	207.7298	3.2887
1979 01 27	by the Eq. (1)	48.6918	0.9259608	0.1904005	124.1617	205.3005	3.3245
JD 2443900.5	by the Eq. (2)	48.6931	0.9259609	0.1904004	124.1611	205.3005	3.3245
2019 08 05	by the Eq. (1)	274.463322	0.92252716	0.19146827	126.676625	204.054436	3.336876
JD 2458700.5	by the Eq. (2)	274.463322	0.92252716	0.19146827	126.676625	204.054436	3.336876
2029 03 05	by the Eq. (1)	207.9739	0.9223315	0.1912153	126.6981	203.8631	3.3420
JD 2462200.5	by the Eq. (2)	207.9738	0.9223315	0.1912152	126.6982	203.8631	3.3420
2029 06 13	by the Eq. (1)	359.6064	1.1040638	0.1893350	71.2000	203.5599	2.2126
JD 2462300.5	by the Eq. (2)	359.5451	1.1036803	0.1892226	71.2914	203.5601	2.2149
2100 02 01	by the Eq. (1)	27.7405	1.1002096	0.1882431	74.2430	202.0987	2.2504
JD 2488100.5	by the Eq. (2)	198.4852	1.1189026	0.1939314	69.2533	201.0609	2.1555

Окончание табл. 3 [End of the Table 3]

Current date	Data sources (calculated by)	M (in degrees)	a (in au)	e	ω (in degrees)	Ω (in degrees)	i (in degrees)
Initial date — November 13, 2019							
1900 03 22	by the Eq. (1)	278.5161	0.9258978	0.1904898	122.5298	207.7331	3.2866
JD 2415100.5	by the Eq. (2)	279.2301	0.9260723	0.1903838	122.4731	207.7298	3.2887
1979 01 27	by the Eq. (1)	48.6875	0.9259603	0.1904009	124.1622	205.3002	3.3245
JD 2443900.5	by the Eq. (2)	48.6931	0.9259609	0.1904004	124.1611	205.3005	3.3245
2019 11 13	by the Eq. (1)	25.696976	0.92253315	0.19145964	126.676052	204.053469	3.336838
JD 2458800.5	by the Eq. (2)	25.696976	0.92253315	0.19145964	126.676052	204.053469	3.336838
2029 03 05	by the Eq. (1)	207.9741	0.9223315	0.1912152	126.6981	203.8631	3.3420
JD 2462200.5	by the Eq. (2)	207.9738	0.9223315	0.1912152	126.6981	203.8631	3.3420
2029 06 13	by the Eq. (1)	359.8071	1.1053400	0.1897284	70.9019	203.5589	2.1994
JD 2462300.5	by the Eq. (2)	359.5430	1.1036667	0.1892185	71.2946	203.5601	2.2151
2100 02 01	by the Eq. (1)	200.5921	1.1170329	0.1930831	70.7095	201.2504	2.2217
JD 2488100.5	by the Eq. (2)	169.4976	1.1252839	0.1960322	68.2933	201.5017	2.0865
Initial date — August 5, 2019							
1900 03 22	by the Eq. (1)	279.1268	0.9260468	0.1903993	122.4825	207.7302	3.2884
JD 2415100.5	by the Eqs. (1), (3)	279.1250	0.9260463	0.1903996	122.4826	207.7302	3.2884
1979 01 27	by the Eq. (1)	48.6918	0.9259608	0.1904005	124.1617	205.3005	3.3245
JD 2443900.5	by the Eqs. (1), (3)	48.6918	0.9259608	0.1904004	124.1616	205.3005	3.3245
2019 08 05	by the Eq. (1)	274.463322	0.92252716	0.19146827	126.676625	204.054436	3.336876
JD 2458700.5	by the Eqs. (1), (3)	274.463364	0.92252716	0.19146825	126.676584	204.054436	3.336876
2029 03 05	by the Eq. (1)	207.9739	0.9223315	0.1912153	126.6981	203.8631	3.3420
JD 2462200.5	by the Eqs. (1), (3)	207.9740	0.9223315	0.1912152	126.6981	203.8631	3.3420
2029 06 13	by the Eq. (1)	359.6064	1.1040638	0.1893350	71.2000	203.5599	2.2126
JD 2462300.5	by the Eqs. (1), (3)	359.6005	1.1040255	0.1893213	71.2084	203.5600	2.2137
2100 02 01	by the Eq. (1)	27.7405	1.1002096	0.1882431	74.2430	202.0987	2.2504
JD 2488100.5	by the Eqs. (1), (3)	119.8925	1.0686945	0.1821959	82.8993	202.0349	1.9236

ференциальных уравнений движения (1) и (2) содержат разности координат Земли и астероида. При тесном сближении Апофиса с Землей на расстояние 0.000253 а.е. при вычислении правых частей уравнений (1) или (2) теряются три старших разряда в разностях радиус-векторов. Дальнейшие расчеты будут проводиться при потере трех разрядов в начале числа. Известно, что большие потери точности происходят при вычитании двух близких чисел [20, 21].

Для оценки влияния тесного сближения Апофиса с Землей вычислим относительные погрешности разности между координатами астероида и Земли.

13 апреля 2029 г. Апофис пройдет от Земли на расстоянии 0.000252898 а.е. Обозначим через X_3, Y_3, Z_3 барицентрические координаты Земли, а через X_A, Y_A, Z_A — барицентрические координаты астероида.

В момент сближения астероида с Землей имеем следующие значения координат:

$$\begin{aligned} X_3 &= -0.916328637 \text{ а.е.}, & Y_3 &= -0.372523621 \text{ а.е.}, & Z_3 &= -0.161395076 \text{ а.е.}, \\ X_A &= -0.916213075 \text{ а.е.}, & Y_A &= -0.372708794 \text{ а.е.}, & Z_A &= -0.161522802 \text{ а.е.} \end{aligned}$$

Найдем разности координат: $X_3 - X_A = -0.000115562$ а.е., $Y_3 - Y_A = -0.000185173$ а.е., $Z_3 - Z_A = -0.000127726$ а.е.

Полагая, что полученные координаты Земли и астероида имеют одинаковую точность — до шести значащих цифр после запятой, найдем предельную абсолютную погрешность разности координат Земли и астероида:

$$\begin{aligned} \Delta_X &= \Delta_{X_3} + \Delta_{X_A}, & \Delta_Y &= \Delta_{Y_3} + \Delta_{Y_A}, & \Delta_Z &= \Delta_{Z_3} + \Delta_{Z_A}, \\ \Delta_X &= \Delta_Y = \Delta_Z = 0.0000005 \text{ а.е.} + 0.0000005 \text{ а.е.} = 0.000001 \text{ а.е.} \end{aligned}$$

Вычислим предельные относительные погрешности координат астероида:

$$\begin{aligned} \delta_{X_A} &= 0.0000005/0.916213075 = 5.45725 \cdot 10^{-7}, \\ \delta_{Y_A} &= 0.0000005/0.372708794 = 1.34153 \cdot 10^{-6}, \\ \delta_{Z_A} &= 0.0000005/0.161522802 = 3.09554 \cdot 10^{-6}. \end{aligned}$$

Получим предельные относительные погрешности разности координат астероида и Земли:

$$\begin{aligned} \delta_X &= 0.000001/0.000115562 = 8.65336 \cdot 10^{-3}, \\ \delta_Y &= 0.000001/0.000185173 = 5.40036 \cdot 10^{-3}, \\ \delta_Z &= 0.000001/0.000127726 = 7.82926 \cdot 10^{-3}. \end{aligned}$$

Определим, во сколько раз предельная относительная погрешность разности координат Земли и астероида Апофис больше предельной относительной погрешности координат астероида: $\delta_X/\delta_{X_A} \approx 15\,857$, $\delta_Y/\delta_{Y_A} \approx 4\,026$, $\delta_Z/\delta_{Z_A} \approx 2\,562$.

Предельная относительная погрешность разности координат радиус-вектора Апофиса примерно в 15 857 раз больше его предельной относительной погрешности величины координат радиус-вектора.

Большие относительные погрешности разностей координат радиус-векторов астероида в процессе интегрирования приводят к значительным погрешностям полученных результатов.

Из первых двух блоков табл. 3 видно, что до момента тесного сближения 5 марта 2029 г. элементы орбит Апофиса, вычисленные с помощью численного интегрирования уравнений (1), практически совпадают независимо от даты, на которую брались начальные данные для решения уравнений движения. После тесного сближения разности элементов орбит, полученных с помощью решения уравнений (1) на момент 13 июня 2029 г., составят следующие величины: $\Delta M = 0.2007^\circ$, $\Delta a = 0.0012762$ а.е., $\Delta e = 0.0003934$, $\Delta \omega = -0.2981^\circ$, $\Delta \Omega = -0.001^\circ$, $\Delta i = -0.0132^\circ$.

Полученные разности характеризуют устойчивость применяемого метода, т.е. определяют влияние погрешности начальных данных на результаты решения при тесном сближении астероида с Землей. По величине разности элементов орбит можно судить о порядке точности решения. До сближения астероида с Землей большие полуоси и эксцентриситеты, найденные с помощью решения уравнений (1), совпадали до шестого знака включительно после запятой (см. табл. 3). После тесного сближения астероида с Землей большие полуоси и эксцентриситеты сохранили совпадения до двух и трех знаков после запятой соответственно.

Таким образом, после сближения Апофиса с Землей произошла потеря точности в большой полуоси и эксцентриситете орбиты астероида на четыре и три порядка соответственно, т.е. большая полуось и эксцентриситет в дальнейшем будут определены с точностью до двух и трех верных знаков после запятой. Угловые элементы (средняя аномалия M и аргумент перигелия ω) будут определены с точностью до градусов.

Потеря точности численного интегрирования уравнений движения (1) и (2) на участках тесного сближения Апофиса с Землей является наиболее сложной проблемой при прогнозировании движения астероида после его сближения с Землей. Для сохранения заданной точности необходимо координаты астероида и Земли брать с достаточным числом «запасных» верных знаков. Для этого следует повысить точность начальных данных элементов орбит Земли и астероида.

Третий блок табл. 3 содержит элементы орбит Апофиса, полученные с учетом коррекции начальных данных элементов орбит астероида и без учета коррекции. Результаты вычислений в строках, соответствующих календарной дате, получены без учета коррекции, в строках, соответствующих юлианской дате, — с учетом коррекции начальных данных с применением формул (3).

Из данных третьего блока табл. 3 видно, что в результате коррекции начальных данных элементы орбит астероида изменились незначительно. Истинная аномалия M возросла на 0.000042° , эксцентриситет e и аргумент перигелия ω уменьшились соответственно на 0.00000002° и 0.000041° , остальные элементы орбит не претерпели существенных изменений. Полученные невязки, как видно из данных третьего блока табл. 3, на интервале времени с 1900 г. по 2029 г. существенно не отражаются на результатах интегрирования.

Из сравнения элементов орбит Апофиса, найденных с начальными данными на различные моменты (см. первый и второй блоки табл. 3), следует, что на левом конце интервала интегрирования (22 марта 1900 г.) угловые элементы получены с точностью до градусов, а большие полуоси a и эксцентриситеты e — с точностью до двух значащих цифр после запятой. На интервале времени с 1971 г. по 2029 г. имеет место совпадение больших полуосей и эксцентриситетов до шести знаков и до двух знаков после запятой в угловых элементах. На правом конце интервала интегрирования (1 февраля 2100 г.)

элементы орбит астероида отличаются друг от друга более значительно по сравнению с левым концом, достигая в средней аномалии M свыше 170° , а большая полуось a и эксцентриситет e совпадают лишь до двух значащих цифр.

Возникает вопрос: каким образом можно повысить точность прогнозирования движения астероида Апофис после его тесного сближения с Землей?

Как было показано ранее, в результате тесных сближений астероида с Землей происходит потеря точности при численном интегрировании уравнений движения (1) и (2). Данный факт указывает на необходимость повышения точности начальных данных координат и компонент скоростей для получения более точных решений уравнений (1) и (2). Повышение точности начальных данных элементов орбит Апофиса на несколько порядков является сложновыполнимой проблемой. Однако к решению данной проблемы можно вернуться после 13 апреля 2029 г., т.е. после тесного сближения астероида с Землей. Тогда элементы орбит астероида после его сближения с Землей с учетом новых наблюдений будут определены с большей точностью по сравнению с настоящим прогнозированием.

Астероид (367943) Дуэнде (2012 DA₁₄). Астероид в прошлом до 2013 г. принадлежал группе Аполлона [22]. После тесного сближения с Землей 15 февраля 2013 г. он стал членом группы Атона. Находясь вблизи афелия, астероид может тесно сближаться с Землей в будущем. Его диаметр около 42 м, элементы орбит найдены с учетом 1007 наблюдений.

Табл. 4 содержит элементы орбит Дуэнде, полученные с помощью наблюдений и численного интегрирования уравнений (1) и (2) на интервале времени с 5 августа 2019 г. по 13 ноября 2019 г. В первой строке табл. 4 представлены элементы орбит, полученные из наблюдений, в последующих строках — полученные интегрированием уравнений (1) и (2).

Из сравнения элементов орбит, представленных в табл. 4, следует, что элементы орбит астероида, полученные с помощью численного интегрирования различными методами, вполне удовлетворительно согласуются с орбитальными элементами, найденными на основании наблюдений. На момент 13 ноября 2019 г. разности между результатами наблюдений и данными, вычисленными с помощью решения уравнений (1), следующие: $\Delta M = 0.000008^\circ$, $\Delta a = 0$ а.е., $\Delta e = 0$, $\Delta \omega = -0.000018^\circ$, $\Delta \Omega = 0^\circ$, $\Delta i = 0^\circ$.

В табл. 5 представлены элементы орбит Дуэнде, найденные с использованием решений уравнений (1) и (2) с начальными данными, взятыми на эпоху 5 августа 2019 г. (первый блок) и 13 ноября 2019 г. (второй блок).

Согласно данным табл. 5, элементы орбит Дуэнде вблизи момента сближения 18 апреля 2013 г., найденные с использованием решений уравнений (1) и (2) с начальными данными на эпоху 5 августа 2019 г. и 13 ноября 2019 г., практически совпадают. Показано, что в момент сближения предельная относительная погрешность разности координат Земли и астероида многократно превосходит предельную относительную погрешность координат астероида: $\delta X / \delta X_A \approx 7377$, $\delta Y / \delta Y_A \approx 44857$, $\delta Z / \delta Z_A \approx 19668$.

Табл. 5 содержит элементы орбит астероида до и после его сближения с Землей. После их тесного сближения различия элементов орбит астероида, найденные с использованием решений по уравнениям (1) и (2) на дату 8 января 2013 г., отличаются друг от друга существенно. Отличия элементов орбит, найденных с использованием уравнений (1) с начальными данными на

Таблица 4

Элементы орбит Дуэнде, полученные решением уравнений движения (1) и (2)
[Duende's orbital elements calculated by the motion equations (1) and (2)]

Current date Initial date	Data sources (calculated by)	M (in degrees)	a (in au)	e	ω (in degrees)	Ω (in degrees)	i (in degrees)
2019 11 13	observations	74.709248	0.91036549	0.08936581	195.507297	146.944755	11.607740
2019 08 05	by the Eq. (1)	74.709240	0.91036549	0.08936580	195.507308	146.944755	11.607740
	by the Eq. (2)	74.709247	0.91036549	0.08936580	195.507298	146.944755	11.607740

Таблица 5

Элементы орбит Дуэнде, полученные по различным начальным данным
[Duende's orbital elements calculated from different initial data]

Current date	Data sources (calculated by)	M (in degrees)	a (in au)	e	ω (in degrees)	Ω (in degrees)	i (in degrees)
Initial date — August 5, 2019							
1900 03 22	by the Eq. (1)	162.2988	1.0228855	0.1117962	277.4281	149.0732	10.0440
JD 2415100.5	by the Eq. (2)	336.9756	0.9840126	0.1053103	262.8024	148.9084	10.4523
1979 01 27	by the Eq. (1)	204.7295	1.0093180	0.1116128	273.0079	148.1818	10.2243
JD 2443900.5	by the Eq. (2)	172.2459	1.0073312	0.1123408	274.1891	148.2698	10.2096
2013 01 08	by the Eq. (1)	38.3992	1.0017544	0.1084522	270.9329	147.2452	10.3312
JD 2456300.5	by the Eq. (2)	38.2685	1.0020331	0.1081971	271.1125	147.2451	10.3392
2013 04 18	by the Eq. (1)	231.0973	0.9103249	0.0893984	195.5350	146.9958	11.6077
JD 2456400.5	by the Eq. (2)	231.0975	0.9103249	0.0893984	195.5348	146.9958	11.6077
2019 08 05	by the Eq. (1)	321.196373	0.91036338	0.08935289	195.553046	146.950882	11.608706
JD 2458700.5	by the Eq. (2)	321.196373	0.91036338	0.08935289	195.553046	146.950882	11.608706
2029 03 05	by the Eq. (1)	333.0554	0.9105411	0.0892248	195.7011	146.8704	11.6111
JD 2462200.5	by the Eq. (2)	333.0551	0.9105411	0.0892248	195.7012	146.8704	11.6111
2075 03 04	by the Eq. (1)	266.8389	0.9128199	0.0867882	196.7834	146.3949	11.6314
JD 2479000	by the Eq. (2)	266.8446	0.9128197	0.0867882	196.7841	146.3950	11.6314
2100 02 01	by the Eq. (1)	344.8062	0.9269469	0.0708289	200.3959	146.0308	11.7001
JD 2488100.5	by the Eq. (2)	342.5807	0.9271769	0.0705351	200.4170	146.0329	11.7011

Окончание табл. 5 [End of the Table 5]

Current date	Data sources (calculated by)	M (in degrees)	a (in au)	e	ω (in degrees)	Ω (in degrees)	i (in degrees)
Initial date — November 13, 2019							
1900 03 22	by the Eq. (1)	331.0415	1.0118908	0.1125797	273.4893	148.9899	10.1931
JD 2415100.5	by the Eq. (2)	294.2665	1.0206520	0.1110296	280.9070	148.9649	10.2859
1979 01 27	by the Eq. (1)	203.2924	1.0092187	0.1117550	273.0543	148.1848	10.2199
JD 2443900.5	by the Eq. (2)	175.2188	1.0074368	0.1124126	274.1113	148.2408	10.2065
2013 01 08	by the Eq. (1)	38.3880	1.0017781	0.1084243	270.9490	147.2452	10.3321
JD 2456300.5	by the Eq. (2)	38.2997	1.0019662	0.1082419	271.0715	147.2451	10.3378
2013 04 18	by the Eq. (1)	231.0973	0.9103249	0.0893984	195.5350	146.9958	11.6077
JD 2456400.5	by the Eq. (2)	231.0975	0.9103249	0.0893984	195.5349	146.9958	11.6077
2019 11 13	by the Eq. (1)	74.709248	0.91036549	0.08936581	195.507297	146.944755	11.607740
JD 2458800.5	by the Eq. (2)	74.709248	0.91036549	0.08936581	195.507297	146.944755	11.607740
2029 03 05	by the Eq. (1)	333.0554	0.9105411	0.0892248	195.7011	146.8704	11.6111
JD 2462200.5	by the Eq. (2)	333.0552	0.9105411	0.0892248	195.7012	146.8704	11.6111
2075 03 04	by the Eq. (1)	266.8400	0.9128199	0.0867882	196.3874	146.3949	11.6314
JD 2479000	by the Eq. (2)	266.8433	0.9128198	0.0867882	196.7841	146.3950	11.6314
2100 02 01	by the Eq. (1)	344.4539	0.9269831	0.0707824	200.3984	146.0312	11.7002
JD 2488100.5	by the Eq. (2)	343.0403	0.9271291	0.0705961	200.4124	146.0325	11.7009

моменты 5 августа 2019 г. и 13 ноября 2019 г., следующие:

$$\Delta M = 0.0112^\circ, \quad \Delta a = -0.0000237 \text{ а.е.}, \quad \Delta e = -0.0000279, \\ \Delta \omega = -0.0167^\circ, \quad \Delta \Omega = 0^\circ, \quad \Delta i = 0^\circ.$$

Подобные различия элементов орбит, найденных с использованием уравнений (2), также велики:

$$\Delta M = 0.0312^\circ, \quad \Delta a = 0.0000669 \text{ а.е.}, \quad \Delta e = -0.0000448, \\ \Delta \omega = -0.0410^\circ, \quad \Delta \Omega = 0^\circ, \quad \Delta i = 0.0014^\circ.$$

Полученные разности элементов орбит указывают на значительные расхождения элементов орбит в результате тесного сближения астероида с Землей. При этом большая полуось a и эксцентриситет e орбиты астероида сохраняют четыре верных знака, а угловые элементы — один знак после запятой.

Сравнение элементов орбит астероида на концах интегрирования, полученных с использованием решений уравнений (1) и (2), указывает на значительные различия элементов орбит.

На момент 22 марта 1900 г. отклонения в средней аномалии M достигают сотен градусов, в аргументе перигелия ω — десятков градусов, а в большой полуоси a и эксцентриситете e расхождения также значительные — 0.039 а.е. и 0.0067. На другом конце интервала интегрирования 1 февраля 2100 г. различие элементов орбит, вычисленных с использованием решений уравнений (1) и (2), менее значительное по сравнению с предыдущими значениями.

Из сравнения элементов орбит Дуэнде, приведенных в табл. 5, следует, что при интегрировании с различными начальными данными на интервале времени с 18 апреля 2013 г. по 4 марта 2075 г. большие полуоси a и эксцентриситеты e совпадают до шести, а угловые элементы — до двух значащих цифр после запятой. При этом важно отметить, что подобное совпадение результатов вычислений не зависит от того, какие дифференциальные уравнения — (1) или (2) — используются для получения элементов орбит этого астероида.

В результате коррекции орбиты начальных данных астероида Дуэнде с использованием формул (3) средняя аномалия M увеличилась на 0.000075, аргумент перигелия ω уменьшился на 0.000075, а эксцентриситет e увеличился на 0.00000013, остальные элементы остались без изменения. Вследствие малых изменений начальных данных элементов орбит астероида коррекция существенно не влияет на результаты численного интегрирования.

Астероид 2012 UE₃₄. Астероид принадлежит группе Аполлона. Его диаметр около 63 м, количество наблюдений — 48.

В табл. 6 приведены элементы орбит астероида 2012 UE₃₄ на эпоху 13 ноября 2019 г., полученные путем решения уравнений движения (1) и (2), начальные данные взяты на эпоху 5 августа 2019 г. В первой строке табл. 6 находятся элементы орбит, полученные на основе наблюдений, в последующих строках — найденные с помощью интегрирования уравнений (1) и (2).

Из сравнения элементов орбит астероида 2012 UE₃₄, найденных с помощью наблюдений на эпоху 13 ноября 2019 г. и с использованием решения уравнений (1), следует, что разность между элементами орбит составляет: $\Delta M = -0.001956^\circ$, $\Delta a = 0.00000076$ а.е., $\Delta e = 0.00000041$, $\Delta \omega = -0.000258^\circ$, $\Delta \Omega = 0.000003^\circ$, $\Delta i = 0.000049^\circ$. Столь значительное расхождение элементов орбит, по-видимому, связано с малым количеством наблюдений, с помощью

Таблица 6

Элементы орбит астероида 2012 UE₃₄, полученные решением уравнений движения (1) и (2)
 [Orbital elements of asteroid 2012 UE₃₄ calculated by the motion equations (1) and (2)]

Current date Initial date	Data sources (calculated by)	M (in degrees)	a (in au)	e	ω (in degrees)	Ω (in degrees)	i (in degrees)
2019 11 13	observations	200.756740	1.10525592	0.09926301	18.372284	198.474899	9.658314
2019 08 05	by the Eq. (1) by the Eq. (2)	200.758696 200.756694	1.10525516 1.10525516	0.09926260 0.09926260	18.372542 18.372544	198.474893 198.474892	9.658265 9.658265

Таблица 7

Элементы орбит астероида 2012 UE₃₄, полученные по различным начальным данным
 [Orbital elements of asteroid 2012 UE₃₄ calculated from different initial data]

Current date	Data sources (calculated by)	M (in degrees)	a (in au)	e	ω (in degrees)	Ω (in degrees)	i (in degrees)
Initial date — August 5, 2019							
1900 03 22	by the Eq. (1)	210.9873	1.1303638	0.1198196	17.6157	199.8203	9.3454
JD 24415100.5	by the Eq. (2)	206.1183	1.1266540	0.1170861	18.1807	199.8882	9.3743
1991 02 13	by the Eq. (1)	301.5303	1.1366802	0.1247145	17.7198	198.9093	9.3001
JD 2448300.5	by the Eq. (2)	301.5301	1.1368536	0.1247091	17.7194	198.9093	9.3002
1991 05 24	by the Eq. (1)	23.3741	1.1063198	0.0999897	18.2661	198.6802	9.6508
JD 2448400.5	by the Eq. (2)	23.3743	1.1063198	0.0999896	18.2659	198.6802	9.6508
2019 08 05	by the Eq. (1)	115.912364	1.1057793	0.0992948	18.392565	198.476118	9.658458
JD 2458700.5	by the Eq. (2)	115.912364	1.1057793	0.0992948	18.392565	198.476118	9.658458
2041 03 22	by the Eq. (1)	330.1970	1.1069045	0.1005231	18.6453	198.1965	9.6633
JD 2466400.5	by the Eq. (2)	330.1969	1.1069045	0.1005231	18.6454	198.1965	9.6633
2041 06 30	by the Eq. (1)	72.8574	1.1219000	0.1086517	355.0058	197.9322	9.8664
JD 2466400.5	by the Eq. (2)	72.8514	1.1219418	0.1086846	355.0081	197.9322	9.8660
2100 02 01	by the Eq. (1)	212.0540	1.1153689	0.1033083	355.3024	197.3397	9.9263
JD 2488100.5	by the Eq. (2)	201.2951	1.1144423	0.1025756	355.4725	197.2419	9.9310

Окончание табл. 7 [End of the Table 7]

Current date	Data sources (calculated by)	M (in degrees)	a (in au)	e	ω (in degrees)	Ω (in degrees)	i (in degrees)
Initial date — November 13, 2019							
1900 03 22	by the Eq. (1)	147.70643	1.1160869	0.1105149	22.0528	199.9363	9.3860
JD 2415100.5	by the Eq. (2)	175.9209	1.1194219	0.1124193	20.8269	199.9037	9.3885
1991 02 13	by the Eq. (1)	301.5133	1.1358656	0.1238800	17.6435	198.9070	9.3166
JD 2448300.5	by the Eq. (2)	301.5130	1.1358631	0.1238782	17.6436	198.9070	9.3166
1991 05 24	by the Eq. (1)	23.3790	1.1063200	0.0999896	18.2661	198.6802	9.6509
JD 2448400.5	by the Eq. (2)	23.3792	1.1063200	0.0999896	18.2658	198.6802	9.6509
2019 11 13	by the Eq. (1)	200.756740	1.10525592	0.09926301	18.372284	198.474899	9.658314
JD 2458800.5	by the Eq. (2)	200.756740	1.10525592	0.09926301	18.372284	198.474899	9.658314
2041 03 22	by the Eq. (1)	330.1933	1.1069042	0.1005226	18.6450	198.1966	9.6634
JD 2466400.5	by the Eq. (2)	330.1931	1.1069042	0.1005226	18.6452	198.1966	9.6634
2041 06 30	by the Eq. (1)	71.2048	1.1304986	0.1153238	356.0294	197.9337	9.7898
JD 2466400.5	by the Eq. (2)	71.2037	1.1305110	0.1153335	356.0292	197.9337	9.7897
2100 02 01	by the Eq. (1)	312.1139	1.1278948	0.1132990	356.7267	197.3405	9.8165
JD 2488100.5	by the Eq. (2)	312.0451	1.1279291	0.1133267	356.7264	197.3418	9.8162

которых определялись элементы орбит астероида 2012 UE₃₄ на моменты 5 августа 2019 г. и 13 ноября 2019 г.

В табл. 7 представлены элементы орбит астероида 2012 UE₃₄ на моменты времени вблизи сближения астероида с Землей и Луной, а также на концах интервала интегрирования 1900 г. и 2100 г., полученные с использованием решений уравнений (1) и (2).

В момент сближения астероида с Землей предельная относительная погрешность разности координат астероида 2012 UE₃₄ с Землей значительно превосходит предельную относительную погрешность координат астероида: $\delta_X/\delta X_A \approx 2980$, $\delta_Y/\delta Y_A \approx 1736$, $\delta_Z/\delta Z_A \approx 6080$, что непосредственно отражается на результатах численного интегрирования. Если до момента сближения астероида 2012 UE₃₄ с Землей элементы его орбит, найденные с использованием дифференциальных уравнений (1) и (2), практически совпадают, то после сближения они существенно различаются (см. табл. 7). Различие элементов орбит на момент 30.6.2041 достигает следующих значений: $\Delta M = -1.6526^\circ$, $\Delta a = 0.0085986$ а.е., $\Delta e = 0.0066721$, $\Delta \omega = 1.0236^\circ$, $\Delta \Omega = 0.0015^\circ$, $\Delta i = -0.0766^\circ$.

Из результатов сравнения следует, что большая полуось a и эксцентриситет e сохраняют совпадение до двух значащих цифр после запятой, расхождения средних аномалий M и аргументов перигелиев ω составляют свыше 1° . Полученные расхождения элементов орбит связаны как с наличием сближения астероида 2012 UE₃₄ с Землей, так и с точностью начальных данных на моменты 5 августа 2019 г. и 13 ноября 2019 г.

Дальнейшее улучшение точности прогнозирования движения астероида 2012 UE₃₄ возможно с увеличением точности начальных данных его элементов орбит.

Астероид 1999 AN₁₀. Астероид является членом группы Аполлона. Его диаметр составляет около 700 м, количество наблюдений — 165. Он относится к числу опасных астероидов в случае столкновения с Землей. Астероид 1999 AN₁₀ имеет умеренное сближение с Землей на расстоянии 0.00259 а.е. 7 августа 2017 г. Для астероида 1999 AN₁₀ элементы орбит, найденные на моменты 5 августа 2019 г. и 13 ноября 2019 г. с помощью наблюдений, на сайте NASA¹ отсутствуют, поэтому для оценки погрешности смещения начальных данных на эти моменты использовались данные, соответствующие эпохе 1 июля 2018 г. Элементы орбит астероида 1999 AN₁₀ на момент 1 июля 2018 г. имеют следующие значения: $M = 330.165037^\circ$, $a = 1.45869566$ а.е., $e = 0.56221500$, $\omega = 268.322903^\circ$, $\Omega = 314.389797^\circ$, $i = 38.931932^\circ$.

В табл. 8 приведены элементы орбит астероида 1999 AN₁₀ на момент 5 августа 2019 г., полученные путем решения уравнений движения (1) и (2). Начальные данные астероида брались на эпоху 1 июля 2018 г. В первой строке табл. 8 представлены начальные данные элементов орбит астероида 1999 AN₁₀ на эпоху 5 августа 2019 г., размещенные на сайте smallbodies.ru, во второй и третьей строках — элементы орбит, найденные с помощью решения уравнений движения (1) и (2).

Из сопоставления элементов орбит астероида 1999 AN₁₀, представленных в табл. 8, следует, что они различаются между собой незначительно, так как разность между соответствующими элементами находится в пределах погрешностей наблюдений.

¹<https://asteroid.lowell.edu/main/astorb>

Таблица 8

Элементы орбит астероида 1999 AN₁₀, полученные решением уравнений движения (1) и (2)
 [Orbital elements of asteroid 1999 AN₁₀ calculated by the motion equations (1) and (2)]

Current date Initial date	Data sources (calculated by)	M (in degrees)	a (in au)	e	ω (in degrees)	Ω (in degrees)	i (in degrees)
2019 08 05	observations	193.950022	1.45870900	0.56212000	268.330505	314.383261	39.930942
2018 07 01	by the Eq. (1)	193.950034	1.45870860	0.56212010	268.330498	314.383261	39.930942
	by the Eq. (2)	193.950022	1.45870867	0.56212010	268.330505	314.383261	39.930942

Таблица 9

Элементы орбит астероида 1999 AN₁₀, полученные по различным начальным данным
 [Orbital elements of asteroid 1999 AN₁₀ calculated from different initial data]

Current date	Data sources (calculated by)	M (in degrees)	a (in au)	e	ω (in degrees)	Ω (in degrees)	i (in degrees)
Initial date — July 1, 2018							
1900 03 22	by the Eq. (1)	230.3963	1.4547088	0.5616555	267.7807	315.2951	39.9666
JD 2415100.5	by the Eq. (2)	230.5500	1.4547165	0.5616536	267.7812	315.2951	39.9667
1946 06 29	by the Eq. (1)	8.1235	1.4533749	0.5615438	267.8509	314.9451	39.9688
JD 2433200.5	by the Eq. (2)	8.1209	1.4534137	0.5615467	267.8527	314.9450	39.9687
1946 10 07	by the Eq. (1)	64.0458	1.4577505	0.5620291	268.0734	314.9428	39.9480
JD 2432100.5	by the Eq. (2)	64.0439	1.4577505	0.5620291	268.0730	314.9428	39.9480
2018 07 01	by the Eq. (1)	330.165037	1.45869566	0.56221500	268.322903	314.389797	39.931932
JD 2458300.5	by the Eq. (2)	330.165037	1.45869566	0.56221500	268.322903	314.389797	39.931932
2027 07 14	by the Eq. (1)	16.5546	1.4586290	0.5620482	268.3269	314.3215	39.9320
JD 2461600.5	by the Eq. (2)	16.5545	1.4586289	0.5620482	268.3270	314.3215	39.9320
2027 10 22	by the Eq. (1)	73.3845	1.4482730	0.5603545	267.8858	314.3186	40.0090
JD 2461700.5	by the Eq. (2)	73.3853	1.4482631	0.5603529	267.8854	314.3187	40.0091
2100 02 01	by the Eq. (1)	244.5575	1.4481036	0.5605158	267.9977	313.7713	39.9979
JD 2488100.5	by the Eq. (2)	244.4425	1.4481178	0.5605133	267.9919	313.7712	39.9981

Окончание табл. 9 [End of the Table 9]

Current date	Data sources (calculated by)	M (in degrees)	a (in au)	e	ω (in degrees)	Ω (in degrees)	i (in degrees)
Initial date — August 5, 2019							
1900 03 22	by the Eq. (1)	231.9169	1.4548032	0.5616446	267.7910	315.2948	39.9674
JD 2415100.5	by the Eq. (2)	231.8607	1.4547992	0.5616450	267.7899	315.2948	39.9674
1946 06 29	by the Eq. (1)	8.1022	1.4536585	0.5615644	267.8664	314.9450	39.9681
JD 2433200.5	by the Eq. (2)	8.1003	1.4536814	0.5615661	267.8678	314.9450	39.9681
1946 10 07	by the Eq. (1)	64.0296	1.4577506	0.5620290	268.0728	314.9428	39.9480
JD 2432100.5	by the Eq. (2)	64.0281	1.4577507	0.5620290	268.0728	314.9428	39.9480
2019 08 05	by the Eq. (1)	193.950022	1.45870900	0.56212000	268.330505	314.383261	39.930942
JD 2458700.5	by the Eq. (2)	193.950022	1.45870900	0.56212000	268.330505	314.383261	39.930942
2027 07 14	by the Eq. (1)	16.5539	1.4586294	0.5620481	268.3269	314.3215	39.9320
JD 2461600.5	by the Eq. (2)	16.5539	1.4586292	0.5620481	268.3270	314.3215	39.9320
2027 10 22	by the Eq. (1)	73.3905	1.4481961	0.5603405	267.8827	314.3186	40.0097
JD 2461700.5	by the Eq. (2)	73.3903	1.4481987	0.5603412	267.8828	314.3186	40.0096
2100 02 01	by the Eq. (1)	247.3241	1.4466384	0.5601487	267.8496	313.7704	40.0171
JD 2488100.5	by the Eq. (2)	247.3926	1.4466092	0.5601593	267.8515	313.7704	40.0165

В табл. 9 представлены элементы орбит астероида 1999 AN₁₀, найденные с использованием решения уравнений движения (1) и (2) с начальными данными, отнесенными к эпохе 1 июля 2018 г. и 5 августа 2019 г. При этом календарной дате соответствуют элементы орбит, полученные с использованием решений уравнений (1), а юлианской дате — с помощью решения уравнений (2). Элементы орбит астероида 1999 AN₁₀ в табл. 9 представлены около моментов сближения с Землей, т. е. в 1946 г. и 2027 г., а также на концах интервала интегрирования — в 1900 г. и 2100 г.

Из сравнения элементов орбит астероида 1999 AN₁₀, приведенных в табл. 9, следует, что различие элементов в большей степени зависит от эпохи, на которую выбираются начальные данные, чем от метода численного интегрирования. При использовании уравнений движения (1) и (2), где начальные данные взяты на одну и ту же эпоху, расхождение элементов орбит менее значительное, чем при выборе начальных данных на различные моменты (см. табл. 9). На интервале времени с 7 октября 1946 г. по 4 июля 2017 г. элементы орбит, полученные с помощью решения уравнений (1) и (2), практически совпадают. На левом конце интервала интегрирования 22 марта 1900 г. различие элементов орбит астероида 1999 AN₁₀ несколько меньше, чем на правом конце 1 февраля 2100 г., что находится в прямой зависимости от величины сближения астероида с Землей. Потеря точности численного интегрирования происходит в основном на участках сближения астероида с Землей на интервалах времени с 29 июня 1946 г. по 7 октября 1946 г. и с 4 июля 2027 г. по 22 октября 2017 г. В результате сближения астероида с Землей относительная погрешность величины разности координат астероида и Земли примерно в $\delta_X/\delta_{X_A} \approx 637$, $\delta_Y/\delta_{Y_A} \approx 1291$, $\delta_Z/\delta_{Z_A} \approx 699$ раз превышает предельную относительную погрешность координат астероида, что непосредственно отражается на результатах численного интегрирования. Как видно из табл. 9, разность между элементами орбит на момент 22 октября 2027 г. следующая: $\Delta M = 0.0060^\circ$, $\Delta a = 0.0000769$ а.е., $\Delta e = 0.000014$, $\Delta \omega = -0.0031^\circ$, $\Delta \Omega = 0^\circ$, $\Delta i = 0.0007^\circ$.

В результате на концах этих интервалов потеря точности в большой полуоси и эксцентриситете составляет два порядка от начальной точности (см. табл. 8 и 9).

Астероид 2001 WN₅. Астероид принадлежит группе Аполлона. Его примерный диаметр составляет 610 м, количество наблюдений — 544. Тесные сближения с большими планетами астероида 2001 WN₅ не обнаружены, однако 26 июля 2028 г. он пройдет от Земли на расстоянии 0.00166 а.е.

В табл. 10 приведены элементы орбит астероида 2001 WN₅, полученные путем решения уравнений движения (1) и (2), где начальные данные взяты на эпоху 1 июля 2018 г. По разности элементов орбит в табл. 10 можно определить погрешность начального смещения для каждого метода решения. Так, например, разности элементов орбит, полученных с помощью решения уравнений (1), и орбитой, полученной с помощью наблюдений, на момент 5 августа 2019 г. составляют следующие величины: $\Delta M = 0.000017^\circ$, $\Delta a = -0.00000012$ а.е., $\Delta e = 0.00000016$, $\Delta \omega = -0.000094^\circ$, $\Delta \Omega = 0.000094^\circ$, $\Delta i = 0^\circ$.

В табл. 11 представлены элементы орбит астероида 2001 WN₅, найденные с использованием решения уравнений (1) и (2).

Таблица 10

Элементы орбит астероида 2001 WN₅, полученные решением уравнений движения (1) и (2)
 [Orbital elements of asteroid 2001 WN₅ calculated by the motion equations (1) and (2)]

Current date Initial date	Data sources (calculated by)	M (in degrees)	a (in au)	e	ω (in degrees)	Ω (in degrees)	i (in degrees)
2019 08 05	observations by the Eq. (1)	354.331175	1.71226200	0.46717200	44.526790	277.502911	1.920025
2018 07 01	by the Eq. (2)	354.331192	1.71226188	0.46717216	44.526696	277.503006	1.920025
		354.331193	1.71226175	0.46717215	44.526700	277.503006	1.920025

Таблица 11

Элементы орбит астероида 2001 WN₅, полученные по различным начальным данным
 [Orbital elements of asteroid 2001 WN₅ calculated from different initial data]

Current date	Data sources (calculated by)	M (in degrees)	a (in au)	e	ω (in degrees)	Ω (in degrees)	i (in degrees)
Initial date — July 1, 2018							
1900 03 22	by the Eq. (1)	234.0925	1.7096245	0.4664074	40.9102	280.5116	1.9493
JD 2415100.5	by the Eq. (2)	234.0922	1.7096243	0.4664074	40.9098	280.5116	1.9493
1979 01 27	by the Eq. (1)	318.5067	1.7118063	0.4675718	43.5168	278.2692	1.9298
JD 2443900.5	by the Eq. (2)	318.5068	1.7118063	0.4675718	43.5167	278.2692	1.9298
2018 07 01	by the Eq. (1)	178.265600	1.71171424	0.46705841	44.550160	277.509563	1.920008
JD 2458300.5	by the Eq. (2)	178.265600	1.71171424	0.46705841	44.550160	277.509563	1.920008
2028 05 09	by the Eq. (1)	322.4042	1.7120438	0.4669588	44.8912	277.2136	1.9172
JD 2461900.5	by the Eq. (2)	322.4042	1.7120437	0.4669588	44.8912	277.2136	1.9172
2028 08 17	by the Eq. (1)	6.2353	1.6835907	0.4597311	46.3609	276.6918	2.3957
JD 2462000.5	by the Eq. (2)	6.2352	1.6835804	0.4597289	46.3613	276.6919	2.3956
2100 02 01	by the Eq. (1)	265.6257	1.6827648	0.4595992	47.9946	275.2588	2.3860
JD 2488100.5	by the Eq. (2)	265.4845	1.6827846	0.4596081	47.9774	274.2758	2.3855

Окончание табл. 11 [End of the Table 11]

Current date	Data sources (calculated by)	M (in degrees)	a (in au)	e	ω (in degrees)	Ω (in degrees)	i (in degrees)
Initial date — August 5, 2019							
1900 03 22	by the Eqs. (1)	234.0954	1.7096253	0.4663944	40.9138	280.5117	1.9493
JD 2415100.5	by the Eqs. (2)	234.0977	1.7096256	0.4664076	40.9094	280.5119	1.9493
1979 01 27	by the Eqs. (1)	318.5071	1.7118061	0.4675715	43.5169	278.2691	1.9298
JD 2443900.5	by the Eqs. (2)	318.5074	1.7118059	0.4675715	43.5168	278.2692	1.9298
2019 08 05	by the Eqs. (1)	354.331175	1.71226200	0.46717200	44.526790	277.502911	1.920025
JD 2458700.5	by the Eqs. (2)	354.331175	1.71226200	0.46717200	44.526790	277.502911	1.920025
2028 05 09	by the Eqs. (1)	322.4040	1.7120438	0.4669586	44.8913	277.2135	1.9172
JD 2461900.5	by the Eqs. (2)	322.4039	1.7120439	0.4669586	44.8913	277.2135	1.9172
2028 08 17	by the Eqs. (1)	6.2360	1.6836639	0.4597467	46.3582	276.6908	2.3970
JD 2462000.5	by the Eqs. (2)	6.2366	1.6837321	0.4597615	46.3556	276.6899	2.3982
2100 02 01	by the Eqs. (1)	244.6168	1.6826817	0.4595428	48.2220	275.0543	2.3896
JD 2488100.5	by the Eqs. (2)	242.8628	1.6937600	0.4622248	47.9212	274.9574	2.3826

Как видно из табл. 11, на интервале времени с 22 марта 1900 г. по 9 мая 2028 г. элементы орбит астероида 2001 WN₅, найденные с использованием различных методов, практически совпадают. В результате сближения астероида 2001 WN₅ с Землей 26 июня 2028 г. (см. табл. 1) относительная погрешность разности координат астероида и Земли примерно в $\delta_X/\delta_{X_A} \approx 227$, $\delta_Y/\delta_{Y_A} \approx 3998$, $\delta_Z/\delta_{Z_A} \approx 574$ раза превысит предельную относительную погрешность самих координат астероида. В результате сближения астероида 2001 WN₅ с Землей разность между соответствующими элементами орбит на момент 26 июня 2028 г. (см. табл. 11) достигает следующих значений: $\Delta M = 0.0007^\circ$, $\Delta a = 0.0000732$ а.е., $\Delta e = 0.0000156$, $\Delta \omega = -0.0027^\circ$, $\Delta \Omega = 0.0010^\circ$, $\Delta i = 0.0022^\circ$. Из сравнения элементов орбит следует, что большая полуось a и эксцентриситет e сохраняют совпадение до четырех, а расхождения средних аномалий M и аргументов перигелиев ω — до двух значащих цифр после запятой.

Повышение точности численного интегрирования уравнений движения астероида 2001 WN₅, как и в предыдущих случаях, связано с улучшением точности начальных данных его элементов орбит.

Заключение. На основании проведенных исследований можно сделать следующие выводы:

- а) учет коррекции начальных данных оказал на эволюцию орбит исследуемых астероидов несущественное влияние;
- б) наибольшая потеря точности численного интегрирования уравнений движения (1) и (2) происходит на участках сближения астероида с Землей, при этом точность результатов интегрирования находится в прямой зависимости от величины сближения;
- в) для исследуемых астероидов при сближении их с Землей относительная погрешность разности координат астероида и Земли превышает предельную относительную погрешность самих координат астероида на несколько порядков (от 227 до 44 900 раз);
- г) при отсутствии сближения астероида с Землей на расстояние менее 0.1 а.е. решение уравнений (1) и (2) приводит практически к одинаковым результатам;
- д) результаты исследований можно обобщить на все астероиды групп Аполлона и Атона.

Конкурирующие интересы. Заявляем, что в отношении авторства и публикации этой статьи конфликта интересов не имеем.

Авторский вклад и ответственность. Все авторы принимали участие в разработке концепции статьи и в написании рукописи. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Исследование выполнялось без финансирования.

Библиографический список

1. *Астероидно-кометная опасность: вчера, сегодня, завтра* / ред. Б. М. Шустов, Л. В. Рыхлова. М.: Физматлит, 2010. 384 с.
2. Krasinsky G. A., Pitjeva E. V., Vasilyev M. V., Yagudina E. I. Hidden mass in the asteroid belt // *Icarus*, 2002. vol. 158, no. 1. pp. 98–105. <https://doi.org/10.1006/icar.2002.6837>.
3. Адушкин В. В., Басиев Э. У., Зыков Ю. Н. и др. *Катастрофические воздействия космических тел*. М.: Академкнига, 2005. 310 с.

4. Чебогарев Г. А. *Аналитические и численные методы небесной механики*. М., Л.: Наука, 1965. 368 с.
5. Субботин М. Ф. *Введение в теоретическую астрономию*. М.: Наука, 1968. 800 с.
6. Брумберг В. А. *Релятивистская небесная механика*. М.: Наука, 1972. 384 с.
7. Заусаев А. Ф. Исследование движения планет, Луны и Солнца, основанное на новом принципе взаимодействия // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2014. № 3(36). С. 118–131. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1304>.
8. Заусаев А. Ф., Романюк М. А. Сравнение различных математических моделей на примере решения уравнений движения больших планет и Луны // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2019. Т. 23, № 1. С. 152–185. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1663>.
9. Standish E. M. *JPL Planetary and Lunar Ephemerides: DE405/LE405*. Interoffice memorandum: JPL IOM 312. F-98-048, 1998, August 26. 18 pp. <ftp://ssd.jpl.nasa.gov/pub/eph/planets/ioms/de405.iom.pdf>.
10. Заусаев А. Ф., Заусаев А. А. *Математическое моделирование орбитальной эволюции малых тел Солнечной системы*. М.: Машиностроение-1, 2008. 250 с.
11. Заусаев А. Ф., Романюк М. А. *Численные методы в задачах математического моделирования движения небесных тел в Солнечной системе*. Самара: СамГТУ, 2017. 265 с.
12. Newhall X. X., Standish E. M., Williams J. G. DE 102: A numerically integrated ephemeris of the Moon and planets spanning forty-four centuries // *Astron. Astrophys.*, 1983. vol. 125, no. 1. pp. 150–167.
13. Заусаев А. Ф., Абрамов В. В., Денисов С. С. *Каталог орбитальной эволюции астероидов, сближающихся с Землей с 1800 по 2204 гг.* М.: Машиностроение, 2007. 608 с.
14. Everhart E. Implicit single-sequence methods for integrating orbits // *Celestial Mech.*, 1974. vol. 10, no. 1. pp. 35–55. <https://doi.org/10.1007/BF01261877>.
15. Бордовицина Т. В. *Современные численные методы в задачах небесной механики*. М.: Наука, 1984. 136 с.
16. Заусаев А. Ф., Заусаев А. А., Ольхин А. Г. Численное интегрирование уравнений движения больших планет (Меркурий–Плутон) и Луны с учетом радиолокационных наблюдений // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2004. № 26. С. 43–47. <https://doi.org/10.14498/vsgtu175>.
17. Соколов Л. Л., Башаков А. А., Питъев Н. П. Особенности движения астероида 99942 Апофис // *Астроном. вестн.*, 2008. Т. 42, № 1. С. 18–27.
18. Заусаев А. Ф., Деревянка А. Е. Сравнительный анализ математических моделей для оценки вероятности столкновения с Землей астероида Апофис // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2012. № 2(27). С. 192–195. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1058>.
19. Шор В. А., Кочетова О. М., Соколов Л. Л. Опасный астероид (99942) Апофис / *Астероидно-кометная опасность: вчера, сегодня, завтра*; ред. Б. М. Шустов, Л. В. Рыхлова. М.: Физматлит, 2010. С. 206–223.
20. Hamming R. W. *Numerical Methods for Scientists and Engineers*. New York, NY: Dover Publ., 1986. xii+721 pp.
21. Демидович Б. П., Марон И. А. *Основы вычислительной математики*. М.: Физматлит, 1963. 660 с.
22. Заусаев А. Ф., Деревянка А. Е., Денисов С. С. Исследование эволюции астероида 2012 DA14 // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2012. № 3(28). С. 211–214. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1082>.

MSC: 70F15, 70M20, 65L05

Mathematical modeling of the asteroids' motion belonging to the Apollo and Aten groups

© A. F. Zausaev, M. A. Romanyuk, A. A. Zausaev


Samara State Technical University,

244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russian Federation.

Abstract

This article evaluates the accuracy of solutions to differential equations of motion, taking into account relativistic effects obtained on the basis of a new principle of interaction, using the example of studies of the evolution of the orbits of five asteroids. A numerical integration of equations of the asteroids' motion with the initial data referred to different points in time is carried out. Based on a comparison of the results of the study, certain patterns are revealed. At time intervals in the absence of rapprochement of the asteroid with the Earth less than 0.1 au it is possible to apply with equal efficiency the differential equations given in the paper. The loss of accuracy of numerical integration is directly dependent on the magnitude of the rapprochement of the asteroid with the Earth. Due to the fact that in the right sides of the equations of motion we have differences of the coordinates of the asteroid and the planet, with sufficient proximity, the relative accuracy of the coordinates is many times greater than the relative accuracy of the difference. For the studied asteroids, when they approach the Earth, the relative error of the difference in the coordinates of the asteroid and the Earth is approximately 227 to 44900 times higher than the limiting relative error of the coordinates of the asteroid itself. Predicting the motion of Apophis after its close approach to the Earth based on the solution of the equations of motion by modern methods leads to large errors, the reduction of which is possible only by improving the initial data of the elements of the orbits of the asteroid. About the possibility of close approach of Apophis with the Earth on a time interval from April 14, 2029 to January 1, 2100 it can be argued with a certain degree of probability. The results of the research can be generalized to all asteroids of Apollo and Aten groups.

Research Article

 The content is published under the terms of the [Creative Commons Attribution 4.0 International License](http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Zausaev A. F., Romanyuk M. A., Zausaev A. A. Mathematical modeling of the asteroids' motion belonging to the Apollo and Aten groups, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2020, vol. 24, no. 4, pp. 692–717. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1779> (In Russian).

Authors' Details:

Anatoliy F. Zausaev  <https://orcid.org/0000-0002-5035-9615>

Dr. Phys. & Math. Sci.; Professor; Dept. of Applied Mathematics & Computer Science; e-mail: zausaev_af@mail.ru

Mariya A. Romanyuk  <https://orcid.org/0000-0003-0796-2061>

Cand. Tech. Sci.; Associate Professor; Dept. of Applied Mathematics & Computer Science; e-mail: zausmasha@mail.ru

Artem A. Zausaev  <https://orcid.org/0000-0002-5184-3943>

Cand. Phys. & Math. Sci.; Associate Professor; Dept. of Applied Mathematics & Computer Science; e-mail: zausaevaa@mail.ru

Keywords: numerical integration, differential motion equations, asteroids, (99942) Apofis, (367943) Duende, 2012 UE₃₄, 1999 AN₁₀, 2001 WN₅.

Received: 6th April, 2020 / Revised: 3rd November, 2020 /

Accepted: 16th November, 2020 / First online: 18th December, 2020

Competing interests. We declare that we have no conflicts of interest in the authorship and publication of this article.

Authors' contributions and responsibilities. Each author has participated in the article concept development and in the manuscript writing. The authors are absolutely responsible for submitting the final manuscript in print. Each author has approved the final version of manuscript.

Funding. This research received no specific grant from any funding agency in the public, commercial, or not-for-profit sectors.

References

1. *Asteroidno-kometnaia opasnost': vchera, segodnia, zavtra* [Asteroid-Comet Hazard: Yesterday, Today, and Tomorrow], ed. B. M. Shustov, L. V. Rykhlova. Moscow, Fizmatlit, 2010, 384 pp. (In Russian)
2. Krasinsky G. A., Pitjeva E. V., Vasilyev M. V., Yagudina E. I. Hidden mass in the asteroid belt, *Icarus*, 2002, vol. 158, no. 1, pp. 98–105. <https://doi.org/10.1006/icar.2002.6837>.
3. Adushkin V. V., Basiev E. U., Zykov Yu. N., et al. *Katastroficheskie vozdeistviia kosmicheskikh tel* [Catastrophic Impacts of Cosmic Bodies]. Moscow, Akademkniga, 2005, 310 pp. (In Russian)
4. Chebotarev G. A. *Analytical and Numerical Methods of Celestial Mechanics*, Modern Analytic and Computational Methods in Science and Mathematics, vol. 9, American Elsevier Publishing Co., Inc., 1967, xviii+331 pp.
5. Subbotin M. F. *Vvedenie v teoreticheskuiu astronomiiu* [Introduction to Theoretical Astronomy]. Moscow, Nauka, 1968, 800 pp. (In Russian)
6. Brumberg V. A. *Relativistskaia nebesnaia mekhanika* [Relativistic Celestial Mechanics]. Moscow, Nauka, 1972, 384 pp. (In Russian)
7. Zausaev A. F. The Investigation of the Motion of Planets, the Moon, and the Sun Based on a New Principle of Interaction, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2014, no. 3(36), pp. 118–131 (In Russian). <https://doi.org/10.14498/vsgtu1304>.
8. Zausaev A. F., Romanyuk M. A. Comparison of various mathematical models on the example of solving the equations of the movement of large planets and the Moon, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2019, vol. 23, no. 1, pp. 152–185 (In Russian). <https://doi.org/10.14498/vsgtu1663>.
9. Standish E. M. *JPL Planetary and Lunar Ephemerides*, DE405/LE405. Interoffice memorandum: JPL IOM 312. F-98-048, 1998, August 26, 18 pp. <ftp://ssd.jpl.nasa.gov/pub/eph/planets/ioms/de405.iom.pdf>.
10. Zausaev A. F., Zausaev A. A. *Matematicheskoe modelirovanie orbital'noi evoliutsii malykh tel Solnechnoi sistemy* [Mathematical Modelling of Orbital Evolution of Small Bodies of the Solar System]. Moscow, Mashinostroenie-1, 2008, 250 pp. (In Russian)
11. Zausaev A. F., Romanyuk M. A. *Chislennye metody v zadachakh matematicheskogo modelirovaniia dvizheniia nebesnykh tel v Solnechnoi sisteme* [Numerical Methods in the Problems of Mathematical Modeling of the Motion of Celestial Bodies in the Solar System]. Samara, Samara State Technical Univ., 2017, 265 pp. (In Russian)
12. Newhall X. X., Standish E. M., Williams J. G. DE 102: A numerically integrated ephemeris of the Moon and planets spanning forty-four centuries, *Astron. Astrophys.*, 1983, vol. 125, no. 1, pp. 150–167.

13. Zausaev A. F., Abramov V. V., Denisov S. S. *Katalog orbital'noi evoliutsii asteroidov, sblizhaiushchikhsia s Zemlei s 1800 po 2204 gg.* [Catalog of Orbital Evolution for Asteroid Approaching the Earth since 1800 until 2204]. Moscow, Mashinostroenie, 2007, 608 pp. (In Russian)
14. Everhart E. Implicit single-sequence methods for integrating orbits, *Celestial Mech.*, 1974, vol. 10, no. 1, pp. 35–55. <https://doi.org/10.1007/BF01261877>.
15. Bordovitsyna T. V. *Sovremennye chislennye metody v zadachakh nebesnoi mekhaniki* [Modern Numerical Methods in Celestial Mechanics Problems]. Moscow, Nauka, 1984, 136 pp. (In Russian)
16. Zausaev A. F., Zausaev A. A., Ol'khin A. G. The numerical integration of the equations of motion for large planets (Mercury and Pluto) and the Moon with the radar observations, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2004, no. 26, pp. 43–47 (In Russian). <https://doi.org/10.14498/vsgtu175>.
17. Sokolov L. L., Bashakov A. A., Pitjev N. P. Peculiarities of the motion of asteroid 99942 Apophis, *Sol. Syst. Res.*, 2008, vol. 42, no. 1, pp. 18–27. <https://doi.org/10.1134/S0038094608010036>.
18. Zausaev A. F., Derevyanka A. E. Comparative analysis of mathematical models for estimating the impact probability of asteroid Apophis, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2012, no. 2(27), pp. 192–196 (In Russian). <https://doi.org/10.14498/vsgtu1058>.
19. Shor V. A., Kochetova O. M., Sokolov L. L. Dangerous asteroid (99942) Apophis, In: *Asteroidno-kometnaia opasnost': vchera, segodnia, zavtra* [Asteroid-Comet Hazard: Yesterday, Today, and Tomorrow]; ed. B. M. Shustov, L. V. Rykhlova. Moscow, Fizmatlit, 2010, pp. 206–223 (In Russian).
20. Hamming R. W. *Numerical Methods for Scientists and Engineers*. New York, NY, Dover Publ., 1986, xii+721 pp.
21. Demidovich B. P., Maron I. A. *Computational Mathematics*. Moscow, Mir Publ., 1981, 688 pp.
22. Zausaev A. F., Denisov S. S., Derevyanka A. E. Research of the orbital evolution of asteroid 2012 DA14, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2012, no. 3(28), pp. 211–214 (In Russian). <https://doi.org/10.14498/vsgtu1082>.