ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1822

Дифференциальные уравнения и математическая физика

УДК 517.956.6

Об одной нелокальной краевой задаче для нагруженного параболо-гиперболического уравнения с тремя линиями изменения типа

© ***Б. И. Исломов***[1]***, Ж. А. Холбеков***[2]

[1] Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека, Узбекистан, 100174, Ташкент, ул. Университетская, 4.
[2] Ташкентский государственный технический университет им. И. Каримова, Узбекистан, 100174, Ташкент, ул. Университетская, 2.

Аннотация

Приводится доказательство единственности и существования решения одной нелокальной задачи для нагруженного параболо-гиперболического уравнения с тремя линиями изменения типа. Единственность решения доказана с помощью представления общего решения, существование решения доказано методом интегральных уравнений. Установлены необходимые условия на параметры и заданные функции для однозначной разрешимости интегральных уравнений Вольтерра второго рода со сдвигом, эквивалентным исследуемой задаче.

Ключевые слова: нагруженное уравнение, нелокальная задача, интегральное уравнение Вольтерра со сдвигом, функция Грина, единственность и существование решения.

Получение: 22 августа 2020 г. / Исправление: 15 мая 2021 г. / Принятие: 28 июня 2021 г. / Публикация онлайн: 20 сентября 2021 г.

Научная статья

Образец для цитирования

Исломов Б. И., Холбеков Ж. А. Об одной нелокальной краевой задаче для нагруженного параболо-гиперболического уравнения с тремя линиями изменения типа // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2021. Т. 25, № 3. С. 407–422. https://doi.org/10.14498/vsgtu1822.

Сведения об авторах

Бозор Исломович Исломов https://orcid.org/0000-0002-4372-395X
доктор физико-математических наук, профессор; главный научный сотрудник; каф. дифференциальных уравнений и математической физики; e-mail: islomovbozor@yandex.ru

Журат Абдинабиевич Холбеков https://orcid.org/0000-0002-1495-2761
ассистент; каф. высшей математики; e-mail: xolbekovja@mail.ru

Введение

Многие задачи математической физики и биологии, в том числе задачи регулирования грунтовых вод, задачи тепломассопереноса с конечной скоростью, задачи движения малосжимаемой жидкости, окруженной пористой средой, приводят к краевым задачам для нагруженных уравнений с частными производными [1, 2].

В 1969 году А. М. Нахушев предложил ряд задач нового типа, вошедших в математическую литературу под названием краевых задач со смещением, которые тесно связаны с нагруженными дифференциальными уравнениями [3].

Краевые задачи для нагруженных уравнений второго порядка гиперболического, параболического, гиперболо-параболического и эллиптико-параболического типов достаточно хорошо изучены [4–15]. Отметим работу [16], в которой изучена задача с условием типа Бицадзе—Самарского для парабало-гиперболического уравнения с тремя линиями изменения типа.

Заметим, что локальные и нелокальные задачи для нагруженных уравнений смешанного типа второго порядка с тремя линиями изменения типа [17, 18] изучены мало. Это связано, с одной стороны, с отсутствием представления общего решения для таких уравнений; с другой стороны, такие задачи сводятся к малоизученным интегральным уравнениям со сдвигом.

Настоящая работа посвящена постановке и изучению одной нелокальной краевой задачи для нагруженного параболо-гиперболического уравнения с тремя линиями изменения типа, содержащей в себе след искомой функции.

1. Постановка задачи

В некоторой области Ω, которая определяется ниже, рассмотрим уравнение

$$0 = \begin{cases} u_{xx} - u_y, & (x, y) \in \Omega_0, \\ u_{xx} - u_{yy} - \mu_j \operatorname{sign} y H_j[u(x, y)], & (x, y) \in \Omega_j,\ j = 1, 2, 3. \end{cases} \tag{1}$$

Здесь μ_j — заданные действительные числа, причем

$$\mu_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, 3; \tag{2}$$

$$H_j[u(x, y)] = \begin{cases} u(x, 0), & j = 1, \\ u(0, \xi), & j = 2, \quad \xi = x + y, \\ u(1, \eta), & j = 3, \quad \eta = y - x + 1; \end{cases}$$

Ω_0 — область, ограниченная отрезками AB, BC, CD, DA прямых $y = 0$, $x = 1$, $y = 1$, $x = 0$ соответственно;

Ω_1 — характеристический треугольник, ограниченный отрезком AB оси Ox и двумя характеристиками $AN : x + y = 0$, $BN : x - y = 1$ уравнения (1), выходящими из точек $A(0, 0)$ и $B(1, 0)$ и пересекающимися в точке $N(1/2, -1/2)$;

Ω_2 — характеристический треугольник, ограниченный отрезком AD оси Oy и двумя характеристиками $AK : x + y = 0$, $DK : y - x = 1$ уравнения (1), выходящими из точек $A(0, 0)$ и $D(0, 1)$ и пересекающимися в точке $K(-1/2, 1/2)$;

Ω_3 — характеристический треугольник, ограниченный отрезком BC и двумя характеристиками $CM: x+y=2$, $BM: x-y=1$ уравнения (1), выходящими из точек $B(1,0)$ и $C(1,1)$ и пересекающимися в точке $M(3/2, 1/2)$;

$$\Omega = \sum_{j=0}^{3} \Omega_j \cup AB \cup BC \cup DA, \quad J_1 = \{(x,y) : 0 < x < 1, y = 0\};$$

$$J_2 = \{(x,y) : 0 < y < 1, x = 0\}, \quad J_3 = \{(x,y) : 0 < y < 1, x = 1\};$$

$$\Omega_1^* = \Omega_1 \cup AB \cup \Omega_0, \quad \Omega_2^* = \Omega_2 \cup AD \cup \Omega_0 \cup BC \cup \Omega_3.$$

Задача. *Найти решение уравнения* (1) *в классе функций*

$$\begin{gathered} W = \big\{u : u(x,y) \in C(\bar{\Omega}) \cap C^{2,1}_{x,y}(\Omega_0) \cap C^2(\Omega_1 \cup \Omega_2 \cap \Omega_3), \\ u_y \in C(\Omega_2^*) \cap C(\Omega_0 \cup AB) \cap C(\Omega_1 \cup AB), \\ u_x \in C(\Omega_1^*) \cap C(\Omega_0 \cup AD \cup BC) \cap C(\Omega_2 \cup AD) \cap C(\Omega_3 \cup BC)\big\}, \end{gathered}$$

удовлетворяющее краевым условиям

$$a(x)\frac{d}{dx}u\Big(\frac{x}{2}, -\frac{x}{2}\Big) + b(x)\frac{d}{dx}u\Big(\frac{1+x}{2}, \frac{x-1}{2}\Big) = \\ = m(x)u(x,0) + n(x)u_y(x,0) + c(x), \quad (x,0) \in J_1, \tag{3}$$

$$u(x,y)\big|_{AK} = \varphi_1(y), \quad 0 \leqslant y \leqslant \frac{1}{2}, \tag{4}$$

$$u(x,y)\big|_{MC} = \varphi_2(y), \quad \frac{1}{2} \leqslant y \leqslant 1, \tag{5}$$

а на линиях изменения типа условиям склеивания

$$u_y(x,+0) = \alpha_1 u_y(x,-0), \quad (x,0) \in J_1, \tag{6}$$

$$u_x(+0,y) = \alpha_2 u_x(-0,y), \quad (0,y) \in J_2, \tag{7}$$

$$u_x(1+0,y) = \alpha_3 u_x(1-0,y), \quad (1,y) \in J_3, \tag{8}$$

где $a(x)$, $b(x)$, $m(x)$, $n(x)$, $c(x)$, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(y)$ — *заданные функции;* α_j — *известные постоянные, причем*

$$\varphi_1(0) = 0,\ \varphi_2(1) = 0; \quad \alpha_1 > 0,\ \alpha_2, \alpha_3 \in (-\infty\,;\ +\infty) \setminus \{0\}\,; \tag{9}$$

$$a^2(x) + b^2(x) \neq 0, \quad m^2(x) + n^2(x) \neq 0, \quad \forall x \in \overline{J}_1; \tag{10}$$

$$a(x),\ b(x),\ m(x),\ n(x) \in C^1(\overline{J}_1) \cap C^2(J_1), \quad c(x) \in C^2(J_1); \tag{11}$$

$$\varphi_1(y) \in C^1[0,1/2] \cap C^2(0,1/2), \quad \varphi_2(y) \in C^1[1/2,1] \cap C^2(1/2,1). \tag{12}$$

Отметим, что аналог задачи Трикоми для уравнения (1) в случае, когда $a(x) = 1$, $b(x) = m(x) = n(x) = 0$, изучен в работах [17, 18].

2. Вывод основных функциональных соотношений

Решение задачи Коши с условиями

$$u(x,-0)=\tau_1(x),\quad (x,0)\in\overline{J}_1;\quad u_y(x,-0)=\nu_1^-(x),\quad (x,0)\in J_1,$$

для уравнения (1) в области Ω_1 имеет вид

$$u(x,y)=\frac{1}{2}[\tau_1(x+y)+\tau_1(x-y)]+\frac{1}{2}\int_{x-y}^{x+y}\nu_1^-(\xi)\,d\xi+ \\ +\frac{\mu_1}{4}\int_{x-y}^{x+y}d\xi\int_{\xi}^{x-y}\tau_1\Big(\frac{\xi+\eta}{2}\Big)\,d\eta. \quad (13)$$

Подставляя (13) в (3), получим

$$[a(x)-b(x)+2n(x)]\nu_1^-(x)=[a(x)+b(x)]\tau_1'(x)-2m(x)\tau_1(x)- \\ -\mu_1 a(x)\int_{x/2}^{x}\tau_1(t)\,dt+\mu_1 b(x)\int_{x}^{(x+1)/2}\tau_1(t)\,dt-2c(x),\quad (x,0)\in J_1. \quad (14)$$

Рассмотрим следующие случаи.

I. Пусть $a(x)=-b(x)\neq -n(x)$, $\forall x\in\overline{J}_1$, тогда из (14) имеем

$$2[n(x)-b(x)]\nu_1^-(x)=-2m(x)\tau_1(x)+ \\ +\mu_1 b(x)\int_{x/2}^{(x+1)/2}\tau_1(t)\,dt-2c(x),\quad (x,0)\in J_1.$$

II. Пусть $a(x)=-b(x)=-n(x)$, $\forall x\in\overline{J}_1$, тогда из (14) получим

$$2m(x)\tau_1(x)-\mu_1 b(x)\int_{x/2}^{(x+1)/2}\tau_1(t)\,dt=-2c(x),\quad (x,0)\in J_1.$$

III. Пусть $a(x)-b(x)+2n(x)=0$, $\forall x\in\overline{J}_1$, тогда из (14) имеем

$$2[n(x)-b(x)]\tau_1'(x)+2m(x)\tau_1(x)+ \\ +\mu_1 b(x)\bigg(\int_{x/2}^{x}\tau_1(t)\,dt-\int_{x}^{(x+1)/2}\tau_1(t)\,dt\bigg)=2c(x),\quad (x,0)\in J_1.$$

IV. Пусть $\tilde{a}(x)=a(x)-b(x)+2n(x)\neq 0$, $\forall x\in\overline{J}_1$, тогда из (14) имеем

$$\nu_1^-(x)=a_1(x)\tau_1'(x)-a_2(x)\tau_1(x)- \\ -a_3(x)\int_{x/2}^{x}\tau_1(t)\,dt+a_4(x)\int_{x}^{(x+1)/2}\tau_1(t)\,dt-a_5(x),\quad (x,0)\in J_1, \quad (15)$$

где

$$a_1(x)=\frac{a(x)+b(x)}{\tilde{a}(x)},\quad a_2(x)=\frac{2m(x)}{\tilde{a}(x)},\quad a_3(x)=\frac{\mu_1 a(x)}{\tilde{a}(x)}, \\ a_4(x)=\frac{\mu_1 b(x)}{\tilde{a}(x)},\quad a_5(x)=\frac{2c(x)}{\tilde{a}(x)}.$$

Аналогичным образом, используя решение задачи Коши [17,18] с начальными данными

$$u(-0,y) = \tau_2(y), \quad (0,y) \in \overline{J}_2; \quad u_x(-0,y) = \nu_2^-(y), \quad (0,y) \in J_2 \tag{16}$$

$$\big(u(1-0,y) = \tau_3(y), \quad (1,y) \in \overline{J}_3; \quad u_x(1-0,y) = \nu_3^-(y), \quad (1,y) \in J_3\big), \tag{17}$$

для уравнения (1) в области Ω_2 (Ω_3) с учетом (4) и (5), получаем функциональное соотношение между $\tau_2(x)$ ($\tau_3(x)$) и $\nu_2^-(x)$ ($\nu_3^-(x)$), принесенное из области Ω_2 (Ω_3) на J_2 (J_3):

$$\nu_2^-(y) - \tau_2'(y) + \frac{\mu_2}{2}\int_0^y \tau_2(t)\,dt = -\varphi_2'(y/2) \tag{18}$$

$$\left(\nu_3^-(y) - \tau_3'(y) - \frac{\mu_3}{2}(1-y)\tau_3(y) = -\varphi_2'\Big(\frac{y+1}{2}\Big)\right). \tag{19}$$

Переходя к пределу при $y \to +0$ в уравнении (1) с учетом условия $\tau_1(1) = 0$, получим функциональное соотношение между $\tau_1(x)$ и $\nu_1^+(x)$, принесенное из области Ω_0 на J_1:

$$\tau_1(x) = \int_x^1 dt \int_t^1 \nu_1^+(z)\,dz + \tau_1'(1)\,(x-1), \tag{20}$$

где $\tau_1'(1)$ — неизвестная константа, подлежащая определению.

Решение первой краевой задачи с условиями

$$u(x,+0) = \tau_1(x), \quad (x,0) \in \overline{J}_1; \quad u(+0,y) = \tau_2(y), \quad (0,y) \in \overline{J}_2;$$
$$u(1+0,y) = \tau_3(y), \quad (1,y) \in \overline{J}_3$$

для уравнения (1) в области Ω_0 имеет вид

$$u(x,y) = \int_0^y G_\xi(x,y;0,\eta)\tau_2(\eta)\,d\eta + \int_0^y G_\xi(x,y;1,\eta)\tau_3(\eta)\,d\eta + \\ + \int_0^1 G(x,y;\xi,0)\tau_1(\xi)\,d\xi, \tag{21}$$

где

$$G(x,y;\xi,\eta) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(y-\eta)}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left\{\exp\Big(-\frac{(x-\xi+2n)^2}{4(y-\eta)}\Big) - \\ - \exp\Big(-\frac{(x+\xi+2n)^2}{4(y-\eta)}\Big)\right\}$$

— функция Грина первой краевой задачи для уравнения $u_{xx} - u_y = 0$.

Дифференцируя (21) по x, получим

$$u_x(x,y) = \int_0^y G_{\xi x}(x,y;0,\eta)\tau_2(\eta)\,d\eta + \int_0^y G_{\xi x}(x,y;1,\eta)\tau_3(\eta)\,d\eta + \\ + \int_0^1 G_x(x,y;\xi,0)\tau_1(\xi)\,d\xi. \tag{22}$$

Здесь

$$G_{\xi x}(x,y;0,\eta)=\frac{1}{2\sqrt{\pi(y-\eta)}}\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{+\infty}\Big[\frac{1}{y-\eta}-\frac{(x+2n)^2}{2(y-\eta)^2}\Big]\times$$

$$\times\exp\Big(-\frac{(x+2n)^2}{4(y-\eta)}\Big)=\frac{d}{d\eta}\Big[\frac{1}{\sqrt{\pi(y-\eta)}}\exp\Big(-\frac{x^2}{4(y-\eta)}\Big)+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{\pi(y-\eta)}}\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{+\infty}\exp\Big(-\frac{(x+2n)^2}{4(y-\eta)^2}\Big)\Big],\quad (23)$$

$$G_{\xi x}(x,y;1,\eta)=\frac{1}{2\sqrt{\pi(y-\eta)}}\times$$

$$\times\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{+\infty}\Big[\Big(\frac{1}{2(y-\eta)}-\frac{(x-1+2n)^2}{4(y-\eta)^2}\Big)\exp\Big(-\frac{(x-1+2n)^2}{4(y-\eta)}\Big)+$$

$$+\Big(\frac{1}{2(y-\eta)}-\frac{(x+1+2n)^2}{4(y-\eta)^2}\Big)\exp\Big(-\frac{(x+1+2n)^2}{4(y-\eta)}\Big)\Big]=$$

$$=\frac{d}{d\eta}\Big[\frac{1}{2\sqrt{\pi(y-\eta)}}\exp\Big(-\frac{(x-1)^2}{4(y-\eta)}\Big)+$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{\pi(y-\eta)}}\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{+\infty}\exp\Big(-\frac{(x-1+2n)^2}{4(y-\eta)}\Big)\Big]+$$

$$+\frac{d}{d\eta}\Big[\frac{1}{2\sqrt{\pi(y-\eta)}}\exp\Big(-\frac{(x+1)^2}{4(y-\eta)}\Big)+$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{\pi(y-\eta)}}\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{+\infty}\exp\Big(-\frac{(x+1+2n)^2}{4(y-\eta)}\Big)\Big],\quad (24)$$

$$G_x(x,y;\xi,0)=\frac{1}{2\sqrt{\pi y}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\exp\Big(-\frac{(x+2n)^2+\xi^2}{4y}\Big)\times$$

$$\times\Big(\frac{\xi}{y}\operatorname{ch}2\xi(x+2n)-\frac{x+n}{y}\operatorname{sh}2\xi(x+2n)\Big).$$

Применяя формулу интегрирования по частям к (22) с учетом (23) и (24), а затем, принимая во внимание

$$\varphi_1(0)=\tau_2(0)=0,\quad \tau_1(1)=\tau_3(0)=0,$$

$$\lim_{z\to 0}z^{-\chi}\exp(-z^{-1})=0,\quad \chi>0,$$

имеем

$$u_x(x,y) = -\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^y \frac{\tau_2'(\eta)}{\sqrt{y-\eta}}\exp\Big(-\frac{x^2}{4(y-\eta)}\Big)\,d\eta -$$
$$-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^y \frac{\tau_2'(\eta)}{\sqrt{y-\eta}}\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{+\infty}\exp\Big(-\frac{(x+2n)^2}{4(y-\eta)}\Big)\,d\eta +$$
$$+\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^y \frac{\tau_3'(\eta)}{\sqrt{y-\eta}}\exp\Big(-\frac{(x-1)^2}{4(y-\eta)}\Big)\,d\eta +$$
$$+\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^y \frac{\tau_3'(\eta)}{\sqrt{y-\eta}}\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{+\infty}\exp\Big(-\frac{(x-1+2n)^2}{4(y-\eta)}\Big)\,d\eta +$$
$$+\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^y \frac{\tau_3'(\eta)}{\sqrt{y-\eta}}\exp\Big(-\frac{(x+1)^2}{4(y-\eta)}\Big)\,d\eta +$$
$$+\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^y \frac{\tau_3'(\eta)}{\sqrt{y-\eta}}\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{+\infty}\exp\Big(-\frac{(x+1+2n)^2}{4(y-\eta)}\Big)\,d\eta +$$
$$+\frac{1}{2\sqrt{\pi y}}\int_0^1 \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\exp\Big(-\frac{(x+2n)^2+\xi^2}{4y}\Big)\times$$
$$\times\Big(\frac{\xi}{y}\operatorname{ch}2\xi(x+2n) - \frac{x+n}{y}\operatorname{sh}2\xi(x+2n)\Big)\tau_1(\xi)\,d\xi. \qquad (25)$$

В равенстве (25), устремляя $x\to 0$ $(x\to 1)$, с учетом тождеств

$$\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{+\infty}\exp\Big(-\frac{(2n-1)^2}{4(y-\eta)}\Big) = \sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{+\infty}\exp\Big(-\frac{(2n+1)^2}{4(y-\eta)}\Big) =$$
$$= \exp\Big(-\frac{1}{4(y-\eta)}\Big) + 2\sum_{n=1}^{+\infty}\exp\Big(-\frac{(2n+1)^2}{4(y-\eta)}\Big),$$

$$\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{+\infty}\exp\Big(-\frac{(2n)^2}{4(y-\eta)}\Big) = 2\sum_{n=1}^{+\infty}\exp\Big(-\frac{n^2}{y-\eta}\Big),$$
$$\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{+\infty}\exp\Big(-\frac{(1+n)^2}{(y-\eta)}\Big) = 1+\exp\Big(-\frac{1}{y-\eta}\Big) + 2\sum_{n=1}^{+\infty}\exp\Big(-\frac{(n+1)^2}{y-\eta}\Big)$$

получим соответственно функциональное соотношение между $\tau_2(y)$ $(\tau_3(y))$ и $\nu_2^+(y)$ $(\nu_3^+(y))$, принесенное из области Ω_0 на J_2 (J_3):

$$\nu_2^+(y) = -\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^y \frac{\tau_2'(\eta)}{\sqrt{y-\eta}}d\eta - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^y \frac{K_2(y,\eta)}{\sqrt{y-\eta}}\tau_2'(\eta)\,d\eta + F_2(y,\tau_3',\tau_1) \qquad (26)$$

$$\left(\nu_3^+(y)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^y\frac{\tau_3'(\eta)}{\sqrt{y-\eta}}d\eta+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^y\frac{K_3(y,\eta)}{\sqrt{y-\eta}}\tau_3'(\eta)\,d\eta+F_3(y,\tau_2',\tau_1)\right),\quad(27)$$

где

$$u_x(+0,y)=\nu_2^+(y),\quad (0,y)\in J_2;\quad u_x(1+0,y)=\nu_3^+(y),\quad (1,y)\in J_3;$$

$$K_2(y,\eta)=2\sum_{n=1}^{+\infty}\exp\Big(-\frac{n^2}{y-\eta}\Big),$$

$$K_3(y,\eta)=\exp\Big(-\frac{1}{y-\eta}\Big)+\sum_{n=1}^{+\infty}\exp\Big(-\frac{(n+1)^2}{y-\eta}\Big)+\frac{1}{2}K_2(y,\eta);$$

$$F_2(y,\tau_3',\tau_1)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^y\frac{\tau_3'(\eta)}{\sqrt{y-\eta}}\exp\Big(-\frac{1}{4(y-\eta)}\Big)d\eta+$$
$$+\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^y\frac{\tau_3'(\eta)}{\sqrt{y-\eta}}\sum_{n=1}^{+\infty}\exp\Big(-\frac{(1+2n)^2}{4(y-\eta)}\Big)d\eta+$$
$$+\frac{1}{2\sqrt{\pi y}}\int_0^1\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\exp\Big(-\frac{4n^2+\xi^2}{4y}\Big)\Big(\frac{\xi}{y}\operatorname{ch}4\xi n-\frac{n}{y}\operatorname{sh}4\xi n\Big)\tau_1(\xi)\,d\xi,$$

$$F_3(y,\tau_2',\tau_1)=-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^y\frac{\tau_2'(\eta)}{\sqrt{y-\eta}}\exp\Big(-\frac{1}{4(y-\eta)}\Big)d\eta-$$
$$-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^y\frac{\tau_2'(\eta)}{\sqrt{y-\eta}}\sum_{n=1}^{+\infty}\exp\Big(-\frac{(1+2n)^2}{4(y-\eta)}\Big)d\eta+$$
$$+\frac{1}{2\sqrt{\pi y}}\int_0^1\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\exp\Big(-\frac{(1+2n)^2+\xi^2}{4y}\Big)\times$$
$$\times\Big(\frac{\xi}{y}\operatorname{ch}2\xi(1+2n)-\frac{1+n}{y}\operatorname{sh}2\xi(1+2n)\Big)\tau_1(\xi)\,d\xi.$$

3. Исследование задачи

Теорема. *Если выполнены условия (2), (9)–(12) и*

$$\frac{a(x)+b(x)}{\tilde a(x)}\leqslant 0,\ \ \Big(\frac{a(x)+b(x)}{\tilde a(x)}\Big)'\leqslant 0,\ \ \frac{2m(x)}{\tilde a(x)}\leqslant 0,\ \ \frac{\mu_1 a(x)}{\tilde a(x)}\leqslant 0,\ \ \frac{\mu_1 b(x)}{\tilde a(x)}\geqslant 0,\quad(28)$$

то в области Ω существует единственное регулярное решение поставленной задачи.

Пример. Функции $a(x)=2x+1$, $b(x)=-x$, $n(x)=-x/2-1$, $m(x)=x^2$, $x\in[0,1]$, удовлетворяют всем условиям (28).

Доказательство. Рассмотрим случай **IV**. Пусть

$$\tilde a(x)=a(x)-b(x)+2n(x)\neq 0,\quad \forall x\in\bar J_1,$$

тогда, исключив $\nu_1^-(x)$ из соотношений (15) и (20), с учетом (6) после некоторых вычислений получим интегральное уравнение относительно $\tau_1(x)$:

$$\tau_1(x) + \int_x^1 K_1(x,t)\tau_1(t)dt = \tau_1'(1)(x-1) + \Phi_1(x), \quad (x,0) \in \bar{J}_1, \tag{29}$$

где

$$K_1(x,t) = \alpha_1 \cdot \Big[a_1(t) + (a_1'(t) + a_2(t))(t-x) + \\ + \int_t^{2t} (z-x)a_3(z)\,dz - \int_{2t-1}^{t} (z-x)a_4(z)\,dz\Big], \tag{30}$$

$$\Phi_1(x) = -\alpha_1 \int_x^1 (z-x)a_5(z)\,dz. \tag{31}$$

В силу (2), (9), (11) из (30) и (31) с учетом класса W следует, что

$$|K_1(x,t)| \leqslant C_1 \text{ при любых } 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant t \leqslant 1; \tag{32}$$

и

$$\Phi_1(x) \in C^1(\overline{J}_1) \cap C^2(J_1). \tag{33}$$

Таким образом, в силу (32) и (33) уравнение (29) является интегральным уравнением Вольтерра второго рода. Согласно теории интегральных уравнений Вольтерра [19] заключаем, что интегральное уравнение (29) однозначно разрешимо в классе $C^1(\overline{J}_1) \cap C^2(J_1)$ и его решение дается формулой

$$\tau_1(x) = \tau_1'(1)(x-1) + \Phi_1(x) - \\ - \int_x^1 \tilde{K}_1(x,t)[\tau_1'(1)(t-1) + \Phi_1(t)]\,dt, \quad (x,0) \in \bar{J}_1, \tag{34}$$

где $\tilde{K}_1(x,t)$ — резольвента ядра $K_1(x,t)$. Она имеет вид

$$\tilde{K}_1(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} K_{1m}(x,t), \quad K_{11}(x,t) = K_1(x,t),$$

$$K_{1m}(x,t) = \int_t^x K_1(x,s)K_{1\,m-1}(s,t)\,ds, \quad m = 2,3,\ldots.$$

Дифференцируя (34) по x, получим

$$\tau_1'(x) = \tau_1'(1) + \Phi_1'(x) + \tilde{K}_1(x,x)[\tau_1'(1)(x-1) + \Phi_1(x)] - \\ - \int_x^1 \tilde{K}_1'(x,t)[\tau_1'(1)(t-1) + \Phi_1(t)]\,dt, \quad (x,0) \in \bar{J}_1. \tag{35}$$

В силу (32), (33) из (34) и (35) с учетом (11) заключаем, что

$$\tau_1(x) \in C^1(\overline{J}_1) \cap C^2(J_1), \quad \tau_1'(x) \in C(\overline{J}_1) \cap C^2(J_1). \tag{36}$$

Подставляя (34) и (35) в (15), с учетом (9), (36) определим функцию $\nu_1^-(x) \in C(\bar{J}_1) \cap C^1(J_1)$.

Теперь, положив в (34) $x = 0$, с учетом $\varphi_1(0) = \tau_1(0) = 0$ находим неизвестную константу ${\tau'}_1(1)$:

$$
{\tau'}_1(1) = \frac{\Phi_1(0) - \displaystyle\int_0^1 \tilde{K}_1(0,t)\Phi_1(t)\,dt}{1 - \displaystyle\int_0^1 (1-t)\tilde{K}_1(0,t)\,dt}. \tag{37}
$$

В силу (28) из (30) следует, что ядра $K_1(0,t) \leqslant 0$ и резольвента $\tilde{K}_1(0,t) \leqslant 0$, $\forall x, t \in [0,1]$. Значит, знаменатель формулы (37) для любых $0 \leqslant t \leqslant 1$ не обращается в нуль, т.е.

$$
1 - \int_0^1 (1-t)\tilde{K}_1(0,t)\,dt > 0.
$$

Если в (34) положим $x = 1$, то с учетом (31) получим

$$
\tau_1(1) = \Phi_1(1) = \tau_3(0) = 0.
$$

Исключив $\nu_j^-(y)$ и $\nu_j^+(y)$ из соотношений (18), (26) и (19), (27), с учетом (7), (8) получим системы интегральных уравнений относительно $\tau_j'(y)$, $(j = 2,3)$:

$$
\tau_2'(y) - \int_0^y M_2(y,t)\tau_2'(t)\,dt = \int_0^y N_2(y,t)\tau_3'(t)\,dt + \Phi_2(y,\tau_1), \tag{38}
$$

$$
\tau_3'(y) - \int_0^y M_3(y,t)\tau_3'(t)\,dt = \int_0^y N_3(y,t)\tau_2'(t)\,dt + \Phi_3(y,\tau_1), \tag{39}
$$

где

$$
M_2(y,t) = \frac{\mu_2}{2}(y-t) - \frac{1 + K_2(y,t)}{\sqrt{\alpha_2}\sqrt{\pi(y-t)}},
$$

$$
M_3(y,t) = -\frac{\mu_3}{2}(1-y) + \frac{1 + K_3(y,t)}{\sqrt{\alpha_3}\sqrt{\pi(y-t)}},
$$

$$
N_j(y,t) = \left[\exp\Big(-\frac{1}{4(y-t)}\Big) + \sum_{n=1}^{+\infty} \exp\Big(-\frac{(1+2n)^2}{4(y-t)}\Big)\right] \times
$$

$$
\times \begin{cases} \dfrac{2}{\alpha_2\sqrt{\pi(y-t)}}, & j = 2, \\ -\dfrac{2(y-t)^{-1/2}}{\sqrt{\pi}\alpha_3\left[1 + \frac{\mu_3}{2}(1-y)\right]}, & j = 3, \end{cases}
$$

$$
\Phi_2(y,\tau_1) = \varphi_1'\Big(\frac{y}{2}\Big) + \frac{1}{2\alpha_2\sqrt{\pi y}} \times
$$

$$\times \int_0^1 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp\Big(-\frac{4n^2+\xi^2}{4y}\Big)\Big(\frac{\xi}{y}\operatorname{ch}4\xi n - \frac{n}{y}\operatorname{sh}4\xi n\Big)\tau_1(\xi)\,d\xi,$$

$$\Phi_3(y,\tau_1) = \frac{1}{2\alpha_3\sqrt{\pi y}}\int_0^1 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp\Big(-\frac{(1+2n)^2+\xi^2}{4y}\Big) \times$$
$$\times \Big(\frac{\xi}{y}\operatorname{ch}2\xi(1+2n) - \frac{1+n}{y}\operatorname{sh}2\xi(1+2n)\Big)\tau_1(\xi)\,d\xi + \varphi_2'\Big(\frac{y+1}{2}\Big),$$

а известная функция $\tau_1(x)$ определяется из (34) и (37).

Принимая во внимание, что

$$\lim_{z\to 0} z^{-\sigma}\exp\Big(-\frac{1}{z}\Big) = 0,$$

для любых фиксированных $\sigma > 0$ с учетом (12), (36) заключаем следующее:

1) ядра $M_j(y,t)$, $j=2,3$, непрерывны в $\{(y,t) : 0 \leqslant t < y \leqslant 1\}$ и при $y \to t$ допускают оценку
$$|M_j(y,t)| \leqslant c_2(y-t)^{-1/2}; \tag{40}$$

2) ядра $N_j(y,t)$, $j=2,3$, непрерывны и ограничены в $\{(y,t) : 0 \leqslant t \leqslant y \leqslant 1\}$, т.е.
$$|N_j(y,t)| \leqslant c_3; \tag{41}$$

3) для функций $\Phi_j(y,\tau_1)$, $j=2,3$, имеет место следующая принадлежность:
$$\Phi_j(y,\tau_1) \in C[0,1] \cap C^2(0,1). \tag{42}$$

Таким образом, интегральные уравнения (38) и (39) являются интегральными уравнениями Вольтерра второго рода со слабой особенностью.

Согласно теории интегральных уравнений Вольтерра второго рода заключаем, что интегральное уравнение (38) однозначно разрешимо в классе $C[0,1] \cap C^2(0,1)$ и его решение дается формулой

$$\tau_2'(y) = \Phi_2(y,\tau_1) + \int_0^y N_2(y,t)\tau_3'(t)\,dt +$$
$$+ \int_0^y M_2^*(y,t)\Big[\Phi_2(t,\tau_1) + \int_0^t N_2(t,z)\tau_3'(z)\,dz\Big]\,dt, \quad (0,y) \in \bar{J}_2, \tag{43}$$

где $M_2^*(y,t)$ — резольвента ядра $M_2(y,t)$.

Подставляя (43) в (39), после некоторых преобразований получим интегральное уравнение Вольтерра второго рода относительно функции $\tau_3'(y)$:

$$\tau_3'(y) - \int_0^y M_4(y,t)\tau_3'(t)\,dt = \Phi_4(y,\tau_1), \quad y \in \bar{J}_3, \tag{44}$$

где

$$M_4(y,t) = M_3(y,t) + \int_t^y N_3(y,z)N_2(z,t)\,dz + \\ + \int_t^y N_3(y,z)\,dz \int_t^z M_2^*(z,s)N_2(s,t)\,ds, \quad (45)$$

$$\Phi_4(y,\tau_1) = \int_0^y N_3(y,t)\Phi_2(t,\tau_1)\,dt + \\ + \int_0^y N_3(y,t)\,dt \int_0^t M_2^*(t,z)\Phi_2(z,\tau_1)\,dz + \Phi_3(y,\tau_1). \quad (46)$$

В силу (9), (12), (42) из (45) и (46) следует, что

$$|M_4(y,t)| \leqslant c_4(y-t)^{-1/2}, \quad 0 \leqslant t < y \leqslant 1,$$

а для функции $\Phi_4(y,\tau_1)$ имеет место следующая принадлежность:

$$\Phi_4(y,\tau_1) \in C[0,1] \cap C^2(0,1). \quad (47)$$

Интегральное уравнение (44) является интегральным уравнением Вольтерра второго рода со слабой особенностью, его решение будем искать в классе $C[0,1] \cap C^2(0,1)$.

Согласно теории интегральных уравнений Вольтерра второго рода [19] решение уравнения (44) запишем в виде

$$\tau_3'(y) = \int_0^y M_4^*(y,t)\Phi_4(t,\tau_1)\,dt + \Phi_4(y,\tau_1), \quad (0,y) \in \bar{J}_3, \quad (48)$$

где $M_4^*(y,t)$ — резольвента ядра $M_4(y,t)$ уравнения (44).

В силу $\tau_2(0) = \tau_3(0) = 0$ из (43) и (48) соответственно находим функцию $\tau_2(y)$ и $\tau_3(y)$:

$$\tau_2(y) = \int_0^y \Bigg\{ \Phi_2(\omega,\tau_1) + \int_0^\omega N_2(\omega,t)\,dt \int_0^t M_4^*(t,z)\Phi_4(z,\tau_1)\,dz + \\ + \int_0^\omega N_2(\sigma,t)\Phi_4(t,\tau_1)dt + \\ + \int_0^\omega M_2^*(\omega,t)\left[\Phi_2(t,\tau_1) + \int_0^t N_2(t,z)\Phi_4(z,\tau_1)\,dz\right]dt + \\ + \int_0^\omega M_2^*(\omega,t)\Bigg[\Phi_2(t,\tau_1) + \\ + \int_0^t N_2(t,z)\,dz \int_0^z M_4^*(z,s)\Phi_4(s,\tau_1)\,ds\Bigg]\,dt\Bigg\}\,d\omega, \quad (0,y) \in \bar{J}_2, \quad (49)$$

$$\tau_3(y) = \int_0^y \left[\int_0^t M_4^*(t,z)\Phi_4(z,\tau_1)\,dz + \Phi_4(t,\tau_1)\right] dt, \quad (0,y) \in \bar{J}_3. \tag{50}$$

Поставляя (34), (49), (50) в (26) и (27), с учетом (7), (8), (16), (17), (36), (40)–(42) и (47) определим функции $\nu_j^-(y)$ и $\nu_j^+(y)$ из класса $C[0,1] \cap C^1(0,1)$.

Таким образом, решение поставленной задачи можно восстановить в области Ω_0 как решение первой краевой задачи для уравнения (1) (см. (21)), а в областях Ω_j, $j = 1,2,3$, — как решение задачи Коши для уравнения (1) (см. (13)). Следовательно, задача однозначно разрешима. $\square$

Замечание. Аналогично можно доказать однозначную разрешимость поставленной задачи в случаях **I–III**.

Конкурирующие интересы. Мы заявляем об отсутствии явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

Авторский вклад и ответственность. Все авторы принимали участие в разработке концепции статьи; все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Исследование выполнялось без финансирования.

Библиографический список

1. Нахушев А. М. Нагруженные уравнения и их приложения // *Диффер. уравн.*, 1983. Т. 19, № 1. С. 86–94.
2. Нахушев А. М. *Уравнения математической биологии*. М.: Высш. шк., 1995. 301 с.
3. Нахушев А. М. *Задачи со смещением для уравнений в частных производных*. М.: Наука, 2006. 288 с.
4. Wiener J., Debnath L. A survey of partial differential equations with piecewise continuous arguments // *Int. J. Math. Math. Sci.*, 1995. vol. 18, no. 2. pp. 209–228. https://doi.org/10.1155/S0161171295000275.
5. Исломов Б., Курьязов Д. М. Об одной краевой задаче для нагруженного уравнения второго порядка // *ДАН РУз*, 1996. № 1–2. С. 3–6.
6. Дженалиев М. Т. О нагруженных уравнениях с периодическими граничными условиями // *Диффер. уравн.*, 2001. Т. 37, № 1. С. 48–54.
7. Пулькина Л. С. Нелокальная задача для нагруженного гиперболического уравнения / *Дифференциальные уравнения и динамические системы*: Сборник статей. К 80-летию со дня рождения академика Евгения Фроловича Мищенко / Труды МИАН, Т. 236. М.: Наука, МАИК «Наука/Интерпериодика», 2002. С. 298–303.
8. Кожанов А. И. Об одном нелинейным нагруженном параболическом уравнении и о связанной с ним обратной задаче // *Матем. заметки*, 2004. Т. 76, № 6. С. 840–853. https://doi.org/10.4213/mzm156.
9. Алиханов А. А. Априорные оценки для параболических уравнений с подвижной нагрузкой / *Труды Третьей Всероссийской научной конференции* (29–31 мая 2006 г.). Часть 3: Дифференциальные уравнения и краевые задачи / Матем. моделирование и краев. задачи. Самара: СамГТУ, 2006. С. 22–25.
10. Балтаева У. И., Исломов Б. И. Краевые задачи для нагруженных дифференциальных уравнений гиперболического и смешанного типов третьего порядка // *Уфимск. матем. журн.*, 2011. Т. 3, № 3. С. 15–25.
11. Сабитов К. Б., Мелишева Е. П. Задача Дирихле для нагруженного уравнения смешанного типа в прямоугольной области // *Изв. вузов. Матем.*, 2013. № 7. С. 62–76.
12. Сабитов К. Б. Начально-граничная задача для параболо-гиперболического уравнения с нагруженными слагаемыми // *Изв. вузов. Матем.*, 2015. № 6. С. 31–42.

13. Islomov B., Baltaeva U. I. Boundary value problems for a third-order loaded parabolic-hyperbolic equation with variable coefficients // *Electron. J. Diff. Equ.*, 2015. vol. 2015, no. 221. pp. 1–10. https://ejde.math.unt.edu/Volumes/2015/221/abstr.html.
14. Sadarangani K. B., Abdullaev O. Kh. About a problem for loaded parabolic-hyperbolic type equation with fractional derivatives // *Int. J. Diff. Equ.*, 2016. vol. 6, 9815796. https://doi.org/10.1155/2016/9815796.
15. Dzhamalov S. Z., Ashurov R. R. On a nonlocal boundary-value problem for second kind second-order mixed type loaded equation in a rectangle // *Uzbek Math. J.*, 2018. no. 3. pp. 63–72. https://doi.org/10.29229/uzmj.2018-3-6.
16. Бердышев А. С., Рахматуллаева Н. А. Задача с условиям типа Бицадзе–Самарского для параболо-гиперболического уравнения с тремя линиями изменения типа // *ДАН РУз*, 2010. №4. С. 8–12.
17. Исломов Б., Холбеков Ж. А. Аналог задачи Трикоми для нагруженного параболо-гиперболического уравнения с тремя линиями изменения типа – I // *Узбек. мат. ж.*, 2015. №4. С. 47–56.
18. Исломов Б., Холбеков Ж. А. Аналог задачи Трикоми для нагруженного параболо-гиперболического уравнения с тремя линиями изменения типа – II // *Узбек. мат. ж.*, 2016. №1. С. 49–56.
19. Михлин С. Г. *Лекции по линейным интегральным уравнениям.* М.: Физматгиз, 1959. 232 с.

Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2021, vol. 25, no. 3, pp. 407–422
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1822

MSC: 35M10

On a nonlocal boundary-value problem for a loaded parabolic-hyperbolic equation with three lines of degeneracy

© ***B. I. Islomov***[1], ***J. A. Xolbekov***[2]

[1] National University of Uzbekistan named after M. Ulugbek,
4, Universitetskaya st., Tashkent, 100174, Uzbekistan.
[2] Tashkent State Technical University named after I. Karimov,
2, Universitetskaya st., Tashkent, 100174, Uzbekistan.

Abstract

The work is devoted to the proof of the uniqueness and existence of a solution of a nonlocal problem for a loaded parabolic-hyperbolic equation with three lines of change of type. Using the representation of the general solution, the uniqueness of the solution is proved, and the existence of the solution is proved by the method of integral equations. Necessary conditions for the parameters and specified functions are established for the unique solvability of Volterra integral equations of the second kind with a shift equivalent to the problem under study.

Keywords: loaded equation, nonlocal problem, Volterra integral equation with a shift, Green's function, uniqueness and existence of a solution.

Received: 22nd August, 2020 / Revised: 15th May, 2021 /
Accepted: 28th June, 2021 / First online: 20th September, 2021

Competing interests. We declare that we have no actual and potential conflicts of interest related to the publication of this article.

Authors' contributions and responsibilities. Each author has participated in the article concept development; the authors contributed equally to this article. The authors are absolutely responsible for submit the final manuscript to print. Each author has approved the final version of manuscript.

Funding. This research received no specific grant from any funding agency in the public, commercial, or not-for-profit sectors.

Research Article

Please cite this article in press as:
Islomov B. I., Xolbekov J. A. On a nonlocal boundary-value problem for a loaded parabolic-hyperbolic equation with three lines of degeneracy, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2021, vol. 25, no. 3, pp. 407–422. https://doi.org/10.14498/vsgtu1822 (In Russian).

Authors' Details:

Bozor I. Islomov https://orcid.org/0000-0002-4372-395X
Dr. Phys.& Math. Sci., Professor; Chief Researcher; Dept. of Differential Equations and Mathematical Physics; e-mail: islomovbozor@yandex.ru

Jurat A. Xolbekov https://orcid.org/0000-0002-1495-2761
Assistant; Dept. of Higher Mathematics; e-mail: xolbekovja@mail.ru

References

1. Nakhushev A. M. Loaded equations and their applications, *Differ. Uravn.*, 1983, vol. 19, no. 1, pp. 86–94 (In Russian).
2. Nakhushev A. M. *Uravneniia matematicheskoi biologii* [Equations of Mathematical Biology]. Moscow, Vyssh. Shk., 1995, 301 pp. (In Russian)
3. Nakhushev A. M. *Zadachi so smeshcheniem dlia uravnenii v chastnykh proizvodnykh* [Problems with Shift for Partial Differential Equations]. Moscow, Nauka, 2006, 288 pp. (In Russian)
4. Wiener J., Debnath L. A survey of partial differential equations with piecewise continuous arguments, *Int. J. Math. Math. Sci.*, 1995, vol. 18, no. 2, pp. 209–228. https://doi.org/10.1155/S0161171295000275.
5. Islamov B. I., Kuryazov D. M. On a boundary value problem for loaded equation of the second order, *Dokl. Akad. Nauk Resp. Uzb.*, 1996, no. 1–2, pp. 3–6 (In Russian).
6. Dzhenaliev M. T. Loaded equations with periodic boundary conditions, *Differ. Equ.*, 2001, vol. 37, no. 1, pp. 51–57. https://doi.org/10.1023/A:1019268231282.
7. Pul'kina L. S. A nonlocal problem for a loaded hyperbolic equation, *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2002, vol. 236, pp. 285–290.
8. Kozhanov A. I. A nonlinear loaded parabolic equation and a related inverse problem, *Math. Notes*, 2004, vol. 76, no. 6, pp. 784–795. https://doi.org/10.1023/B:MATN.0000049678.16540.a5.
9. Alikhanov A. A. A priori estimates for parabolic equations with a movable load, In: *Proceedings of the Third All-Russian Scientific Conference* (29–31 May 2006). Part 3, Matem. Mod. Kraev. Zadachi. Samara, Samara State Technical Univ., 2006, pp. 22–25 (In Russian).
10. Baltayeva U. I., Islomov B. I. Boundary value problems for the loaded third order equations of the hyperbolic and mixed types, *Ufimsk. Mat. Zh.*, 2011, vol. 3, no. 3, pp. 15–25 (In Russian).
11. Sabitov K. B., Melisheva E. P. The Dirichlet problem for a loaded mixed-type equation in a rectangular domain, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2013, vol. 57, no. 7, pp. 53–65. https://doi.org/10.3103/S1066369X13070062.
12. Sabitov K. B. Initial-boundary problem for parabolic-hyperbolic equation with loaded summands, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2015, vol. 59, no. 6, pp. 23–33. https://doi.org/10.3103/S1066369X15060055.
13. Islomov B., Baltaeva U. I. Boundary value problems for a third-order loaded parabolic-hyperbolic equation with variable coefficients, *Electron. J. Diff. Equ.*, 2015, vol. 2015, no. 221, pp. 1–10. https://ejde.math.unt.edu/Volumes/2015/221/abstr.html.
14. Sadarangani K. B., Abdullaev O. Kh. About a problem for loaded parabolic-hyperbolic type equation with fractional derivatives, *Int. J. Diff. Equ.*, 2016, vol. 6, 9815796. https://doi.org/10.1155/2016/9815796.
15. Dzhamalov S. Z., Ashurov R. R. On a nonlocal boundary-value problem for second kind second-order mixed type loaded equation in a rectangle, *Uzbek Math. J.*, 2018, no. 3, pp. 63–72. https://doi.org/10.29229/uzmj.2018-3-6.
16. Berdyshev A. S., Rakhmatullaeva N. A. A problem with Bitsadze–Samarskiy type conditions for a parabolic-hyperbolic equation with three lines of degeneracy, *Dokl. Akad. Nauk Resp. Uzb.*, 2010, no. 4, pp. 8–12 (In Russian).
17. Islomov B., Kholbekov Zh. A. An analogue of the Tricomi problem for a loaded parabolic-hyperbolic equation with three lines of degeneracy – I, *Uzbek Math. J.*, 2015, no. 4, pp. 47–56 (In Russian).
18. Islomov B., Kholbekov Zh. A. An analogue of the Tricomi problem for a loaded parabolic-hyperbolic equation with three lines of degeneracy – II, *Uzbek Math. J.*, 2016, no. 1, pp. 49–56 (In Russian).
19. Mikhlin S. G. *Linear Integral Equations*, International Monographs on Advanced Mathematics and Physics. Delhi, Hindustan Publ., 1960, vii+223 pp.