



УДК 517.958:539.3(1)

Статическая термоустойчивость пологой геометрически нерегулярной оболочки из ортотропного термочувствительного материала

© М. В. Вильде, О. А. Мыльцина,
С. А. Григорьев, Г. Н. Белосточный

Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского
(национальный исследовательский университет),
Россия, 410012, Саратов, ул. Астраханская, 83.


Аннотация

Рассматривается полая ортотропная геометрически нерегулярная оболочка (ГНО) постоянного кручения, термомеханические параметры которой линейно зависят от температуры. При достижении температуры определенного значения происходит скачкообразно смена формы равновесия, что вызывает изменение первоначальной геометрии оболочки. Эти значения температур называют критическими.

Для практики значительный интерес представляют соотношения, связывающие критические температуры с геометрическими и термомеханическими параметрами ГНО. Решение задач статической термоустойчивости ГНО, как правило, начинается с анализа их исходного безмоментного состояния. Тангенциальные усилия, вызванные нагревом оболочки, определяются как решения системы сингулярных дифференциальных уравнений безмоментной термоупругости. Эти усилия содержатся в формах Брайена или Рейсснера в уравнениях статической термоустойчивости, и от их структуры существенно зависит успех в дальнейшем решении задачи.

В работе решение сингулярной безмоментной термоупругости найдено в элементарных функциях. Уравнения моментной термоупругости,

Краткое сообщение

 Контент публикуется на условиях лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru) (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)


Образец для цитирования

Вильде М. В., Мыльцина О. А., Григорьев С. А., Белосточный Г. Н. Статическая термоустойчивость пологой геометрически нерегулярной оболочки из ортотропного термочувствительного материала // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2020. Т. 24, № 4. С. 769–779. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1784>.

Сведения об авторах

Мария Владимировна Вильде  <https://orcid.org/0000-0001-8198-3368>

доктор физико-математических наук; профессор; каф. математической теории упругости и биомеханики; e-mail: mv_wilde@mail.ru

Ольга Анатольевна Мыльцина  <https://orcid.org/0000-0003-4718-2772>

кандидат физико-математических наук; доцент; каф. теории функций и стохастического анализа; e-mail: omyltsina@yandex.ru

Степан Андреевич Григорьев; аспирант; каф. математической теории упругости и биомеханики; e-mail: kafedramtuibm@yandex.ru

Григорий Николаевич Белосточный  <https://orcid.org/0000-0001-6949-4174>

доктор технических наук, профессор; профессор; каф. математической теории упругости и биомеханики; e-mail: belostochny@mail.ru

записанные в компонентах поля перемещений, методом функции перемещений сведены к одному сингулярному дифференциальному уравнению в частных производных восьмого порядка. Решение записывается в виде двойного тригонометрического ряда, коэффициенты которого на основании процедуры Галёркина определяются как решения линейной однородной алгебраической системы уравнений. Из равенства нулю определителя этой системы (в первом приближении) получено алгебраическое уравнение пятой степени для относительной критической температуры, наименьший положительный действительный корень которого и есть искомая температура. Проводится количественный анализ влияния геометрических и термомеханических параметров ГНО на величины критических температур.

Ключевые слова: ортотропность, термочувствительность, статика, термоустойчивость, сингулярность, пологая оболочка, кручение, температура.

Получение: 12 мая 2020 г. / Исправление: 14 октября 2020 г. /

Принятие: 16 ноября 2020 г. / Публикация онлайн: 21 декабря 2020 г.

Введение. В известных областях современной техники используются конструкции, содержащие элементы в виде геометрически нерегулярных оболочек (ГНО), выполненных из ортотропных чувствительных к нагреву материалов.

Штатные условия эксплуатации предусматривают в ряде случаев сохранение их первоначальной геометрии при воздействии температурных и силовых факторов со стороны рабочей среды. Это одна из основных причин, требующая предварительного предельно точного анализа статической и динамической термоустойчивости объектов указанного класса — геометрически нерегулярных ортотропных пологих оболочек, обширный класс которых образуют ребристые оболочки. Несмотря на значительное число научных работ, посвященных гладким оболочкам, информация о термоустойчивости ГНО в открытой печати практически отсутствует.

Целью настоящей работы является решение задачи статической термоустойчивости ортотропной ГНО из термочувствительного материала на основании строгой континуальной модели [1, 2]. Уравнение для критической температуры получено в предположении линейной зависимости термомеханических параметров от температуры.

Количественные результаты представлены в виде таблиц, наглядно иллюстрирующих влияние геометрических и термомеханических параметров на величины критических температур.

1. Методика решения задачи статической термоустойчивости ГНО из термочувствительного материала. Рассмотрим геометрически нерегулярную пологую ортотропную оболочку постоянного кручения, уравнение срединной поверхности которой имеет вид [3, 4]

$$x_3(x_1, x_2) = \frac{\tilde{\delta}}{ab} x_1 x_2,$$

где $\tilde{\delta}$ — наибольший подъем оболочки над ее прямоугольным планом в координатной плоскости $\pi_1(x_1, x_2)$ со сторонами a и b . Оболочка выполнена из термочувствительного материала, модули упругости и коэффициенты линейного расширения линейно зависят от постоянной температуры θ [5, 6]:

$$E_j = E_{j0}(1 - \gamma_j\theta), \quad \alpha_j = \alpha_{j0}(1 + \beta_j\theta), \quad j = 1, 2.$$

Здесь E_{j0} и α_{j0} — соответственно модули упругости и коэффициенты линейного расширения материала при нулевой температуре; γ_j, β_j — известные постоянные.

Тангенциальные усилия T^{ij} , возникающие в ГНО при нагреве до постоянной температуры θ , когда она находится в безмоментном состоянии, удовлетворяют сингулярным дифференциальным уравнениям [7–10]:

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{,1}^{11} + \tilde{T}_{,2}^{12} + \sum_{i=1}^n a_i \bar{T}_{i,2}^{12} \delta(x_1 - x_1^i) &= 0, \\ \tilde{T}_{,2}^{22} + \tilde{T}_{,1}^{12} + \sum_{i=1}^n a_i \bar{T}_{i,2}^{22} \delta(x_1 - x_1^i) &= 0, \quad \tilde{T}^{12} = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\tilde{T}^{11} = B_1[\tilde{u}_{,1} + \nu_2 \tilde{v}_{,2} - (\alpha_1 + \nu_2 \alpha_2)\theta]$, $\tilde{T}^{22} = B_2[\tilde{v}_{,2} + \nu_1 \tilde{u}_{,1} - (\alpha_2 + \nu_1 \alpha_1)\theta]$, $\tilde{T}^{12} = Gh(\tilde{u}_{,2} + \tilde{v}_{,1}) - 2k_{12}\tilde{w}$, $\delta(x_1 - x_1^i)$ — сдвинутая δ -функция Дирака,

$$B_1 = \frac{E_1 h}{1 - \nu_1 \nu_2}, \quad B_2 = \frac{E_2 h}{1 - \nu_1 \nu_2}, \quad k_{12} = x_{3,12} = \frac{\tilde{\delta}}{ab},$$

$\bar{T}_i^{12} = Gh_i \tilde{u}_{,2}$, $\bar{T}_i^{22} = E_2 h_i (\tilde{v}_{,2} - \alpha_2 \theta)$; a_i — ширина i -того ребра, h_i — высота i -того ребра, n — число ребер, ν_j — коэффициенты Пуассона, $j = 1, 2$; $\tilde{u}(\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w})$ — компоненты поля перемещений в безмоментном состоянии ГНО, G — модуль сдвига.

Решение сингулярной системы (1) в случае краевых условий

$$\begin{aligned} \tilde{u} = 0, \quad \tilde{T}^{12} = 0 \quad \text{при } x_1 = 0, \quad x_1 = a, \\ \tilde{v} = 0, \quad \tilde{T}^{12} = 0 \quad \text{при } x_2 = 0, \quad x_2 = b \end{aligned}$$

запишется в элементарных функциях [11, 12]:

$$\tilde{u} = 0, \quad \tilde{T}^{12} = 0, \quad \tilde{T}^{11} = -B_1(\alpha_1 + \nu_2 \alpha_2)\theta, \quad \tilde{T}^{22} = -B_2(\alpha_2 + \nu_1 \alpha_1)\theta. \quad (2)$$

Тангенциальные усилия (2) содержатся в сингулярных уравнениях статической термоустойчивости ГНО, которая в компонентах поля перемещений имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} u_{,11} + \frac{Gh}{B_1} u_{,22} + \left(\nu_2 + \frac{Gh}{B_1}\right) v_{,12} - 2 \frac{Gh}{B_1} k_{12} w_{,2} &= 0, \\ v_{,22} + \frac{Gh}{B_2} v_{,11} + \left(\nu_1 + \frac{Gh}{B_2}\right) u_{,12} - 2 \frac{Gh}{B_2} k_{12} w_{,1} &= 0, \end{aligned}$$

$$D_1 w_{,1111} + 2(D_1 \nu_1 + 2D) w_{,1122} + D_2 w_{,2222} + 4Ghk_{12}^2 w - \quad (3)$$

$$-2Ghk_{12}(u,_{2} + v,_{1}) + \sum_{i=1}^n (E_2 J_i w,_{2222} + \bar{T}_i^{22} w,_{22}) \delta(x_1 - x_1^i) + \\ + \tilde{T}^{11} w,_{11} + 2\tilde{T}^{12} w,_{12} + \tilde{T}^{22} w,_{22} = 0.$$

Здесь $D_1 = \frac{E_1 h^3}{12(1 - \nu_1 \nu_2)}$, $D_2 = \frac{E_2 h^3}{12(1 - \nu_1 \nu_2)}$, $D = \frac{Gh^3}{12}$, $\bar{T}_i^{22} = -E_2 a_i h_i \alpha_2 \theta$, $J_i = \frac{a_i h_i^3}{12}$.

Обращаясь к методу функций перемещений [3, 4], система (3) подстановкой

$$u = 2k_{12} \frac{Gh}{B_2} \left(\frac{E_2}{E_1} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x_1^3} - \nu_2 \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x_1^2 \partial x_2} \right), \quad v = 2k_{12} \frac{Gh}{B_2} \left(\frac{\partial^3 \Phi}{\partial x_1^3} - \nu_2 \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x_1 \partial x_2^2} \right), \\ w = \frac{Gh}{B_2} \left(\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x_1^4} + \left(\frac{E_2}{G} - 2\nu_2 \right) \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{E_2}{E_1} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x_2^4} \right)$$

сводится к сингулярному дифференциальному уравнению восьмого порядка относительно функции $\Phi(x_1, x_2)$:

$$\frac{\partial^8 \Phi}{\partial x_1^8} + \left[\frac{E_2}{G} + 4(1 - \nu_1 \nu_2) \frac{G}{E_1} \right] \frac{\partial^8 \Phi}{\partial x_1^6 \partial x_2^2} + \\ + 2 \left[\frac{E_2}{E_1} + \left(\frac{E_2}{G} - 2\nu_2 \right) (\nu_2 + 2(1 - \nu_1 \nu_2)) \right] \frac{G}{E_1} \frac{\partial^8 \Phi}{\partial x_1^4 \partial x_2^4} + \\ + \left[\frac{E_2}{G} + 4(1 - \nu_1 \nu_2) \frac{G}{E_1} \right] \frac{E_2}{E_1} \frac{\partial^8 \Phi}{\partial x_1^2 \partial x_2^6} + \left(\frac{E_2}{E_1} \right)^2 \frac{\partial^8 \Phi}{\partial x_2^8} + \\ + \frac{48}{a^2 b^2} \frac{E_2}{E_1} \left(\frac{\tilde{\delta}}{h} \right)^2 (1 - \nu_1 \nu_2) \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \\ + \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{E_2 J_i}{D_1} \left[\frac{\partial^8 \Phi}{\partial x_1^4 \partial x_2^4} + \left(\frac{E_2}{G} - 2\nu_2 \right) \frac{\partial^8 \Phi}{\partial x_1^2 \partial x_2^6} + \frac{E_2}{E_1} \frac{\partial^8 \Phi}{\partial x_2^8} \right] + \right. \\ \left. + \frac{\bar{T}_i^{22}}{D_1} \left[\frac{\partial^6 \Phi}{\partial x_1^4 \partial x_2^2} + \left(\frac{E_2}{G} - 2\nu_2 \right) \frac{\partial^6 \Phi}{\partial x_1^2 \partial x_2^4} + \frac{E_2}{E_1} \frac{\partial^6 \Phi}{\partial x_2^6} \right] \right\} \delta(x_1 - x_1^i) - \\ - \frac{1}{D_1} \left(\tilde{T}^{11} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + 2\tilde{T}^{12} \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} + \tilde{T}^{22} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) \times \\ \times \left[\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x_1^4} + \left(\frac{E_2}{G} - 2\nu_2 \right) \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{E_2}{E_1} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x_2^4} \right] = 0. \quad (4)$$

В этом уравнении тангенциальные усилия определяются соотношениями (2).

Рассмотрим случай шарнирно-подвижного опирания краев оболочки:

$$u = 0, \quad T^{12} = 0, \quad M^{11} = 0, \quad w = 0 \quad \text{при } x_1 = 0, \quad x_1 = b, \\ v = 0, \quad T^{12} = 0, \quad M^{22} = 0, \quad w = 0 \quad \text{при } x_2 = 0, \quad x_2 = b, \quad (5)$$

где $M^{11} = -D_1(w,_{11} + \nu_2 w,_{22})$, $M^{22} = -D_2(w,_{22} + \nu_1 w,_{11})$.

Краевые условия (5) переписутся через функцию перемещений $\Phi(x_1, x_2)$ в виде

$$\begin{aligned} \frac{E_2}{E_1} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x_2^3} - \nu_2 \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x_1^2 \partial x_2} &= 0, & \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x_1^4} - \nu_2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} &= 0, \\ \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x_1^4} - \left(\frac{E_2}{G} - 2\nu_2 \right) \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{E_2}{E_1} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x_2^4} &= 0, \\ \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \left(\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x_1^4} + \left(\frac{E_2}{G} - 2\nu_2 \right) \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{E_2}{E_1} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x_2^4} \right) &= 0, \quad \text{при } x_1 = 0, \quad x_1 = a; \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \frac{E_2}{E_1} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x_2^4} - \nu_2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} &= 0, & \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x_1^3} - \nu_2 \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x_1 \partial x_2^2} &= 0, \\ \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x_1^4} - \left(\frac{E_2}{G} - 2\nu_2 \right) \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{E_2}{E_1} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x_2^4} &= 0, \\ \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \left(\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x_1^4} + \left(\frac{E_2}{G} - 2\nu_2 \right) \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{E_2}{E_1} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x_2^4} \right) &= 0, \quad \text{при } x_2 = 0, \quad x_2 = b. \end{aligned} \quad (7)$$

Функцию $\Phi(x_1, x_2)$, тождественно удовлетворяющую всем условиям (6), (7), зададим в виде двойного тригонометрического ряда с постоянными коэффициентами:

$$\Phi(x_1, x_2) = \sum_{k,m} C_{km} \sin \frac{k\pi x_1}{a} \sin \frac{m\pi x_2}{b}. \quad (8)$$

Подстановка (8) в уравнение (4) с последующим обращением к процедуре Галёркина приводит к однородной алгебраической системе уравнений относительно коэффициентов ряда (8) [13]. Из равенства нулю определителя этой системы получим алгебраическое уравнение относительно безразмерной величины $\theta_* = (a/h)^2 \alpha_{10} \theta$. Наименьший положительный корень этого уравнения и есть искомая относительная критическая температура θ_*^{cr} , при достижении которой возможен скачкообразный переход термоупругой системы к новой форме равновесия. В первом приближении это уравнение пятой степени запишется в виде

$$\begin{aligned} K_5(\gamma, \beta) \theta_*^5 + K_4(\gamma, \beta) \theta_*^4 + [K_3'(\gamma) + K_3''(\gamma, \beta)] \theta_*^3 + \\ + [K_2'(\gamma) + K_2''(\gamma, \beta)] \theta_*^2 + [K_1'(\gamma) + K_1''(\alpha)] \theta_* + K_0 = 0, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} K_0 = a_{11} + a_{12} \frac{E_{20}}{G} + a_{13} \frac{G}{E_{10}} + a_{14} \frac{E_{20}}{E_{10}} + \\ + a_{15} \frac{E_{10}}{G} \left(\frac{E_{20}}{E_{10}} \right)^2 + a_{16} \left(\frac{E_{20}}{E_{10}} \right)^2 + a_{17} \frac{G}{E_{10}} \left(\frac{E_{20}}{E_{10}} \right)^2, \end{aligned}$$

$$K'_1(\gamma) = -\left[2a_{11}\gamma_1 + a_{12}\frac{E_{20}}{G}(2\gamma_1 + \gamma_2) + a_{13}\frac{G}{E_{10}}\gamma_1 + a_{14}\frac{E_{20}}{E_{10}}(\gamma_1 + \gamma_2) + a_{15}\frac{E_{10}}{G}\left(\frac{E_{20}}{E_{10}}\right)^2(2\gamma_2 + \gamma_1) + 2a_{16}\left(\frac{E_{20}}{E_{10}}\right)^2\gamma_2 + a_{17}\frac{G}{E_{10}}\frac{E_{20}}{E_{10}}\gamma_2\right],$$

$$K''_1(\alpha) = -12\left[b_{11} + b_{12}\frac{E_{20}}{E_{10}} + b_{13}\frac{E_{20}}{G} - b_{14}\left(\frac{E_{20}}{E_{10}}\right)^2 + b_{15}\frac{E_{10}}{G}\left(\frac{E_{20}}{E_{10}}\right)^2 + b_{16}\frac{\alpha_{20}}{\alpha_{10}} + b_{17}\frac{\alpha_{20}}{\alpha_{10}}\frac{E_{20}}{E_{10}} + b_{18}\frac{\alpha_{20}}{\alpha_{10}}\frac{E_{20}}{G} + b_{19}\frac{\alpha_{20}}{\alpha_{10}}\frac{E_{10}}{G}\left(\frac{E_{20}}{E_{10}}\right)^2 + b_{19}\frac{\alpha_{20}}{\alpha_{10}}\left(\frac{E_{20}}{E_{10}}\right)^2\right],$$

$$K'_2(\gamma) = a_{11}\gamma_2^2 + a_{12}\frac{E_{20}}{G}(\gamma_1^2 + 2\gamma_1\gamma_2) + a_{14}\frac{E_{20}}{E_{10}}\gamma_1\gamma_2 + a_{15}\frac{E_{10}}{G}\left(\frac{E_{20}}{E_{10}}\right)^2(\gamma_2^2 + 2\gamma_1\gamma_2) + a_{16}\left(\frac{E_{20}}{E_{10}}\right)^2\gamma_2^2,$$

$$K''_2(\gamma, \beta) = -12\left[b_{11}(\beta_1 - 2\gamma_1) + b_{12}\frac{E_{20}}{E_{10}}(\beta_1 - \gamma_1 - \gamma_2) + b_{13}\frac{E_{20}}{G}(\beta_1 - 2\gamma_1 - \gamma_2) + b_{14}\left(\frac{E_{20}}{E_{10}}\right)^2(\beta_1 - 2\gamma_2) + b_{15}\frac{E_{10}}{G}\left(\frac{E_{20}}{E_{10}}\right)^2(\beta_1 - 2\gamma_2 - \gamma_1) + b_{16}\frac{\alpha_{20}}{\alpha_{10}}(\beta_2 - 2\gamma_1) + b_{17}\frac{\alpha_{20}}{\alpha_{10}}\frac{E_{20}}{E_{10}}(\beta_2 - \gamma_1 - \gamma_2) + b_{18}\frac{\alpha_{20}}{\alpha_{10}}\frac{E_{20}}{G}(\beta_2 - 2\gamma_1 - \gamma_2) + b_{19}\frac{\alpha_{20}}{\alpha_{10}}\frac{E_{20}}{G}\left(\frac{E_{20}}{E_{10}}\right)^2(\beta_2 - 2\gamma_2 - \gamma_1) + b_{10}\frac{\alpha_{20}}{\alpha_{10}}\left(\frac{E_{20}}{E_{10}}\right)^2(\beta_2 - 2\gamma_2)\right],$$

$$K'_3(\gamma) = -\left[a_{12}\frac{E_{20}}{G}\gamma_1^2\gamma_2 + a_{15}\frac{E_{10}}{G}\left(\frac{E_{20}}{E_{10}}\right)^2\gamma_1\gamma_2^2\right],$$

$$K''_3(\gamma, \beta) = -12\left[b_{11}(\gamma_1^2 - 2\gamma_1\beta_1) + b_{12}\frac{E_{20}}{E_{10}}(\gamma_1\gamma_2 - \beta_1\gamma_1 - \beta_1\gamma_2) + b_{13}\frac{E_{20}}{G}(\gamma_1^2 + 2\gamma_1\gamma_2 - 2\beta_1\gamma_1 - \beta_1\gamma_2) + b_{14}\left(\frac{E_{20}}{E_{10}}\right)^2(\gamma_2^2 - 2\beta_1\gamma_2) + b_{15}\frac{E_{10}}{G}\left(\frac{E_{20}}{E_{10}}\right)^2(\gamma_2^2 + 2\gamma_1\gamma_2 - \beta_1\gamma_1 - 2\beta_1\gamma_2) + b_{16}\frac{\alpha_{20}}{\alpha_{10}}(\gamma_1^2 - 2\gamma_1\beta_2) + b_{17}\frac{\alpha_{20}}{\alpha_{10}}\frac{E_{20}}{E_{10}}(\gamma_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1 - \beta_2\gamma_2) + b_{18}\frac{\alpha_{20}}{\alpha_{10}}\frac{E_{20}}{G}(\gamma_1^2 + 2\gamma_1\gamma_2 - 2\gamma_1\beta_2 - \beta_2\gamma_2) + b_{19}\frac{\alpha_{20}}{\alpha_{10}}\frac{E_{10}}{G}\left(\frac{E_{20}}{E_{10}}\right)^2(\gamma_2^2 + 2\gamma_2\gamma_1 - 2\beta_2\gamma_2 - \beta_2\gamma_1) + b_{10}\frac{\alpha_{20}}{\alpha_{10}}\left(\frac{E_{20}}{E_{10}}\right)^2(\gamma_2^2 - 2\beta_2\gamma_2)\right],$$

$$\begin{aligned}
 K_4(\gamma, \beta) = & -12 \left[b_{11} \beta_1 \gamma_1^2 + b_{12} \frac{E_{20}}{E_{10}} \beta_1 \gamma_1 \gamma_2 + b_{13} \frac{E_{20}}{G} (\beta_1 \gamma_1^2 + 2\beta_1 \gamma_2 \gamma_1 - \gamma_2 \gamma_1^2) + \right. \\
 & + b_{14} \left(\frac{E_{20}}{E_{10}} \right)^2 \beta_1 \gamma_2^2 + b_{15} \frac{E_{10}}{G} \left(\frac{E_{20}}{E_{10}} \right)^2 (\beta_1 \gamma_2^2 + \beta_1^2 \gamma_1 \gamma_2 - \gamma_1 \gamma_2^2) + \\
 & + b_{16} \frac{\alpha_{20}}{\alpha_{10}} \beta_2 \gamma_1^2 + b_{17} \frac{\alpha_{20}}{\alpha_{10}} \frac{E_{20}}{E_{10}} \beta_2 \gamma_1 \gamma_2 + b_{18} \frac{\alpha_{20}}{\alpha_{10}} \frac{E_{20}}{G} (\beta_2 \gamma_1^2 + 2\beta_2 \gamma_1 \gamma_2 - \gamma_1^2 \gamma_2) + \\
 & \left. + b_{19} \frac{\alpha_{20}}{\alpha_{10}} \frac{E_{10}}{G} \left(\frac{E_{20}}{E_{10}} \right)^2 (\beta_2 \gamma_2^2 + 2\beta_2 \gamma_1 \gamma_2 - \gamma_1 \gamma_2^2) + b_{10} \frac{\alpha_{20}}{\alpha_{10}} \left(\frac{E_{20}}{E_{10}} \right)^2 \beta_2 \gamma_2^2 \right],
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 K_5(\gamma, \beta) = & 12 \left[b_{13} \frac{E_{20}}{G} \beta_1 \gamma_1^2 \gamma_2 + b_{15} \frac{E_{10}}{G} \left(\frac{E_{20}}{E_{10}} \right)^2 \beta_1 \gamma_1 \gamma_2^2 + \right. \\
 & \left. + b_{16} \frac{\alpha_{20}}{\alpha_{10}} \frac{E_{20}}{G} \beta_2 \gamma_1^2 \gamma_2 + b_{19} \frac{\alpha_{20}}{\alpha_{10}} \left(\frac{E_{20}}{E_{10}} \right)^2 \beta_2 \gamma_1 \gamma_2^2 \right];
 \end{aligned}$$

$$a_{11} = \pi^2 \left[1 - 4\nu_2^2 \left(\frac{a}{b} \right)^4 \right], \quad a_{12} = \pi^2 \left[\left(\frac{a}{b} \right)^2 + 2\nu_2 \left(\frac{a}{b} \right)^4 \right],$$

$$a_{13} = 4\pi^2 (1 - \nu_1 \nu_2) \left[\left(\frac{a}{b} \right)^2 - 2\nu_2 \left(\frac{a}{b} \right)^4 \right], \quad a_{17} = 4\pi^2 (1 - \nu_1 \nu_2) \left(\frac{a}{b} \right)^6,$$

$$\begin{aligned}
 a_{14} = & \pi^2 \left(\frac{a}{b} \right)^4 \left[2 + 4(1 - \nu_1 \nu_2) + 43 \left(\frac{b}{a} \right)^2 \left(\frac{\tilde{\delta}}{h} \right)^2 \pi^4 + \right. \\
 & \left. + 24(1 - \nu_1 \nu_2) \left[1 - 2\nu_2 \left(\frac{a}{b} \right)^2 \right] \frac{E_2}{E_1} \sum_{i=1}^n \frac{I_i}{ah^3} \sin^2 \frac{\pi x_1^i}{a} \right],
 \end{aligned}$$

$$a_{15} = \pi^2 \left(\frac{a}{b} \right)^6 \left[1 + 24(1 - \nu_1 \nu_2) \frac{E_2}{E_1} \sum_{i=1}^n \frac{I_i}{ah^3} \sin^2 \frac{\pi x_1^i}{a} \right],$$

$$a_{16} = \pi^2 \left(\frac{a}{b} \right)^8 \left[1 + 24(1 - \nu_1 \nu_2) \frac{E_2}{E_1} \sum_{i=1}^n \frac{I_i}{ah^3} \sin^2 \frac{\pi x_1^i}{a} \right];$$

$$b_{11} = 1 - 2\nu_2 \left(\frac{a}{b} \right)^2, \quad b_{12} = \left(\frac{a}{b} \right)^2 \left[\left(\frac{a}{b} \right)^2 (1 - 2\nu_1 \nu_2) + \nu_1 \right],$$

$$b_{13} = \left(\frac{a}{b} \right)^2, \quad b_{14} = \nu_1 \left(\frac{a}{b} \right)^6, \quad b_{15} = \nu_1 \left(\frac{a}{b} \right)^4,$$

$$b_{16} = \left[\nu_2 - 2\nu_2^2 \left(\frac{a}{b} \right)^2 \right] (1 + \psi), \quad b_{17} = \left[\nu_2 \left(\frac{a}{b} \right)^4 + \left(\frac{a}{b} \right)^2 - 2\nu_2 \left(\frac{a}{b} \right)^4 \right] (1 + \psi),$$

$$b_{18} = \nu_2 \left(\frac{a}{b} \right)^2 (1 + \psi), \quad b_{19} = \left(\frac{a}{b} \right)^4 (1 + \psi), \quad b_{10} = \left(\frac{a}{b} \right)^6 (1 + \psi);$$

$$\psi = \sum_{i=1}^n \frac{h_i}{h} \frac{a_i}{a} \sin^2 \frac{\pi x_1^i}{a}.$$

Результаты расчетов. Значения относительных критических температур при различных величинах геометрических и термомеханических параметров приводятся в табл. 1, 2 для материала «стеклопластик КАСТ-Б»

Таблица 1

Величины относительных температур при различных значениях геометрических параметров оболочки [Relative temperatures for different values of the shell geometric parameters]

$\tilde{\delta}/h$	$I_i/(ah^3)$	$\theta_*^{cr}, b/a = 0.5$	$\theta_*^{cr}, b/a = 0.9$
$n = 1$			
1	0	2.7531	1.2064
	0.01	3.1801	1.2898
	0.05	4.8912	1.6232
5	0	3.3985	1.6717
	0.01	3.8226	1.7550
	0.05	5.5366	2.0885
$n = 3$			
1	0	2.7531	1.2064
	0.01	3.6083	1.3781
	0.05	7.0294	2.0400
5	0	3.3984	1.6717
	0.01	4.2537	1.8384
	0.05	7.6748	2.5052

Таблица 2

Величины абсолютных критических температур (в °C) для оболочки из термочувствительного материала [The absolute critical temperatures (in °C) for a thermosensitive shell]

a/h	$\beta = \gamma = 0$	$\beta \neq 0, \gamma = 0$		$\beta = 0, \gamma \neq 0$	
		β	55.7989	γ	56.9019
100	56.8054	2β	54.8596	2γ	57.0024
		3β	54.6269	3γ	57.1073
		β	97.8897	γ	101.2973
75	100.9874	2β	95.1357	2γ	101.6312
		3β	94.4720	3γ	101.9925
		β	212.6090	γ	228.8675
50	227.2217	2β	201.0799	2γ	230.8364
		3β	198.4670	3γ	233.2451

($E_{10} = 213 \cdot 10^8$ Н/м², $E_{20} = 121 \cdot 10^8$ Н/м², $G = 20.3 \cdot 10^8$ Н/м², $\nu_2 = 0.19$),
 везде $a_i/a = 0.01$.

В табл. 2 приводятся значения истинных критических температур θ^{cr} при «замороженных» параметрах: $\beta_1 = \beta_2 = \beta$, $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$, $b/a = 0.5$, $h_i/h = 3.9$, $\tilde{\delta}/h = 2.5$, $n = 3$.

На величины критических температур существенное влияние оказывают параметры h_i/h и $\tilde{\delta}/h$ — абсолютные высоты ребер и кручение оболочки. С увеличением длины ребер их влияние заметно уменьшается. Учет зависимости термомеханических характеристик материала ГНО вносит в значения критических температур тем большие поправки, чем больше относительная толщина оболочки — параметр a/h .

Конкурирующие интересы. Заявляем, что в отношении авторства и публикации этой статьи конфликта интересов не имеем.

Авторский вклад и ответственность. Все авторы принимали участие в разработке концепции статьи и в написании рукописи. Авторы несут ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Исследование выполнялось без финансирования.

Библиографический список

1. Жилин П. А. Линейная теория ребристых оболочек // *Изв. АН СССР. МТТ*, 1970. № 4. С. 150–162.
2. Белосточный Г. Н., Ульянова О. И. Континуальная модель композиции из оболочек вращения с термочувствительной толщиной // *Изв. РАН. МТТ*, 2011. № 2. С. 32–40.
3. Назаров А. А. *Основы теории и методы расчета пологих оболочек*. Л., М.: Стройиздат, 1966.
4. Красюков В. П., Панкратов Н. Д., Рассудов В. М. *Метод тригонометрических рядов в решении температурных задач теории пологих оболочек*. Саратов: СГУ, 1974.
5. Подстригач Я. С., Коляно Ю. М. *Обобщенная термомеханика*. Киев: Наук. думка, 1976.
6. Коляно Ю. М., Кулик А. Н. *Температурные напряжения от объемных источников*. Киев: Наук. думка, 1983.
7. Мыльцина О. А., Белосточный Г. Н. Устойчивость нагретой ортотропной геометрически нерегулярной пластинки в сверхзвуковом потоке газа // *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета*, 2017. № 4. С. 109–120. <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2017.4.08>.
8. Белосточный Г. Н., Рассудов В. М. Континуальный подход к термоустойчивости упругих систем «пластинка–ребра» / *Прикладная теория упругости*. Саратов: Саратов. политехн. ин-т, 1980. С. 94–99.
9. Огибалов П. М., Грибанов В. Ф. *Термоустойчивость пластин и оболочек*. М.: МГУ, 1958.
10. Огибалов П. М. *Вопросы динамики и устойчивости оболочек*. М.: МГУ, 1963.
11. Белосточный Г. Н. Аналитические методы определения замкнутых интегралов сингулярных дифференциальных уравнений термоупругости геометрически нерегулярных оболочек // *Доклады Академии военных наук*, 1999. № 1. С. 14–25.
12. Мыльцина О. А., Белосточный Г. Н. Термоупругость подкрепленной пластинки под действием быстропеременных температурно-силовых воздействий на границе // *Вестник Московского авиационного института*, 2014. Т. 21, № 2. С. 169–174.
13. Канторович Л. В., Крылов В.И. *Приближенные методы высшего анализа*. М.: Физматлит, 1962.

MSC: 74F05, 74K20

Static thermal stability of a shallow geometrically irregular shell made of orthotropic temperature-sensitive material

© *M. V. Wilde, O. A. Myltcina,
S. A. Grigoriev, G. N. Belostochny*

N. G. Chernyshevsky Saratov State University (National Research University),
83, Astrakhanskaya st., Saratov, 410012, Russian Federation.


Abstract

A flat orthotropic geometrically irregular shell of constant torsion, whose thermomechanical parameters are linearly dependent on temperature, is considered. When the temperature reaches a certain value, the change in the shape of the equilibrium occurs abruptly, which causes a change in the initial geometry of the shell. These temperatures are called critical.

For practice, the relationships connecting the critical temperatures with the geometrical and thermomechanical parameters of the geometrically irregular shell are of considerable interest. The solution of the problems of static thermal stability of geometrically irregular shells usually begins with an analysis of their initial momentless state. Tangential forces caused by shell heating are defined as solutions of a system of singular differential equations of momentless thermoelasticity. These efforts are contained in the Brian or Reissner forms in the equations of static thermal stability and the further solution of the problem essentially depends on their structure.

In this paper, the solution of singular momentless thermoelasticity is found by elementary functions. Using the method of displacement functions, the equations of moment thermoelasticity, written in the components of the displacement field, are reduced to a single singular differential equation in partial derivatives of the eighth order depending on the temperature, which is assumed to be constant. The solution is written as a double trigonometric series. The coefficients of the series, based on the Galerkin procedure, are determined as solutions to a linear homogeneous algebraic system of equations. From the equality to zero of the determinant of this system, an algebraic


Short Communication

 The content is published under the terms of the [Creative Commons Attribution 4.0 International License](http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this paper in press as:

Wilde M. V., Myltcina O. A., Grigoriev S. A., Belostochny G. N. Static thermal stability of a shallow geometrically irregular shell made of orthotropic temperature-sensitive material, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2020, vol. 24, no. 4, pp. 769–779. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1784> (In Russian).

Authors' Details:

Maria V. Wilde  <https://orcid.org/0000-0001-8198-3368>

Dr. Phys. & Math. Sci.; Professor; Dept. of Mathematic Theory of Elasticity & Biomechanics; e-mail: mv_wilde@mail.ru

Olga A. Myltcina  <https://orcid.org/0000-0003-4718-2772>

Cand. Phys. & Math. Sci.; Associate Professor; Dept. of Functions & Approximation Theory; e-mail: omyltcina@yandex.ru

Stepan A. Grigoriev ; Postgraduate Student; Dept. of Mathematic Theory of Elasticity & Biomechanics; e-mail: kafedramtuibm@yandex.ru

Grigory N. Belostochny  <https://orcid.org/0000-0001-6949-4174>

Dr. Techn. Sci.; Professor; Dept. of Mathematic Theory of Elasticity & Biomechanics; e-mail: belostochny@mail.ru

equation of the fifth degree is obtained for the relative critical temperature. The smallest positive real root of which is the desired temperature. A quantitative analysis of the influence of the geometrical and thermomechanical parameters of the geometrically irregular shell on the value of the critical temperature is carried out.

Keywords: orthotropic, thermosensitive, statics, thermal stability, singularity, shallow shell, torsion, temperature.

Received: 12th May, 2020 / Revised: 14th October, 2020 /

Accepted: 16th November, 2020 / First online: 21st December, 2020

Competing interests. We declare that we have no conflicts of interest in the authorship and publication of this article.

Author's Responsibilities. We take full responsibility for submitting the final manuscript in print. We approved the final version of the manuscript.

Funding. This research received no specific grant from any funding agency in the public, commercial, or not-for-profit sectors.

References

1. Zhilin P. A. The linear theory of ribbed shells, *Izv. Akad. Nauk SSSR, Mekh. Tverd. Tela*, 1970, no. 4, pp. 150–162 (In Russian).
2. Belostochnyi G. N., Ul'yanova O. I. Continuum model for a composition of shells of revolution with thermosensitive thickness, *Mech. Solids*, 2011, vol. 46, no. 2, pp. 184–191. <https://doi.org/10.3103/S0025654411020051>.
3. Nazarov A. A. *Osnovy teorii i metody rascheta plogikh obolochek* [Fundamentals of the Theory and Methods of Calculating Shallow Shells]. Leningrad, Moscow, Stroiizdat, 1966, In Russian pp.
4. Krasnyukov V. P., Pankratov N. D., Rassudov V. M. *Metod trigonometricheskikh riadov v reshenii temperaturnykh zadach teorii plogikh obolochek* [The Trigonometric Series Method in Solving Temperature Problems in the Shallow Shell Theory]. Saratov, Saratov State Univ., 1974 (In Russian).
5. Podstrigach Ya. S., Kolyano Yu. M. *Obobshchennaia termomekhanika* [Generalized Thermomechanics]. Kiev, Nauk. Dumka, 1976 (In Russian).
6. Kolyano Yu. M., Kulik A. N. *Temperaturnye napriazheniia ot ob'emnykh istochnikov* [Temperature Stresses from Bulk Sources]. Kiev, Nauk. Dumka, 1983 (In Russian).
7. Myltcina O. A., Belostochny G. N. Stability of heated orthotropic geometrically irregular plate in a supersonic gas flow, *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2017, no. 4, pp. 109–120 (In Russian). <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2017.4.08>.
8. Belostochny G. N., Rassudov V. M. Continuum approach to the thermal stability of the elastic “plate–ribs” systems, In: *Prikladnaia teoriia uprugosti* [Applied Elasticity Theory]. Saratov, Saratov Politekhn. Inst., pp. 94–99 (In Russian).
9. Ogibalov P. M., Gribov V. F. *Termoustoichivost' plastin i obolochek* [Thermal Stability of Plates and Shells]. Moscow, Moscow State Univ., 1958 (In Russian).
10. Ogibalov P. M. *Voprosy dinamiki i ustoiichivosti obolochek* [Problems in Dynamics and Stability of Shells]. Moscow, Moscow State Univ., 1963 (In Russian).
11. Belostochny G. N. Analytical methods for determination of closed integrals of singular differential equations of thermoelasticity of geometrically irregular shells, *Dokl. Akad. Voen. Nauk*, 1999, no. 1, pp. 14–25 (In Russian).
12. Myltcina O. A., Belostochny G. N. Thermoelasticity of the reinforced plate under influence of quick change for coordinate of thermal and force factors on the boundary, *Aerospace MAI Journal*, 2014, vol. 21, no. 2, pp. 169–174 (In Russian).
13. Kantorovich L. V., Krylov V.I. *Priblizhennnye metody vysshego analiza* [Approximate Methods of Higher Analysis]. Moscow, Fizmatlit, 1962 (In Russian).