



УДК 532.5.032

Метод тиражирования точных решений уравнений Эйлера для несжимаемых течений Бельтрами

© Г. Б. Сизых

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет),
Россия, 125993, Москва, Волоколамское шоссе, 4.

Аннотация

Течениями Бельтрами или винтовыми течениями в статье называются течения, в которых векторы завихренности и скорости коллинеарны, а коэффициент пропорциональности между этими векторами отличен от нуля и одинаков во всех точках течения. Предлагается метод, позволяющий с использованием известных винтовых решений получать новые винтовые решения уравнений Эйлера для несжимаемой жидкости. Некоторые из этих новых решений не могут быть получены известными методами тиражирования решений путем сдвига и поворота системы координат, симметрии, масштабирования, циклической перестановки компонент скорости и координат, векторного суммирования. Новый метод тиражирования применяется к таким параметрическим семействам точных решений, в которых коэффициент пропорциональности между скоростью и завихренностью остается неизменным при различных значениях параметра. Суть метода состоит в том, что для таких семейств производная скорости по параметру также является винтовой скоростью. Последовательное дифференцирование скорости нового решения по параметру дает бесконечную цепочку новых точных решений.


Ключевые слова: винтовые решения уравнений Навье–Стокса, точные решения уравнений Эйлера, течения Бельтрами.

Получение: 15 июля 2020 г. / Исправление: 3 августа 2020 г. /

Принятие: 16 ноября 2020 г. / Публикация онлайн: 26 ноября 2020 г.

Введение. Поиск новых точных решений уравнений движения жидкости по-прежнему остается актуальной задачей. Достаточно указать, например, на новые точные решения [1–4], полученные для различных типов жидкостей. Такой интерес к точным решениям объясняется не только их общетеоретической ценностью, связанной со сложностью уравнений, описывающих движение жидкости. Такие решения востребованы в вычислительной аэрогидродинамике. В настоящее время общепринято измельчать расчетную сетку,

Краткое сообщение

 Контент публикуется на условиях лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 International \(https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru)

Образец для цитирования

Сизых Г. Б. Метод тиражирования точных решений уравнений Эйлера для несжимаемых течений Бельтрами // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2020. Т. 24, № 4. С. 790–798. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1802>.

Сведения об авторе

Григорий Борисович Сизых   <https://orcid.org/0000-0001-5821-8596>

кандидат физико-математических наук, доцент; доцент; каф. прикладной математики;
e-mail: 01o2o3@yandex.ru

шаг по времени и увеличивать точность машинных операций до тех пор, пока результаты численного расчета не перестанут изменяться. Но это не дает уверенности в правильности результата, и нет возможности, пусть даже грубо, но все же математически строго оценить ошибку (речь идет не о порядке убывания ошибки, а о ее численной оценке). Дело в том, что сходимость большинства методов доказана, как правило, только для линеаризованных уравнений. Поэтому численные алгоритмы приходится верифицировать, в частности, на задачах с известными точными решениями (см., например, [5, 6]), что и объясняет интерес к таким решениям в вычислительной аэрогидродинамике.

Тркал в статье [7] в общем пространственном случае показал, что для несжимаемой жидкости скорость стационарного винтового (векторы завихренности и скорости коллинеарны) решения уравнений Эйлера, умноженная на $\exp(-at)$, где t — время, при надлежащем выборе параметра a будет удовлетворять уравнениям Навье—Стокса (метод Тркала). При этом предполагалось, что коэффициент пропорциональности между скоростью и завихренностью сохраняет свое значение в пространстве и не меняется со временем. В возможности получать точные нестационарные решения уравнений Навье—Стокса заключается одна из причин интереса к точным винтовым решениям стационарных уравнений Эйлера. Данная статья посвящена точным винтовым решениям уравнений Эйлера.

Один из способов поиска новых точных решений — использование методов их тиражирования из известных решений. К числу таких методов относятся, в частности, циклическая перестановка компонент скорости и координат, сдвиг и поворот системы координат, векторное суммирование. В данной статье предложен новый метод тиражирования винтовых решений.

1. Примеры точных решений, полученных методами тиражирования. Первыми винтовыми решениями (здесь и далее речь идет о стационарных решениях уравнений Эйлера для несжимаемой жидкости) были осесимметричные решения Громеки—Бельтрами [8, 9]. К этим решениям можно применять метод [10], названный в [11] методом векторного суммирования. Он состоит в том, что любая линейная комбинация скоростей винтовых решений с одинаковым коэффициентом k будет скоростью винтового решения с тем же коэффициентом k . В статье [11] были получены новые точные решения путем векторного суммирования двух различных решений Громеки—Бельтрами со скрещивающимися осями симметрий этих решений.

Другим, давно известным, винтовым решением, полученным путем комбинации методов векторного суммирования и циклической перестановки, является *ABC*-решение:¹

$$\begin{aligned}V_x &= A \sin(kz) + C \cos(ky), \\V_y &= B \sin(kx) + A \cos(kz), \\V_z &= C \sin(ky) + B \cos(kx),\end{aligned}$$

где k — коэффициент пропорциональности между скоростью и завихренностью ($\mathbf{rot} \mathbf{V} = k\mathbf{V}$).

¹Аббревиатура *ABC* состоит из первых букв фамилий *Arnold*, *Beltrami* и *Childress*. Это связано с тем, что Арнольд и Чилдрес изучали свойства этого решения [12, 13], а именем Бельтрами называют винтовые течения.

В статье [7] Тркал предложил поле винтовой скорости (решение Тркала):

$$V_x = \sin(kz), \quad V_y = \cos(kz), \quad V_z = 0.$$

Циклическая перестановка компонент скорости и координат дает еще два решения, которые также следует считать решениями Тркала:

$$V_x = 0, \quad V_y = \sin(kx), \quad V_z = \cos(kx);$$

$$V_x = \cos(ky), \quad V_y = 0, \quad V_z = \sin(ky).$$

Очевидно, что ABC -решение есть линейная комбинация этих трех решений Тркала с одним и тем же коэффициентом k . Поэтому ABC -решение можно считать полученным из решения Тркала известными методами тиражирования.

Еще одним давно известным винтовым решением является решение Беркера [14]:

$$\begin{aligned} V_x &= -\cos(kx/\sqrt{2}) \sin(ky/\sqrt{2})/\sqrt{2}, \\ V_y &= -\sin(kx/\sqrt{2}) \cos(ky/\sqrt{2})/\sqrt{2}, \\ V_z &= \cos(kx/\sqrt{2}) \cos(ky/\sqrt{2}). \end{aligned} \quad (1)$$

Это решение описывает течение идеальной жидкости в бесконечной трубе квадратного сечения ($0 \leq x \leq \sqrt{2}\pi/k$, $0 \leq y \leq \sqrt{2}\pi/k$). Поворот на 90° системы координат вокруг оси z позволяет из решения Тркала $V_x = 0$, $V_y = \sin(kx)$, $V_z = \cos(kx)$ получить решение $V_x = -\sin(ky)$, $V_y = 0$, $V_z = \cos(ky)$. Если сложить эти два решения с одним и тем же коэффициентом k (векторное суммирование), а затем повернуть на 45° систему координат вокруг оси z , то получится решение Беркера. Таким образом, решение Беркера, как и ABC -решение, можно получить из решений Тркала комбинацией известных методов тиражирования.

2. Метод дифференцирования по параметру. Всякое векторное поле \mathbf{V} , обладающее свойством

$$\mathbf{rot} \mathbf{V} = k\mathbf{V}, \quad \text{где } k = \text{const} \neq 0, \quad (2)$$

будет соленоидальным. Для такого поля скорости в любой ограниченной области пространства существует поле давления, которое вместе со скоростью \mathbf{V} есть решение стационарных уравнений Эйлера для несжимаемой жидкости (доказательство см., например, в [11]). Поэтому поиск винтовых решений уравнений Эйлера сводится к поиску не равного тождественно нулю поля \mathbf{V} , для которого выполнено условие Бельтрами (2).

В данной статье предлагается следующий метод получения новых решений с использованием известных решений. Пусть $\mathbf{V}(x, y, z, a)$ — такое параметрическое семейство скоростей, что уравнение (2) остается выполненным для фиксированного k при всех допустимых значениях параметра a , при которых определена операция дифференцирования по a . Оператор \mathbf{rot} есть линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами. Поэтому $\frac{\partial}{\partial a} \mathbf{rot} \mathbf{V} = \mathbf{rot} \frac{\partial}{\partial a} \mathbf{V}$, и после дифференцирования по параметру a обеих частей (2) имеем $\mathbf{rot} \frac{\partial}{\partial a} \mathbf{V} = k \frac{\partial}{\partial a} \mathbf{V}$. То есть $\frac{\partial}{\partial a} \mathbf{V}(x, y, z, a)$ также будет

решением (2). Таким образом, предлагаемый новый метод тиражирования состоит в дифференцировании по параметру. Несмотря на свою простоту, в известной автору литературе этот метод не упоминается, и представляется, по-видимому, впервые. Заметим, что метод дифференцирования по параметру всегда дает решение, но не всегда это решение оказывается новым. Например, дифференцирование семейства ABC -решений по параметру A приводит к (известному) решению Тркала. Чтобы показать состоятельность нового метода тиражирования, нужно получить этим методом новое точное решение и показать, что оно не может быть получено другими известными методами тиражирования. Этому посвящены следующие разделы.

3. Параметрическое семейство винтовых решений. Для того чтобы привести пример применения метода, получим параметрическое семейство винтовых решений с одинаковым для всего семейства коэффициентом $k \neq 0$. Будем искать решение уравнения $\mathbf{rot} \mathbf{V} = k\mathbf{V}$ в прямоугольной декартовой системе координат $Oxyz$. Воспользовавшись методом, с помощью которого в [14] найдено решение (1), получим параметрическое (параметр a) семейство полей скорости

$$\begin{aligned} V_x &= \sqrt{1 - a^2} \sin(ax) \cos(y\sqrt{1 - a^2}), \\ V_y &= -a \cos(ax) \sin(y\sqrt{1 - a^2}), \\ V_z &= \sin(ax) \sin(y\sqrt{1 - a^2}), \end{aligned} \quad (3)$$

которое естественно назвать одним из параметрических решений Беркера. Непосредственной проверкой можно убедиться, что поле скорости (3) будет винтовым с коэффициентом $k = -1$ при любом значении параметра $a \in [-1, 1]$.

Проекции линий тока этого ячеистого течения при $a = 1/\sqrt{2}$ на плоскость Oxy представлены на рис. 1, а. В каждой ячейке (размером $\pi\sqrt{2} \times \pi\sqrt{2}$) формулы (3) описывают течение идеальной жидкости в бесконечной трубе квадратного сечения (выполнено условие непротекания на стенках трубы).

4. Пример применения метода и новое точное решение. При всех допустимых ($a \in [-1, 1]$) значениях параметра a для скорости (3) будет выполнено условие $\mathbf{rot} \mathbf{V} = -\mathbf{V}$ (т.е. коэффициент $k \equiv -1$). Это позволяет применить метод дифференцирования по параметру при $a \in (-1, 1)$ (концы отрезка исключены, поскольку в них производные компонент скорости по a не определены). Продифференцируем три компоненты скорости (3) по параметру a и положим $a = 1/\sqrt{2}$. Получим поле винтовой ($\mathbf{rot} \tilde{\mathbf{V}} = -\tilde{\mathbf{V}}$) скорости

$$\begin{aligned} \tilde{V}_x &= \frac{x}{\sqrt{2}} \cos \frac{x}{\sqrt{2}} \cos \frac{y}{\sqrt{2}} - \sin \frac{x}{\sqrt{2}} \cos \frac{y}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}} \sin \frac{x}{\sqrt{2}} \sin \frac{y}{\sqrt{2}}, \\ \tilde{V}_y &= \frac{y}{\sqrt{2}} \cos \frac{x}{\sqrt{2}} \cos \frac{y}{\sqrt{2}} - \sin \frac{y}{\sqrt{2}} \cos \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{x}{\sqrt{2}} \sin \frac{x}{\sqrt{2}} \sin \frac{y}{\sqrt{2}}, \\ \tilde{V}_z &= x \cos \frac{x}{\sqrt{2}} \sin \frac{y}{\sqrt{2}} - y \sin \frac{x}{\sqrt{2}} \cos \frac{y}{\sqrt{2}}. \end{aligned} \quad (4)$$

Проекции линий тока этого ячеистого течения на плоскость Oxy представлены на рис. 1, b.

В отличие от течения (3), в течении (4) ячейки не повторяют друг друга. На рис. 2 представлены два фрагмента течения (4) в увеличенном виде с указанием направления движения жидкости.

На рис. 2 видны стационарные точки, окруженные замкнутыми линиями (эти линии есть линии уровня функции $\psi = x \cos \frac{x}{\sqrt{2}} \sin \frac{y}{\sqrt{2}} - y \sin \frac{x}{\sqrt{2}} \cos \frac{y}{\sqrt{2}}$). Каждую из этих замкнутых линий можно рассматривать как сечение бес-

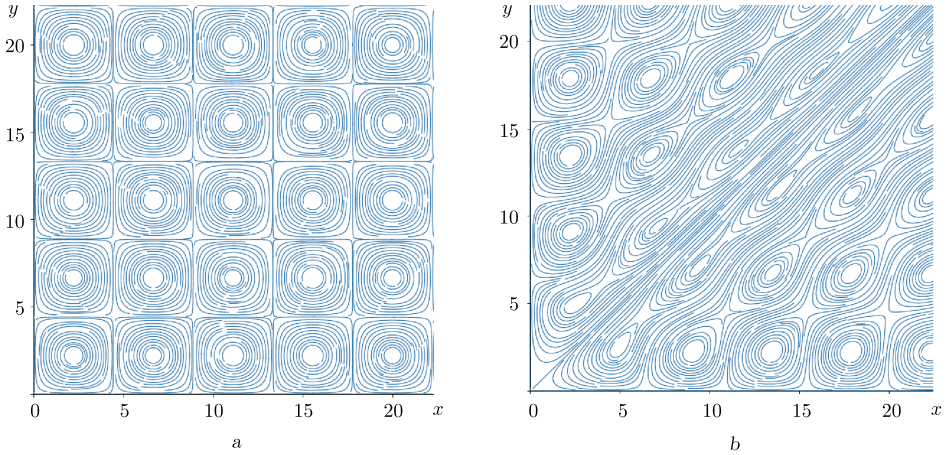


Рис. 1. Проекция линий тока на плоскость Oxy ($a = 1/\sqrt{2}$): а) течение (3); б) «продифференцированное» течение (4)

[Figure 1. Projections of streamlines onto a plane Oxy ($a = 1/\sqrt{2}$): а) flow (3); б) “differentiated” flow (4)]

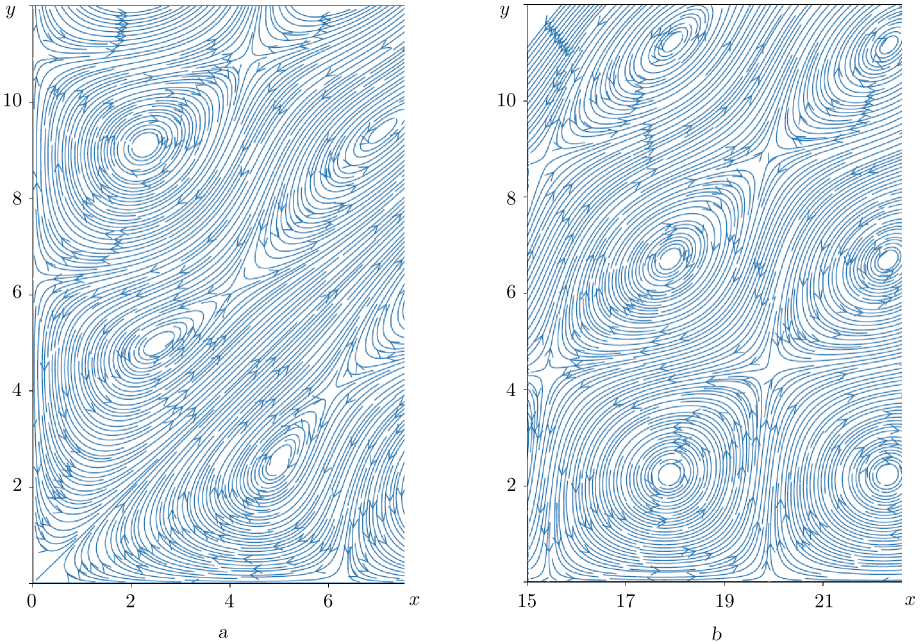


Рис. 2. Два увеличенных фрагмента проекций линий тока течения (4) на плоскость Oxy
[Figure 2. Two enlarged fragments of the streamlines projections (4) onto a plane Oxy]

конечной цилиндрической трубы, в которой идеальная жидкость течет (со скоростью (4)) так, что на стенках выполнено условие непротекания.

В известных точных решениях отсутствуют произведения координат на синусы или косинусы от линейной комбинации координат. Поэтому решение (4) не может быть получено из известных точных решений (в том числе и из решения (3)) такими способами тиражирования, как сдвиг и поворот системы координат, масштабирование, различные симметрии, циклическая перестановка компонент скорости и координат, векторное суммирование. Поэтому решение (4) есть искомое новое решение, что показывает состоятельность метода дифференцирования по параметру.

Применение метода дифференцирования по параметру к другим параметрическим винтовым решениям с одинаковым k (например к решениям Громеки—Бельтрами) представляется в рамках данной статьи излишним.

Заключение. Предложен новый метод тиражирования точных винтовых решений уравнений Эйлера. Применение предложенного в статье метода дифференцирования по параметру к известному решению Беркера позволило получить новое точное решение (4). Тем самым доказана состоятельность предложенного метода дифференцирования по параметру.

Конкурирующие интересы. Конкурирующих интересов не имею.

Авторский вклад и ответственность. Я несу полную ответственность за предоставление окончательной версии рукописи в печать. Окончательная версия рукописи мною одобрена.

Финансирование. Исследование выполнялось без финансирования.

Библиографический список

1. Prosviryakov E. Yu. Exact solutions to generalized plane Beltrami–Trkal and Ballabh flows // *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2020. vol. 24, no. 2. pp. 319–330. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1766>.
2. Хорин А. Н., Конюхова А. А. Течение Куэтта горячего вязкого газа // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2020. Т. 24, № 2. С. 365–378. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1751>.
3. Kuzmina K., Marchevsky I., Ryatina E. Exact solutions of boundary integral equation arising in vortex methods for incompressible flow simulation around elliptical and Zhukovsky airfoils // *J. Phys.: Conf. Ser.*, 2019. vol. 1348, 012099. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1348/1/012099>.
4. Голубкин В. Н., Сизых Г. Б. Течение вязкого газа между вертикальными стенками // *ПММ*, 2018. Т. 82, № 5. С. 657–667. <https://doi.org/10.31857/S003282350002271-8>.
5. Bosnyakov S. M., Mikhaylov S. V., Podaruev V. Yu., Troshin A. I. Unsteady discontinuous Galerkin method of a high order of accuracy for modeling turbulent flows // *Math. Models Comput. Simul.*, 2019. vol. 11, no. 1. pp. 22–34. <https://doi.org/10.1134/S2070048219010058>.
6. Dergachev S. A., Marchevsky I. K., Shcheglov G. A. Flow simulation around 3D bodies by using Lagrangian vortex loops method with boundary condition satisfaction with respect to tangential velocity components // *Aerospace Science and Technology*, 2019. vol. 94, 105374. <https://doi.org/10.1016/j.ast.2019.105374>.
7. Trkal V. A note on the hydrodynamics of viscous fluids // *Czech. J. Phys.*, 1994. vol. 44. pp. 97–106. <https://doi.org/10.1007/BF01701186>.

8. Громека И. С. *Некоторые случаи движения несжимаемой жидкости* (докторская диссертация): Казань, 1881. 107 с.; Громека И. С. *Собрание трудов*. М.: АН СССР, 1952. 76–148 с.
9. Beltrami E. Considerazioni idrodinamiche // *Nuovo Cim.*, 1889. vol. 25. pp. 212–222. <https://doi.org/10.1007/BF02719090>.
10. Васильев О. Ф. *Основы механики винтовых и циркуляционных потоков*. Л.; М.: Госэнергоиздат, 1958. 144 с.
11. Ковалев В. П., Просвиряков Е. Ю., Сизых Г. Б. Получение примеров точных решений уравнений Навье–Стокса для винтовых течений методом суммирования скоростей // *Труды Московского физико-технического института*, 2017. Т. 9, № 1. С. 71–88.
12. Arnold V. I. Sur la topologie des écoulements stationnaires des fluides parfaits // *C. R. Acad. Sci. Paris*, 1965. vol. 261. pp. 17–20. https://doi.org/10.1007/978-3-642-31031-7_3.
13. Childress S. New solutions of the kinematic dynamo problem // *J. Math. Phys.*, 1970. vol. 11, no. 10. pp. 3063–3076. <https://doi.org/10.1063/1.1665095>.
14. Berker R. Intégration des équations du mouvement d'un fluide visqueux incompressible / *Encyclopedia of Physics*. vol. 8/2. Berlin: Springer-Verlag, 1963. pp. 1–384. https://doi.org/10.1007/978-3-662-10109-4_1.

MSC: 76D05, 76D99

A method for replicating exact solutions of the Euler equations for incompressible Beltrami flows

© G. B. Sizykh

Moscow Aviation Institute (National Research University),
4, Volokolamskoe shosse, Moscow, 125993, Russian Federation.

Abstract

In the paper, Beltrami flows or helical flows are flows in which the vorticity and velocity vectors are collinear, and the proportionality coefficient between these vectors is nonzero and is the same at all points of the flow. A method is proposed that allows using known helical solutions to obtain new helical solutions of the Euler equations for an incompressible fluid. Some of these new solutions cannot be obtained by the known methods of replicating solutions by shifting and rotating the coordinate system, symmetry, scaling, cyclic permutation of the velocity and coordinate components, vector summation. The new replication method is applied to such parametric families of exact solutions in which the proportionality coefficient between velocity and vorticity remains unchanged for different values of the parameter. The essence of the method is that for such families the derivative of the velocity with respect to the parameter is also the helical velocity. The sequential differentiation of the speed of a new solution with respect to a parameter gives an endless chain of new exact solutions.

Keywords: helical solutions of the Navier–Stokes equations, exact solutions of the Euler equations, Beltrami flows.


Received: 15th July, 2020 / Revised: 3rd August, 2020 /Accepted: 16th November, 2020 / First online: 26th November, 2020

Competing interests. I have no competing interests.

Authors' contributions and responsibilities. I take full responsibility for submitting the final manuscript in print. I approved the final version of the manuscript.

Funding. This research received no specific grant from any funding agency in the public, commercial, or not-for-profit sectors.

Short Communication

 The content is published under the terms of the [Creative Commons Attribution 4.0 International License](http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this paper in press as:

Sizykh G. B. A method for replicating exact solutions of the Euler equations for incompressible Beltrami flows, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2020, vol. 24, no. 4, pp. 790–798. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1802> (In Russian).

Author's Details:

Grigory B. Sizykh  <https://orcid.org/0000-0001-5821-8596>

Cand. Phys. & Math. Sci.; Associate Professor; Dept. of Applied Mathematics;

e-mail: o1o2o3@yandex.ru

References

1. Prosviryakov E. Yu. Exact solutions to generalized plane Beltrami–Trkal and Ballabh flows, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2020, vol. 24, no. 2, pp. 319–330. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1766>.
2. Khorin A. N., Konyukhova A. A. Couette flow of hot viscous gas, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2020, vol. 24, no. 2, pp. 365–378 (In Russian). <https://doi.org/10.14498/vsgtu1751>.
3. Kuzmina K., Marchevsky I., Ryatina E. Exact solutions of boundary integral equation arising in vortex methods for incompressible flow simulation around elliptical and Zhukovsky airfoils, *J. Phys.: Conf. Ser.*, 2019, vol. 1348, 012099. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1348/1/012099>.
4. Golubkin V. N., Sizykh G. B. Viscous gas flow between vertical walls, *Fluid Dyn.*, 2018, vol. 53, no. 2, pp. 11–18. <https://doi.org/10.1134/S0015462818060046>.
5. Bosnyakov S. M., Mikhaylov S. V., Podaruev V. Yu., Troshin A. I. Unsteady discontinuous Galerkin method of a high order of accuracy for modeling turbulent flows, *Math. Models Comput. Simul.*, 2019, vol. 11, no. 1, pp. 22–34. <https://doi.org/10.1134/S2070048219010058>.
6. Dergachev S. A., Marchevsky I. K., Shcheglov G. A. Flow simulation around 3D bodies by using Lagrangian vortex loops method with boundary condition satisfaction with respect to tangential velocity components, *Aerospace Science and Technology*, 2019, vol. 94, 105374. <https://doi.org/10.1016/j.ast.2019.105374>.
7. Trkal V. A note on the hydrodynamics of viscous fluids, *Czech. J. Phys.*, 1994, vol. 44, pp. 97–106. <https://doi.org/10.1007/BF01701186>.
8. Gromeka I. S. *Some cases of the motion of an incompressible fluid*, Doctoral Dissertation, Kazan, 1881, 107 pp. (In Russian); *Collected Works*. Moscow, Akad. Nauk SSSR, 1952.
9. Beltrami E. Considerazioni idrodinamiche, *Nuovo Cim.*, 1889, vol. 25, pp. 212–222. <https://doi.org/10.1007/BF02719090>.
10. Vasil'ev O. F. *Fundamentals of mechanics of screw and flow patterns*. Leningrad; Moscow, Akad. Nauk SSSR, 1958, 144 pp. (In Russian)
11. Kovalev V. P., Prosviryakov E. Yu., Sizykh G. B. Obtaining examples of exact solutions of the Navier–Stokes equations for helical flows by the method of summation of velocities, *Proceedings of MIPT*, 2017, vol. 9, no. 1, pp. 71–88 (In Russian).
12. Arnold V. I. Sur la topologie des écoulements stationnaires des fluides parfaits, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 1965, vol. 261, pp. 17–20. https://doi.org/10.1007/978-3-642-31031-7_3.
13. Childress S. New solutions of the kinematic dynamo problem, *J. Math. Phys.*, 1970, vol. 11, no. 10, pp. 3063–3076. <https://doi.org/10.1063/1.1665095>.
14. Berker R. Intégration des équations du mouvement d'un fluide visqueux incompressible, In: *Encyclopedia of Physics*, vol. 8/2. Berlin, Springer-Verlag, 1963, pp. 1–384. https://doi.org/10.1007/978-3-662-10109-4_1.