Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2020. Т. 24, № 4. С. 718–751
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1785

УДК 517.927.4:519.624

Метод повышения порядка аппроксимации до произвольного натурального числа при численном интегрировании матричным методом краевых задач для неоднородных линейных обыкновенных дифференциальных уравнений различных степеней с переменными коэффициентами

© *В. Н. Маклаков*

Самарский государственный технический университет,
Россия, 443100, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

Аннотация

В работе использован известный матричный метод численного интегрирования краевых задач для неоднородных линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, который позволяет удерживать произвольное число членов разложения в ряд Тейлора искомого решения или, что то же самое, позволяет использовать многочлен Тейлора произвольной степени.

Разностная краевая задача, аппроксимирующая дифференциальную краевую задачу, разбита на две подзадачи: в первую подзадачу вошли разностные уравнения, при построении которых не были использованы граничные условия краевой задачи; во вторую подзадачу вошли разностные уравнения, при построении которых были использованы граничные условия задачи.

Исходя из ранее установленных фактов дан и апробирован метод повышения порядка аппроксимации на единицу второй подзадачи, а следовательно, и всей разностной краевой задачи в целом. Перечислим эти установленные факты:

а) порядок аппроксимации первой и второй подзадач пропорционален степени используемого многочлена Тейлора;
б) порядок аппроксимации первой подзадачи зависит от четности или нечетности степени используемого многочлена Тейлора. Оказалось, что при использовании степеней многочлена Тейлора, равных $2m-1$ и $2m$, порядки аппроксимации этих двух подзадач совпадают;
в) порядок аппроксимации второй подзадачи совпадает с порядком аппроксимации первой подзадачи, если во второй подзадаче отсутствуют заданные значения каких-либо производных, входящих в граничные условия;

Научная статья

Образец для цитирования

Маклаков В. Н. Метод повышения порядка аппроксимации до произвольного натурального числа при численном интегрировании матричным методом краевых задач для неоднородных линейных обыкновенных дифференциальных уравнений различных степеней с переменными коэффициентами // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2020. Т. 24, № 4. С. 718–751. https://doi.org/10.14498/vsgtu1785.

Сведения об авторе

Владимир Николаевич Маклаков https://orcid.org/0000-0003-1644-7424
кандидат физико-математических наук, доцент; доцент каф. прикладной математики и информатики; e-mail: makvo63@yandex.ru

г) наличие во второй подзадаче хотя бы одного значения производной той или иной степени, входящей в граничные условия, приводит к понижению порядка аппроксимации на единицу как второй подзадачи, так и всей разностной краевой задачи в целом.

Теоретические выводы подтверждены численными экспериментами.

Ключевые слова: обыкновенные дифференциальные уравнения, краевые задачи, порядок аппроксимации, численные методы, многочлены Тейлора.

Получение: 12 мая 2019 г. / Исправление: 17 сентября 2020 г. /

Принятие: 16 ноября 2020 г. / Публикация онлайн: 26 ноября 2020 г.

Введение. Известно, что использование конечных разностей приводит ко второму порядку аппроксимации (ПА) при численном интегрировании как краевых задач для неоднородных линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка (ОДУ2) [1–6], так и ряда краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных [4–10]. Последнее обусловлено тем, что при аппроксимации производных конечными разностями удерживалось всего три члена разложения в ряд Тейлора искомого решения задачи или, что то же самое, был использован многочлен Тейлора второй степени. В работе будет применяться предложенный в [11] метод, использующий средства матричного исчисления, численного интегрирования краевых задач для ОДУ2, который позволяет удерживать произвольное число членов разложения в ряд Тейлора искомого решения задачи, отказавшись при этом от аппроксимации производных конечными разностями.

1. Обозначения. Далее будем придерживаться принятых в [4] обозначений:

а) D — область интегрирования, ограниченная отрезком $[a, b]$, D_h — узлы сетки, определяемые значениями $t_i = t_0 + ih$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $t_0 = a$, $t_n = b$, $h = (b - a)/n$, $n + 1$ — число узлов сетки;

б) $x(t)$ — непрерывная функция, являющаяся точным решением краевой задачи;

в) $[x]_h$ — сеточная функция, совпадающая с точным решением в узлах сетки D_h;

г) $x^{(h)}$ — искомая сеточная функция.

Для краткости примем для любой функции обозначение $\varphi(t_i) = \varphi_i$, где t_i — узел сетки D_h.

В дальнейшем опустим индекс h в наименованиях сеточных функций $[x]_h$, $x^{(h)}$ и будем особо оговаривать случаи, в которых будет использоваться непрерывная функция $x(t)$, являющаяся точным решением, при сохранении обозначений $x(t_i) = x_i$ для нее в узлах сетки.

2. Некоторые предварительные результаты и постановка задачи. Метод повышения ПА от единицы до двух в случае использования конечных разностей при аппроксимации производных при численном интегрировании задачи Коши и краевой задачи для ОДУ2 известен и дан, например, в [4, 5], где показано, что если в граничных условиях (ГУ) задачи хотя бы в одной из границ области интегрирования D имеется заданное значение первой производной искомой функции, то разностная задача аппроксимирует дифференциальную задачу с первым порядком аппроксимации относительно h, причем этот первый порядок дает оценка невязки [4] разностного уравнения, которое содержит значение этой первой производной; тогда как оставшиеся уравнения разностной задачи имеют невязки, приводящие ко второму порядку аппроксимации. Отметим, что метод повышения ПА до произвольного натурального числа в задачах для ОДУ2 в [4, 5] не дан.

Исследуем следующую дифференциальную краевую задачу для неоднородного линейного ОДУ4 с переменными коэффициентами:

$$\begin{cases} u(t)x^{(4)}(t) + s(t)x'''(t) + r(t)x''(t) + \\ \qquad\qquad + p(t)x'(t) + q(t)x(t) = f(t), \quad t \in [a,b], \\ \alpha_0 x(a) + \beta_0 x'(a) + \gamma_0 x''(a) + \lambda_0 x'''(a) = \widetilde{z}_0, \\ x'(b) = \widetilde{x}'_n, \quad x''(b) = \widetilde{x}''_n, \quad x'''(b) = \widetilde{x}'''_n, \end{cases} \tag{1}$$

где $u(t)$, $s(t)$, $r(t)$, $p(t)$, $q(t)$, $f(t)$ — заданные функции, дифференцируемые нужное число раз; $x(t)$ — искомая функция, являющаяся точным решением задачи; α_0, β_0, γ_0, λ_0, $\widetilde{z}_0$, $\widetilde{x}'_n$, $\widetilde{x}''_n$, $\widetilde{x}'''_n$ — заданные числа. Отметим, что в задаче (1) все числа α_0, β_0, γ_0, λ_0 могут оказаться отличными от нуля одновременно; если все эти числа кроме одного обратятся в нуль, то будет получено одно из граничных условий в форме одного слагаемого вида: $x(a) = \widetilde{x}_0$, $x'(a) = \widetilde{x}'_0$, $x''(a) = \widetilde{x}''_0$, $x'''(a) = \widetilde{x}'''_0$.

Оценка ПА задачи (1) при численном интегрировании матричным методом при фиксированной степени k используемого многочлена Тейлора дана в [12], где рассматриваемая дифференциальная краевая задача аппроксимирована двумя разностными подзадачами (подсистемами), являющимися системами линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Первая подзадача составлена из разностных уравнений, в которые не входят заданные значения из ГУ дифференциальной задачи, вторая — в которые входят все заданные значения из ГУ.

Первую подзадачу запишем в компактной символической форме [4]:

$$L_h^k x = f_h^k \tag{2}$$

или в развернутой форме:

$$-\frac{b_{11}^{ki}}{b_{15}^{ki}}x_{i-2} - \frac{b_{12}^{ki}}{b_{15}^{ki}}x_{i-1} + \frac{x_i}{b_{15}^{ki}} - \frac{b_{13}^{ki}}{b_{15}^{ki}}x_{i+1} - \frac{b_{14}^{ki}}{b_{15}^{ki}}x_{i+2} = \\ = f_i + \sum_{m=6}^{k+1} \frac{b_{1m}^{ki}}{b_{15}^{ki}} f_i^{(m-5)}, \quad i = 2, 3, \ldots, n-2, \tag{3}$$

где i — номер центрального узла пятиточечного шаблона $t_{i-2}, t_{i-1}, t_i, t_{i+1}, t_{i+2}$.

Заметим, в [12] показано, что при вычислении ПА не важно, в которой из двух возможных границ сетки D_h записано то или иное ГУ. Вторую подзадачу запишем в компактной символической форме в виде

$$l_h^k x = g_h^k \tag{4}$$

или, с учетом замечания, в развернутой форме:

$$\begin{cases} -\dfrac{q_{12}^{k2}}{q_{15}^{k2}}x_1 + \dfrac{x_2}{q_{15}^{k2}} - \dfrac{q_{13}^{k2}}{q_{15}^{k2}}x_3 - \dfrac{q_{14}^{k2}}{q_{15}^{k2}}x_4 = f_2 + \sum\limits_{m=6}^{k+1} \dfrac{q_{1m}^{k2}}{q_{15}^{k2}} f_2^{(m-5)} + \dfrac{q_{11}^{k2}}{q_{15}^{k2}}\widetilde{z}_0, \\ -\dfrac{c_{12}^{k2}}{c_{15}^{k2}}x_1 + \dfrac{x_2}{c_{15}^{k2}} - \dfrac{c_{13}^{k2}}{c_{15}^{k2}}x_3 - \dfrac{c_{14}^{k2}}{c_{15}^{k2}}x_4 = f_2 + \sum\limits_{m=6}^{k+1} \dfrac{c_{1m}^{k2}}{c_{15}^{k2}} f_2^{(m-5)} + \dfrac{c_{11}^{k2}}{c_{15}^{k2}}\widetilde{x}_0', \\ -\dfrac{d_{12}^{k2}}{d_{15}^{k2}}x_1 + \dfrac{x_2}{d_{15}^{k2}} - \dfrac{d_{13}^{k2}}{d_{15}^{k2}}x_3 - \dfrac{d_{14}^{k2}}{d_{15}^{k2}}x_4 = f_2 + \sum\limits_{m=6}^{k+1} \dfrac{d_{1m}^{k2}}{d_{15}^{k2}} f_2^{(m-5)} + \dfrac{d_{11}^{k2}}{d_{15}^{k2}}\widetilde{x}_0'', \\ -\dfrac{e_{12}^{k2}}{e_{15}^{k2}}x_1 + \dfrac{x_2}{e_{15}^{k2}} - \dfrac{e_{13}^{k2}}{e_{15}^{k2}}x_3 - \dfrac{e_{14}^{k2}}{e_{15}^{k2}}x_4 = f_2 + \sum\limits_{m=6}^{k+1} \dfrac{e_{1m}^{k2}}{e_{15}^{k2}} f_2^{(m-5)} + \dfrac{e_{11}^{k2}}{e_{15}^{k2}}\widetilde{x}_0'''. \end{cases} \tag{5}$$

Здесь и ниже в соответствии с [12] матрицы и коэффициенты разностного уравнения, при построении которого не были использованы ГУ или было использовано ГУ в форме значений искомой непрерывной функции $x(t)$ в границе сетки D_h, обозначены как B^{ki} и b_{ml}^{ki} соответственно; было использовано ГУ в форме значений производной первой степени от искомой функции — как C^{ki} и c_{ml}^{ki} соответственно; было использовано ГУ в форме значений производной второй степени — как D^{ki} и d_{ml}^{ki} соответственно; было использовано ГУ в форме значений производной третьей степени — как E^{ki} и e_{ml}^{ki} соответственно; было использовано смешанное ГУ

$$\alpha_0 x(a) + \beta_0 x'(a) + \gamma_0 x''(a) + \lambda_0 x'''(a) = \widetilde{z}_0 \tag{6}$$

— как Q^{ki} и q_{ml}^{ki} соответственно. Указанные обозначения введены для внесения ясности в силу того, что во всех уравнениях СЛАУ (5) центральным узлом шаблона является узел t_2. Последнее приводит к совпадению номеров пар индексов в наименованиях ряда коэффициентов в уравнениях СЛАУ (5), вследствие чего зафиксировать отличия одного уравнения от другого оказалось возможным лишь различными наименованиями входящих в них коэффициентов. В обозначениях перечисленных матриц и их элементов первый верхний индекс, как и в [12–15], совпадает со степенью k используемого многочлена Тейлора, второй — с номером центрального узла пятиточечного шаблона, в котором матрица записана.

Методика построения указанных матриц и вычисления коэффициентов уравнений систем (3), (5) дана в [12] и будет проиллюстрирована ниже.

Первую и вторую подзадачи наряду с $L_h^k x = f_h^k$ и $l_h^k x = g_h^k$ будем ниже для краткости обозначать и как L_h^k и l_h^k.

Ранее в [12] установлено, что

а) ПА подзадач (2) и (4) пропорционален степени используемого многочлена Тейлора;

б) независимо от вида ГУ подзадача (2) имеет ПА, равный $k-2$ при четном k и равный $k-3$ при нечетном k; подзадача (4) имеет ПА, равный $k-3$ независимо от четности или нечетности k.

При четном $k = 2m$, $m > 2$, m — натуральное число, ПА задачи (2), (4) в соответствии с [4], равен $\min(k-2, k-3) = k-3$; при нечетном $k = 2m+1$ ПА также равен $\min(k-3, k-3) = k-3$. Если при четном $k = 2m$ удастся повысить ПА подзадачи (4) на единицу, то ПА всей задачи (2), (4) повысится до $\min(k-2, k-2) = k-2$ и совпадет с ПА этой же задачи при нечетном $k = 2m+1$; однако отметим: использование на практике такого нечетного k является нецелесообразным в силу того, что в этом случае значительно возрастет число $\frac{8}{3}(k+1)^3 - \frac{1}{2}(k+1)^2 - \frac{1}{6}(k+1) - 1$ требуемых арифметических операций при вычислении обратных матриц методом Гаусса [16].

Поставим целью разработку метода повышения ПА краевых задач для ОДУ различных порядков при численном интегрировании матричным методом, когда ГУ задачи содержат хотя бы одно смешанное граничное условие или граничное условие в форме производной той или иной степени больше нуля.

3. Метод повышения порядка аппроксимации разностной краевой задачи для ОДУ4. В работе [12] показано, что ПА подзадачи (4) определяется либо смешанным ГУ (6), либо граничными условиями, записанными в форме производной той или иной степени больше нуля при условии отсутствия смешанного ГУ в условиях дифференциальной краевой задачи. Любое граничное условие в форме одного слагаемого является частным случаем смешанного ГУ, поэтому метод повышения ПА разностной краевой задачи (2), (4), которая аппроксимирует дифференциальную краевую задачу (1), исследуем при четном значении $k = 4$ на примере смешанного ГУ (6), в котором нужно исключить следующий вариант входящих в него коэффициентов: $\alpha_0 = 1$, $\beta_0 = 0$, $\gamma_0 = 0$, $\lambda_0 = 0$; хотя, как будет показано ниже, исследование указанного варианта коэффициентов привело к ранее установленному в [12] факту.

В [12] показано, что разностное уравнение, при построении которого при фиксированном k использовано смешанное ГУ, дает оценку невязки, которая приводит к ПА второй подзадачи, равному $k-3$; откуда ПА подзадачи (4) при фиксированном четном $k = 4$ окажется равным единице. При четном $k = 4$ ПА первой подзадачи (2) окажется равным двум; всей задачи, в соответствии с [4] — единице. Попытаемся повысить ПА подзадачи (4) от единицы до двух на примере смешанного ГУ.

Вычислим производную по аргументу t от обеих частей ОДУ4 задачи (1), запишем итог в узле t_2:

$$q_2'[x_2] + (q_2 + p_2')[x_2'] + (p_2 + r_2')[x_2''] + \\ + (r_2 + s_2')[x_2'''] + (s_2 + u_2')[x_2^{(4)}] + u_2[x_2^{(5)}] = f_2' \quad (7)$$

и выразим $[x_2^{(5)}]$. Получим точное равенство

$$[x_2^{(5)}] = -\frac{q_2'}{u_2}[x_2] - \frac{q_2 + p_2'}{u_2}[x_2'] - \frac{p_2 + r_2'}{u_2}[x_2''] - \frac{r_2 + s_2'}{u_2}[x_2'''] - \frac{s_2 + u_2'}{u_2}[x_2^{(4)}] + \frac{f_2'}{u_2}$$

или, введя соответствующие обозначения,

$$[x_2^{(5)}] = -\widetilde{q}_2[x_2] - \widetilde{p}_2[x_2'] - \widetilde{r}_2[x_2''] - \widetilde{s}_2[x_2'''] - \widetilde{u}_2[x_2^{(4)}] + \widetilde{f}_2. \quad (8)$$

Имеем точные равенства, в которых старшая степень производной превосходит $k = 4$ на единицу:

$$[x_2] - 2h[x_2'] + 4\frac{h^2}{2!}[x_2''] - 8\frac{h^3}{3!}[x_2'''] + 16\frac{h^4}{4!}[x_2^{(4)}] - 32\frac{h^5}{5!}[x_2^{(5)}] = [x_0] - R_0^5, \quad (9)$$

$$[x_2'] - 2h[x_2''] + 4\frac{h^2}{2!}[x_2'''] - 8\frac{h^3}{3!}[x_2^{(4)}] + 16\frac{h^4}{4!}[x_2^{(5)}] = [x_0'] - R_0^4, \quad (10)$$

$$[x_2''] - 2h[x_2'''] + 4\frac{h^2}{2!}[x_2^{(4)}] - 8\frac{h^3}{3!}[x_2^{(5)}] = [x_0''] - R_0^3, \quad (11)$$

$$[x_2'''] - 2h[x_2^{(4)}] + 4\frac{h^2}{2!}[x_2^{(5)}] = [x_0'''] - R_0^2, \quad (12)$$

где, например, $R_0^2 = \frac{8h^3}{3!}x^{(6)}(\xi) = O(h^3)$, $\xi \in (t_0, t_2)$ — дополнительный член разложения в ряд Тейлора в форме Лагранжа [17].

Обе части равенства (9) умножим на α_0, равенства (10) — на β_0, равенства (11) — на γ_0, равенства (12) — на λ_0 и сложим; в итоге получим точное равенство:

$$\begin{gathered}
\alpha_0[x_2] + \Big(-2\alpha_0 h + \beta_0\Big)[x_2'] + \Big(4\frac{\alpha_0 h^2}{2!} - 2\beta_0 h + \gamma_0\Big)[x_2''] + \\
+ \Big(-8\frac{\alpha_0 h^3}{3!} + 4\frac{\beta_0 h^2}{2!} - 2\gamma_0 h + \lambda_0\Big)[x_2'''] - \\
- 2\Big(-8\frac{\alpha_0 h^4}{4!} + 4\frac{\beta_0 h^3}{3!} - 2\frac{\gamma_0 h^2}{2!} + \lambda_0 h\Big)[x_2^{(4)}] + \\
+ 4\Big(-8\frac{\alpha_0 h^5}{5!} + 4\frac{\beta_0 h^4}{4!} - 2\frac{\gamma_0 h^3}{3!} + \frac{\lambda_0 h^2}{2!}\Big)[x_2^{(5)}] = \\
= \alpha_0[x_0] + \beta_0[x_0'] + \gamma_0[x_0''] + \lambda_0[x_0'''] - \alpha_0 R_0^5 - \beta_0 R_0^4 - \gamma_0 R_0^3 - \lambda_0 R_0^2 = \\
= \widetilde{z}_0 - \alpha_0 R_0^5 - \beta_0 R_0^4 - \gamma_0 R_0^3 - \lambda_0 R_0^2
\end{gathered}$$

или, введя соответствующие обозначения,

$$\begin{gathered}
A_0[x_2] + A_1[x_2'] + A_2[x_2''] + A_3[x_2'''] + A_4[x_2^{(4)}] + A_5[x_2^{(5)}] = \\
= \widetilde{z}_0 - \alpha_0 R_0^5 - \beta_0 R_0^4 - \gamma_0 R_0^3 - \lambda_0 R_0^2,
\end{gathered}$$

где

$$A_0 = \alpha_0, \quad A_1 = -2\alpha_0 h + \beta_0, \quad A_2 = 4\frac{\alpha_0 h^2}{2!} - 2\beta_0 h + \gamma_0,$$

$$A_m = (-2)^{m-3}\Big(-8\frac{\alpha_0 h^m}{m!} + 4\frac{\beta_0 h^{m-1}}{(m-1)!} - 2\frac{\gamma_0 h^{m-2}}{(m-2)!} + \frac{\lambda_0 h^{m-3}}{(m-3)!}\Big), \quad m = 3, 4, 5.$$

При построении разностного уравнения, учитывающего смешанное ГУ (6), воспользуемся системой точных равенств, отличающейся от системы матричного метода в [12] при $k = 4$ тем, что старшая степень производной в многочленах Тейлора превосходит k на единицу:

$$
\begin{cases}
A_0[x_2] + A_1[x_2'] + A_2[x_2''] + A_3[x_2'''] + A_4[x_2^{(4)}] + A_5[x_2^{(5)}] = \\
\qquad\qquad = \widetilde{z}_0 - \alpha_0 R_0^5 - \beta_0 R_0^4 - \gamma_0 R_0^3 - \lambda_0 R_0^2, \\
[x_2] - h[x_2'] + \dfrac{h^2}{2!}[x_2''] - \dfrac{h^3}{3!}[x_2'''] + \dfrac{h^4}{4!}[x_2^{(4)}] - \dfrac{h^5}{5!}[x_2^{(5)}] = [x_1] - R_1^5, \\
[x_2] + h[x_2'] + \dfrac{h^2}{2!}[x_2''] + \dfrac{h^3}{3!}[x_2'''] + \dfrac{h^4}{4!}[x_2^{(4)}] + \dfrac{h^5}{5!}[x_2^{(5)}] = [x_3] - R_3^5, \\
[x_2] + 2h[x_2'] + 4\dfrac{h^2}{2!}[x_2''] + 8\dfrac{h^3}{3!}[x_2'''] + 16\dfrac{h^4}{4!}[x_2^{(4)}] + 32\dfrac{h^5}{5!}[x_2^{(5)}] = [x_4] - R_4^5, \\
q_2[x_2] + p_2[x_2'] + r_2[x_2''] + s_2[x_2'''] + u_2[x_2^{(4)}] = f_2.
\end{cases} \tag{13}
$$

Заметим, что эту систему можно трактовать как незамкнутую СЛАУ, состоящую из пяти уравнений с шестью неизвестными $[x_2]$, $[x_2']$, $[x_2'']$, $[x_2''']$, $[x_2^{(4)}]$, $[x_2^{(5)}]$.

Подстановка точного равенства (8) в систему (13) дает замкнутую СЛАУ

$$
\begin{cases}
(A_0 - \widetilde{q}_2 A_5)[x_2] + (A_1 - \widetilde{p}_2 A_5)[x_2'] + (A_2 - \widetilde{r}_2 A_5)[x_2''] + (A_3 - \widetilde{s}_2 A_5)[x_2'''] + \\
\qquad + (A_4 - \widetilde{u}_2 A_5)[x_2^{(4)}] = \widetilde{z}_0 - \alpha_0 R_0^5 - \beta_0 R_0^4 - \gamma_0 R_0^3 - \lambda_0 R_0^2 - \widetilde{f}_2 A_5, \\
\left(1 + \dfrac{\widetilde{q}_2 h^5}{5!}\right)[x_2] - \left(h - \dfrac{\widetilde{p}_2 h^5}{5!}\right)[x_2'] + \left(\dfrac{h^2}{2!} + \dfrac{\widetilde{r}_2 h^5}{5!}\right)[x_2''] - \\
\qquad - \left(\dfrac{h^3}{3!} - \dfrac{\widetilde{q}_2 h^5}{5!}\right)[x_2'''] + \left(\dfrac{h^4}{4!} + \dfrac{\widetilde{u}_2 h^5}{5!}\right)[x_2^{(4)}] = [x_1] - R_1^5 + \dfrac{\widetilde{f}_2 h^5}{5!}, \\
\left(1 - \dfrac{\widetilde{q}_2 h^5}{5!}\right)[x_2] + \left(h - \dfrac{\widetilde{p}_2 h^5}{5!}\right)[x_2'] + \left(\dfrac{h^2}{2!} - \dfrac{\widetilde{r}_2 h^5}{5!}\right)[x_2''] + \\
\qquad + \left(\dfrac{h^3}{3!} - \dfrac{\widetilde{q}_2 h^5}{5!}\right)[x_2'''] + \left(\dfrac{h^4}{4!} - \dfrac{\widetilde{u}_2 h^5}{5!}\right)[x_2^{(4)}] = [x_3] - R_3^5 - \dfrac{\widetilde{f}_2 h^5}{5!}, \\
\left(1 - 32\dfrac{\widetilde{q}_2 h^5}{5!}\right)[x_2] + \left(2h - 32\dfrac{\widetilde{p}_2 h^5}{5!}\right)[x_2'] + \left(4\dfrac{h^2}{2!} - 32\dfrac{\widetilde{r}_2 h^5}{5!}\right)[x_2''] + \\
\qquad + \left(8\dfrac{h^3}{3!} - 32\dfrac{\widetilde{q}_2 h^5}{5!}\right)[x_2'''] + \left(16\dfrac{h^4}{4!} - 32\dfrac{\widetilde{u}_2 h^5}{5!}\right)[x_2^{(4)}] = \\
\qquad\qquad = [x_4] - R_4^5 - 32\dfrac{\widetilde{f}_2 h^5}{5!}, \\
q_2[x_2] + p_2[x_2'] + r_2[x_2''] + s_2[x_2'''] + u_2[x_2^{(4)}] = f_2,
\end{cases} \tag{14}
$$

состоящую из пяти уравнений, но теперь уже с пятью неизвестными $[x_2]$, $[x_2']$, $[x_2'']$, $[x_2''']$, $[x_2^{(4)}]$.

Матрицу, элементы которой задаются коэффициентами при неизвестных в левой части СЛАУ (14), ниже, как в [12–15], будем называть локальной матрицей. В наименования локальных матриц будем вносить, если заранее известно, одно из перечисленных выше имен матриц, используемых при построении разностных уравнений; в частности, для системы (14) наименование локальной матрицы запишем как A_Q^{42}.

В [12, 15] показано, что при вычислении ПА необходимо знать значения алгебраических дополнений M_{1j}^{42}, $j = 1, 2, \ldots, 5$, элементов первой строки матрицы $(A^{42})^\top$ или, что то же самое, элементов первого столбца локальной матрицы A^{42} [18].

Отметим, что вычисление точных значений алгебраических дополнений M^{42}_{1j}, $j = 1, 2, \ldots, 5$, не является особо трудоемкой процедурой; тем не менее нет строгой необходимости в нахождении точных значений в силу того, что для вычисления ПА (здесь речь не идет о выполнении численных экспериментов) необходимы лишь главные части этих алгебраических дополнений в их разложениях по степеням h; поэтому допустим лишь для сокращения объема выкладок пренебрежение старшими степенями при нахождении алгебраических дополнений элементов первого столбца локальной матрицы A^{42}.

Выпишем отдельно и исследуем первое уравнение СЛАУ (14):

$$\begin{aligned}(A_0 - \widetilde{q}_2 A_5)[x_2] + (A_1 - \widetilde{p}_2 A_5)[x_2'] + (A_2 - \widetilde{r}_2 A_5)[x_2''] + (A_3 - \widetilde{s}_2 A_5)[x_2''']+\\ + (A_4 - \widetilde{u}_2 A_5)[x_2^{(4)}] = \widetilde{z}_0 - \alpha_0 R_0^5 - \beta_0 R_0^4 - \gamma_0 R_0^3 - \lambda_0 R_0^2 - \widetilde{f}_2 A_5. \quad (15)\end{aligned}$$

Пренебрегая старшими степенями и опуская постоянные сомножители, не зависящие от h (кроме сомножителей α_0, β_0, γ_0, λ_0), из системы точных равенств

$$\begin{cases} A_0 - \widetilde{q}_2 A_5 = \alpha_0 - 4\widetilde{q}_2\Big(\dfrac{\lambda_0 h^2}{2!} - 2\dfrac{\gamma_0 h^3}{3!} + 4\dfrac{\beta_0 h^4}{4!} - 8\dfrac{\alpha_0 h^5}{5!}\Big),\\ A_1 - \widetilde{p}_2 A_5 = \beta_0 - 2\alpha_0 h - 4\widetilde{p}_2\Big(\dfrac{\lambda_0 h^2}{2!} - 2\dfrac{\gamma_0 h^3}{3!} + 4\dfrac{\beta_0 h^4}{4!} - 8\dfrac{\alpha_0 h^5}{5!}\Big),\\ A_2 - \widetilde{r}_2 A_5 = \gamma_0 - 2\beta_0 h + 4\dfrac{\alpha_0 h^2}{2!} - 4\widetilde{r}_2\Big(\dfrac{\lambda_0 h^2}{2!} - 2\dfrac{\gamma_0 h^3}{3!} + 4\dfrac{\beta_0 h^4}{4!} - 8\dfrac{\alpha_0 h^5}{5!}\Big),\\ A_3 - \widetilde{s}_2 A_5 = \Big(\lambda_0 - 2\gamma_0 h + 4\dfrac{\beta_0 h^2}{2!} - 8\dfrac{\alpha_0 h^3}{3!}\Big) - \\ \qquad\qquad - 4\widetilde{s}_2\Big(\dfrac{\lambda_0 h^2}{2!} - 2\dfrac{\gamma_0 h^3}{3!} + 4\dfrac{\beta_0 h^4}{4!} - 8\dfrac{\alpha_0 h^5}{5!}\Big),\\ A_4 - \widetilde{u}_2 A_5 = -2\Big(\lambda_0 h - \gamma_0 h^2 + 4\dfrac{\beta_0 h^3}{3!} - 8\dfrac{\alpha_0 h^4}{4!}\Big) - \\ \qquad\qquad - 4\widetilde{u}_2\Big(\dfrac{\lambda_0 h^2}{2!} - 2\dfrac{\gamma_0 h^3}{3!} + 4\dfrac{\beta_0 h^4}{4!} - 8\dfrac{\alpha_0 h^5}{5!}\Big) \end{cases}$$

составим систему оценок в форме разложений по степеням h в обозначениях

$$\begin{cases} B_0 = A_0 - \widetilde{q}_2 A_5 \approx \alpha_0 + \lambda_0 h^2 + \gamma_0 h^3 + \beta_0 h^4,\\ B_1 = A_1 - \widetilde{p}_2 A_5 \approx \beta_0 + \alpha_0 h + \lambda_0 h^2 + \gamma_0 h^3,\\ B_2 = A_2 - \widetilde{r}_2 A_5 \approx \gamma_0 + \beta_0 h + \alpha_0 h^2 + \lambda_0 h^2,\\ B_3 = A_3 - \widetilde{s}_2 A_5 \approx \lambda_0 + \gamma_0 h + \beta_0 h^2 + \alpha_0 h^3,\\ B_4 = A_4 - \widetilde{u}_2 A_5 \approx \lambda_0 h + \gamma_0 h^2 + \beta_0 h^3 + \alpha_0 h^4, \end{cases} \qquad (16)$$

в каждой оценке которой среди пар слагаемых, имеющих в качестве сомножителей одно из чисел α_0, β_0, γ_0, λ_0, опущено слагаемое со старшей степенью.

Подставляя данные системы (16) в уравнение (15), окончательно найдем

$$\begin{aligned}B_0[x_2] + B_1[x_2'] + B_2[x_2''] + B_3[x_2'''] + B_4[x_2^{(4)}] =\\ = \widetilde{z}_0 - \alpha_0 R_0^5 - \beta_0 R_0^4 - \gamma_0 R_0^3 - \lambda_0 R_0^2 - \widetilde{f}_2 A_5. \quad (17)\end{aligned}$$

Тогда с учетом принятого выше допущения при вычислении алгебраических дополнений локальная матрица A_Q^{42} системы (14) примет вид

$$A_Q^{42} = \begin{bmatrix} B_0 & B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \\ 1 & -h & \dfrac{h^2}{2!} & -\dfrac{h^3}{3!} & \dfrac{h^4}{4!} \\ 1 & h & \dfrac{h^2}{2!} & \dfrac{h^3}{3!} & \dfrac{h^4}{4!} \\ 1 & 2h & 4\dfrac{h^2}{2!} & 8\dfrac{h^3}{3!} & 16\dfrac{h^4}{4!} \\ q_2 & p_2 & r_2 & s_2 & u_2 \end{bmatrix}. \tag{18}$$

Отметим, что элементы B_j, $j = 0, 1, \ldots, 4$, первой строки матрицы (18), несмотря на частичное пренебрежение старшими степенями при формировании системы оценок (16), еще не являются главными частями соответствующих разложений; сами же оценки главных частей этих элементов в зависимости от конкретных значений α_0, β_0, γ_0, λ_0 будут приведены ниже в табл. 1.

Систему (14) в обозначениях

$$[W^{42}] = \big[[x_2]\ [x_2']\ [x_2'']\ [x_2''']\ [x_2^{(4)}]\big]^\top, \tag{19}$$

$$[G^{42}] = \begin{bmatrix} \widetilde{z}_0 - \alpha_0 R_0^5 - \beta_0 R_0^4 - \gamma_0 R_0^3 - \lambda_0 R_0^2 - \widetilde{f}_2 A_5 \\ [x_1] - R_1^5 + \dfrac{\widetilde{f}_2 h^5}{5!} \\ [x_3] - R_3^5 - \dfrac{\widetilde{f}_2 h^5}{5!} \\ [x_4] - R_4^5 - 32\dfrac{\widetilde{f}_2 h^5}{5!} \\ f_2 \end{bmatrix} \tag{20}$$

в матричном виде запишем так:

$$A_Q^{42}[W^{42}] = [G^{42}]. \tag{21}$$

Допуская существование обратной матрицы $Q^{42} = (A_Q^{42})^{-1}$, из матричного равенства (21) найдем

$$[W^{42}] = Q^{42}[G^{42}]. \tag{22}$$

Выпишем первую строку матричного равенства (22), являющуюся разностным уравнением, при построении которого было использовано смешанное ГУ (6):

$$q_{11}^{42}\big(\widetilde{z}_0 - \alpha_0 R_0^5 - \beta_0 R_0^4 - \gamma_0 R_0^3 - \lambda_0 R_0^2 - \widetilde{f}_2 A_5\big) + q_{12}^{42}\Big([x_1] - R_1^5 + \frac{\widetilde{f}_2 h^5}{5!}\Big) + \\ + q_{13}^{42}\Big([x_3] - R_3^5 - \frac{\widetilde{f}_2 h^5}{5!}\Big) + q_{14}^{42}\Big([x_4] - R_4^5 - 32\frac{\widetilde{f}_2 h^5}{5!}\Big) + q_{15}^{42} f_2 = [x_2]$$

или

$$-\frac{q_{12}^{42}}{q_{15}^{42}}[x_1]+\frac{[x_2]}{q_{15}^{42}}-\frac{q_{13}^{42}}{q_{15}^{42}}[x_3]-\frac{q_{14}^{42}}{q_{15}^{42}}[x_4]=f_2+\frac{q_{11}^{42}}{q_{15}^{42}}\big(\widetilde{z}_0-\widetilde{f}_2A_5\big)+$$
$$+\frac{\widetilde{f}_2h^5}{q_{15}^{42}\,5!}\big(q_{12}^{42}-q_{13}^{42}-32q_{14}^{42}\big)-\frac{q_{11}^{42}(\alpha_0R_0^5+\beta_0R_0^4+\gamma_0R_0^3+\lambda_0R_0^2)}{q_{15}^{42}}-$$
$$-\frac{q_{12}^{42}R_1^5+q_{13}^{42}R_3^5+q_{14}^{42}R_4^5}{q_{15}^{42}}, \quad (23)$$

где в соответствии с [4, 12] две последние дроби есть величина невязки $\delta g_{hq}^4 = = \delta g_{hq_1}^4 + \delta g_{hq_2}^4$, в наименовании которой второй нижний индекс указывает на использование элементов матрицы Q^{42} при построении разностного уравнения (23).

При вычислении алгебраических дополнений в нижние индексы их обозначений будем вносить для ясности наименования используемых обратных матриц от локальных матриц A^{42}.

Вычислим алгебраические дополнения $M_{1j,Q}^{42}$, $j = 1, 2, \ldots, 5$, элементов первой строки матрицы $(A_Q^{42})^\top$.

Анализ матрицы (18) указывает на независимость значения $M_{11,Q}^{42}$ от чисел α_0, β_0, γ_0, λ_0, тогда как оставшиеся оценки алгебраических дополнений зависят от значений этих чисел [18]; действительно, пренебрегая старшими степенями, имеем

$$M_{11,Q}^{42}=-6h^6\Big(\frac{u_i}{3!}-\frac{2s_ih}{4!}+\frac{2r_ih^2}{3!4!}+\frac{2p_ih^3}{3!4!}\Big)\approx -h^6\Big(u_2-\frac{s_2h}{2}\Big)\approx -u_2h^6, \quad (24)$$

$$M_{12,Q}^{42}=-B_1\Big(\frac{u_2h^5}{3}-\frac{s_2h^6}{4}+\frac{r_2h^7}{3\cdot 3!}\Big)+B_2\Big(u_2h^4-\frac{7s_2h^5}{2\cdot 3!}+\frac{p_2h^7}{3\cdot 3!}\Big)-$$
$$-B_3\Big(u_2h^3-\frac{7r_2h^5}{2\cdot 3!}+\frac{p_2h^6}{4}\Big)+B_4\Big(s_2h^3-r_2h^4+\frac{p_2h^5}{3}\Big)\approx$$
$$\approx h^3\Big(s_2B_4-u_2B_3+u_2B_2h-\frac{u_2B_1h^2}{3}\Big), \quad (25)$$

$$M_{13,Q}^{42}=2\cdot 3!B_1\Big(\frac{u_2h^5}{2\cdot 3!}-\frac{s_2h^6}{2\cdot 4!}-\frac{2r_2h^7}{3!\cdot 4!}\Big)-$$
$$-2\cdot 3!B_2\Big(-\frac{u_2h^4}{2\cdot 3!}+\frac{s_2h^5}{16}-\frac{2p_2h^7}{3!\cdot 4!}\Big)+2\cdot 3!B_3\Big(-\frac{u_2h^3}{4}+\frac{r_2h^5}{16}+\frac{p_2h^6}{2\cdot 4!}\Big)-$$
$$-2\cdot 3!B_4\Big(-\frac{s_2h^3}{4}+\frac{r_2h^4}{2\cdot 3!}+\frac{p_2h^5}{2\cdot 3!}\Big)\approx$$
$$\approx h^3\big(3s_2B_4-3u_2B_3+u_2B_2h+u_2B_1h^2\big), \quad (26)$$

$$M^{42}_{14,Q} = -2B_1\Big(\frac{u_2h^5}{2\cdot 3!} - \frac{r_2h^7}{3!\cdot 4!}\Big) + 2B_2\Big(\frac{s_2h^5}{4!} - \frac{p_2h^7}{3!\cdot 4!}\Big) - \\ - 2B_3\Big(-\frac{u_2h^3}{2} + \frac{r_2h^5}{4!}\Big) + 2B_4\Big(-\frac{s_2h^3}{2} + \frac{p_2h^5}{2\cdot 3!}\Big) \approx \\ \approx h^3\Big(-s_2B_4 + u_2B_3 + \frac{s_2B_2h^2}{2\cdot 3!} - \frac{u_2B_1h^2}{3!}\Big), \quad (27)$$

$$M^{42}_{15,Q} = h^6\Big(B_4 - \frac{B_3h}{2} - \frac{B_2h^2}{2\cdot 3!} + \frac{B_1h^3}{2\cdot 3!}\Big). \quad (28)$$

Невязки

$$\delta g^4_{hq_1} = -\frac{q^{42}_{11}\left(\alpha_0R^5_0 + \beta_0R^4_0 + \gamma_0R^3_0 + \lambda_0R^2_0\right)}{q^{42}_{15}}, \quad (29)$$

$$\delta g^4_{hq_2} = -\frac{q^{42}_{12}R^5_1 + q^{42}_{13}R^5_3 + q^{42}_{14}R^5_4}{q^{42}_{15}} \quad (30)$$

исследуем отдельно.

Число комбинаций одновременно ненулевых коэффициентов α_0, β_0, γ_0, λ_0 смешанного ГУ определяется, очевидно, как $C^1_4 + C^2_4 + C^3_4 + C^4_4 = 15$, где C^m_n — число сочетаний из n по m. Главные части B_j, $j = 0, 1, \ldots, 4$, коэффициентов левой части равенства (17) в зависимости от значений α_0, β_0, γ_0, λ_0 приведены в табл. 1, где единица означает присутствие соответствующего коэффициента в смешанном ГУ, нуль — его отсутствие. Отметим, что четыре последние строки в табл. 1 соответствуют ГУ в форме одного слагаемого.

Опуская не зависящие от h постоянные сомножители и пренебрегая старшими степенями, соотношений (24)–(28) и данных табл. 1 можем записать следующие предварительные оценки:

$$M^{42}_{11,Q} \approx h^6, \quad M^{42}_{12,Q} + M^{42}_{13,Q} + M^{42}_{14,Q} \approx B_3h^3, \quad M^{42}_{15,Q} \approx B_4h^6, \quad \frac{B_3}{B_4} = h^{-1},$$

Таблица 1

Главные части коэффициентов левой части равенства (17)
[Principal parts of the coefficients on the left side of the equality (17)]

nos.	α_0	β_0	γ_0	λ_0	B_0	B_1	B_2	B_3	B_4
1	1	1	0	0	α_0	β_0	β_0h	β_0h^2	β_0h^3
2	1	0	1	0	α_0	α_0h	γ_0	γ_0h	γ_0h^2
3	1	0	0	1	α_0	α_0h	α_0h^2	λ_0	λ_0h
4	0	1	1	0	γ_0h^3	β_0	γ_0	γ_0h	γ_0h^2
5	0	1	0	1	λ_0h^2	β_0	β_0h	λ_0	λ_0h
6	0	0	1	1	λ_0h^2	λ_0h^2	γ_0	λ_0	λ_0h
7	1	1	1	0	α_0	β_0	γ_0	γ_0h	γ_0h^2
8	1	1	0	1	α_0	β_0	β_0h	λ_0	λ_0h
9	1	0	1	1	α_0	α_0h	γ_0	λ_0	λ_0h
10	0	1	1	1	λ_0h^2	β_0	γ_0	λ_0	λ_0h
11	1	1	1	1	α_0	β_0	γ_0	λ_0	λ_0h
12	1	0	0	0	α_0	α_0h	α_0h^2	α_0h^3	α_0h^4
13	0	1	0	0	β_0h^4	β_0	β_0h	β_0h^2	β_0h^3
14	0	0	1	0	γ_0h^3	γ_0h^3	γ_0	γ_0h	γ_0h^2
15	0	0	0	1	λ_0h^2	λ_0h^2	λ_0h^2	λ_0	λ_0h

на основании которых и очевидных равенств

$$\frac{q^{42}_{1j}}{q^{42}_{15}} = \frac{M^{42}_{1j,Q}}{M^{42}_{15,Q}}, \quad j = 1, 2, 3, 4,$$

из (29) получим

$$\delta g^4_{hq_1} = -\frac{q^{42}_{11}(\alpha_0 R^5_0 + \beta_0 R^4_0 + \gamma_0 R^3_0 + \lambda_0 R^2_0)}{q^{42}_{15}} = \\ = -\frac{M^{42}_{11,Q}(\alpha_0 R^5_0 + \beta_0 R^4_0 + \gamma_0 R^3_0 + \lambda_0 R^2_0)}{M^{42}_{15,Q}} \approx \\ \approx -\frac{h^6(\alpha_0 h^3 + \beta_0 h^2 + \gamma_0 h + \lambda_0)O(h^3)}{B_4 h^6} = \\ = -\frac{(\alpha_0 h^3 + \beta_0 h^2 + \gamma_0 h + \lambda_0)O(h^3)}{B_4}, \quad (31)$$

а из (30) —

$$\delta g^4_{hq_2} = -\frac{q^{42}_{12}R^5_1 + q^{42}_{13}R^5_3 + q^{42}_{14}R^5_4}{q^{42}_{15}} \approx \\ \approx -\frac{(M^{42}_{12,Q} + M^{42}_{13,Q} + M^{42}_{14,Q})O(h^6)}{M^{42}_{15,Q}} \approx \\ \approx -\frac{B_3 h^3 O(h^6)}{B_4 h^6} = -\frac{h^{-1}O(h^6)}{h^3} = O(h^2). \quad (32)$$

Оценка (31) для каждого набора коэффициентов α_0, β_0, γ_0, λ_0 требует дальнейшего уточнения результата с использованием данных табл. 1, тогда как оценка (32) дает окончательный результат.

Пусть $\lambda_0 \neq 0$. В этом случае, что следует из табл. 1, $B_4 = \lambda_0 h$, тогда, пренебрегая старшими степенями, из (31) получим оценку

$$\delta g^4_{hq_1} \approx -\frac{(\alpha_0 h^3 + \beta_0 h^2 + \gamma_0 h + \lambda_0)O(h^3)}{B_4} \approx -\frac{\lambda_0 O(h^3)}{\lambda_0 h} = O(h^2),$$

справедливую для всех строк табл. 1 с номерами 3, 5, 6, 8–11, 15.

Пусть $\lambda_0 = 0$, $\gamma_0 \neq 0$. В этом случае, что следует из табл.1, $B_4 = \gamma_0 h^2$, тогда, пренебрегая старшими степенями, из (31) получим оценку

$$\delta g^4_{hq_1} \approx -\frac{(\alpha_0 h^3 + \beta_0 h^2 + \gamma_0 h + \lambda_0)O(h^3)}{B_4} \approx -\frac{\gamma_0 h O(h^3)}{\gamma_0 h^2} = O(h^2),$$

справедливую для всех строк табл.1 с номерами 2, 4, 7, 14.

Пусть $\lambda_0 = 0$, $\gamma_0 = 0$, $\beta_0 \neq 0$. В этом случае, что следует из табл. 1, $B_4 = \beta_0 h^3$, тогда, пренебрегая старшими степенями, из (31) получим оценку

$$\delta g^4_{hq_1} \approx -\frac{(\alpha_0 h^3 + \beta_0 h^2 + \gamma_0 h + \lambda_0)O(h^3)}{B_4} \approx -\frac{\beta_0 h^2 O(h^3)}{\beta_0 h^3} = O(h^2),$$

справедливую для всех строк табл. 1 с номерами 1, 13.

Пусть $\lambda_0 = 0$, $\gamma_0 = 0$, $\beta_0 = 0$, $\alpha_0 \neq 0$. В этом случае, что следует из табл. 1, $B_4 = \alpha_0 h^4$, тогда, пренебрегая старшими степенями, из (31) получим оценку

$$\delta g^4_{hq_1} \approx -\frac{(\alpha_0 h^3 + \beta_0 h^2 + \gamma_0 h + \lambda_0) O(h^3)}{B_4} \approx -\frac{\alpha_0 h^3 O(h^3)}{\alpha_0 h^4} = O(h^2), \tag{33}$$

справедливую для двенадцатой строки табл. 1.

Следовательно, для любого смешанного ГУ оказалось

$$\delta g^4_{hq_1} \approx O(h^2). \tag{34}$$

Соотношения (32), (34) дают окончательно оценку невязки для любого смешанного ГУ в форме

$$\delta g^4_{hq} = \delta g^4_{hq_1} + \delta g^4_{hq_2} = O(h^2),$$

откуда следует второй порядок аппроксимации [4, 12], т.е. ПА второй подзадачи (4) и, следовательно, всей рассматриваемой задачи (2), (4) повышен на единицу и стал равным двум при $k = 4$.

Данные строк с номерами 12–15 табл. 1 соответствуют ГУ, представленным в виде одного слагаемого в форме производной той или иной степени от нуля до трех. Отметим, что результат (33), соответствующий ГУ $x(a) = \widetilde{x}_0$, не является результатом действия метода повышения ПА в силу того, что при $\alpha_0 = 1$, $\beta_0 = 0$, $\gamma_0 = 0$, $\lambda_0 = 0$ из набора точных равенств (9)–(12) будет сохранено лишь равенство (9) с дополнительным членом R^5_0, а это соответствует нечетному $k = 5$ в матричном методе, для которого в соответствии с [12] ПА и так равен $k - 3 = 5 - 3 = 2$.

Из изложенного выше следует, что использование в многочленах Тейлора матричного метода старшей степени производной, на единицу превышающей степень многочлена Тейлора k при ее четном значении, и использование операции дифференцирования обеих частей ОДУ4 задачи (1) $k - 3$ раза позволяют аналогичным образом повысить ПА задачи до $k - 2$.

В силу того, что каждая краевая задача для ОДУ4 гарантированно содержит ГУ в форме смешанного граничного условия или производной степени больше нуля, сделанный вывод справедлив для любой краевой задачи.

Изложенный выше метод показал возможность повышения ПА краевых задач для ОДУ4 при четном k. Этот же метод ранее показал возможность повышения ПА краевых задач для ОДУ2 [13] и систем ОДУ2 [14] при четном k. В [13] метод повышения ПА лишь обоснован при использовании смешанного ГУ $\alpha_0 x(a) + \beta_0 x'(a) = \widetilde{z}_0$, а дан при использовании ГУ в форме производной первой степени. В [14] метод повышения ПА дан при использовании смешанного ГУ. Сам же метод реализован в [13, 14] не был. Сделаем это в настоящей работе на примерах краевых задач для ОДУ4, заимствованных в [12], на примерах краевых задачах для ОДУ2 и систем ОДУ2, заимствованных в [13, 14], а также на примере краевой задачи для ОДУ3, заимствованной в [15]; метод повышения ПА краевых задач для ОДУ3 при использовании матричного метода будет дан ниже.

Отметим некоторые особенности, увеличивающие трудоемкость и влияющие на возможность реализации на практике метода повышения ПА второй подзадачи (4) при произвольном четном $k = 2m \geqslant 6$:

а) увеличение k влечет возрастание числа слагаемых и степени старшей производной в первых четырех уравнениях системы (13) при сохранении в ней общего числа уравнений, равного пяти;
б) вычислять производные от обеих частей ОДУ4 и выражать старшую производную придется $k-3$ раза, при этом будет выполнено некоторое дублирование действий матричного метода [12], а именно: вычисление производных от обеих частей ОДУ4 $k-3$ раза;
в) подстановка вычисленных старших производных в первые четыре уравнения системы (13) и выполнение алгебраических преобразований уравнений этой системы достаточно усложнят (в смысле увеличения объема выкладок) аналитическую реализацию метода повышения ПА в следствие того, что проблематично составить необходимые рекуррентные расчетные формулы для коэффициентов системы (14) в зависимости от значения k. Последнее делает практически невозможной компьютерную реализацию изложенного выше метода повышения ПА.

Однако попытка реализации метода повышения ПА вполне возможна, если для матричного метода численного интегрирования имеется компьютерная программа расчета для выполнения численных экспериментов, при каждом запуске которой на исполнение осуществляется тем или иным способом ввод числа k. Для этого на практике при фиксированном $k = 2m$ следует незначительно модифицировать компьютерную программу расчета следующим образом:
а) при фиктивном $k = 2m + 1$ формируются и фиксируются разностные уравнения, соответствующие ГУ в форме смешанного граничного условия или производной степени больше нуля;
б) при фактическом $k = 2m$ формируется и фиксируется система разностных уравнений (2), (4);
в) в полученной системе (2), (4) разностные уравнения, соответствующие ГУ в форме смешанного граничного условия или производной степени больше нуля, заменяются на аналогичные ранее зафиксированные уравнения, сформированные при $k = 2m + 1$. Полученную таким образом СЛАУ следует использовать далее в расчетах.

Приведем некоторые теоретические обоснования описанной выше реализации метода повышения ПА.

Выделим две различные процедуры построения разностных уравнений, соответствующие ГУ в форме смешанного граничного условия или производной степени больше нуля, имеющих невязки, дающие одинаковый ПА: в первой процедуре использован метод повышения ПА при четном значении k, во второй — матричный метод при нечетном $k + 1$ [11–14].

При $k = 4$ реализация метода повышения ПА (первая процедура) состоит из последовательного выполнения двух не зависящих друг от друга этапов:
а) вычисляются производные от обеих частей ОДУ4 и из полученного уравнения (7) выражается старшая производная, т.е. составляется равенство (8). Подстановка средствами алгебраических преобразований равенства (8) в первые четыре уравнения незамкнутой системы (13) приводит к построению замкнутой системы (14), состоящей из пяти уравнений;
б) преобразование системы (14) средствами матричного исчисления (21), (22) приводит к построению разностного уравнения (23), невязка которого обуславливает второй порядок аппроксимации.

Этапы первой процедуры изобразим в виде следующей схемы:

$$(7) \to (8) \to \ [(8)\bigwedge(13)] \to (14) \to (21),\ (22) \to (23).$$

Символ $\bigwedge$ в приведенной схеме нужно понимать в следующем контексте: правая часть равенства (8) подставляется в первые четыре уравнения незамкнутой системы (13); итогом такой подстановки является замкнутая СЛАУ (14), которая далее преобразуется средствами матричного исчисления (21), (22).

При $k = 5$ построение разностного уравнения, имеющего невязку, дающую второй порядок аппроксимации, матричным методом (вторая процедура) состоит из одного этапа — вычисленные производные (7) от обеих частей ОДУ4 подставляются в качестве дополнительного уравнения в незамкнутую систему (13), что приводит к формированию замкнутой СЛАУ, но состоящей уже из шести уравнений, преобразование которой средствами матричного исчисления (21), (22) приводит к построению разностного уравнения, невязка которого совпадает с невязкой уравнения (23) [12].

Вторую процедуру изобразим в виде следующей схемы:

$$(7) \to \ [(7)\bigcup(13)] \to (21),\ (22) \to \dots .$$

Символ $\bigcup$ в приведенной схеме нужно понимать в следующем контексте: незамкнутая система (13) дополняется уравнением (7); в итоге получается замкнутая СЛАУ, которая далее преобразуется средствами матричного исчисления (21), (22).

По сути, первая и вторая процедуры имеют незначительные различия (в обоих случаях речь идет о преобразованиях несколько разными способами одних и тех же уравнений, а именно уравнения (7) и СЛАУ (13); подтверждение чему следует из приведенных выше схем) и достигают одной и той же цели — построения разностного уравнения, имеющего невязку, дающую второй порядок аппроксимации; что можно расценить как теоретическое обоснование описанной выше реализации метода повышения ПА на практике.

Успешная реализация метода повышения ПА для ОДУ4, ОДУ2 и систем ОДУ2 дана ниже. Однако не для всех краевых задач успех сопутствовал на практике при формальной реализации метода, о чем речь пойдет ниже, в частности, при исследовании ОДУ3.

4. Метод повышения порядка аппроксимации разностной краевой задачи для ОДУ3. В [15] исследована дифференциальная краевая задача для неоднородного линейного ОДУ3 с переменными коэффициентами вида

$$\begin{cases} s(t)x'''(t) + r(t)x''(t) + p(t)x'(t) + q(t)x(t) = f(t), \quad t \in [a,b], \\ x(a) = \widetilde{x}_0, \quad x'(a) = \widetilde{x}'_0, \\ x(b) = \widetilde{x}_n, \end{cases} \tag{35}$$

где $s(t)$, $r(t)$, $p(t)$, $q(t)$, $f(t)$ — заданные функции, дифференцируемые нужное число раз; $x(t)$ — искомая функция, являющаяся точным решением задачи; $\widetilde{x}_0$, $\widetilde{x}'_0$, $\widetilde{x}_n$ — заданные числа.

Использование пятиточечного шаблона при аппроксимации задачи (35) разностной краевой задачей привело к нехватке одного разностного уравнения для получения замкнутой СЛАУ; поэтому в [15] для рассматриваемой задачи было составлено следующее фиктивное ГУ:

$$X_0 = s_0 x'''(a) + r_0 x''(a), \tag{36}$$

где число X_0 может быть вычислено с использованием ОДУЗ и двух ГУ задачи в левой границе сетки D_h как

$$X_0 = s_0 x'''(a) + r_0 x''(a) = f_0 - p_0 \widetilde{x}'_0 - q_0 \widetilde{x}_0. \tag{37}$$

Наряду с приведенными в задаче (35) ГУ в левой границе сетки D_h возможны еще следующие два набора:

$$x(a) = \widetilde{x}_0, \quad x''(a) = \widetilde{x}''_0, \tag{38}$$

$$x'(a) = \widetilde{x}'_0, \quad x''(a) = \widetilde{x}''_0. \tag{39}$$

Граничные условия (38) и (39) позволяют составить, как это было выполнено в [15], следующие фиктивные ГУ:

$$X_0 = s_0 x'''(a) + p_0 x'(a), \tag{40}$$

где

$$X_0 = f_0 - r_0 \widetilde{x}''_0 - q_0 \widetilde{x}_0;$$

и

$$X_0 = s_0 x'''(a) + q_0 x(a), \tag{41}$$

где

$$X_0 = f_0 - r_0 \widetilde{x}''_0 - p_0 \widetilde{x}'_0.$$

Объединяя перечисленные фиктивные ГУ в одно, получим смешанное фиктивное граничное условие

$$X_0 = s_0 x'''(a) + r_0 x''(a) + p_0 x'(a) + q_0 x(a), \tag{42}$$

для которого в соответствии с (36), (40), (41) примем следующее:

а) переменную s_0 положим всегда отличной от нуля;

б) одну из переменных q_0, p_0, r_0 положим отличной от нуля, тогда как две оставшиеся переменные из перечисленных положим равными нулю одновременно;

в) число X_0 вычислим по соотношению (42) при определенных заранее входящих в него переменных q_0, p_0, r_0, s_0.

В итоге смешанное ГУ (42) при тех или иных возможных значениях входящих в него переменных охватывает все три приведенные выше набора ГУ в левой границе сетки.

Граничное условие в правой границе сетки D_h в задаче (35) заменим на смешанное ГУ

$$\alpha_n x(b) + \beta_n x'(b) + \gamma_n x''(b) = \widetilde{z}_n, \tag{43}$$

где α_n, β_n, γ_n, $\widetilde{z}_n$ — заданные числа, что позволит отказаться от явного исследования ГУ в форме одного слагаемого. Тогда вместо задачи (35) исследуем следующую задачу:

$$\begin{cases} s(t)x'''(t) + r(t)x''(t) + p(t)x'(t) + q(t)x(t) = f(t), \quad t \in [a,\, b], \\ x(a) = \widetilde{x}_0, \quad x'(a) = \widetilde{x}'_0, \quad s_0 x'''(a) + r_0 x''(a) + p_0 x'(a) + q_0 x(a) = X_0, \\ \alpha_n x(b) + \beta_n x'(b) + \gamma_n x''(b) = \widetilde{z}_n. \end{cases} \tag{44}$$

С учетом приведенного выше замечания, что при вычислении ПА неважно, в которой из двух границ сетки записано ГУ, граничное условие (43) можно заменить на

$$\alpha_0 x(a) + \beta_0 x'(a) + \gamma_0 x''(a) = \widetilde{z}_0. \tag{45}$$

Тогда уравнения второй подзадачи задачи (44) запишем в развернутом виде

$$\begin{cases} -\dfrac{b_{12}^{k2}}{b_{15}^{k2}}x_1 + \dfrac{x_2}{b_{15}^{k2}} - \dfrac{b_{13}^{k2}}{b_{15}^{k2}}x_3 - \dfrac{b_{14}^{k2}}{b_{15}^{k2}}x_4 = f_2 + \sum\limits_{m=6}^{k+1} \dfrac{b_{1m}^{k2}}{b_{15}^{k2}} f_2^{(m-5)} + \dfrac{b_{11}^{k2}}{b_{15}^{k2}}\widetilde{x}_0, \\ -\dfrac{c_{12}^{k2}}{c_{15}^{k2}}x_1 + \dfrac{x_2}{c_{15}^{k2}} - \dfrac{c_{13}^{k2}}{c_{15}^{k2}}x_3 - \dfrac{c_{14}^{k2}}{c_{15}^{k2}}x_4 = f_2 + \sum\limits_{m=6}^{k+1} \dfrac{c_{1m}^{k2}}{c_{15}^{k2}} f_2^{(m-5)} + \dfrac{c_{11}^{k2}}{c_{15}^{k2}}\widetilde{x}'_0, \\ -\dfrac{\phi_{12}^{k2}}{\phi_{15}^{k2}}x_1 + \dfrac{x_2}{\phi_{15}^{k2}} - \dfrac{\phi_{13}^{k2}}{\phi_{15}^{k2}}x_3 - \dfrac{\phi_{14}^{k2}}{\phi_{15}^{k2}}x_4 = f_2 + \sum\limits_{m=6}^{k+1} \dfrac{\phi_{1m}^{k2}}{\phi_{15}^{k2}} f_2^{(m-5)} + \dfrac{\phi_{11}^{k2}}{\phi_{15}^{k2}}X_0, \\ -\dfrac{q_{12}^{k2}}{q_{15}^{k2}}x_1 + \dfrac{x_2}{q_{15}^{k2}} - \dfrac{q_{13}^{k2}}{q_{15}^{k2}}x_3 - \dfrac{q_{14}^{k2}}{q_{15}^{k2}}x_4 = f_2 + \sum\limits_{m=6}^{k+1} \dfrac{q_{1m}^{k2}}{q_{15}^{k2}} f_2^{(m-5)} + \dfrac{q_{11}^{k2}}{q_{15}^{k2}}\widetilde{z}_0 \end{cases} \tag{46}$$

и исследуем только третье и четвертое уравнения в системе (46). При этом абсолютно неважно, какие ГУ, являющиеся частными случаями смешанного ГУ (45), использованы при составлении первых двух разностных уравнений.

В третьем уравнении системы (46) использованы элементы ϕ_{ml}^{k2} матрицы Φ^{k2}, что будет соответствовать смешанному фиктивному ГУ (42).

Для задачи (35) при использовании пятиточечного шаблона в [15] установлено следующее:

а) ПА первой подзадачи зависит от четности или нечетности k, причем при нечетном k одинаковый ПА, равный $k-1$, имели первые подзадачи L_h^{2m-1} и L_h^{2m} при $m \geqslant 3$; при четном k ПА всех подзадач L_h^k оказался равным $k-2$;

б) ПА второй подзадачи l_h^k не зависит от четности или нечетности k и равен $k-2$.

Из установленных фактов следует, что повышать ПА следует при нечетном $k = 2m-1$, например, при $k = 5$; однако лишь для уменьшения объема выкладок попытаемся повысить ПА второй подзадачи на примере четного $k = 4$ в силу того, что в этом случае удастся воспользоваться приведенными выше выкладками для ОДУ4. При $k = 4$ ПА второй подзадачи (46) равен $k - 2 = 2$. Попытаемся повысить этот ПА от двух до трех.

Начнем с фиктивного ГУ (42), которое совпадает по форме со смешанным ГУ в задаче (1) и отличается от него лишь наименованиями коэффициентов.

В силу того, что ОДУ3 не содержит четвертой производной, равенство вида (8) следует вывести вновь.

Вычислим производную по аргументу t от обеих частей ОДУ3 задачи (35) и запишем итог в узле t_2:

$$q'[x_2] + (q+p')[x'_2] + (p+r')[x''_2] + (r+s')[x'''_2] + s[x_2^{(4)}] = f'_2. \tag{47}$$

Вычислим производную по аргументу t от обеих частей равенства (47) или, что то же самое, вторую производную от обеих частей ОДУ3 задачи (35), и запишем итог в узле t_2:

$$q_2''[x_2]+(2q_2'+p_2'')[x_2']+(q_2+2p_2'+r_2'')[x_2'']+ \\ +(p_2+2r_2'+s_2'')[x_2''']+(r_2+2s_2')[x_2^{(4)}]+s_2[x_2^{(5)}]=f_2'' \quad (48)$$

и выразим $[x_2^{(5)}]$. Получим точное равенство

$$[x_2^{(5)}]=-\frac{q_2''}{s_2}[x_2]-\frac{2q_2'+p_2''}{s_2}[x_2']-\frac{q_2+2p_2'+r_2''}{s_2}[x_2'']- \\ -\frac{p_2+2r_2'+s_2''}{s_2}[x_2''']-\frac{r_2+2s_2'}{s_2}[x_2^{(4)}]+\frac{f_2''}{s_2}$$

или, введя соответствующие обозначения,

$$[x_2^{(5)}]=-\widetilde{q}_2[x_2]-\widetilde{p}_2[x_2']-\widetilde{r}_2[x_2'']-\widetilde{s}_2[x_2''']-\widetilde{u}_2[x_2^{(4)}]+\widetilde{f}_2. \quad (49)$$

Отметим, что точные равенства (8) и (49) совпали до обозначений лишь по форме.

При дальнейшем исследовании фиктивного ГУ (42) воспользуемся формулами (9)–(23), кроме (18), с незначительными заменами: число α_0 следует заменить на число q_0, β_0 — на p_0, γ_0 — на r_0, λ_0 — на s_0, $\widetilde{z}_0$ — на X_0. В частности, вместо (17) получим

$$B_0[x_2]+B_1[x_2']+B_2[x_2'']+B_3[x_2''']+B_4[x_2^{(4)}]= \\ =X_0-q_0R_0^5-p_0R_0^4-r_0R_0^3-s_0R_0^2-\widetilde{f}_2A_5. \quad (50)$$

В локальной матрице (18) следует в нижнем правом углу заменить элемент u_2 на нуль в силу вида исследуемого ОДУЗ (отсутствует четвертая производная). Поэтому во всех соотношениях вида (24)–(27) для смешанного фиктивного ГУ (42) следует положить $u_2\equiv 0$. Опуская не зависящие от h постоянные сомножители и пренебрегая старшими степенями, из равенств (24)–(28) найдем

$$M_{11,\Phi}^{42}=-6h^6\Big(-\frac{2s_ih}{4!}+\frac{2r_ih^2}{3!4!}+\frac{2p_ih^3}{3!4!}\Big)\approx\frac{s_2h^7}{2}\approx h^7, \quad (51)$$

$$M_{12,\Phi}^{42}=-B_1\Big(-\frac{s_2h^6}{4}+\frac{r_2h^7}{3\cdot 3!}\Big)+B_2\Big(-\frac{7s_2h^5}{2\cdot 3!}+\frac{p_2h^7}{3\cdot 3!}\Big)-B_3\Big(-\frac{7r_2h^5}{2\cdot 3!}+\frac{p_2h^6}{4}\Big)+ \\ +B_4\Big(s_2h^3-r_2h^4+\frac{p_2h^5}{3}\Big)\approx h^3\big(B_4+B_3h^2+B_2h^2+B_1h^3\big), \quad (52)$$

$$M_{13,\Phi}^{42}=2\cdot 3!B_1\Big(-\frac{s_2h^6}{2\cdot 4!}-\frac{2r_2h^7}{3!\cdot 4!}\Big)-2\cdot 3!B_2\Big(\frac{s_2h^5}{16}-\frac{2p_2h^7}{3!\cdot 4!}\Big)+ \\ +2\cdot 3!B_3\Big(\frac{r_2h^5}{16}+\frac{p_2h^6}{2\cdot 4!}\Big)-2\cdot 3!B_4\Big(-\frac{s_2h^3}{4}+\frac{r_2h^4}{2\cdot 3!}+\frac{p_2h^5}{2\cdot 3!}\Big)\approx \\ \approx h^3\big(B_4+B_3h^2+B_2h^2+B_1h^3\big), \quad (53)$$

$$M^{42}_{14,\Phi} = 2B_1\frac{r_2h^7}{3!\cdot 4!} + 2B_2\left(\frac{s_2h^5}{4!} - \frac{p_2h^7}{3!\cdot 4!}\right) - 2B_3\frac{r_2h^5}{4!} + \\ + 2B_4\Big(-\frac{s_2h^3}{2} + \frac{p_2h^5}{2\cdot 3!}\Big) \approx h^3\big(B_4 + B_3h^2 + B_2h^2 + B_1h^4\big), \quad (54)$$

$$M^{42}_{15,\Phi} = h^6\Big(B_4 - \frac{B_3h}{2} - \frac{B_2h^2}{2\cdot 3!} + \frac{B_1h^3}{2\cdot 3!}\Big) \approx h^6\big(B_4 + B_3h + B_2h^2 + B_1h^3\big). \quad (55)$$

Главные части B_j, $j = 0, 1, \ldots, 4$, коэффициентов левой части равенства (50) в зависимости от значений α_0, β_0, γ_0, λ_0 приведены в табл. 2, где единица означает присутствие соответствующего коэффициента в смешанном фиктивном ГУ, нуль — его отсутствие. Из принятого выше соглашения, согласно которому переменная s_0 всегда отлична от нуля и одна из переменных q_0, p_0, r_0 отлична от нуля, тогда как две оставшиеся переменные из перечисленных равны нулю одновременно, следует, что табл. 2 для фиктивного ГУ будет содержать только три строки по числу наборов возможных граничных условий в левой границе задачи (35).

Пренебрегая старшими степенями из соотношений (51)–(55) и данных табл. 2 запишем следующие предварительные оценки:

$$M^{42}_{11,\Phi} \approx h^7, \quad (56)$$

$$M^{42}_{12,\Phi} + M^{42}_{13,\Phi} + M^{42}_{14,\Phi} \approx B_4h^3, \quad (57)$$

$$M^{42}_{15,\Phi} \approx B_4h^6, \quad (58)$$

на основании которых и очевидных равенств

$$\frac{\phi^{42}_{1j}}{\phi^{42}_{15}} = \frac{M^{42}_{1j,\Phi}}{M^{42}_{15,\Phi}}, \quad j = 1, 2, 3, 4,$$

из (29) получим

$$\delta g^4_{h\phi_1} = -\frac{\phi^{42}_{11}(q_0R_0^5 + p_0R_0^4 + r_0R_0^3 + s_0R_0^2)}{\phi^{42}_{15}} = \\ = -\frac{M^{42}_{11,\Phi}(q_0R_0^5 + p_0R_0^4 + r_0R_0^3 + s_0R_0^2)}{M^{42}_{15,\Phi}} \approx \\ \approx -\frac{h^7(q_0h^3 + p_0h^2 + r_0h + s_0)O(h^3)}{B_4h^6} = \\ = -\frac{h(q_0h^3 + p_0h^2 + r_0h + s_0)O(h^3)}{B_4}, \quad (59)$$

Таблица 2

Главные части коэффициентов левой части равенства (50)
[Principal parts of the coefficients on the left side of the equality (50)]

nos.	q_0	p_0	r_0	s_0	B_0	B_1	B_2	B_3	B_4
1	0	0	1	1	s_0h^2	s_0h^2	r_0	s_0	s_0h
2	0	1	0	1	s_0h^2	p_0	p_0h	s_0	s_0h
3	1	0	0	1	q_0	q_0h	q_0h^2	s_0	s_0h

а из (30) —

$$\delta g^4_{h\phi_2} = -\frac{\phi^{42}_{12}R^5_1 + \phi^{42}_{13}R^5_3 + \phi^{42}_{14}R^5_4}{\phi^{42}_{15}} \approx$$
$$\approx -\frac{(M^{42}_{12,\Phi} + M^{42}_{13,\Phi} + M^{42}_{14,\Phi})O(h^6)}{M^{42}_{15,\Phi}} \approx$$
$$\approx -\frac{B_4 h^3 O(h^6)}{B_4 h^6} = -\frac{O(h^6)}{h^3} = O(h^3). \quad (60)$$

Оценка (59) для каждого набора q_0, p_0, r_0, s_0 требует дальнейшего уточнения результата с использованием данных табл. 2, тогда как оценка (60) дает окончательный результат.

Для всех строк табл. 2 имеем $s_0 \neq 0$ и $B_4 = s_0 h$. Тогда, пренебрегая старшими степенями, из (59) получим оценку

$$\delta g^4_{h\phi_1} \approx -\frac{h(q_0h^3 + p_0h^2 + r_0h + s_0)O(h^3)}{B_4} \approx -\frac{s_0 h O(h^3)}{s_0 h} = O(h^3). \quad (61)$$

Из (60), (61) следует, что разностное уравнение, при построении которого при фиксированном $k = 4$ было использовано фиктивное ГУ (42), дает следующую оценку невязки:

$$\delta g^4_{h\phi} = \delta g^4_{h\phi_1} + \delta g^4_{h\phi_2} = O(h^3). \quad (62)$$

Продолжим исследование со смешанного ГУ (45) или, что то же самое, займемся четвертым уравнением системы (46). Вновь воспользуемся формулами (9)–(23), в которых положим следующее:

а) $\lambda_0 \equiv 0$, тогда вместо (17) получим

$$B_0[x_2] + B_1[x_2'] + B_2[x_2''] + B_3[x_2'''] + B_4[x_2^{(4)}] =$$
$$= \widetilde{z}_0 - \alpha_0 R^5_0 - \beta_0 R^4_0 - \gamma_0 R^3_0 - \widetilde{f}_2 A_5; \quad (63)$$

б) $u_2 \equiv 0$, что приведет к сохранению равенств (51)–(55) с точностью до обозначений.

Главные части коэффициентов левой части равенства (63) приведены в табл. 3. Отметим, что три последние строки в табл. 3 соответствуют ГУ в форме одного слагаемого; в частности, пятая строка соответствует первому разностному уравнению в системе (46), шестая строка — второму.

Если пренебречь старшими степенями, соотношения (51)–(55) и данные табл. 3 вновь приводят к полученным выше предварительным оценкам (56)–(58)
с точностью до обозначений, на основании которых из (29) найдем

$$\delta g^4_{hq_1} = -\frac{q^{42}_{11}(\alpha_0 R^5_0 + \beta_0 R^4_0 + \gamma_0 R^3_0)}{q^{42}_{15}} = -\frac{M^{42}_{11,Q}(\alpha_0 R^5_0 + \beta_0 R^4_0 + \gamma_0 R^3_0)}{M^{42}_{15,Q}} \approx$$
$$\approx -\frac{h^7(\alpha_0 h^3 + \beta_0 h^2 + \gamma_0 h)O(h^3)}{B_4 h^6} = -\frac{h(\alpha_0 h^3 + \beta_0 h^2 + \gamma_0 h)O(h^3)}{B_4}, \quad (64)$$

а из (30) —

$$\delta g^4_{hq_2} = -\frac{q^{42}_{12}R^5_1 + q^{42}_{13}R^5_3 + q^{42}_{14}R^5_4}{q^{42}_{15}} \approx \\ \approx -\frac{(M^{42}_{12,Q} + M^{42}_{13,Q} + M^{42}_{14,Q})O(h^6)}{M^{42}_{15,Q}} \approx \\ \approx -\frac{B_4 h^3 O(h^6)}{B_4 h^6} = -\frac{O(h^6)}{h^3} = O(h^3). \quad (65)$$

Оценка (64) для каждого набора α_0, β_0, γ_0 требует дальнейшего уточнения результата с использованием данных табл. 3, тогда как оценка (65) дает окончательный результат.

Пусть $\gamma_0 \neq 0$. В этом случае, что следует из табл. 3, $B_4 = \gamma_0 h^2$, тогда, пренебрегая старшими степенями, из (64) получим оценку

$$\delta g^4_{hq_1} \approx -\frac{h(\alpha_0 h^3 + \beta_0 h^2 + \gamma_0 h)O(h^3)}{B_4} \approx -\frac{\gamma_0 h^2 O(h^3)}{\gamma_0 h^2} = O(h^3),$$

справедливую для строк табл. 3 с номерами 2, 3, 4, 7.

Пусть $\beta_0 \neq 0$, $\gamma_0 = 0$. В этом случае, что следует из табл. 3, $B_4 = \beta_0 h^3$, тогда, пренебрегая старшими степенями, из (64) получим оценку

$$\delta g^4_{hq_1} \approx -\frac{h(\alpha_0 h^3 + \beta_0 h^2 + \gamma_0 h)O(h^3)}{B_4} \approx -\frac{\beta_0 h^3 O(h^3)}{\beta_0 h^3} = O(h^3),$$

справедливую для строк табл. 3 с номерами 1, 6.

Пусть $\alpha_0 \neq 0$, $\beta_0 = 0$, $\gamma_0 = 0$. В этом случае, что следует из табл. 3, $B_4 = \alpha_0 h^4$, тогда, пренебрегая старшими степенями, из (64) получим оценку

$$\delta g^4_{hq_1} \approx -\frac{h(\alpha_0 h^3 + \beta_0 h^2 + \gamma_0 h)O(h^3)}{B_4} \approx -\frac{\alpha_0 h^4 O(h^3)}{\alpha_0 h^4} = O(h^3),$$

справедливую для пятой строки табл. 3.

Следовательно, для любого смешанного ГУ оценка (64) дает невязку

$$\delta g^4_{hq_1} \approx O(h^3). \quad (66)$$

Таблица 3

Главные части коэффициентов левой части равенства (63)
[Principal parts of the coefficients on the left side of the equality (63)]

nos.	α_0	β_0	γ_0	B_0	B_1	B_2	B_3	B_4
1	1	1	0	α_0	β_0	$\beta_0 h$	$\beta_0 h^2$	$\beta_0 h^3$
2	1	0	1	α_0	$\alpha_0 h$	γ_0	$\gamma_0 h$	$\gamma_0 h^2$
3	0	1	1	$\gamma_0 h^3$	β_0	γ_0	$\gamma_0 h$	$\gamma_0 h^2$
4	1	1	1	α_0	β_0	γ_0	$\gamma_0 h$	$\gamma_0 h^2$
5	1	0	0	α_0	$\alpha_0 h$	$\alpha_0 h^2$	$\alpha_0 h^3$	$\alpha_0 h^4$
6	0	1	0	$\beta_0 h^4$	β_0	$\beta_0 h$	$\beta_0 h^2$	$\beta_0 h^3$
7	0	0	1	$\gamma_0 h^3$	$\gamma_0 h^3$	γ_0	$\gamma_0 h$	$\gamma_0 h^2$

Из (65), (66) следует, что разностное уравнение, при построении которого при фиксированном $k = 4$ было использовано смешанное ГУ (45), дает следующую невязку:

$$\delta g_{hq}^4 = \delta g_{hq_1}^4 + \delta g_{hq_2}^4 = O(h^3). \tag{67}$$

Оценки (62), (67) дают окончательно оценку нормы невязки $\|\delta g_h^4\|$ второй подзадачи (46) в виде [4]

$$\|\delta g_h^4\| = \max\bigl(|\delta g_{h\phi}^4|, |\delta g_{hq}^4|\bigr) = O(h^3),$$

откуда следует третий порядок аппроксимации [4]; т.е. ПА второй подзадачи (46) и, следовательно, всей рассматриваемой задачи повышен на единицу и стал равным трем при $k = 4$.

Совершенно аналогично показывается работоспособность метода повышения ПА при нечетных k.

При выполнении численных экспериментов использованы следующие нормы: в качестве суммарной оценки относительной погрешности —

$$D_x^k = \frac{\sqrt{\sum_{i=0}^n \bigl(x_i - [x_i]\bigr)^2}}{\sum_{i=0}^n \bigl|[x_i]\bigr|} \cdot 100\,\%,$$

которую можно трактовать как некий аналог коэффициента вариации в статистике, характеризующего меру разброса в процентах [19]; в качестве оценки абсолютной погрешности [4, 5] —

$$E_x^k = \max\bigl|x_i - [x_i]\bigr|, \quad i = 0, 1, \ldots, n.$$

Для численных экспериментов была использована краевая задача из [15]:

$$\begin{cases} (\sin t + x)\, x''' + 3(\cos t + 1)x'' - 3\sin t \cdot x' - \cos t \cdot x = \sin t, \ t \in [7, 11], \\ x(7) = 8.521, \quad x'(7) = 0.224, \\ x(11) = 14.599. \end{cases} \tag{68}$$

Для численных расчетов было принято $n = 20$, $h = 0.20$. Результаты численных экспериментов для краевой задачи (68) приведены в табл. 4, 5, 11. Данные табл. 5 взяты из [15].

Анализ значений в столбцах табл. 4, 5 с нечетными номерами указывает на отсутствие существенного влияния метода повышения ПА на результат, что оказалось несколько неожиданным.

Попытаемся выявить причину указанного факта.

Выписав для ОДУЗ начальные части приведенных выше схем метода повышения ПА (при $k = 4$) и матричного метода (при $k = 5$)

$$(47) \to (48) \to (49) \to \ [(49) \bigwedge (13)] \to \ \ldots,$$

$$(47) \to \ [(47) \bigcup (13)] \to (21),\ (22) \to \ \ldots,$$

обнаружим следующие особенности:

а) реализации метода повышения ПА и матричного метода берут начало из равенства (47), полученного однократным дифференцированием обеих частей ОДУ3, и именно это равенство (47) используется в квадратных скобках второй схемы;

б) вывод равенства (49) осуществлен из равенства (48), полученного двукратным дифференцированием обеих частей ОДУ3, или, что то же самое, осуществлен однократным дифференцированием обеих частей (47); и именно это равенство (49) используется в квадратных скобках первой схемы.

Следовательно, в квадратных скобках приведенных здесь схем сформированы задачи, которые составлены из различных уравнений. Поэтому эти задачи нельзя считать тождественными, несмотря на то, что они приводят к невязкам, дающим одинаковый ПА. Именно установленными отличиями можно объяснить данные табл. 4, 5. Отметим, что перечисленные особенности отсутствовали при исследовании краевых задач для ОДУ4, ОДУ2 [13] и систем ОДУ2 [14].

Вследствие того, что реализация метода повышения ПА на практике фактически осуществляется матричным методом, для учета указанных особенностей несколько модифицируем матричный метод решения ОДУ3: при $k \geqslant 5$ в последнем уравнении всех СЛАУ матричного метода, аналогичных системе (13), увеличим степень производной на единицу в левой и правой частях этого уравнения.

Модифицированный матричный метод нуждается в дополнительных исследованиях, которые выполним на основе задачи (44).

Локальные матрицы A_Q^{k2}, A_B^{k2}, A_C^{k2}, A_D^{k2}, A_E^{k2} отличаются лишь первыми строками (First Row: FR); для первых строк перечисленных матриц запишем

$$A_Q^{k2}|_{\mathrm{FR}} = \alpha_0 A_B^{k2}|_{\mathrm{FR}} + \beta_0 A_C^{k2}|_{\mathrm{FR}} + \gamma_0 A_D^{k2}|_{\mathrm{FR}} + \lambda_0 A_E^{k2}|_{\mathrm{FR}}. \tag{69}$$

Способ построения матрицы A_Q^{k2} в частном случае при $k = 4$ дан выше,

Таблица 4

Погрешности решения краевой задачи (68), вычисленные с использованием метода повышения ПА [Estimates for the errors in the solutions of the boundary value problem (68) calculated using the method of the increase of the order approximation]

k	4	5	6	7	8	9	10
D_x^k, %	$5.02 \cdot 10^{-3}$	$3.15 \cdot 10^{-3}$	$9.44 \cdot 10^{-5}$	$2.56 \cdot 10^{-5}$	$6.34 \cdot 10^{-7}$	$3.74 \cdot 10^{-7}$	$7.16 \cdot 10^{-9}$
E_x^k	$5.06 \cdot 10^{-3}$	$3.19 \cdot 10^{-3}$	$7.85 \cdot 10^{-5}$	$2.09 \cdot 10^{-5}$	$6.21 \cdot 10^{-7}$	$3.41 \cdot 10^{-7}$	$6.12 \cdot 10^{-9}$

Таблица 5

Погрешности решения краевой задачи (68), вычисленные без использования метода повышения ПА [Estimates for the errors in the solutions of the boundary value problem (68) calculated without using the method of the increase of the order approximation]

k	4	5	6	7	8	9	10
D_x^k, %	$5.02 \cdot 10^{-3}$	$6.56 \cdot 10^{-3}$	$9.44 \cdot 10^{-5}$	$2.13 \cdot 10^{-5}$	$6.34 \cdot 10^{-7}$	$1.72 \cdot 10^{-7}$	$7.16 \cdot 10^{-9}$
E_x^k	$5.06 \cdot 10^{-3}$	$5.19 \cdot 10^{-3}$	$7.85 \cdot 10^{-5}$	$2.03 \cdot 10^{-5}$	$6.21 \cdot 10^{-7}$	$1.87 \cdot 10^{-7}$	$6.12 \cdot 10^{-9}$

общий случай дан в [12]. Способ построения матрицы A_B^{k2}, соответствующей ГУ $x(a)=\widetilde{x}_0$, и матрицы A_C^{k2}, соответствующей ГУ $x'(a)=\widetilde{x}'_0$, дан в [15]; оставшиеся матрицы равенства (69) строятся аналогично.

Справедливость равенства (69) проверяется непосредственно преобразованиями правой части.

В силу того, что увеличение в ГУ в форме одного слагаемого используемой степени производной приводит к понижению степеней по основанию h в одной из строк локальной матрицы, с учетом предстоящих вычислений алгебраических дополнений M_{1j}^{k2}, $j=1,2,\ldots,5$, элементов первой строки транспонированных локальных матриц запишем, используя (69):

$$\begin{aligned}
&\text{если } \lambda_0\neq 0, \text{ то } A_Q^{k2}\approx\lambda_0 A_E^{k2};\\
&\text{если } \gamma_0\neq 0,\ \lambda_0=0, \text{ то } A_Q^{k2}\approx\gamma_0 A_D^{k2};\\
&\text{если } \beta_0\neq 0,\ \gamma_0=0,\ \lambda_0=0, \text{ то } A_Q^{k2}\approx\beta_0 A_C^{k2};\\
&\text{если } \alpha_0\neq 0,\ \beta_0=0,\ \gamma_0=0,\ \lambda_0=0, \text{ то } A_Q^{k2}=\alpha_0 A_B^{k2}.
\end{aligned}\tag{70}$$

Аналитическое исследование и непосредственное вычисление главных частей алгебраических дополнений транспонированных локальных матриц модифицированного матричного метода привело к несколько неожиданному результату:

а) не удалось показать справедливость формул вида

$$M_{1j}^{k2}\approx M_{1j}^{42},\quad j=1,2,\ldots,5,\tag{71}$$

которые имели место в [12–15, 20] и были использованы при вычислении ПА;

б) для любого $k\geqslant 4$ удалось выявить следующие закономерности:

$$\frac{M_{11,B}^{k2}}{M_{15,B}^{k2}}\approx h^{-3},\quad \frac{M_{11,C}^{k2}}{M_{15,C}^{k2}}\approx h^{-2},\quad \frac{M_{11,D}^{k2}}{M_{15,D}^{k2}}\approx h^{-1},\quad \frac{M_{11,E}^{k2}}{M_{15,E}^{k2}}\approx 1,\tag{72}$$

$$\frac{M_{1j,B}^{k2}}{M_{15,B}^{k2}}\approx\frac{M_{1j,C}^{k2}}{M_{15,C}^{k2}}\approx\frac{M_{1j,D}^{k2}}{M_{15,D}^{k2}}\approx\frac{M_{1j,E}^{k2}}{M_{15,E}^{k2}}\approx\frac{M_{1j,Q}^{k2}}{M_{15,Q}^{k2}}\approx h^{-3},\quad j=2,3,4,\tag{73}$$

несмотря на то, что значения главных частей алгебраических дополнений M_{1j}^{k2}, $j=1,2,\ldots,5$, функционально зависят от k и второго нижнего индекса.

Выявим, зависит ли от четности или нечетности k ПА первой подзадачи (2) модифицированного матричного метода.

Для выявления указанного факта необходимо знать оценки первых двух слагаемых в разложении по степеням h алгебраических дополнений $M_{1j,B}^{ki}$, $j=1,2,3,4$; i — номер центрального узла пятиточечного шаблона, в котором записана локальная матрица [12–15].

При отсутствии формул (71) укажем следующее: анализ локальных матриц A_B^{ki} привел к выводу, что оценки первых двух слагаемых в разложениях по степеням h алгебраических дополнений $M_{1j,B}^{ki}$, $j=1,2,3,4$, совпадают для любого $k\geqslant 4$; поэтому достаточно исследовать локальную матрицу A_B^{4i}, для которой имеем следующие оценки [15]:

$$M_{11,B}^{4i}=(6s_i+r_ih-p_ih^2)\frac{h^7}{12}\approx(6s_i+r_ih)\frac{h^7}{12},\tag{74}$$

$$M^{4i}_{14,B} = (-6s_i + r_i h + p_i h^2)\frac{h^7}{12} \approx (-6s_i + r_i h)\frac{h^7}{12}, \tag{75}$$

$$M^{4i}_{12,B} = (-3s_i - 4r_i h + 2p_i h^2)\frac{h^7}{3} \approx (-3s_i - 4r_i h)\frac{h^7}{3}, \tag{76}$$

$$M^{4i}_{13,B} = (3s_i - 4r_i h - 2p_i h^2)\frac{h^7}{3} \approx (3s_i - 4r_i h)\frac{h^7}{3}. \tag{77}$$

Отметим закономерность в парах формул (74), (75) и (76), (77): знаки первых слагаемых противоположны, вторых — совпадают. Наличие отмеченной закономерности указывает на то, что при $m \geqslant 3$ первые подзадачи L_h^{2m-1} и L_h^{2m} имеют одинаковый ПА, что было получено и при исследовании матричного метода в [15].

Исследуем ПА второй подзадачи (4) модифицированного матричного метода на примере разностного уравнения, построенного с использованием смешанного ГУ (6).

Локальная матрица матричного метода при исследовании ОДУ4 при $u \equiv 0$ и локальная матрица модифицированного матричного метода при исследовании ОДУ3 отличаются лишь последней строкой; поэтому выполнение преобразований (21)–(23) при использовании обратных матриц от этих двух локальных матриц приведет к построению двух разностных уравнений одинаковой структуры; откуда следует и совпадение невязок. Невязка $\delta g^k_{hq} = \delta g^k_{hq_1} + \delta g^k_{hq_2}$ разностного уравнения, построенного с использованием матричного метода при исследовании ОДУ4, приведена в [12]; следовательно, для рассматриваемой задачи имеем

$$\delta g^k_{hq_1} = -\frac{q^{k2}_{11}(\alpha_0 R^k_0 + \beta_0 R^{k-1}_0 + \gamma_0 R^{k-2}_0 + \lambda_0 R^{k-3}_0)}{q^{k2}_{15}}, \tag{78}$$

$$\delta g^k_{hq_2} = -\frac{q^{k2}_{12} R^k_1 + q^{k2}_{13} R^k_3 + q^{k2}_{14} R^k_4}{q^{k2}_{15}}. \tag{79}$$

Из (78) найдем

$$\delta g^k_{hq_1} = -\frac{q^{k2}_{11}(\alpha_0 R^k_0 + \beta_0 R^{k-1}_0 + \gamma_0 R^{k-2}_0 + \lambda_0 R^{k-3}_0)}{q^{k2}_{15}} \approx \\ \approx -\frac{M^{k2}_{11,Q}(\alpha_0 h^3 + \beta_0 h^2 + \gamma_0 h + \lambda_0) O(h^{k-2})}{M^{k2}_{15,Q}} \tag{80}$$

и, с учетом (73), из (79)

$$\delta g^k_{hq_2} = -\frac{q^{k2}_{12} R^k_1 + q^{k2}_{13} R^k_3 + q^{k2}_{14} R^k_4}{q^{k2}_{15}} \approx \\ \approx -\frac{(M^{k2}_{12,Q} + M^{k2}_{13,Q} + M^{k2}_{14,Q}) O(h^{k+1})}{M^{k2}_{15,Q}} \approx \\ \approx -h^{-3} O(h^{k+1}) \approx O(h^{k-2}). \tag{81}$$

Оценка (80) для каждого набора коэффициентов α_0, β_0, γ_0, λ_0 требует дальнейшего уточнения результата, тогда как оценка (81) дает окончательный результат.

Следующая система оценок в сочетании со значениями α_0, β_0, γ_0, λ_0:

$$\begin{aligned}
&\text{если } \lambda_0 \neq 0, \text{ то } \frac{M^{k2}_{11,Q}}{M^{k2}_{15,Q}} \approx \frac{M^{k2}_{11,E}}{M^{k2}_{15,E}} \approx 1;\\
&\text{если } \gamma_0 \neq 0,\ \lambda_0 = 0, \text{ то } \frac{M^{k2}_{11,Q}}{M^{k2}_{15,Q}} \approx \frac{M^{k2}_{11,D}}{M^{k2}_{15,D}} \approx h^{-1};\\
&\text{если } \beta_0 \neq 0,\ \gamma_0 = 0,\ \lambda_0 = 0, \text{ то } \frac{M^{k2}_{11,Q}}{M^{k2}_{15,Q}} \approx \frac{M^{k2}_{11,C}}{M^{k2}_{15,C}} \approx h^{-2};\\
&\text{если } \alpha_0 \neq 0,\ \beta_0 = 0,\ \gamma_0 = 0,\ \lambda_0 = 0, \text{ то } \frac{M^{k2}_{11,Q}}{M^{k2}_{15,Q}} \approx \frac{M^{k2}_{11,B}}{M^{k2}_{15,B}} \approx h^{-3}
\end{aligned} \tag{82}$$

является итогом сравнения соотношений (70), (72) посредством связи через наименования обратных матриц.

Подставим в (80) данные любой строки из (82), например, второй, и, пренебрегая старшими степенями, получим

$$\delta g^k_{hq_1} \approx -\frac{M^{k2}_{11,Q}(\alpha_0 h^3 + \beta_0 h^2 + \gamma_0 h + \lambda_0) O(h^{k-2})}{M^{k2}_{15,Q}} \approx$$
$$\approx -h^{-1}\gamma_0 h O(h^{k-2}) \approx O(h^{k-2}). \tag{83}$$

Равенства (81), (83) окончательно дают оценку невязки

$$\delta g^k_{hq} = \delta g^k_{hq_1} + \delta g^k_{hq_2} \approx O(h^{k-2})$$

разностного уравнения, при построении которого использовано смешанное ГУ (6). Третье и четвертое уравнения во второй подзадаче (46) соответствуют фиктивному смешанному ГУ (42) и смешанному ГУ (45), которые являются частными случаями рассмотренного сейчас смешанного ГУ (6), откуда следует, что ПА второй подзадачи модифицированного матричного метода совпадает с ПА второй подзадачи матричного метода.

Подстановка последнего соотношения из (73) в (60), (65) и подстановка данных любой строки из (82) в (59), (64) дают оценки (62) и (67), из которых следует справедливость метода повышения ПА для модифицированного матричного метода, который назовем модифицированным методом повышения ПА и используем ниже при выполнении численных экспериментов при исследовании ОДУ3.

5. Оценка погрешностей. При апробации использованы следующие краевые задачи для ОДУ4 [12]:

$$\begin{cases}(e^t + 2t)x^{(4)} + (e^t + 2)x''' + 6e^t x'' + 4e^t x' + e^t x = t^{-5}, \quad t \in [2,6],\\ x(2) = 2.285, \quad x'''(2) = -0.480,\\ x'(6) = -0.403, \quad x''(6) = 0.159\end{cases} \tag{84}$$

и

$$
\begin{cases}
(e^t+2t)x^{(4)}+(e^t+2)x'''+6e^tx''+4e^tx'+e^tx=t^{-5}, \quad t\in[2,6],\\
x(2)=2.285, \quad x'(2)=0.135, \quad x'''(2)=-0.480,\\
x(6)+2x'(6)+3x''(6)+4x'''(6)=0.415,
\end{cases} \tag{85}
$$

в которых было принято $n=20$, $h=0.20$. Результаты численных экспериментов для решений $x(t)$ приведены в табл. 6, 7.

Наряду с краевыми задачами (84), (85) исследована задача для ОДУ2 [13]

$$
\begin{cases}
x''-\dfrac{2}{t}x'+\dfrac{2}{t^2}x=t\cos t, \quad t\in[5,13],\\
x(5)+3x'(5)=17.597,\\
2x(13)+2x'(13)=56.016,
\end{cases} \tag{86}
$$

в которой было принято $n=20$, $h=0.40$. Результаты численных экспериментов для решений $x(t)$ задачи (86) приведены в табл. 8. Кроме этого, исследована задача для системы ОДУ2 [14]

$$
\begin{cases}
x''-tx'-\dfrac{t^2+2}{t^2}x-ty''=2t\cos t, \quad t\in[2\pi,3\pi],\\
\dfrac{1}{2}x'+\dfrac{x}{t}+y''+\dfrac{t^2-4}{2t^2}y=-2t\sin t,\\
x(2\pi)+x'(2\pi)=4\pi^2, \quad y(2\pi)+2y'(2\pi)=4\pi(\pi+2),\\
3x(3\pi)+2x'(3\pi)=-18\pi^2, \quad 2y(3\pi)+3y'(3\pi)=-18\pi(\pi+1),
\end{cases} \tag{87}
$$

в которой было принято $n=20$, $h=\pi/20\approx 0.209$. Результаты численных экспериментов для решений $x(t)$ и $y(t)$ приведены в табл. 9.

В рассмотренных задачах по данным анализа табл. 6–9 с увеличением степени k используемого многочлена Тейлора относительная и абсолютная погрешности уменьшаются довольно «резко» или «скачкообразно» (не менее чем на порядок) при переходе от нечетного к четному значению k, что свидетельствует о зависимости ПА от четности или нечетности k при использовании метода повышения ПА при выполнении численных экспериментов.

Помимо задач (84)–(87) практически аналогичные результаты (по динамике и по абсолютным значениям погрешностей) были получены для ряда иных краевых задач, например, при исследовании ОДУ4 из задач (84), (85) со следующими ГУ [12], $t\in[2,\ 6]$:

$$
\begin{cases}
x(2)=2.285, \quad x'''(2)=-0.480,\\
x(6)=0.746, \quad x''(6)=0.159;
\end{cases} \tag{88}
$$

$$
\begin{cases}
x'(2)=0.135, \qquad x'''(2)=-0.480,\\
x'(6)=-0.403, \quad x'''(6)=-2.18\cdot 10^{-4};
\end{cases} \tag{89}
$$

$$
\begin{cases}
x(2)=2.285, \quad x'(2)=0.135, \quad x'''(2)=-0.480,\\
x'''(6)=-2.18\cdot 10^{-4};
\end{cases} \tag{90}
$$

Таблица 6

Погрешности решения краевой задачи (84) [Estimates for the errors in the solutions of the boundary value problem (84)]

k	4	5	6	7	8	9	10	11
D_x^k, %	$7.56 \cdot 10^{-2}$	$2.53 \cdot 10^{-2}$	$4.05 \cdot 10^{-4}$	$2.20 \cdot 10^{-4}$	$7.81 \cdot 10^{-6}$	$1.01 \cdot 10^{-5}$	$3.87 \cdot 10^{-7}$	$4.32 \cdot 10^{-7}$
E_x^k	$9.73 \cdot 10^{-3}$	$3.38 \cdot 10^{-3}$	$5.81 \cdot 10^{-5}$	$3.03 \cdot 10^{-5}$	$9.17 \cdot 10^{-7}$	$1.33 \cdot 10^{-6}$	$5.19 \cdot 10^{-8}$	$5.69 \cdot 10^{-8}$

Таблица 7

Погрешности решения краевой задачи (85) [Estimates for the errors in the solutions of the boundary value problem (85)]

k	4	5	6	7	8	9	10	11
D_x^k, %	$3.00 \cdot 10^{-2}$	$1.88 \cdot 10^{-2}$	$2.16 \cdot 10^{-3}$	$1.75 \cdot 10^{-3}$	$6.76 \cdot 10^{-6}$	$1.07 \cdot 10^{-5}$	$5.86 \cdot 10^{-7}$	$5.97 \cdot 10^{-7}$
E_x^k	$3.65 \cdot 10^{-3}$	$2.13 \cdot 10^{-3}$	$2.09 \cdot 10^{-4}$	$1.67 \cdot 10^{-4}$	$8.16 \cdot 10^{-7}$	$1.30 \cdot 10^{-6}$	$6.80 \cdot 10^{-8}$	$6.95 \cdot 10^{-8}$

Таблица 8

Погрешности решения краевой задачи (86) [Estimates for the errors in the solutions of the boundary value problem (86)]

k	2	3	4	5	6	7	8	9
D_x^k, %	$1.23 \cdot 10^{-1}$	$1.08 \cdot 10^{-1}$	$6.50 \cdot 10^{-4}$	$4.22 \cdot 10^{-4}$	$2.03 \cdot 10^{-6}$	$1.24 \cdot 10^{-6}$	$3.12 \cdot 10^{-7}$	$3.04 \cdot 10^{-7}$
E_x^k	$3.10 \cdot 10^{-1}$	$2.79 \cdot 10^{-1}$	$1.70 \cdot 10^{-3}$	$1.18 \cdot 10^{-3}$	$5.56 \cdot 10^{-6}$	$2.80 \cdot 10^{-6}$	$6.76 \cdot 10^{-7}$	$6.80 \cdot 10^{-7}$

Таблица 9

Погрешности решения краевой задачи (87) [Estimates for the errors in the solutions of the boundary value problem (87)]

k	2	3	4	5	6	7
D_x^k, %	$7.53 \cdot 10^{-2}$	$1.35 \cdot 10^{-1}$	$4.22 \cdot 10^{-4}$	$3.93 \cdot 10^{-4}$	$8.61 \cdot 10^{-5}$	$8.70 \cdot 10^{-5}$
D_y^k, %	$2.24 \cdot 10^{-1}$	$3.52 \cdot 10^{-1}$	$4.81 \cdot 10^{-4}$	$2.56 \cdot 10^{-4}$	$8.24 \cdot 10^{-5}$	$8.18 \cdot 10^{-5}$
E_x^k	$1.75 \cdot 10^{-1}$	$4.50 \cdot 10^{-1}$	$8.48 \cdot 10^{-4}$	$7.65 \cdot 10^{-4}$	$1.71 \cdot 10^{-4}$	$1.72 \cdot 10^{-4}$
E_y^k	$4.10 \cdot 10^{-1}$	$6.54 \cdot 10^{-1}$	$1.15 \cdot 10^{-3}$	$7.24 \cdot 10^{-4}$	$1.57 \cdot 10^{-4}$	$1.57 \cdot 10^{-4}$

а также при исследовании краевой задачи для ОДУ2 из [20]:

$$\begin{cases} x'' - \dfrac{2}{t}x' - \dfrac{4}{t^2}x = \dfrac{\sin t}{t} + \dfrac{4t\cos t}{t^2}, \quad t \in [1,5], \\ 2x(1) - x'(1) = -5.012, \\ x(5) + 2x'(5) = -22.631 \end{cases} \tag{91}$$

и при исследовании краевой задачи для системы ОДУ2 из [14]:

$$\begin{cases} (1+t)x'' + 2x + ty'' - 2y = 2\sin 2t, \quad t \in [2\pi, 3\pi], \\ x'' + 2x - 2ty' = 2(1+t^2)\sin 2t, \\ x(2\pi) + x'(2\pi) = 0, \qquad y(2\pi) + 2y'(2\pi) = 2(\pi+1), \\ 3x(3\pi) + 2x'(3\pi) = 0, \quad 2y(3\pi) + 3y'(3\pi) = 3(2\pi+1). \end{cases}$$

Расчеты погрешностей без использовании метода повышения ПА задач (84)–(91) приведены в [12–14, 20], где, по данным таблиц, относительная и абсолютная погрешности уменьшаются довольно «плавно», что свидетельствует о независимости ПА от четности или нечетности k. В качестве иллюстрации ниже приведена табл. 10 для задачи (84), заимствованная из [12].

Обратимся к ОДУ3. Используем модифицированный метод повышения ПА при исследовании задачи (68).

Результаты численного эксперимента приведены в табл. 11, из которой следует, что с увеличением степени k используемого многочлена Тейлора относительная и абсолютная погрешности уменьшаются довольно «резко» или «скачкообразно» (не менее чем на порядок) при переходе от четного к нечетному значению k, что свидетельствует о зависимости ПА от четности или нечетности k при использовании модифицированного метода повышения ПА при выполнении численных экспериментов.

Анализ выполненных исследований позволяет сделать вывод: при численном интегрировании краевых задач для ОДУ четной степени следует исполь-

Таблица 10

Погрешности решения краевой задачи (84), вычисленные без использования метода повышения ПА [Estimates for the errors in the solutions of the boundary value problem (84) calculated without using the method of the increase of the order approximation]

k	4	5	6	7	8	9	10	11
D_x^k, %	$8.95 \cdot 10^{-2}$	$2.53 \cdot 10^{-2}$	$1.14 \cdot 10^{-3}$	$2.20 \cdot 10^{-4}$	$4.69 \cdot 10^{-5}$	$1.01 \cdot 10^{-5}$	$1.80 \cdot 10^{-6}$	$4.32 \cdot 10^{-7}$
E_x^k	$1.14 \cdot 10^{-2}$	$3.38 \cdot 10^{-3}$	$1.57 \cdot 10^{-4}$	$3.03 \cdot 10^{-5}$	$6.12 \cdot 10^{-6}$	$1.33 \cdot 10^{-6}$	$2.38 \cdot 10^{-7}$	$5.69 \cdot 10^{-8}$

Таблица 11

Погрешности решения краевой задачи (68), вычисленные с использованием модифицированного метода повышения ПА [Estimates for the errors in the solutions of the boundary value problem (68) calculated using the modified method of the increase of the order approximation]

k	4	5	6	7	8	9	10
D_x^k, %	$5.02 \cdot 10^{-3}$	$3.83 \cdot 10^{-4}$	$2.26 \cdot 10^{-3}$	$1.44 \cdot 10^{-6}$	$6.66 \cdot 10^{-6}$	$4.80 \cdot 10^{-9}$	$1.97 \cdot 10^{-9}$
E_x^k	$5.06 \cdot 10^{-3}$	$3.51 \cdot 10^{-4}$	$1.71 \cdot 10^{-3}$	$1.39 \cdot 10^{-6}$	$4.96 \cdot 10^{-6}$	$4.03 \cdot 10^{-9}$	$1.54 \cdot 10^{-9}$

зовать метод повышения ПА, для ОДУ нечетной степени — модифицированный метод повышения ПА.

Выводы. Основные выводы по работе можно сформулировать следующим образом.

1. Дан и апробирован метод повышения порядка аппроксимации на единицу разностной краевой задачи для ОДУ4, ОДУ3, ОДУ2 и системы ОДУ2, содержащих в своих граничных условиях хотя бы одно смешанное граничное условие или граничное условие в форме производной той или иной степени больше нуля.
2. Установлено, что при исследовании дифференциальных краевых задач, содержащих ОДУz (z — порядок ОДУ), следует руководствоваться следующими рекомендациями:
   а) при $z = 2m$ использовать $(z+1)$-точечный шаблон и матричный метод численного интегрирования;
   б) при $z = 2m + 1$ использовать $(z+2)$-точечный шаблон и модифицированный матричный метод численного интегрирования.

Конкурирующие интересы. Я заявляю об отсутствии явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

Авторская ответственность. Я несу полную ответственность за предоставление окончательной версии рукописи в печать. Окончательная версия рукописи мною одобрена.

Финансирование. Это исследование не получило специального финансирования.

Библиографический список

1. Keller H. B. Accurate difference methods for nonlinear two-point boundary value problems // *SIAM J. Numer. Anal.*, 1974. vol. 11, no. 2. pp. 305–320. https://doi.org/10.1137/0711028.
2. Lentini M., Pereyra V. A variable order finite difference method for nonlinear multipoint boundary value problems // *Math. Comp.*, 1974. vol. 28, no. 128. pp. 981–1003. https://doi.org/10.1090/s0025-5718-1974-0386281-4.
3. Keller H. B. Numerical solution of boundary value problems for ordinary differential equations: Survey and some resent results on difference methods / *Numerical Solutions of Boundary Value Problems for Ordinary Differential Equations*: Part I: Survey Lectures; ed. A. K. Aziz. New York: Academic Press, 1975. pp. 27–88. https://doi.org/10.1016/b978-0-12-068660-5.50007-7.
4. Годунов С. К., Рябенький В. С. *Разностные схемы. Введение в теорию.* М.: Наука, 1977. 439 с.
5. Формалеев В. Ф., Ревизников Д. Л. *Численные методы.* М.: Физматлит, 2004. 400 с.
6. Самарский А. А. *Теория разностных схем.* М.: Наука, 1977. 656 с.
7. Самарский А. А., Гулин А. В. *Численные методы.* М.: Наука, 1973. 432 с.
8. Самарский А. А., Гулин А. В. *Устойчивость разностных схем.* М.: Наука, 1973. 416 с.
9. Boutayeb A., Chetouani A. Global extrapolations of numerical methods for solving a parabolic problem with non local boundary conditions // *Intern. J. Comp. Math.*, 2003. vol. 80, no. 6. pp. 789–797. https://doi.org/10.1080/0020716021000039209.
10. Boutayeb A., Chetouani A. A numerical comparison of different methods applied to the solution of problems with non local boundary conditions // *Appl. Math. Sci.*, 2007. vol. 1, no. 44. pp. 2173–2185. http://www.m-hikari.com/ams/ams-password-2007/ams-password41-44-2007/boutayebAMS41-44-2007.pdf.

11. Радченко В. П., Усов А. А. Модификация сеточных методов решения линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами на основе тейлоровских разложений // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2008. № 2(17). С. 60–65. https://doi.org/10.14498/vsgtu646.
12. Маклаков В. Н., Ильичева М. А. Численное интегрирование матричным методом и оценка порядка аппроксимации разностных краевых задач для неоднородных линейных обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка с переменными коэффициентами // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2020. Т. 24, № 1. С. 137–162. https://doi.org/10.14498/vsgtu1732.
13. Маклаков В. Н. Оценка порядка аппроксимации матричного метода численного интегрирования краевых задач для линейных неоднородных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2014. № 3(36). С. 143–160. https://doi.org/10.14498/vsgtu1364.
14. Маклаков В. Н. Оценка порядка аппроксимации матричного метода численного интегрирования краевых задач для систем линейных неоднородных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами. Сообщение 2. Краевые задачи с граничными условиями второго и третьего рода // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2017. Т. 21, № 1. С. 55–79. https://doi.org/10.14498/vsgtu1528.
15. Маклаков В. Н., Стельмах Я. Г. Численное интегрирование матричным методом краевых задач для линейных неоднородных обыкновенных дифференциальных уравнений третьего порядка с переменными коэффициентами // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2018. Т. 22, № 1. С. 153–183. https://doi.org/10.14498/vsgtu1565.
16. Турчак Л. И. *Основы численных методов*. М.: Наука, 1987. 320 с.
17. Фихтенгольц Г. М. *Курс дифференциального и интегрального исчисления*. Т. 1. М.: Наука, 1970. 608 с.
18. Курош А. Г. *Курс высшей алгебры*. М.: Наука, 1971. 431 с.
19. Закс Л. *Статистическое оценивание*. М.: Статистика, 1976. 598 с.
20. Сходимость матричного метода численного интегрирования краевых задач для линейных неоднородных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2015. Т. 19, № 3. С. 559–577. https://doi.org/10.14498/vsgtu1426.

Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2020, vol. 24, no. 4, pp. 718–751
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1785

MSC: 34B99

A method for increasing the order of approximation to an arbitrary natural number by the numerical integration of boundary value problems for inhomogeneous linear ordinary differential equations of various degrees with variable coefficients by the matrix method

© *V. N. Maklakov*

Samara State Technical University,
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russian Federation.

Abstract

The paper includes the well-known matrix method of numerical integration of boundary value problems for inhomogeneous linear ordinary differential equations with variable coefficients, which provides retaining an arbitrary number of Taylor series expansion members of the sought-for solution or, equally, using the Taylor polynomial of arbitrary degree.

The difference boundary value problem approximating the differential boundary value problem is divided into two subtasks: the first subtask includes difference equations, in the construction of which the boundary conditions of the boundary value problem were not used. The second subtask includes difference equations, in the construction of which the boundary conditions of the problem were used.

Based on the earlier results, the method of increasing the order of approximation of the second subtask per unit, and, consequently, of the entire difference boundary problem as a whole is obtained and tested. The earlier findings are as follows:

a) the order of approximation of the first and second subtasks is proportional to the degree of the Taylor polynomial used;
b) the order of approximation of the first subtask depends on the parity or oddness of the degree of the Taylor polynomial used. It turned out that when using the degrees of the Taylor polynomial which are equal to $2m-1$ and $2m$, the approximation orders of these two subtasks are the same;
c) the order of approximation of the second subtask coincides with the order of approximation of the first subtask, if the second subtask does not contain the specified values of any derivatives included in the boundary conditions;

Research Article

Please cite this article in press as:
Maklakov V. N. A method for increasing the order of approximation to an arbitrary natural number by the numerical integration of boundary value problems for inhomogeneous linear ordinary differential equations of various degrees with variable coefficients by the matrix method, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2020, vol. 24, no. 4, pp. 718–751. https://doi.org/10.14498/vsgtu1785 (In Russian).

Author's Details:
Vladimir N. Maklakov https://orcid.org/0000-0003-1644-7424
Cand. Phys. & Math. Sci.; Associate Professor; Dept. of Applied Mathematics and Computer Science; e-mail: makvo63@yandex.ru

d) the presence in the second subtask of at least one derivative value of varying degrees included in the boundary conditions leads to a decrease in the order of approximation per unit in both the second subtask and the entire difference boundary value problem in general.

The theoretical conclusions have been confirmed by numerical experiments.

Keywords: ordinary differential equations, boundary value problems, approximation order, numerical methods, Taylor polynomials.

Received: 12th May, 2019 / Revised: 17th September, 2020 /
Accepted: 16th November, 2020 / First online: 26th November, 2020

Competing interests. I declare that I have no apparent or potential conflicts of interest related to the publication of this article.

Author's Responsibilities. I take full responsibility for submitting the final manuscript in print. I approved the final version of the manuscript.

Funding. This research received no specific grant from any funding agency in the public, commercial, or not-for-profit sectors.

References

1. Keller H. B. Accurate difference methods for nonlinear two-point boundary value problems, *SIAM J. Numer. Anal.*, 1974, vol. 11, no. 2, pp. 305–320. https://doi.org/10.1137/0711028.
2. Lentini M., Pereyra V. A variable order finite difference method for nonlinear multipoint boundary value problems, *Math. Comp.*, 1974, vol. 28, no. 128, pp. 981–1003. https://doi.org/10.1090/s0025-5718-1974-0386281-4.
3. Keller H. B. Numerical solution of boundary value problems for ordinary differential equations: Survey and some resent results on difference methods, In: *Numerical Solutions of Boundary Value Problems for Ordinary Differential Equations*, Part I: Survey Lectures; ed. A. K. Aziz. New York, Academic Press, 1975, pp. 27–88. https://doi.org/10.1016/b978-0-12-068660-5.50007-7.
4. Godunov S. K., Ryabenki V. S. *Theory of Difference Schemes: An Introduction*. New York, Wiley, 1964, xii+289 pp.
5. Formaleev V. F., Reviznikov D. L. *Chislennye metody* [Numerical Methods]. Moscow, Fizmatlit, 2004, 400 pp. (In Russian)
6. Samarskii A. A. *Teoriia raznostnykh skhem* [The Theory of Difference Schemes]. Moscow, Nauka, 1977, 656 pp. (In Russian)
7. Samarskii A. A., Gulin A. V. *Chislennye metody* [Numerical Methods]. Moscow, Nauka, 1973 (In Russian).
8. Samarskii A. A., Gulin A. V. *Ustoichivost' raznostnykh skhem* [The Stability of Difference Schemes]. Moscow, Nauka, 1973, 416 pp. (In Russian)
9. Boutayeb A., Chetouani A. Global extrapolations of numerical methods for solving a parabolic problem with non local boundary conditions, *Intern. J. Comp. Math.*, 2003, vol. 80, no. 6, pp. 789–797. https://doi.org/10.1080/0020716021000039209.
10. Boutayeb A., Chetouani A. A numerical comparison of different methods applied to the solution of problems with non local boundary conditions, *Appl. Math. Sci.*, 2007, vol. 1, no. 44, pp. 2173–2185. http://www.m-hikari.com/ams/ams-password-2007/ams-password41-44-2007/boutayebAMS41-44-2007.pdf.
11. Radchenko V. P., Usov A. A. Modified grid method for solving linear differential equation equipped with variable coefficients based on Taylor series, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2008, no. 2(17), pp. 60–65 (In Russian). https://doi.org/10.14498/vsgtu646.

12. Maklakov V. N., Ilicheva M. A. Numerical integration by the matrix method and evaluation of the approximation order of difference boundary value problems for non-homogeneous linear ordinary differential equations of the fourth order with variable coefficients, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2020, vol. 24, no. 1, pp. 137–162 (In Russian). https://doi.org/10.14498/vsgtu1732.
13. Maklakov V. N. Estimation of the order of the matrix method approximation of numerical integration of boundary-value problems for inhomogeneous linear ordinary differential equations of the second order, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], no. 3(36), pp. 143–160 (In Russian). https://doi.org/10.14498/vsgtu1364.
14. Maklakov V. N. The evaluation of the order of approximation of the matrix method for numerical integration of the boundary value problems for systems of linear non-homogeneous ordinary differential equations of the second order with variable coefficients. Message 2. Boundary value problems with boundary conditions of the second and third kind, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2017, vol. 21, no. 1, pp. 55–79 (In Russian). https://doi.org/10.14498/vsgtu1528.
15. Maklakov V. N., Stelmakh Ya. G. Numerical integration by the matrix method of boundary value problems for linear inhomogeneous ordinary differential equations of the third order with variable coefficients, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2018, vol. 22, no. 1, pp. 153–183 (In Russian). https://doi.org/10.14498/vsgtu1565.
16. Turchak L. I. *Osnovy chislennykh metodov* [The Fundamentals of Numerical Methods]. Moscow, Nauka, 1987, 320 pp. (In Russian)
17. Fichtenholz G. M. *Differential- und Integralrechnung.* I [Differential and Integral Calculus. I], Hochschulbücher für Mathematik [University Books for Mathematics], vol. 61. Berlin, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1986, xiv+572 pp. (In German)
18. Kurosh A. *Higher algebra.* Moscow, Mir Publ., 1972, 428 pp.
19. Zaks L. *Statisticheskoe otsenivanie* [Statistical Estimation]. Moscow, Statistika, 1976, 598 pp. (In Russian)
20. Maklakov V. N. Convergence of the matrix method of numerical integration of the boundary value problems for linear nonhomogeneous ordinary differential second order equations with variable coefficients, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2015, vol. 19, no. 3, pp. 559–577 (In Russian). https://doi.org/10.14498/vsgtu1426.