

Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ



УДК 517.958:532.595.2

Математическое моделирование и помехоустойчивая оценка параметров импульса ударной волны на основе результатов эксперимента при подводных взрывах

© В. Е. Зотеев, С. Ю. Ганигин, Д. А. Деморецкий,
М. В. Ненашев, А. В. Губинский


Самарский государственный технический университет,
Россия, 443100, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

Аннотация

Рассматривается построение на основе натуральных экспериментов и численно-аналитических исследований математической модели импульса подводной ударной волны, наблюдаемого на выходе датчика давления. Представлены разработка и сравнительный анализ различных численных методов нелинейного оценивания параметров этой модели. Предлагается численный метод оценки энергии импульса ударной волны на основе результатов эксперимента в форме осциллограммы избыточного давления, полученной при натуральных испытаниях как на бесконечном промежутке времени, так и при заданной длительности импульса. Приведены результаты апробации разработанных численных методов математического моделирования импульса подводной ударной волны при обработке результатов эксперимента при взрыве эталонного заряда взрывчатого вещества. Достоверность и эффективность представленных в работе алгоритмов вычислений и методов нелинейного оценивания подтверждаются результатами численно-аналитических исследований и построенными на основе экспериментальных данных математическими моделями импульсов избыточного давления ударной волны.

Ключевые слова: импульс подводной ударной волны, математическая модель, нелинейный регрессионный анализ, система разностных уравнений, обобщенная регрессионная модель, среднее квадратическое оценивание, статистическая обработка результатов эксперимента.

Научная статья

 Контент публикуется на условиях лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 International \(https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru)

Образец для цитирования

Зотеев В. Е., Ганигин С. Ю., Деморецкий Д. А., Ненашев М. В., Губинский А. В. Математическое моделирование и помехоустойчивая оценка параметров импульса ударной волны на основе результатов эксперимента при подводных взрывах // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2021. Т. 25, № 1. С. 127–162. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1849>.

Сведения об авторах

Владимир Евгеньевич Зотеев  <https://orcid.org/0000-0001-7114-4894>

доктор технических наук, доцент; профессор; каф. прикладной математики и информатики; e-mail: zoteev-ve@mail.ru

Получение: 12 февраля 2021 г. / Исправление: 6 марта 2021 г. /
Принятие: 10 марта 2021 г. / Публикация онлайн: 29 марта 2021 г.

Введение. При проведении подводных испытаний боеприпасов и зарядов взрывчатых веществ основной задачей является получение таких величин, как максимальное избыточное давление ударной волны и энергия импульса фазы сжатия. Эти параметры являются основными поражающими факторами взрыва [1–3]. Кроме того, на их основе определяют тротиловый эквивалент взрыва и работоспособность изделия. Как правило, ударную волну представляют в виде разрывного скачка давления, за которым следует экспоненциальное затухание в течение некоторого промежутка времени [4–8]. Предсказание поведения давления на ниспадающей части экспериментальной кривой дают теоретические положения [4, 9]. Отрезок кривой давления (до 30% от максимального значения) описывается экспонентой, а оставшаяся часть кривой давления — по степенному закону $t^{-4/5}$. Таким образом, аппроксимация описывается суммой двух функций на двух различных временных интервалах. В большинстве практических случаев используют более грубое приближение, соответствующее экспоненциальному закону

$$P(t) = P_{\max} \exp(-t/\theta), \quad (1)$$

где P_{\max} — начальное пиковое давление, θ — постоянная времени экспоненциального затухания.

В этих же работах [4, 9] указывается на то, что повышение точности описания экспериментальной кривой давления нецелесообразно и сопряжено со значительными затратами при постановке экспериментов. Однако, с другой стороны, в [4] отмечается существенное отклонение формы подводной ударной волны от экспоненциальной модели. Эти отклонения определяются формой заряда, типом взрывчатого вещества, гидродинамическими процессами отражения волн давления от границ раздела, движущихся в газообразных продуктах детонации.

При оценке эффективности новых перспективных взрывчатых веществ и конструкций боевых частей при подводном взрыве применение математической модели (1) может привести к значительным ошибкам в оценках параметров ударной волны. В частности, можно отметить результаты, приводимые в работах, посвященных исследованию подводного взрыва металлизированных взрывчатых веществ [5, 10–13]. В этих работах указано на существенное

Сергей Юрьевич Ганигин  <https://orcid.org/0000-0001-5778-6516>


доктор технических наук; декан инженерно-технологического факультета, профессор; каф. технологии твердых химических веществ; e-mail: ganigin.s.yu@yandex.ru

Дмитрий Анатольевич Деморецкий  <https://orcid.org/0000-0002-4523-1465>

доктор технических наук, профессор; заведующий кафедрой; каф. технологии твердых химических веществ; e-mail: dda74@inbox.ru

Максим Владимирович Ненашев  <https://orcid.org/0000-0003-3918-5340>

доктор физико-математических наук, профессор; первый проректор – проректор по научной работе; каф. технологии твердых химических веществ; e-mail: nenashev.mv@samgtu.ru

Алексей Владимирович Губинский  <https://orcid.org/0000-0002-9732-2596>

аспирант; каф. технологии твердых химических веществ; e-mail: gubinskiy.av@samgtu.ru

изменение формы кривой давления на спаде вследствие догорания металлических компонентов взрывчатых веществ или заряда.

При проведении акваторных испытаний полезный сигнал давления испытывает сильные аддитивные и мультипликативные возмущения, возникающие при действии импульса давления на элементы измерительной системы — разъемы и кабели, длина которых составляет десятки и сотни метров. При этом проявляется колебательный характер измерительной системы, собственные колебания которой имеют значительную амплитуду.

Кроме того, давление, действующее на элементы измерительной системы, приводит к помехам замирания сигнала и его исчезновению (выпадают участки полезного сигнала, несущего информацию) или появлению резких скачков сигнала. Использование известных методов фильтрации приводит к искажению сигнала и потере информации. Кроме того, большой объем измерительной информации приводит к необходимости автоматизации обработки результатов наблюдений в ходе эксперимента или натуральных испытаний. При этом одной из важнейших задач является выделение полезного сигнала подводной ударной волны на фоне помех.

Таким образом, решение проблемы построения адекватной математической модели, описывающей форму подводной ударной волны, и помехоустойчивая оценка её параметров является актуальной задачей. Эта задача может быть решена только на основе методов статистической обработки результатов эксперимента, методов нелинейной регрессии с использованием современных средств вычислений и обработки информации.

1. Организация и техническое обеспечение натуральных экспериментов. Исследования на основе натуральных экспериментов проводились с применением современного оборудования и широко используемых в настоящее время методик [5, 13, 14]. Статистическому анализу подвергались большие массивы экспериментальных данных, полученных при проведении взрывов малых зарядов взрывчатых веществ (до 2 кг) в искусственном бассейне и больших зарядов (до 300 кг) в открытом водоеме с выполнением условий подводного взрыва, при которых расстояния от заряда до поверхности, дна и берегов водоема настолько велики, что отраженная волна появляется через промежуток времени не менее 6θ . При проведении экспериментальных исследований использовались датчики подводной ударной волны РСВ Piezotronic 138A05 [10, 15]. Схема проведения натуральных испытаний по измерению избыточного давления импульса подводной ударной волны приведена на рис. 1.

Эксперименты проводились как со сферическими, так и с цилиндрическими зарядами металлизированных и индивидуальных взрывчатых веществ. При обработке экспериментальных данных тротиловый эквивалент определялся на основании измеренных давлений подводной ударной волны и вычисления энергии импульса в предположении, что спад давления подчиняется экспоненциальному закону. Однако использование современных металлизированных взрывчатых веществ приводит к дополнительному искажению формы сигнала за счет растягивания фронта при догорании компонентов взрывчатого вещества [10, 17]. В связи с этим необходимы поиск наилучшей формы математической модели, аппроксимирующей результаты эксперимента, и помехоустойчивая оценка ее параметров.

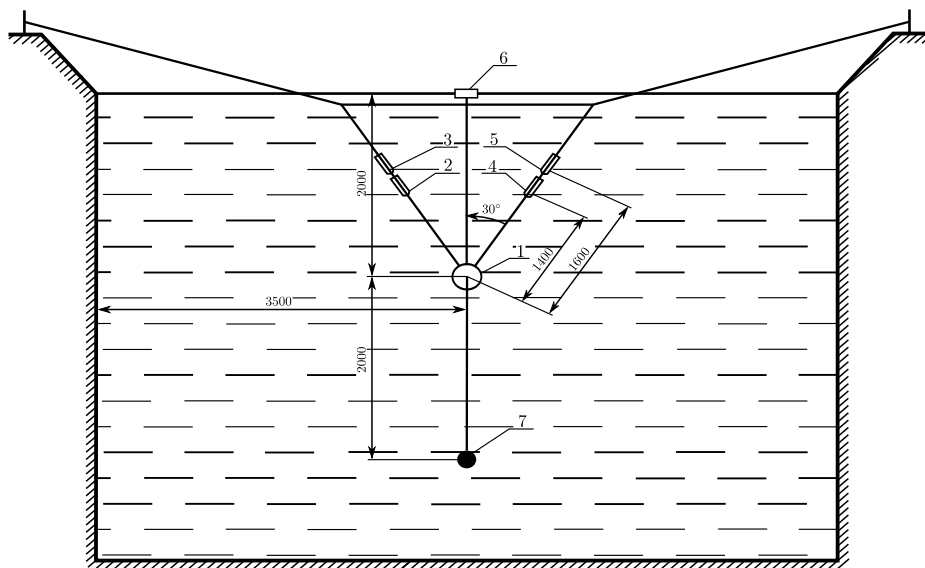


Рис. 1. Схема проведения исследований по измерению избыточного давления импульса подводной ударной волны: 1 — заряд взрывчатого вещества; 2–5 — датчики давления; 6 — поплавок; 7 — груз

[Figure 1. Research design on measuring the overpressure of an underwater shockwave pulse: 1 — the explosive charge; 2–5 — the pressure sensors; 6 — the float; 7 — the weight]

2. Постановка задачи исследования и методы ее решения. Основной задачей научных исследований, результаты которых представлены в данной работе, является построение на основе натуральных экспериментов и численно-аналитических исследований математической модели импульса подводной ударной волны, наблюдаемого на выходе датчика давления, а также разработка и сравнительный анализ различных численных методов оценки параметров этой модели. Кроме того, в данной работе рассматриваются задачи, связанные с построением и параметрической идентификацией математической модели датчика давления — важнейшего элемента системы формирования результатов натурального эксперимента — в форме линейного дифференциального оператора второго порядка. Предлагается численный метод оценки энергии импульса ударной волны на основе результатов эксперимента в форме осциллограммы избыточного давления, полученной при натуральных испытаниях. При решении поставленных задач используются как известные статистические методы обработки результатов эксперимента [19] и линейной и нелинейной регрессии [20–25], так и новые методы параметрической идентификации нелинейных систем на основе разностных уравнений [26–28].

3. Анализ результатов эксперимента в виде осциллограмм избыточного давления и выбор на его основе формы математической модели. Ударная волна при подводных взрывах представляет собой разрывной скачок давления $P(t)$ с последующим монотонным спадом на длительном промежутке времени. Анализ форм осциллограмм избыточного давления, полученных при натуральных испытаниях (рис. 2, 3), позволяет сделать вывод о некоторых свойствах непрерывной функции $y(t)$, лежащей в основе

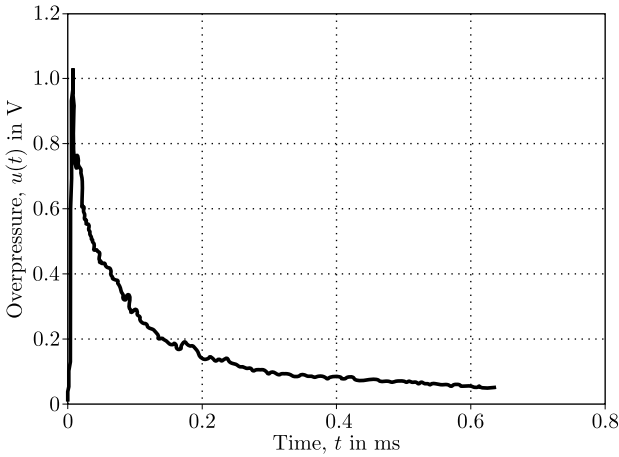


Рис. 2. Осциллограмма избыточного давления, полученная при натурных испытаниях малых зарядов взрывчатых веществ (500 грамм пластита)

[Figure 2. The overpressure trace curve from field tests of small explosive charges (500 grams of plastic explosives)]

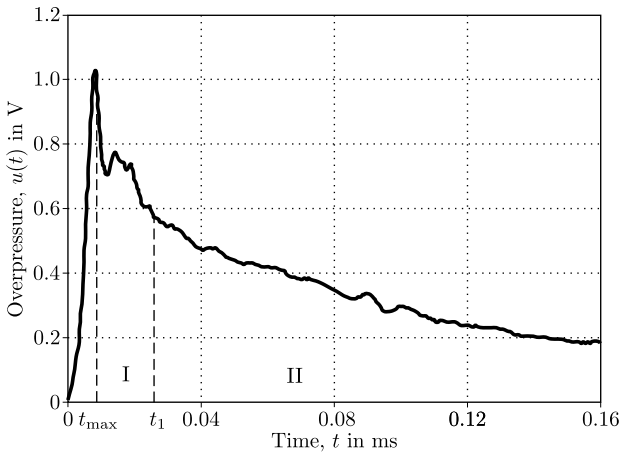


Рис. 3. Выделение области влияния инерционности датчика давления на выходной сигнал

[Figure 3. Highlighting an area of the influence of the inertia of the pressure sensor to the output signal]

математической модели подводной ударной волны:

$$y(0) = y_{\max}, \quad \frac{dy}{dt} < 0, \quad \frac{d^2y}{dt^2} > 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0.$$

В качестве такой функции с учетом некоторых допущений были рассмотрены различные зависимости:

$$y(t) = Ae^{-at}, \quad y(t) = A(e^{-\alpha_1 t} - e^{-\alpha_2 t}), \quad y(t) = At^n e^{-at},$$

$$y(t) = \frac{c_0 + c_1 t}{1 + c_2 t}, \quad y(t) = \frac{c_0}{1 + c_1 t + c_2 t^2}$$

и некоторые другие.

Проведенные на основе компьютерного моделирования численно-аналитические исследования для различных математических моделей, описывающих монотонный спад давления на промежутке времени, в котором отсутствует влияние инерционности датчика давления на выходной сигнал, показали, что наиболее адекватной результатам эксперимента является дробно-рациональная трехпараметрическая нелинейная зависимость вида

$$y(t) = \frac{c_0}{1 + c_1 t + c_2 t^2}.$$

Очевидно, что для того, чтобы эта функция удовлетворяла указанным выше свойствам, достаточно выполнения условий

$$c_1 > 0, \quad 0 < c_2 < c_1^2/4.$$

При анализе начальных участков осциллограмм избыточного давления $P(t)$ можно выделить две основные области (рис. 3): область I — промежуток времени $t \in [0, t_1]$, в котором проявляется инерционность датчика давления, и область II — промежуток времени $t \in [t_1, \infty)$, в котором отсутствует влияние инерционности датчика давления на выходной сигнал. Сравнение формы сигналов на входе $P(t)$ и выходе $u(t)$ датчика давления позволяет сделать вывод о заметном влиянии инерционности датчика в области I на выходной сигнал.

Такой подход к построению математической модели динамического процесса, наблюдаемого на выходе датчика давления — в виде суммы двух аддитивных составляющих, одна из которых $z(t)$ описывает реакцию датчика на скачок давления, а другая $y(t)$ аппроксимирует медленный спад избыточного давления, — позволяет предложить модель датчика давления в виде линейного дифференциального оператора второго порядка

$$Lu = m(t)u''(t) + b(t)u'(t) + u(t) \tag{2}$$

с переменными (в общем случае) коэффициентами $m(t)$ и $b(t)$.

На рис. 4 представлена блок-схема математической модели датчика давления, в которой $P(t)$ — избыточное давление на входе датчика (в атм.); $u(t)$ — наблюдаемый на выходе датчика давления сигнал (в вольтах); k_d — коэффициент преобразования давления в выходной сигнал датчика давления.

Линейный характер дифференциального оператора второго порядка (2) позволяет представить сигнал с выхода датчика давления в виде суммы

$$u(t) = z(t) + y(t),$$

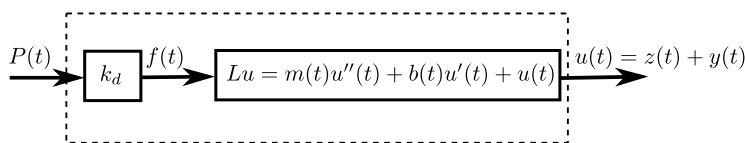


Рис. 4. Блок-схема математической модели датчика давления

[Fig. 4. The block diagram of the mathematical model of the pressure sensor]

где функция $z(t)$ аппроксимирует реакцию датчика на разрывной скачок давления в начальный момент времени и является решением однородного дифференциального уравнения $Lu = 0$; функция $y(t)$ описывает медленный спад избыточного давления $P(t)$ в импульсе ударной волны, наблюдаемом на выходе датчика.

Выбор вида модели $z(t)$ осуществляется на основе анализа осциллограмм избыточного давления, полученных в ходе эксперимента. По результатам анализа многочисленных осциллограмм избыточного давления, вид которых оказался идентичным кривым, представленным на рис. 2 и 3, можно отметить, что реакция датчика на скачок давления представляет собой быстро затухающие колебания, период которых нестационарен (область I на рис. 3). При этом был сделан вывод о целесообразности использования в качестве аппроксимации $z(t)$ реакции датчика на разрывной скачок давления модели вида

$$z(t) = e^{-\alpha t}[A_0 \cos(\beta_1 t + \beta_2 t^2) + B_0 \sin(\beta_1 t + \beta_2 t^2)], \quad (3)$$

где с учетом быстрого затухания амплитуды колебаний параметр $\alpha > 0$ имеет достаточно большую величину; параметры β_1 и β_2 характеризуют изменение частоты свободных колебаний датчика давления; A_0 и B_0 — некоторые произвольные постоянные.

С учетом выбранной формы математической модели (3) были получены соотношения, связывающие коэффициенты $m(t)$ и $b(t)$ в линейном дифференциальном операторе второго порядка (2) с динамическими характеристиками α , β_1 и β_2 затухающих свободных колебаний (3):

$$\begin{aligned} m(t) &= \frac{\beta_1 + 2\beta_2 t}{\alpha^2(\beta_1 + 2\beta_2 t) - 2\alpha\beta_2 + (\beta_1 + 2\beta_2 t)^3}, \\ b(t) &= \frac{2\alpha(\beta_1 + 2\beta_2 t) - 2\beta_2}{\alpha^2(\beta_1 + 2\beta_2 t) - 2\alpha\beta_2 + (\beta_1 + 2\beta_2 t)^3}. \end{aligned} \quad (4)$$

Очевидно, что при больших значениях времени t функции $m(t)$ и $b(t)$ стремятся к нулю, а математическая модель датчика давления для области II (монотонного спада давления) сводится к коэффициенту k_d . Можно также отметить, что при значениях параметра β_2 , близких к нулю, когда реакция на выходе датчика представляет собой затухающие гармонические колебания с постоянной частотой β_1 , математическая модель (2) вырождается в известный линейный дифференциальный оператор второго порядка с постоянными коэффициентами $m = (\alpha^2 + \beta_1^2)^{-1}$ и $b = 2\alpha(\alpha^2 + \beta_1^2)^{-1}$ [18].

Таким образом, общее решение обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка

$$m(t)u''(t) + b(t)u'(t) + u(t) = f(t),$$

описывающее математическую модель сигнала на выходе датчика давления, можно представить в виде

$$u(t) = e^{-\alpha t}[A_0 \cos(\beta_1 t + \beta_2 t^2) + B_0 \sin(\beta_1 t + \beta_2 t^2)] + \frac{c_0}{1 + c_1 t + c_2 t^2}.$$

В качестве начальных условий для этой аппроксимирующей функции принимаем значения, соответствующие результатам эксперимента:

$$u(0) = u_0 \quad \text{и} \quad u'(0) = u'_0.$$

Здесь величина u'_0 может быть найдена по одной из известных формул численного дифференцирования, например,

$$u'_0 = \frac{-3u_0 + 4u_1 - u_2}{2\tau},$$

где u_0, u_1, u_2 — результаты эксперимента. При таких начальных условиях имеем

$$A_0 = u_0 - c_0 \quad \text{и} \quad B_0 = \frac{(u_0 - c_0)\alpha + c_0c_1 + u'_0}{\beta_1}.$$

Введем обозначения

$$a_0 = c_0 - u_0, \quad b_0 = \frac{c_0c_1 + u'_0}{c_0 - u_0}. \quad (5)$$

Тогда математическая модель сигнала с датчика давления с учетом начальных условий принимает вид

$$u(t) = \frac{c_0}{1 + c_1t + c_2t^2} - a_0e^{-\alpha t} \left[\cos(\beta_1t + \beta_2t^2) + \frac{\alpha - b_0}{\beta_1} \sin(\beta_1t + \beta_2t^2) \right]. \quad (6)$$

Функция

$$z(t) = -a_0e^{-\alpha t} \left[\cos(\beta_1t + \beta_2t^2) + \frac{\alpha - b_0}{\beta_1} \sin(\beta_1t + \beta_2t^2) \right]$$

представляет собой решение однородного дифференциального уравнения

$$m(t)z''(t) + b(t)z'(t) + z(t) = 0$$

с переменными коэффициентами (4). С учетом этого дифференциальное уравнение

$$m(t)u''(t) + b(t)u'(t) + u(t) = f(t),$$

где $u(t) = z(t) + y(t)$, принимает вид

$$m(t)y''(t) + b(t)y'(t) + y(t) = f(t).$$

Таким образом, восстановить математическую модель импульса взрывной волны $f(t)$ можно по формуле

$$f(t) = y(t) + b(t)y'(t) + m(t)y''(t). \quad (7)$$

С учетом выбранной формы аппроксимации

$$y(t) = \frac{c_0}{1 + c_1t + c_2t^2}$$

формула (7) принимает вид

$$f(t) = \frac{c_0}{1 + c_1t + c_2t^2} \left[1 - b(t) \frac{2c_2t + c_1}{1 + c_1t + c_2t^2} + 2m(t) \frac{(c_1^2 - c_2) + 3c_1c_2t + 3c_2^2t^2}{(1 + c_1t + c_2t^2)^2} \right].$$

При малых значениях функций $m(t)$ и $b(t)$ на участке II (см. рис. 3) монотонного спада давления можно положить

$$f(t) \approx y(t) = \frac{c_0}{1 + c_1t + c_2t^2}.$$

4. Разработка и сравнительный анализ численных методов оценки параметров математической модели, аппроксимирующей спад избыточного давления в подводной ударной волне. При оценке параметров математической модели, аппроксимирующей спад избыточного давления, следует использовать только те результаты наблюдений u_k , для которых аддитивной составляющей

$$z(t) = -a_0e^{-\alpha t} \left[\cos(\beta_1t + \beta_2t^2) + \frac{\alpha - b_0}{\beta_1} \sin(\beta_1t + \beta_2t^2) \right]$$

можно пренебречь: $z(t) \approx 0$.

Анализ многочисленных осциллограмм избыточного давления, полученных в ходе натуральных испытаний, показал, что колебания на начальном участке практически полностью затухают за промежуток времени $[0, t_1]$, равный $3t_{\max}$, где t_{\max} — момент времени, соответствующий максимальному значению в выборке результатов наблюдения (рис. 3).

Отсюда следует, что N_1 — номер отсчета, начиная с которого аддитивной составляющей $z(t)$ можно пренебречь: $z_k \approx 0$, — может быть найден по формуле

$$N_1 = \frac{3t_{\max}}{\tau} + 1 = 3k_{\max} + 1, \tag{8}$$

где k_{\max} — номер отсчета, соответствующий максимуму импульса ударной волны.

Однако численно-аналитические исследования на основе компьютерного моделирования показали, что игнорирование отброшенных на основании формулы (8) результатов наблюдений: $u_0, u_1, \dots, u_{N_1-1}$, существенно влияет на точность математического моделирования спада избыточного давления. Экспериментально было установлено, что наиболее эффективной является трехшаговая процедура построения модели, аппроксимирующей спад избыточного давления в подводной ударной волне.

На первом шаге эта модель — $\hat{y}_1(t)$ — строится по выборке результатов наблюдений u_k , $k = \overline{N_1, N-1}$, N — объем выборки результатов эксперимента. На втором шаге формируется выборка результатов вычислений $z_k = u_k - \hat{y}_{1k}$, $k = 0, 1, 2, \dots, N_1-1$, на основе которой строится математическая модель $\hat{z}(t)$, аппроксимирующая свободные колебания датчика давления. На третьем, заключительном шаге находятся уточненные среднеквадратичные оценки параметров модели (6), описывающей сигнал на выходе датчика давления, в том

числе и параметры модели $\hat{y}(t)$, аппроксимирующей спад избыточного давления в подводной ударной волне.

В основе параметрической идентификации математической модели

$$\hat{y}(t) = \frac{c_0}{1 + c_1 t + c_2 t^2} \quad (9)$$

лежит минимизация остаточной суммы квадратов Q_{res} на множестве коэффициентов дробно-рациональной (гиперболической) функции (9):

$$Q_{\text{res}} = \|y - \hat{y}\|^2 = \sum_{k=0}^{N-1} (y_k - \hat{y}_k)^2 = \sum_{k=0}^{N-1} \varepsilon_k^2 \rightarrow \min,$$

где y_k — данные, полученные в ходе эксперимента; \hat{y}_k — результаты вычислений на основе построенной модели, $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$ [19]. Эта задача может быть решена известными методами нелинейной регрессии [20–23]. Основными проблемами при этом являются выбор начального приближения вектора оценок параметров модели (9), а также сходимость итерационных процедур, используемых в методах нелинейного оценивания.

Рассмотрим *три алгоритма* среднеквадратичного оценивания параметров нелинейной модели (9), в основе которых лежат линейные регрессионные модели, коэффициенты которых известным образом связаны с параметрами нелинейной модели (9). Такой подход позволяет свести задачу нелинейного оценивания к задаче линейного прикладного регрессионного анализа [24, 25], решение которой сводится к простому решению системы линейных алгебраических уравнений.

Первый алгоритм. Рассмотрим *первый алгоритм* среднеквадратичной оценки параметров нелинейной математической модели (9). Характерной чертой этого алгоритма является линеаризация регрессионной модели, построенной на основе нелинейной функциональной зависимости (9). Этот подход позволил избежать применения итерационных процедур уточнения оценок коэффициентов регрессионной модели, тем самым существенно упростив алгоритм вычислений.

На основе непрерывной зависимости (9) можно получить модель в форме дискретной функции вида

$$\hat{y}_k = \frac{c_0}{1 + c_1 \tau k + c_2 \tau^2 k^2}, \quad (10)$$

где τ — период дискретизации; $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$; N — объем выборки результатов эксперимента.

Результаты наблюдений y_k , используемые при решении задачи параметрической идентификации, отличаются от результатов вычислений \hat{y}_k по формуле (10) на случайную величину ε_k разброса данных эксперимента относительно построенной модели: $y_k = \hat{y}_k + \varepsilon_k$, $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$. Отсюда следует, что

$$y_k = \hat{y}_k \left(1 + \frac{\varepsilon_k}{\hat{y}_k}\right) = \hat{y}_k \left(1 + \frac{\varepsilon_k}{y_k - \varepsilon_k}\right) = \hat{y}_k \left(1 - \frac{\varepsilon_k}{y_k}\right)^{-1}.$$

При малых значениях случайной величины ε_k имеем $|\varepsilon_k/y_k| \ll 1$:

$$\left(1 - \frac{\varepsilon_k}{y_k}\right)^{-1} = 1 + \frac{\varepsilon_k}{y_k} + \frac{\varepsilon_k^2}{y_k^2} + \frac{\varepsilon_k^3}{y_k^3} + \dots \approx 1 + \frac{\varepsilon_k}{y_k}. \quad (11)$$

Отсюда с точностью до $O(\varepsilon_k^2)$ имеем равенство

$$y_k = \hat{y}_k \left(1 + \frac{\varepsilon_k}{y_k}\right) \quad \text{или} \quad \frac{y_k^2}{\hat{y}_k} = y_k + \varepsilon_k$$

и из формулы (10) получаем

$$\left(\frac{1}{c_0} + \frac{c_1}{c_0}\tau k + \frac{c_2}{c_0}\tau^2 k^2\right) y_k^2 = y_k + \varepsilon_k,$$

или

$$y_k = \lambda_1 y_k^2 + \lambda_2 k y_k^2 + \lambda_3 k^2 y_k^2 - \varepsilon_k, \quad (12)$$

где

$$\lambda_1 = \frac{1}{c_0}, \quad \lambda_2 = \frac{c_1\tau}{c_0} = c_1\tau\lambda_1, \quad \lambda_3 = \frac{c_2\tau^2}{c_0} = c_2\tau^2\lambda_1. \quad (13)$$

Среднеквадратичные оценки линейной регрессионной модели (12) $\hat{\lambda}_1$, $\hat{\lambda}_2$ и $\hat{\lambda}_3$ находятся из условия минимизации

$$\sum_{k=0}^{N-1} (y_k - \hat{y}_k)^2 = \sum_{k=0}^{N-1} (y_k - \lambda_1 y_k^2 - \lambda_2 k y_k^2 - \lambda_3 k^2 y_k^2)^2 \rightarrow \min$$

на основе решения нормальной системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} \lambda_1 \sum_{k=0}^{N-1} y_k^4 + \lambda_2 \sum_{k=0}^{N-1} k y_k^4 + \lambda_3 \sum_{k=0}^{N-1} k^2 y_k^4 = \sum_{k=0}^{N-1} y_k^3; \\ \lambda_1 \sum_{k=0}^{N-1} k y_k^4 + \lambda_2 \sum_{k=0}^{N-1} k^2 y_k^4 + \lambda_3 \sum_{k=0}^{N-1} k^3 y_k^4 = \sum_{k=0}^{N-1} k y_k^3; \\ \lambda_1 \sum_{k=0}^{N-1} k^2 y_k^4 + \lambda_2 \sum_{k=0}^{N-1} k^3 y_k^4 + \lambda_3 \sum_{k=0}^{N-1} k^4 y_k^4 = \sum_{k=0}^{N-1} k^2 y_k^3. \end{cases} \quad (14)$$

С учетом среднеквадратичных оценок коэффициентов модели (12) и соотношений (13) оценки параметров математической модели (9), аппроксимирующей спад избыточного давления, могут быть найдены по формулам

$$\hat{c}_0 = \frac{1}{\hat{\lambda}_1}, \quad \hat{c}_1 = \frac{\hat{\lambda}_2}{\tau \hat{\lambda}_1}, \quad \hat{c}_2 = \frac{\hat{\lambda}_3}{\tau^2 \hat{\lambda}_1}. \quad (15)$$

Основным достоинством данного алгоритма среднеквадратичного оценивания параметров модели (9) является его простота — вычисление оценок сводится к решению системы линейных уравнений (14) — и отсутствие в алгоритме итерационных процедур уточнения среднеквадратичных оценок параметров. Однако применение аппроксимации (11) при построении линейной

регрессионной модели (12), лежащей в основе вычисления оценок параметров нелинейной зависимости (20), не позволяет достигнуть точного минимума остаточной суммы квадратов

$$Q_{\text{res}} = \sum_{k=0}^{N-1} \varepsilon_k^2 = \sum_{k=0}^{N-1} (y_k - \hat{y}_k)^2.$$

Проведенные на основе компьютерного моделирования численно-аналитические исследования показали, что при малых значениях величины случайной помехи ε_k в данных эксперимента y_k (до 3%) относительное отклонение остаточной суммы квадратов Q_{res} от ее минимально возможного значения $\min Q_{\text{res}}$ не превышает 5%. Однако при случайной помехе величиной 10% относительное отклонение от $\min Q_{\text{res}}$ составляет порядка 20%.

Второй алгоритм. Во втором алгоритме среднеквадратичного оценивания параметров модели (9) математическая модель, описывающая результаты эксперимента

$$y_k = \frac{c_0}{1 + c_1 \tau k + c_2 \tau^2 k^2} + \varepsilon_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N - 1,$$

приводится к виду

$$y_k + c_1 \tau k y_k + c_2 \tau^2 k^2 y_k = c_0 + (1 + c_1 \tau k + c_2 \tau^2 k^2) \varepsilon_k,$$

или в форме обобщенной регрессионной модели:

$$\begin{cases} y_k = \lambda_1 + \lambda_2 k y_k + \lambda_3 k^2 y_k + \eta_{k+1}; \\ \eta_{k+1} = (1 - \lambda_2 k - \lambda_3 k^2) \varepsilon_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N - 1, \end{cases} \quad (16)$$

где

$$\lambda_1 = c_0, \quad \lambda_2 = -c_1 \tau, \quad \lambda_3 = -c_2 \tau^2. \quad (17)$$

В матричной форме уравнения (16) можно представить в виде

$$\begin{cases} b = F \lambda + \eta; \\ \eta = P_\lambda \varepsilon, \end{cases} \quad (18)$$

где $b = (y_0, y_1, y_2, \dots, y_{N-1})^\top$ — вектор результатов эксперимента; $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)^\top$ — вектор неизвестных коэффициентов, известным образом — по формулам (17) — связанный с параметрами модели (18);

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & y_1 & y_1 \\ 1 & 2y_2 & 4y_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & (N-1)y_{N-1} & (N-1)^2 y_{N-1} \end{bmatrix} \text{ — матрица размера } [N \times 3];$$

$\eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3, \dots, \eta_N)^\top$ — вектор эквивалентного случайного возмущения (невязка); P_λ — диагональная матрица линейного преобразования вектора случайной помехи в результатах эксперимента:

$$P_\lambda = \text{diag}[1, 1 - \lambda_2 - \lambda_3, 1 - 2\lambda_2 - 4\lambda_3, \dots, 1 - (N-1)\lambda_2 - (N-1)^2 \lambda_3]; \quad (19)$$

$\varepsilon = (\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots, \varepsilon_{N-1})^\top$ — вектор случайной помехи в результатах эксперимента.

При условии $\det P_\lambda \neq 0$ из (18) получаем регрессионную модель в форме

$$P_\lambda^{-1}b = P_\lambda^{-1}F\lambda + \varepsilon, \quad (20)$$

где P_λ^{-1} — диагональная матрица вида

$$P_\lambda^{-1} = \text{diag}\left[1, \frac{1}{1 - \lambda_2 - \lambda_3}, \frac{1}{1 - 2\lambda_2 - 4\lambda_3}, \dots, \frac{1}{1 - (N-1)\lambda_2 - (N-1)^2\lambda_3}\right].$$

Очевидно, что регрессионная модель (20) нелинейна по параметрам λ_2 и λ_3 , и среднеквадратичная оценка ее параметров относится к задаче нелинейной регрессии [20–23]. Однако если в диагональной матрице P_λ^{-1} использовать некоторые известные оценки $\hat{\lambda}_2^{(i)}$ и $\hat{\lambda}_3^{(i)}$, то мы получим линейную регрессионную модель

$$P_{\hat{\lambda}^{(i)}}^{-1}b = P_{\hat{\lambda}^{(i)}}^{-1}F\lambda + \varepsilon, \quad (21)$$

аппроксимирующую нелинейную регрессию (20).

При этом среднеквадратичные оценки коэффициентов линейной регрессионной модели (21), удовлетворяющие условию

$$\|\varepsilon\|^2 = \|P_{\hat{\lambda}^{(i)}}^{-1}b - P_{\hat{\lambda}^{(i)}}^{-1}F\lambda\|^2 = (b - F\lambda)^\top \Omega_{\hat{\lambda}^{(i)}}^{-1} (b - F\lambda) \rightarrow \min,$$

находятся из решения нормальной системы линейных алгебраических уравнений

$$F^\top \Omega_{\hat{\lambda}^{(i)}}^{-1} F\lambda = F^\top \Omega_{\hat{\lambda}^{(i)}}^{-1} b \quad (22)$$

по формуле

$$\lambda = (F^\top \Omega_{\hat{\lambda}^{(i)}}^{-1} F)^{-1} F^\top \Omega_{\hat{\lambda}^{(i)}}^{-1} b, \quad (23)$$

где $\Omega_{\hat{\lambda}^{(i)}}^{-1} = (P_{\hat{\lambda}^{(i)}}^{-1})^\top P_{\hat{\lambda}^{(i)}}^{-1} = (P_{\hat{\lambda}^{(i)}}^{-1})^2$ — диагональная матрица с элементами

$$\omega_{kk}^{-1} = \frac{1}{[1 - (k-1)\hat{\lambda}_2^{(i)} - (k-1)^2\hat{\lambda}_3^{(i)}]^2}, \quad k = 1, 2, \dots, N.$$

Формула (23) лежит в основе итерационной процедуры уточнения среднеквадратичных оценок коэффициентов обобщенной регрессионной модели (18):

$$\hat{\lambda}^{(i+1)} = (F^\top \Omega_{\hat{\lambda}^{(i)}}^{-1} F)^{-1} F^\top \Omega_{\hat{\lambda}^{(i)}}^{-1} b, \quad (24)$$

где $i = 0, 1, 2, \dots$ — номер итерации.

За начальное приближение вектора среднеквадратичных оценок $\hat{\lambda}^{(0)}$ можно принять решение системы уравнений

$$F^\top F\lambda = F^\top b$$

по формуле

$$\hat{\lambda}^{(0)} = (F^\top F)^{-1} F^\top b,$$

которая может быть получена из условия минимизации невязки:

$$\|\eta\|^2 = \|b - F\lambda\| \rightarrow \min.$$

Очевидно, что начальное приближение $\hat{\lambda}^{(0)}$ может быть получено из формулы (24) при условии

$$P_{\hat{\lambda}^{(i)}} = P_{\lambda^{(i)}}^{-1} = \Omega_{\lambda^{(i)}}^{-1} = E,$$

где E — единичная матрица, которое выполняется при $\hat{\lambda}_2^{(i)} = \hat{\lambda}_3^{(i)} = 0$.

С учетом среднеквадратичных оценок коэффициентов модели (16) и соотношений (17) оценки параметров математической модели (9), аппроксимирующей спад избыточного давления, могут быть найдены по формулам

$$\hat{c}_0 = \hat{\lambda}_1, \quad \hat{c}_1 = -\frac{\hat{\lambda}_2}{\tau}, \quad \hat{c}_2 = -\frac{\hat{\lambda}_3}{\tau^2}. \quad (25)$$

Отметим, что и в этом алгоритме также не гарантируется точный минимум остаточной суммы квадратов из-за аппроксимации нелинейной модели (20) линейной регрессионной моделью (21), что позволило существенно упростить построение нормальной системы линейных алгебраических уравнений (22) в методе наименьших квадратов.

При этом численно-аналитические исследования показали, что при значениях величины случайной помехи ε_k в данных эксперимента y_k до 4% относительное отклонение остаточной суммы квадратов Q_{res} от ее минимально возможного значения $\min Q_{\text{res}}$ не превышает 1%, а при случайной помехе величиной 10% относительное отклонение от $\min Q_{\text{res}}$ составляет порядка 5%. Очевидно, что этот алгоритм среднеквадратичного оценивания параметров модели (9), хотя и не обеспечивает минимум остаточной суммы квадратов, существенно (в четыре раза) точнее первого алгоритма.

Третий алгоритм. Для устранения основного недостатка первых двух алгоритмов среднеквадратичного оценивания параметров модели (20) предлагается *третий алгоритм*, в основе которого лежит построение нормальной системы уравнений в методе наименьших квадратов, решение которой обеспечивает достижение точного минимума остаточной суммы квадратов.

Среднеквадратичные оценки коэффициентов нелинейной регрессионной модели (20), удовлетворяющие условию

$$Q_{\text{res}} = \varepsilon^T \varepsilon = \|\varepsilon\|^2 = \|P_{\lambda}^{-1}b - P_{\lambda}^{-1}F\lambda\|^2 = (b - F\lambda)^T \Omega_{\lambda}^{-1}(b - F\lambda) \rightarrow \min,$$

находятся в соответствии с методикой, описанной в [26–28]. Используя аппарат матричной алгебры и формулы дифференцирования вектора, матрицы, обратной матрицы и произведения матриц по вектору аргументов, можно получить следующее соотношение [28]:

$$\frac{\partial Q_{\text{res}}}{\partial \lambda} = \left[\frac{\partial(\varepsilon^T \varepsilon)}{\partial \lambda} \right]^T = -2 \left(F + \frac{\partial P_{\lambda}}{\partial \lambda} B_{\varepsilon} \right)^T \Omega_{\lambda}^{-1}(b - F\lambda) = \bar{0}, \quad (26)$$

где $\Omega_{\lambda}^{-1} = (P_{\lambda}^{-1})^T P_{\lambda}^{-1} = (P_{\lambda}^{-1})^2$ — диагональная матрица с элементами

$$\omega_{kk}^{-1} = \frac{1}{[1 - (k-1)\lambda_2 - (k-1)^2\lambda_3]^2}, \quad k = 1, 2, \dots, N;$$

$$B_\varepsilon(\lambda) = \begin{bmatrix} P_\lambda^{-1}(b - F\lambda) & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & P_\lambda^{-1}(b - F\lambda) & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & P_\lambda^{-1}(b - F\lambda) \end{bmatrix} \text{ — блочно-диагональная}$$

матрица размера $[3N \times 3N]$; $\bar{0}$ — нулевой вектор размера $[N \times 1]$;

$$\frac{\partial P_\lambda}{\partial \lambda} = \begin{bmatrix} \frac{\partial P_\lambda}{\partial \lambda_1} & \frac{\partial P_\lambda}{\partial \lambda_2} & \frac{\partial P_\lambda}{\partial \lambda_3} \end{bmatrix} \text{ — блочная матрица-строка размера } [N \times 3N], \text{ бло-$$

ки которой с учетом формулы (19) описываются следующим образом:

$$\frac{\partial P_\lambda}{\partial \lambda_1} \text{ — нулевая квадратная матрица размера } [N \times N], \frac{\partial P_\lambda}{\partial \lambda_2} \text{ и } \frac{\partial P_\lambda}{\partial \lambda_3} \text{ — диагональ-}$$

ные матрицы размера $[N \times N]$ вида

$$\frac{\partial P_\lambda}{\partial \lambda_2} = \text{diag}[0, -1, -2, \dots, -(N-1)], \quad \frac{\partial P_\lambda}{\partial \lambda_3} = \text{diag}[0, -1, -4, \dots, -(N-1)^2].$$

Из формулы (26) получаем нормальную систему уравнений, решение которой — вектор $\hat{\lambda} = (\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \hat{\lambda}_3)^\top$ — обеспечивает точный минимум остаточной суммы квадратов:

$$\left(F + \frac{\partial P_\lambda}{\partial \lambda} B_\varepsilon\right)^\top \Omega_\lambda^{-1} F \lambda = \left(F + \frac{\partial P_\lambda}{\partial \lambda} B_\varepsilon\right)^\top \Omega_\lambda^{-1} b. \quad (27)$$

Система алгебраических уравнений в матричной форме (27) нелинейна относительно коэффициентов обобщенной регрессионной модели (16). Однако ее решение достаточно просто можно найти итерационными методами [29]. Из (27) получаем

$$\lambda = \left[\left(F + \frac{\partial P_\lambda}{\partial \lambda} B_\varepsilon\right)^\top \Omega_\lambda^{-1} F\right]^{-1} \left(F + \frac{\partial P_\lambda}{\partial \lambda} B_\varepsilon\right)^\top \Omega_\lambda^{-1} b.$$

Отсюда итерационная формула уточнения среднеквадратичных оценок параметров модели (9) принимает вид

$$\hat{\lambda}^{(i+1)} = \left[\left(F + \frac{\partial P_\lambda}{\partial \lambda} B_\varepsilon^{(i)}\right)^\top \Omega_{\hat{\lambda}^{(i)}}^{-1} F\right]^{-1} \left(F + \frac{\partial P_\lambda}{\partial \lambda} B_\varepsilon^{(i)}\right)^\top \Omega_{\hat{\lambda}^{(i)}}^{-1} b,$$

где $i = 0, 1, 2, \dots$ — номер итерации.

По сравнению с классическими методами нелинейного оценивания в данном алгоритме не требуется предварительной оценки начального приближения параметров модели. Начальные оценки коэффициентов обобщенной регрессионной модели формируются в самом алгоритме вычислений. За начальное приближение вектора среднеквадратичных оценок $\hat{\lambda}^{(0)}$, как и во втором алгоритме, может быть принято либо решение $\hat{\lambda}^{(0)} = (F^\top F)^{-1} F^\top b$ системы уравнений $F^\top F \lambda = F^\top b$, которая формируется из условия минимизации невязки:

$$\|\eta\|^2 = \|b - F\lambda\| \rightarrow \min,$$

либо нулевой вектор оценок коэффициентов:

$$\hat{\lambda}_1^{(0)} = \hat{\lambda}_2^{(0)} = \hat{\lambda}_3^{(0)} = 0.$$

Оценки параметров математической модели (9), аппроксимирующей спад избыточного давления, могут быть найдены по формулам (25), как и во втором алгоритме.

На основе численно-аналитических исследований с использованием имитационного моделирования проведен сравнительный анализ трех рассмотренных выше алгоритмов среднеквадратичного оценивания параметров математической модели (9), аппроксимирующей спад избыточного давления в подводной ударной волне.

Условия проведения численных экспериментов с использованием имитационного моделирования и учетом реальных осциллограмм избыточного давления, полученных при натуральных испытаниях, были следующими. На основе формулы (10) при заданных значениях параметров $c_0 = 1$, $c_1 = 20$ и $c_2 = 12$ с шагом дискретизации $\tau = 0.002$ сек была сформирована выборка \hat{y}_k , $k = 0, 1, 2, \dots, N - 1$, объемом $N = 400$.

К результатам имитационного моделирования \hat{y}_k добавлялась случайная помеха ε_k , $k = 0, 1, 2, \dots, N - 1$, мощность которой

$$\varepsilon = \frac{\|\varepsilon\|}{\|\hat{y}\|} \cdot 100 \% = \sqrt{\frac{\sum_{k=0}^{N-1} \varepsilon_k^2}{\sum_{k=0}^{N-1} \hat{y}_k^2}} \cdot 100 \%$$

изменялась от 0% до 10% с шагом 1%.

По сформированным данным $y_k = \hat{y}_k + \varepsilon_k$, моделирующим результаты натурального эксперимента, с использованием каждого из трех описанных алгоритмов вычислялись среднеквадратичные оценки параметров модели (9), их относительные погрешности, а также остаточная сумма квадратов и среднеквадратические отклонения в относительных единицах, характеризующие адекватность модели данным эксперимента. Кроме этого, фиксировалось время вычислений для каждого алгоритма. Вычисления при каждом значении ε (в %) случайной помехи повторялись $M = 20$ раз, и результаты этих вычислений усреднялись.

Результаты усредненных вычислений для каждого из трех алгоритмов приведены в табл. 1-3, где

$$\delta c_i = \frac{|c_i - \hat{c}_i|}{|c_i|} \cdot 100 \%, \quad i = 0, 1, 2$$

— относительная погрешность среднеквадратичной оценки \hat{c}_i параметра модели (9);

$$Q_{\text{res}} = \|y - \hat{y}\|^2 = \sum_{k=0}^{N-1} (y_k - \hat{y}_k)^2$$

— остаточная сумма квадратов;

$$s = \frac{\|y - \hat{y}\|}{\|y\|} \cdot 100 \%$$

— оценка среднеквадратичного отклонения модели от результатов эксперимента в относительных единицах; t_{calc} — время требуемых расчетов на основе соответствующего алгоритма вычислений (в сек).

Таблица 1

Результаты вычислений при использовании первого алгоритма
[The calculation results using first algorithm]

$\varepsilon, \%$	$\delta c_0, \%$	$\delta c_1, \%$	$\delta c_2, \%$	Q_{res}	$s, \%$	$t_{\text{calc}}, \text{sec}$
0	0.0	0.0	0.0	0.000	0.0	0.31
1	0.1	0.3	1.8	0.002	1.0	0.31
2	0.2	0.8	8.1	0.009	2.0	0.31
3	0.4	1.5	18.1	0.021	3.1	0.31
4	0.7	2.7	29.9	0.039	4.2	0.31
5	0.8	3.5	43.3	0.065	5.4	0.31
6	0.6	3.5	55.7	0.098	6.6	0.31
7	1.4	5.5	73.9	0.142	8.0	0.31
8	1.1	6.2	92.8	0.196	9.4	0.31
9	1.1	6.0	104.4	0.258	10.7	0.31
10	1.5	7.0	117.2	0.329	12.1	0.31

Таблица 2

Результаты вычислений при использовании второго алгоритма
[The calculation results using second algorithm]

$\varepsilon, \%$	$\delta c_0, \%$	$\delta c_1, \%$	$\delta c_2, \%$	Q_{res}	$s, \%$	$t_{\text{calc}}, \text{sec}$
0	0.0	0.0	0.0	0.000	0.0	0.63
1	0.1	0.2	0.9	0.002	1.0	0.94
2	0.2	0.4	2.5	0.009	2.0	1.05
3	0.3	0.7	5.0	0.020	3.0	1.25
4	0.5	1.0	8.7	0.036	4.0	1.24
5	0.8	1.6	12.3	0.057	5.0	1.37
6	1.5	2.6	14.5	0.083	6.1	1.56
7	1.6	2.7	19.9	0.115	7.2	1.55
8	2.7	3.8	28.6	0.153	8.3	1.68
9	3.6	5.6	31.4	0.196	9.3	1.86
10	3.9	6.5	35.9	0.244	10.4	1.87

Таблица 3

Результаты вычислений при использовании третьего алгоритма
[The calculation results using third algorithm]

$\varepsilon, \%$	$\delta c_0, \%$	$\delta c_1, \%$	$\delta c_2, \%$	Q_{res}	$s, \%$	$t_{\text{calc}}, \text{sec}$
0	0.0	0.0	0.0	0.000	0.0	3.00
1	0.1	0.2	0.9	0.002	1.0	5.56
2	0.2	0.5	1.6	0.009	2.0	6.73
3	0.2	0.7	2.6	0.020	3.0	7.75
4	0.4	1.1	3.5	0.035	4.0	8.01
5	0.4	1.3	5.5	0.055	5.0	8.13
6	0.4	1.2	6.1	0.080	6.0	8.27
7	0.7	1.6	4.3	0.109	7.0	8.27
8	0.8	1.8	4.2	0.142	8.0	8.91
9	0.9	2.0	8.4	0.179	8.9	9.17
10	0.8	2.5	8.2	0.219	9.8	9.94

Результаты вычислений на основе третьего алгоритма, представленные в табл. 3, обеспечивают точный минимум остаточной суммы квадратов. Видно, что при использовании этого алгоритма оценки параметров модели (9) имеют наименьшую погрешность. Однако время вычисления этих оценок из-за итерационной процедуры их уточнения по сравнению с двумя другими алгоритмами относительно велико. Из-за отсутствия итерационных процедур наибольшим быстродействием обладает первый из представленных алгоритмов вычислений. Однако в силу того, что он не обеспечивает минимума остаточной суммы квадратов, среднеквадратичные оценки параметров модели, вычисленные на его основе, имеют достаточно высокую погрешность при величине случайной помехи в результатах наблюдений более 3%. Оптимальным можно считать второй алгоритм вычислений, результаты которых представлены в табл. 2. Этот алгоритм обладает как быстродействием, так и достаточной для практических расчетов точностью вычисления оценок.

5. Построение и параметрическая идентификация математической модели датчика давления. Преобразование сигнала в виде избыточного давления $P(t)$ на входе датчика давления в напряжение на его выходе описывается линейным дифференциальным оператором второго порядка с переменными коэффициентами (2). С учетом начальных условий $u(0) = u_0$ и $u'(0) = u'_0$ аддитивная составляющая $z(t)$ в равенстве $u(t) = z(t) + y(t)$, описывающем сигнал на выходе датчика давления, имеет вид

$$z(t) = -\hat{a}_0 e^{-\alpha t} \left[\cos(\beta_1 t + \beta_2 t^2) + \frac{\alpha - \hat{b}_0}{\beta_1} \sin(\beta_1 t + \beta_2 t^2) \right], \quad (28)$$

где \hat{a}_0 и \hat{b}_0 — известные (найденные по формулам (5) с учетом результатов вычислений \hat{c}_0 и \hat{c}_1) оценки параметров модели (9).

Исходными данными для параметрической идентификации динамической модели датчика давления в виде (28), описывающей его реакцию на разрывной скачок давления, служат результаты вычислений $z_k = u_k - \hat{y}_k$, где u_k , $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$, — данные натурального эксперимента, \hat{y}_k , $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$, — результаты расчета по построенной модели (9), аппроксимирующей спад избыточного давления в подводной ударной волне.

Так как время затухания колебаний, описываемых формулой (28), достаточно мало по сравнению с временем наблюдения и анализа импульса подводной ударной волны, при оценке параметров модели (28) целесообразно использовать только начальный участок осциллограммы избыточного давления, полученной при натуральных испытаниях. Анализ результатов натуральных испытаний показал, что при $t > 3t_{\max}$, где t_{\max} — момент времени, соответствующий максимуму импульса ударной волны, имеем $\hat{z}_k \approx 0$, $k = \overline{N_1, N-1}$, где N_1 — номер отсчета, который находится по формуле (8). Поэтому объем выборки результатов вычислений $z_k = u_k - \hat{y}_k$, $k = 0, 1, 2, \dots, N_1 - 1$, равен $N_1 = 3k_{\max} + 1$.

В основе параметрической идентификации математической модели (28) лежит минимизация остаточной суммы квадратов Q_{res} на множестве трех параметров α , β_1 и β_2 :

$$Q_{\text{res}} = \|z - \hat{z}\|^2 = \sum_{k=0}^{N_1-1} (z_k - \hat{z}_k)^2 = \sum_{k=0}^{N_1-1} \varepsilon_k^2 \rightarrow \min,$$

где $z_k = u_k - \hat{y}_k$ — результаты расчетов с использованием среднеквадратичных оценок параметров модели (9), полученных на основе одного из алгоритмов, описанных выше; \hat{z}_k — результаты вычислений на основе построенной модели (28):

$$\hat{z}_k = -\hat{a}_0 e^{-\alpha \tau k} \left[\cos(\beta_1 \tau k + \beta_2 \tau^2 k^2) + \frac{\alpha - \hat{b}_0}{\beta_1} \sin(\beta_1 \tau k + \beta_2 \tau^2 k^2) \right]. \quad (29)$$

Задача среднеквадратичного оценивания параметров α , β_1 и β_2 модели (28) по результатам расчетов z_k , $k = 0, 1, 2, \dots, N_1 - 1$, относится к задаче нелинейного прикладного регрессионного анализа [20–23]. Для данной задачи применим метод среднеквадратичного оценивания параметров нелинейной модели (28), в основе которого лежит параметрическая линеаризация этой модели в окрестности точки $(\hat{\alpha}^{(i)}, \hat{\beta}_1^{(i)}, \hat{\beta}_2^{(i)})$ [21]:

$$\hat{z}_k(\alpha, \beta_1, \beta_2) \approx \hat{z}_k^{(i)} + \frac{\partial \hat{z}_k^{(i)}}{\partial \alpha} (\alpha - \hat{\alpha}^{(i)}) + \frac{\partial \hat{z}_k^{(i)}}{\partial \beta_1} (\beta_1 - \hat{\beta}_1^{(i)}) + \frac{\partial \hat{z}_k^{(i)}}{\partial \beta_2} (\beta_2 - \hat{\beta}_2^{(i)}), \quad (30)$$

где $\hat{z}_k^{(i)} = \hat{z}_k(\hat{\alpha}^{(i)}, \hat{\beta}_1^{(i)}, \hat{\beta}_2^{(i)})$, а частные производные в точке $(\hat{\alpha}^{(i)}, \hat{\beta}_1^{(i)}, \hat{\beta}_2^{(i)})$ вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{z}_k^{(i)}}{\partial \alpha} = \hat{a}_0 e^{-\hat{\alpha}^{(i)} t_k} \left[t_k \cos(\hat{\beta}_1^{(i)} t_k + \hat{\beta}_2^{(i)} t_k^2) + \right. \\ \left. + \frac{t_k (\hat{\alpha}^{(i)} - \hat{b}_0) - 1}{\hat{\beta}_1^{(i)}} \sin(\hat{\beta}_1^{(i)} t_k + \hat{\beta}_2^{(i)} t_k^2) \right], \quad (31) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{z}_k^{(i)}}{\partial \beta_1} = -\hat{a}_0 e^{-\hat{\alpha}^{(i)} t_k} \left[t_k \frac{\hat{\alpha}^{(i)} - \hat{c}_1}{\hat{\beta}_1^{(i)}} \cos(\hat{\beta}_1^{(i)} t_k + \hat{\beta}_2^{(i)} t_k^2) - \right. \\ \left. - \left(t_k + \frac{\hat{\alpha}^{(i)} - \hat{b}_{01}}{(\hat{\beta}_1^{(i)})^2} \right) \sin(\hat{\beta}_1^{(i)} t_k + \hat{\beta}_2^{(i)} t_k^2) \right], \quad (32) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{z}_k^{(i)}}{\partial \beta_2} = -\hat{a}_0 t_k^2 e^{-\hat{\alpha}^{(i)} t_k} \left[\frac{\hat{\alpha}^{(i)} - \hat{b}_0}{\hat{\beta}_1^{(i)}} \cos(\hat{\beta}_1^{(i)} t_k + \hat{\beta}_2^{(i)} t_k^2) - \right. \\ \left. - \sin(\hat{\beta}_1^{(i)} t_k + \hat{\beta}_2^{(i)} t_k^2) \right], \quad k = 0, 1, \dots, N_1 - 1. \quad (33) \end{aligned}$$

Сформированная на основе формулы (30) линейная обобщенная регрессионная модель имеет вид

$$\Delta z^{(i)} = F^{(i)} \Delta a^{(i)} + \varepsilon, \quad (34)$$

где

$$F^{(i)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial z_0^{(i)}}{\partial \alpha} & \frac{\partial z_0^{(i)}}{\partial \beta_1} & \frac{\partial z_0^{(i)}}{\partial \beta_2} \\ \frac{\partial z_1^{(i)}}{\partial \alpha} & \frac{\partial z_1^{(i)}}{\partial \beta_1} & \frac{\partial z_1^{(i)}}{\partial \beta_2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial z_{N_1-1}^{(i)}}{\partial \alpha} & \frac{\partial z_{N_1-1}^{(i)}}{\partial \beta_1} & \frac{\partial z_{N_1-1}^{(i)}}{\partial \beta_2} \end{bmatrix}, \quad \Delta z^{(i)} = z - \hat{z}^{(i)} = \begin{bmatrix} z_0 - \hat{z}_0^{(i)} \\ z_1 - \hat{z}_1^{(i)} \\ \vdots \\ z_{N_1-1} - \hat{z}_{N_1-1}^{(i)} \end{bmatrix} \quad (35)$$

— матрица регрессоров размера $[N_1 \times 3]$ и вектор размера $[N_1 \times 1]$ соответственно; $\hat{a}^{(i)} = (\hat{\alpha}^{(i)}, \hat{\beta}_1^{(i)}, \hat{\beta}_2^{(i)})^\top$ — вектор промежуточных оценок размера $[3 \times 1]$; $\Delta a^{(i)} = a - \hat{a}^{(i)} = (\Delta \hat{\alpha}^{(i)}, \Delta \hat{\beta}_1^{(i)}, \Delta \hat{\beta}_2^{(i)})^\top = (\alpha - \hat{\alpha}^{(i)}, \beta_1 - \hat{\beta}_1^{(i)}, \beta_2 - \hat{\beta}_2^{(i)})^\top$ — вектор коэффициентов, подлежащих нахождению, размера $[3 \times 1]$;

$\varepsilon = (\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{N_1-1})^\top$ — вектор случайной помехи в результатах расчета.

С учетом среднеквадратичного критерия вычисления оценки вектора $\Delta \hat{a}^{(i)}$ коэффициентов модели (34):

$$\|\varepsilon\|^2 = \|\Delta z^{(i)} - F^{(i)} \Delta a^{(i)}\|^2 \rightarrow \min$$

алгоритм вычислений — уточнения оценок параметров — принимает вид

$$\Delta \hat{a}^{(i)} = [F^{(i)\top} F^{(i)}]^{-1} F^{(i)\top} \Delta z^{(i)}, \quad \hat{a}^{(i+1)} = \hat{a}^{(i)} + \Delta \hat{a}^{(i)}, \quad i = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (36)$$

Начальные оценки элементов $\hat{\alpha}^{(0)}, \hat{\beta}_1^{(0)}, \hat{\beta}_2^{(0)}$ вектора $\Delta \hat{a}^{(0)}$ можно найти по формулам

$$\hat{\alpha}^{(0)} = \frac{1}{t_{\min} - t_{\max}} \ln \left| \frac{z_{\max}}{z_{\min}} \right|, \quad \hat{\beta}_1^{(0)} = \frac{\pi}{t_{\min} - t_{\max}}, \quad \hat{\beta}_2^{(0)} = \frac{\pi}{t_2^2 - t_1^2} - \frac{\hat{\beta}_1^{(0)}}{t_1 + t_2}, \quad (37)$$

где t_{\max} и t_{\min} — моменты времени, соответствующие первому максимальному z_{\max} и следующему за ним первому минимальному z_{\min} значениям в последовательности результатов расчета z_k , $k = 0, 1, 2, \dots, N_1 - 1$; t_1 и t_2 — два первых последовательных момента времени, в которых функция $z(t)$ принимает нулевое значение.

Условием завершения итерационной процедуры уточнения среднеквадратичных оценок параметров модели (28) может служить выполнение неравенства $\|\Delta \hat{a}^{(i)}\| < 0.01 \|\hat{a}^{(i)}\|$.

6. Численный метод оценки энергии импульса ударной волны на основе результатов эксперимента в форме осциллограммы избыточного давления, полученной при натуральных испытаниях. Одной из основных задач при проведении подводных испытаний боеприпасов является достоверная оценка информативных параметров импульса ударной волны, таких как максимальное избыточное давление P_{\max} и энергия импульса ударной волны на промежутке времени $t \in [0, t_{0.95}]$:

$$\int_0^{t_{0.95}} P^2(t) dt = 0.95 \int_0^\infty P^2(t) dt.$$

Рассмотрим решение этой задачи на основе математической модели

$$f(t) = k_d P(t) = \frac{c_0}{1 + c_1 t + c_2 t^2},$$

описывающей монотонный спад избыточного давления, параметры которой идентифицируются представленными выше алгоритмами по результатам эксперимента в форме осциллограммы избыточного давления.

С учетом монотонного характера спада избыточного давления, наблюдаемого при натуральных испытаниях, к аппроксимирующей функции $f(t)$ предъявляются следующие требования: $f(t) > 0$, $f'(t) < 0$ и $f''(t) > 0$ при $t \in [0; \infty)$. По результатам проведенных аналитических исследований сделан вывод о том, что для выполнения этих требований достаточно, чтобы параметры этой функции удовлетворяли условию: $c_0 > 0$, $c_1 > 0$ и $0 < c_2 \leq c_1^2$.

Очевидно, что максимальное значение функции

$$f(t) = \frac{c_0}{1 + c_1 t + c_2 t^2},$$

аппроксимирующая монотонный спад избыточного давления на промежутке времени $t \geq 0$, принимает в начальный момент времени $t = 0$: $f_{\max} = f(0) = c_0$.

Для вычисления интеграла

$$\int_0^{t_{0.95}} P^2(t) dt = \frac{1}{k_d^2} \int_0^{t_{0.95}} f^2(t) dt,$$

описывающего энергию импульса ударной волны, найдена первообразная

$$F(t) = \int f^2(t) dt = \int \frac{c_0^2}{(1 + c_1 t + c_2 t^2)^2} dt = \begin{cases} -\frac{c_0^2(2c_2 t + c_1)}{D(1 + c_1 t + c_2 t^2)} + \frac{4c_0^2 c_2}{D} \left(\frac{1}{c_1} - \frac{1}{\sqrt{-D}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{-D} t}{c_1 t + 2} \right), & D < 0; \\ -\frac{16c_0^2}{3c_1(c_1 t + 2)^3}, & D = 0; \\ -\frac{c_0^2(2c_2 t + c_1)}{D(1 + c_1 t + c_2 t^2)} - \frac{2c_0^2 c_2}{D\sqrt{D}} \ln \frac{2c_2 t + c_1 - \sqrt{D}}{2c_2 t + c_1 + \sqrt{D}}, & D > 0, \end{cases} \quad (38)$$

где $D = c_1^2 - 4c_2$ — дискриминант квадратного трехчлена $1 + c_1 t + c_2 t^2$.

Отсюда получаем

$$F(0) = \begin{cases} -\frac{c_0^2}{c_1}, & D < 0; \\ -\frac{2c_0^2}{3c_1}, & D = 0; \\ -\frac{c_0^2}{D} \left(c_1 + \frac{2c_2}{\sqrt{D}} \ln \frac{c_1 - \sqrt{D}}{c_1 + \sqrt{D}} \right), & D > 0 \end{cases} \quad (39)$$

и

$$F(\infty) = \begin{cases} \frac{4c_0^2 c_2}{D} \left(\frac{1}{c_1} - \frac{1}{\sqrt{-D}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{-D}}{c_1} \right), & D < 0; \\ 0, & D \geq 0. \end{cases}$$

Энергия импульса ударной волны на бесконечном промежутке $t \in [0, \infty)$ может быть найдена по формуле

$$J_\infty = \int_0^\infty f^2(t)dt = F(\infty) - F(0) = \begin{cases} \frac{c_0^2}{D} \left(c_1 - \frac{4c_2}{\sqrt{-D}} \arctg \frac{\sqrt{-D}}{c_1} \right), & D < 0; \\ \frac{2c_0^2}{3c_1}, & D = 0; \\ \frac{c_0^2}{D} \left(c_1 + \frac{2c_2}{\sqrt{D}} \ln \frac{c_1 - \sqrt{D}}{c_1 + \sqrt{D}} \right), & D > 0. \end{cases} \quad (40)$$

Одним из основных информативных параметров импульса ударной волны в натуральных экспериментах является энергия импульса

$$J_\alpha = \int_0^{t_\alpha} f^2(t)dt \quad (41)$$

за некоторый промежуток времени t_α , величина которого задается с помощью коэффициента α . Этот коэффициент характеризует отношение энергии импульса ударной волны J_α за промежуток времени $[0, t_\alpha]$ к энергии импульса

$$J_\infty = \int_0^\infty f^2(t)dt$$

на бесконечном промежутке времени: $\alpha = J_\alpha/J_\infty$. Обычно величина α задается равной $\alpha = 0.95$.

При вычислении интеграла (41), характеризующего энергию импульса ударной волны за промежуток времени $[0, t_\alpha]$, воспользуемся формулами (38) и (39):

$$J_\alpha(t_\alpha) = \begin{cases} -\frac{c_0^2(2c_2t_\alpha+c_1)}{D(1+c_1t_\alpha+c_2t_\alpha^2)} + \frac{c_0^2}{D} \left(c_1 - \frac{4c_2}{\sqrt{-D}} \arctg \frac{\sqrt{-D} \cdot t_\alpha}{c_1t_\alpha+2} \right), & D < 0; \\ \frac{2c_0^2}{3c_1} \left[1 - \frac{8}{(c_1t_\alpha+2)^3} \right], & D = 0; \\ -\frac{c_0^2(2c_2t_\alpha+c_1)}{D(1+c_1t_\alpha+c_2t_\alpha^2)} + \frac{c_0^2}{D} \left[c_1 + \frac{2c_2}{\sqrt{D}} \ln \frac{(c_1-\sqrt{D})t_\alpha+2}{(c_1+\sqrt{D})t_\alpha+2} \right], & D > 0. \end{cases} \quad (42)$$

Полученная формула (42) позволяет оценить энергию J_α импульса ударной волны, длительность которого равна t_α . На бесконечном промежутке времени $[0, \infty]$ полная энергия J_∞ импульса ударной волны находится по формуле (40).

Рассмотрим обратную задачу определения длительности t_α исследуемого импульса ударной волны при заданной величине его энергии J_α в относительных к J_∞ единицах.

Алгоритм решения этой задачи включает следующие шаги:

- по представленным выше методикам находятся оценки параметров c_0 , c_1 и c_2 математической модели (9) импульса ударной волны;
- проверяется выполнение условий $0 < c_2 \leq c_1^2$ и вычисляется дискриминант $D = c_1^2 - 4c_2$;
- задается величина отношения $\alpha = J_\alpha/J_\infty$, например, $\alpha = 0.95$;
- в зависимости от величины D по формуле (40) вычисляется значение J_∞ ;
- решается нелинейное уравнение $J_\alpha(t) = \alpha J_\infty$, в котором функция $J_\alpha(t)$ описывается соотношением (42) в зависимости от величины дискриминанта D . Корень этого уравнения t_α соответствует длительности им-

пульса ударной волны, энергия которого составляет $\alpha, \%$ от полной энергии импульса на бесконечном промежутке времени.

При решении нелинейного трансцендентного уравнения $J_\alpha(t) = \alpha J_\infty$ можно воспользоваться разработанным численным методом, алгоритм которого включает итерационную процедуру уточнения корня уравнения:

$$t_\alpha^{(i+1)} = t_\alpha^{(i)} \left[1 - \frac{0.01[J_\alpha(t_\alpha^{(i)}) - \alpha J_\infty]}{J_\alpha(1.01t_\alpha^{(i)}) - J_\alpha(t_\alpha^{(i)})} \right], \quad i = 0, 1, 2, 3, \dots,$$

где величина $J_\alpha(t_\alpha^{(i)})$ вычисляется по формуле (42), а J_∞ — по формуле (40).

В качестве начального приближения переменной $t_\alpha^{(0)}$ можно выбрать значение $t_\alpha^{(0)} = 0.1t_{N-1}$, где t_{N-1} — момент времени последнего наблюдения в выборке результатов эксперимента.

7. Апробация численных методов математического моделирования ударной волны при обработке результатов натурального эксперимента. Разработанный численный метод математического моделирования импульса ударной волны был апробирован при обработке результатов эксперимента при взрыве 500 грамм пластита.

Непосредственно с датчика давления была получена выборка результатов эксперимента $u_k, k = 0, 1, 2, \dots, N - 1$, объемом $N = 1723$ с периодом дискретизации $\tau = 0.0004$ мсек. Графики наблюдаемого на выходе датчика давления импульса ударной волны, построенные по результатам эксперимента, приведены на рис. 2 и 3.

Построение математической модели (6), описывающей сигнал на выходе датчика давления, по результатам эксперимента осуществлялось в три этапа.

На первом шаге алгоритма идентификации импульса ударной волны решалась задача предварительной оценки параметров математической модели (9), аппроксимирующей спад избыточного давления. После предварительной обработки экспериментальных данных, снятых с датчика давления, была сформирована выборка результатов наблюдений $u_k, k = 0, 1, 2, \dots, N - 1$, объемом $N = 200$ с периодом дискретизации $\tau = 0.0032$ мсек.

Найденный по выборке результатов эксперимента номер отсчета, соответствующий максимальному значению в этой выборке $u_{\max} = 0.824$, равен $k_{\max} = 3$. По формуле (8) находим $N_1 = 3 \cdot 3 + 1 = 10$. Используя с 10-го по 199-й члены выборки результатов наблюдения $y_k, k = 10, 11, 12, \dots, 199$, в соответствии с первым (наиболее простым) алгоритмом среднеквадратичной оценки параметров нелинейной математической модели (9) сформирована нормальная система линейных алгебраических уравнений (14):

$$\begin{cases} 0.738\lambda_1 + 14.58\lambda_2 + 418.91\lambda_3 = 1.919; \\ 14.58\lambda_1 + 418.91\lambda_2 + 21223.2\lambda_3 = 49.311; \\ 418.91\lambda_1 + 21223.2\lambda_2 + 1863557\lambda_3 = 2244.1. \end{cases}$$

Из решения этой системы уравнений найдены следующие предварительные оценки коэффициентов регрессионной модели (12):

$$\hat{\lambda}_1 = 0.983, \quad \hat{\lambda}_2 = 0.0796, \quad \hat{\lambda}_3 = 0.0000762.$$

По формулам (15) вычислены оценки параметров математической модели (8), аппроксимирующей спад избыточного давления:

$$\hat{c}_0 = 1.017, \quad \hat{c}_1 = 25.32, \quad \hat{c}_2 = 7.566.$$

График построенной зависимости, аппроксимирующей спад избыточного давления

$$\hat{y}(t) = \frac{1.017}{1 + 25.32t + 7.566t^2}, \quad (43)$$

представлен на рис. 5.

Остаточная сумма квадратов и остаточная дисперсия, характеризующие среднеквадратическое отклонение построенной модели (43) от результатов наблюдения, следующие:

$$Q_{\text{res1}} = \|u - \hat{y}\|^2 = \sum_{k=0}^{N_1-1} (u_k - \hat{y}_k)^2 = 0.0172, \quad s_{\text{res1}}^2 = 0.000091,$$

что в относительных единицах составляет

$$\frac{\|u - \hat{y}\|}{\|u\|} \cdot 100\% = 5.4\%.$$

При найденных параметрах построенной модели (43) вычислим энергию импульса ударной волны:

$$J_{0.95} = 0.95J_{\infty}.$$

Интеграл J_{∞} на бесконечном промежутке $t \in [0, \infty)$ вычисляется по формуле (40):

$$J_{\infty} = 0.0383.$$

Отсюда

$$J_{0.95} = 0.95 \cdot 0.0373 = 0.0364.$$

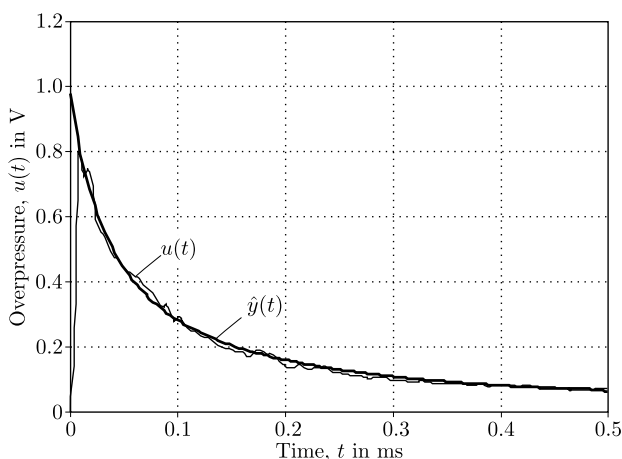


Рис. 5. График функции $\hat{y}(t)$, аппроксимирующей спад избыточного давления
 [Fig. 5. The graph of the function $\hat{y}(t)$ which approximates the overpressure decrease]

С использованием описанного выше алгоритма и формулы (42) найдена длительность импульса $t_{0.95} = 0.428$ мсек ударной волны с энергией $J_{0.95} = 0.0364$.

На втором этапе алгоритма построения математической модели наблюдаемого сигнала решалась задача параметрической идентификации модели $\hat{z}(t)$, описывающей реакцию датчика на разрывной скачок давления.

График зависимости $z(t) = u(t) - \hat{y}(t)$, где $u(t)$ — наблюдаемый сигнал, $\hat{y}(t)$ — построенная на предыдущем шаге модель (43), представлен точками z_k на рис. 6.

При оценке параметров модели (29):

$$\hat{z}_k = -\hat{a}_0 e^{-\alpha \tau k} \left[\cos(\beta_1 \tau k + \beta_2 \tau^2 k^2) + \frac{\alpha - \hat{b}_0}{\beta_1} \sin(\beta_1 \tau k + \beta_2 \tau^2 k^2) \right]$$

по результатам расчета $z_k = u_k - \hat{y}_k$, $k = 0, 1, 2, \dots, N_2 - 1$, при $\tau = 0.0004$ мсек и известных $\hat{a}_0 = 1.009$ и $\hat{b}_0 = 29.06$ воспользуемся одним из методов нелинейного оценивания, в основе которого лежит параметрическая линейризация нелинейной зависимости (28) по параметрам α , β_1 и β_2 . Объем выборки N_2 результатов расчета с периодом дискретизации $\tau = 0.0004$ мсек вычислялся по формуле (8): $N_2 = 3k_{\max} + 1 = 3 \cdot 20 + 1 = 61$, где $k_{\max} = 20$.

Результаты расчетов $z_k = u_k - \hat{y}_k$, $k = 0, 1, 2, \dots, N_2 - 1$, можно представить в виде суммы $z_k = \hat{z}_k(\alpha, \beta_1, \beta_2) + \varepsilon_k$, где случайная величина ε_k описывает естественный разброс результатов расчета относительно модели (29) в точках t_k , $k = 0, 1, 2, \dots, N_2 - 1$. Оценки параметров модели находятся из условия минимизации суммы квадратов отклонений

$$\|\varepsilon\|^2 = \|z - \hat{z}\|^2 = \sum_{k=0}^{N_2-1} [z_k - \hat{z}_k(\alpha, \beta_1, \beta_2)]^2 \rightarrow \min.$$

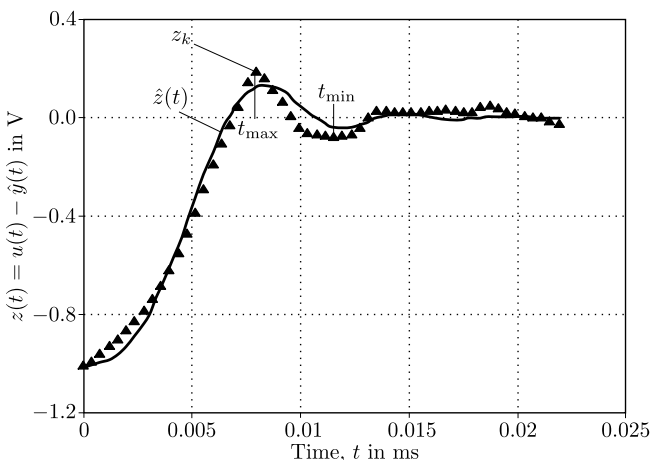


Рис. 6. Данные зависимости $z(t)$ (маркеры), описывающей реакцию датчика на разрывной скачок давления, и их аппроксимация (44) (сплошная линия)

[Fig. 6. Data of the dependence $z(t)$ (markers) which describes the sensor response to a pressure surge, and their approximation (44) (solid line)]

В соответствии с описанным выше алгоритмом среднеквадратичного оценивания и формулами (31)–(33) для нахождения частных производных в точке $(\hat{\alpha}^{(i)}, \hat{\beta}_1^{(i)}, \hat{\beta}_2^{(i)})$ на каждой итерации вычисления оценок $\Delta\hat{\alpha}^{(i)}$ и $\hat{\alpha}^{(i+1)}$ по формулам (35) формировались матрица регрессоров $F^{(i)}$ и вектор $\Delta z^{(i)}$.

Начальные оценки параметров $\hat{\alpha}^{(0)}$, $\hat{\beta}_1^{(0)}$ и $\hat{\beta}_2^{(0)}$ вычислялись по формулам (37) при $t_{\max} = 0.0080$, $z_{\max} = 0.1868$, $t_{\min} = 0.0116$, $z_{\min} = -0.0794$, $t_1 = 0.0070$ и $t_2 = 0.0098$:

$$\hat{\alpha}^{(0)} = \frac{1}{0.0036} \ln \left| \frac{0.1868}{-0.0794} \right| = 237.6, \quad \hat{\beta}_1^{(0)} = \frac{\pi}{0.0080} = 392.7,$$

$$\beta_2 = \frac{\pi}{0.000047} - \frac{392.7}{0.0168} = 43410.6.$$

Уточнение среднеквадратичных оценок параметров модели (29) по формуле (36) завершается при выполнении условия

$$\max \left\{ \left| \frac{\Delta\alpha^{(i)}}{\hat{\alpha}^{(i)}} \right|, \left| \frac{\Delta\beta_1^{(i)}}{\hat{\beta}_1^{(i)}} \right|, \left| \frac{\Delta\beta_2^{(i)}}{\hat{\beta}_2^{(i)}} \right| \right\} < 0.001 \quad (0.1 \%).$$

В табл. 4 представлены результаты вычислений среднеквадратичных оценок параметров модели (29) для каждой итерации.

Таким образом, оценки параметров, обеспечивающие минимум суммы квадратов отклонения модели (29) от результатов расчета z_k , принимают следующие значения:

$$\hat{\alpha} = 333.2, \quad \hat{\beta}_1 = 146.0, \quad \hat{\beta}_2 = 37273.5.$$

Таблица 4

Оценка параметров модели (29) для каждой итерации
[Estimates of model parameters (29) for each iteration]

Iteration number	Estimates of model parameters		
	$\hat{\alpha}^{(i)}$	$\hat{\beta}_1^{(i)}$	$\hat{\beta}_2^{(i)}$
0	237.56	392.70	43410.61
1	407.63	294.34	55790.40
2	695.81	155.03	67142.47
3	751.13	75.77	30353.65
4	302.43	207.68	50559.76
5	403.52	173.17	49174.47
6	395.61	158.65	38597.13
7	340.38	159.95	34848.08
8	343.26	150.89	36484.60
9	339.33	148.24	36853.76
10	336.78	147.04	37043.28
11	335.23	146.46	37148.29
12	334.30	146.19	37207.88
13	333.74	146.05	37242.12
14	333.41	145.99	37261.95
15	333.21	145.96	37273.47

А сама математическая модель, описывающая реакцию датчика на разрывной скачок давления, имеет вид

$$\hat{z}(t) = -1.009e^{-333.2t} [\cos(146.0t + 37273.5t^2) + 29.06 \sin(146.0t + 37273.5t^2)]. \quad (44)$$

При оценке ее адекватности исходным данным z_k , $k = 0, 1, 2, \dots, N_2 - 1$, можно воспользоваться величиной остаточной суммы квадратов

$$Q_{\text{res2}} = \|z - \hat{z}\|^2 = \sum_{k=0}^{N_2-1} (z_k - \hat{z}_k)^2 = 0.094, \quad s_{\text{res2}}^2 = 0.0016,$$

что в относительных единицах составляет $\frac{\|z - \hat{z}\|}{\|z\|} \cdot 100\% = 10.2\%$.

График зависимости (44) представлен на рис. 6.

На последнем шаге алгоритма параметрической идентификации импульса ударной волны по результатам эксперимента u_k , $k = 0, 1, 2, \dots, N - 1$, с $\tau = 0.0004$ мсек и $N = 1723$ оценки всех параметров математической модели (6) уточняются непосредственно из условия минимизации остаточной суммы квадратов

$$\|\varepsilon\|^2 = \|u - \hat{u}\|^2 = \sum_{k=0}^{N-1} [u_k - \hat{u}_k(c_0, c_1, c_2, \alpha, \beta_1, \beta_2)]^2 \rightarrow \min,$$

где

$$\hat{u}_k = \frac{c_0}{1 + c_1 t_k + c_2 t_k^2} - a_0(c_0) e^{-\alpha t_k} \left[\cos(\beta_1 t_k + \beta_2 t_k^2) + \frac{\alpha - b_0(c_0, c_1)}{\beta_1} \sin(\beta_1 t_k + \beta_2 t_k^2) \right]. \quad (45)$$

Эта задача решается аналогично на основе линеаризации нелинейной зависимости (45) по параметрам c_0 , c_1 , c_2 , α , β_1 и β_2 :

$$\Delta u_k \approx \frac{\partial \hat{z}_k^{(i)}}{\partial c_0} \Delta c_0^{(i)} + \frac{\partial \hat{z}_k^{(i)}}{\partial c_1} \Delta c_1^{(i)} + \frac{\partial \hat{z}_k^{(i)}}{\partial c_2} \Delta c_2^{(i)} + \frac{\partial \hat{z}_k^{(i)}}{\partial \alpha} \Delta \alpha^{(i)} + \frac{\partial \hat{z}_k^{(i)}}{\partial \beta_1} \Delta \beta_1^{(i)} + \frac{\partial \hat{z}_k^{(i)}}{\partial \beta_2} \Delta \beta_2^{(i)},$$

где

$$\begin{aligned} \Delta u_k^{(i)} &= u_k - \hat{u}_k^{(i)}, \quad \hat{u}_k^{(i)} = \hat{u}_k(\hat{c}_0^{(i)}, \hat{c}_1^{(i)}, \hat{c}_2^{(i)}, \hat{\alpha}^{(i)}, \hat{\beta}_1^{(i)}, \hat{\beta}_2^{(i)}), \\ \Delta c_0^{(i)} &= c_0 - \hat{c}_0^{(i)}, \quad \Delta c_1^{(i)} = c_1 - \hat{c}_1^{(i)}, \quad \Delta c_2^{(i)} = c_2 - \hat{c}_2^{(i)}, \\ \Delta \alpha^{(i)} &= \alpha - \hat{\alpha}^{(i)}, \quad \Delta \beta_1^{(i)} = \beta_1 - \hat{\beta}_1^{(i)}, \quad \Delta \beta_2^{(i)} = \beta_2 - \hat{\beta}_2^{(i)}; \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \hat{u}_k^{(i)}}{\partial c_0} = \frac{\hat{u}_k^{(i)}}{\hat{c}_0^{(i)}} - e^{-\hat{\alpha}^{(i)} t_k} \left[\cos(\hat{\beta}_1^{(i)} t_k + \hat{\beta}_2^{(i)} t_k^2) + \frac{\hat{\alpha}^{(i)} - \hat{c}_1^{(i)}}{\hat{\beta}_1^{(i)}} \sin(\hat{\beta}_1^{(i)} t_k + \hat{\beta}_2^{(i)} t_k^2) \right],$$

$$\frac{\partial \hat{u}_k^{(i)}}{\partial c_1} = -\frac{\hat{c}_0^{(i)} t_k}{(1 + \hat{c}_1^{(i)} t_k + \hat{c}_2^{(i)} t_k^2)} + \frac{\hat{c}_0^{(i)}}{\hat{\beta}_1^{(i)}} e^{-\hat{\alpha}^{(i)} t_k} \sin(\hat{\beta}_1^{(i)} t_k + \hat{\beta}_2^{(i)} t_k^2),$$

$$\frac{\partial \hat{u}_k^{(i)}}{\partial c_2} = -\frac{\hat{c}_0^{(i)} t_k^2}{(1 + \hat{c}_1^{(i)} t_k + \hat{c}_2^{(i)} t_k^2)},$$

$$\frac{\partial \hat{u}_k^{(i)}}{\partial \alpha} = \hat{a}_0^{(i)} e^{-\hat{\alpha}^{(i)} t_k} \left[t_k \cos(\hat{\beta}_1^{(i)} t_k + \hat{\beta}_2^{(i)} t_k^2) + \frac{t_k(\hat{\alpha}^{(i)} - \hat{b}_0^{(i)}) - 1}{\hat{\beta}_1^{(i)}} \sin(\hat{\beta}_1^{(i)} t_k + \hat{\beta}_2^{(i)} t_k^2) \right],$$

$$\frac{\partial \hat{u}_k^{(i)}}{\partial \beta_1} = -\hat{a}_0^{(i)} e^{-\hat{\alpha}^{(i)} t_k} \left[t_k \frac{\hat{\alpha}^{(i)} - \hat{b}_0^{(i)}}{\hat{\beta}_1^{(i)}} \cos(\hat{\beta}_1^{(i)} t_k + \hat{\beta}_2^{(i)} t_k^2) - \left(t_k + \frac{\hat{\alpha}^{(i)} - \hat{b}_0^{(i)}}{(\hat{\beta}_1^{(i)})^2} \right) \sin(\hat{\beta}_1^{(i)} t_k + \hat{\beta}_2^{(i)} t_k^2) \right],$$

$$\frac{\partial \hat{u}_k^{(i)}}{\partial \beta_2} = -\hat{a}_0^{(i)} t_k^2 e^{-\hat{\alpha}^{(i)} t_k} \left[\frac{\hat{\alpha}^{(i)} - \hat{b}_0^{(i)}}{\hat{\beta}_1^{(i)}} \cos(\hat{\beta}_1^{(i)} t_k + \hat{\beta}_2^{(i)} t_k^2) - \sin(\hat{\beta}_1^{(i)} t_k + \hat{\beta}_2^{(i)} t_k^2) \right]$$

при

$$\hat{a}_0^{(i)} = \hat{c}_0^{(i)} - u_0 \quad \text{и} \quad \hat{b}_0^{(i)} = \frac{\hat{c}_0^{(i)} \hat{c}_1^{(i)} + u_0'}{\hat{c}_0^{(i)} - u_0}.$$

В качестве начального приближения принимаются оценки, полученные на предыдущих этапах:

$$\hat{c}_0^{(0)} = 1.017, \quad \hat{c}_1^{(0)} = 25.32, \quad \hat{c}_2^{(0)} = 7.566,$$

$$\hat{\alpha}^{(i)} = 333.2, \quad \hat{\beta}_1^{(0)} = 146.0, \quad \hat{\beta}_2^{(0)} = 37273.5$$

и, соответственно, $\hat{a}_0^{(0)} = 1.009$ и $\hat{b}_0^{(0)} = 29.06$.

В табл. 5 представлены результаты вычислений среднеквадратичных оценок параметров модели (45) для каждой итерации.

Таблица 5

Оценка параметров модели (45) для каждой итерации
[Estimates of model parameters (45) for each iteration]

Iteration number	Estimates of model parameters					
	$\hat{c}_0^{(i)}$	$\hat{c}_1^{(i)}$	$\hat{c}_2^{(i)}$	$\hat{\alpha}^{(i)}$	$\hat{\beta}_1^{(i)}$	$\hat{\beta}_2^{(i)}$
0	1.017	25.32	7.566	333.2	146.0	37273.5
1	0.982	24.17	8.718	301.4	154.9	36223.5
2	0.985	24.27	8.672	312.2	151.4	37238.6
3	0.983	24.20	8.746	306.5	152.9	36763.4
4	0.984	24.23	8.716	309.5	152.1	37019.9
5	0.984	24.22	8.733	307.9	152.5	36888.9
6	0.984	24.22	8.724	308.7	152.3	36957.5
7	0.984	24.22	8.729	308.3	152.4	36922.0

Таким образом, оценки параметров, минимизирующие среднеквадратичное отклонение модели (45) от результатов эксперимента u_k , принимают следующие значения:

$$\hat{c}_0 = 0.984, \hat{c}_1 = 24.22, \hat{c}_2 = 8.729, \hat{\alpha} = 308.3, \hat{\beta}_1 = 152.4, \hat{\beta}_2 = 36922.0,$$

а сама математическая модель, описывающая импульс подводной ударной волны, наблюдаемый на выходе датчика давления, имеет вид

$$\hat{u}(t) = \frac{0.984}{1 + 24.22t + 8.729t^2} - 0.976e^{-308.3t} [\cos(152.4t + 36922.0t^2) + 28.08 \sin(152.4t + 36922.0t^2)]. \quad (46)$$

При оценке адекватности модели (46) результатам эксперимента u_k , $k = 0, 1, 2, \dots, N - 1$, можно воспользоваться величиной остаточной суммы квадратов

$$Q_{\text{res}} = \|u - \hat{u}\|^2 = \sum_{k=0}^{N-1} (u_k - \hat{u}_k)^2 = 0.231, \quad s_{\text{res}}^2 = 0.00013,$$

что в относительных единицах составляет $\frac{\|u - \hat{u}\|}{\|u\|} \cdot 100\% = 5.3\%$.

График зависимости (46) представлен на рис. 7.

Выделяя из формулы (46) составляющую, описывающую монотонный спад давления на выходе датчика, получаем математическую модель вида

$$\hat{y}(t) = \frac{0.984}{1 + 24.22t + 8.729t^2}. \quad (47)$$

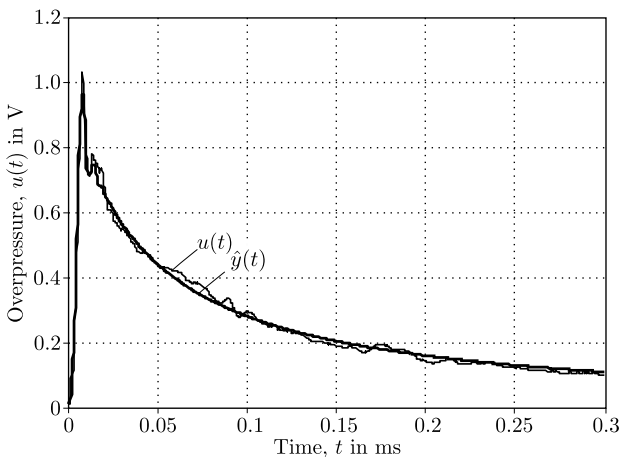


Рис. 7. Экспериментальные данные и кривая зависимости, построенная на основе математической модели (46), аппроксимирующей импульс подводной ударной волны

[Fig. 7. Experimental data dependence curve which approximates the impulse underwater shock wave built on the basis of the mathematical model (46)]

С учетом параметров построенной модели (47) вычислим энергию импульса ударной волны:

$$J_{0.95} = 0.95J_{\infty}.$$

Интеграл J_{∞} на бесконечном промежутке $t \in [0, \infty)$ вычисляется по формуле (40):

$$J_{\infty} = 0.0370.$$

Отсюда

$$J_{0.95} = 0.95 \cdot 0.0370 = 0.0352.$$

Длительность импульса $t_{0.95}$ ударной волны с энергией $J_{0.95} = 0.0352$, найденная в соответствии с формулой (42) и описанным выше алгоритмом, составляет величину $t_{0.95} = 0.420$ мсек.

Проведен сравнительный анализ математических моделей (43) и (47), аппроксимирующих спад избыточного давления, где модель (43) была построена на первом шаге алгоритма идентификации импульса ударной волны, когда решалась задача предварительной оценки параметров. Результаты сравнения систематизированы в табл. 6.

Таблица 6

Сравнительный анализ математических моделей (43) и (47) [Comparative analysis of mathematical models (43) and (47)]

	Mathematical models which approximate the overpressure decrease at the outlet of the pressure sensor	
	The model (43)	The model (47)
The model equation	$\hat{y}(t) = \frac{1.017}{1 + 25.32t + 7.566t^2}$	$\hat{y}(t) = \frac{0.984}{1 + 24.22t + 8.729t^2}$
The residual sum of squares for a model deviation from test results $t \in [0.032; 0.637]$	$Q_{\text{res}} = 0.0172, \quad 5.4\%$	$Q_{\text{res}} = 0.0169, \quad 5.3\%$
Energy and duration of a shock wave	$J_{\infty} = 0.0383,$ $J_{0.95} = 0.0364,$ $t_{0.95} = 0.428 \text{ msec}$	$J_{\infty} = 0.0370,$ $J_{0.95} = 0.0352,$ $t_{0.95} = 0.420 \text{ msec}$

По результатам сравнения можно сделать вывод о статистической эквивалентности обеих моделей. Различие в результатах вычисления основных параметров модели импульса подводной ударной волны не превышает 5%, что соизмеримо с естественным разбросом данных эксперимента относительно построенных моделей. Поэтому при оценке основных информативных характеристик импульса ударной волны — максимального избыточного давления и энергии импульса в первом приближении можно использовать достаточно простой алгоритм построения математической модели, описывающий монотонный спад избыточного давления на выходе датчика.

Закключение. В данной работе разработаны и описаны алгоритмы построения математических моделей импульса подводной ударной волны, а также алгоритмы методов нелинейного оценивания параметров этих моделей на основе результатов натуральных испытаний.

Приведены результаты численно-аналитических исследований и сравнительный анализ помехозащищенности и быстродействия различных алгоритмов нелинейного оценивания параметров математических моделей подводной ударной волны.

На основе анализа данных натурального эксперимента построена математическая модель датчика давления в форме линейного дифференциального оператора второго порядка с переменными коэффициентами, а также модель в виде импульсной характеристики. Описана область применения этих моделей.

Разработан и описан алгоритм численного метода построения математической модели импульса подводной ударной волны, наблюдаемого на выходе датчика давления, учитывающей инерционные свойства датчика давления.

Разработан и реализован численный метод оценки энергии импульса ударной волны на основе результатов эксперимента в форме осциллограммы избыточного давления, полученной при натуральных испытаниях, как на бесконечном промежутке времени, так и при заданной длительности импульса.

Приведены результаты апробации разработанных численных методов математического моделирования импульса подводной ударной волны при обработке результатов эксперимента при взрыве 500 грамм пластита, которые вместе с результатами численно-аналитических исследований подтверждают достоверность и эффективность представленных в работе алгоритмов вычислений и методов нелинейного оценивания.

Конкурирующие интересы. Заявляем, что в отношении авторства и публикации этой статьи конфликта интересов не имеем.

Авторский вклад и ответственность. В.Е. Зотеев — получение аналитических решений и их анализ, визуализация и верификация результатов, черновик и чистовик рукописи. С.Ю. Ганигин — консультирование, анализ экспериментов, черновик части рукописи. Д.А. Деморецкий — идея исследования, формулировка целей и задач исследования, руководство и консультирование, анализ результатов расчетов. М.В. Ненашев — идея исследования, формулировка целей и задач исследования, консультирование, анализ результатов расчетов. А.В. Губинский — анализ литературы, анализ экспериментов, черновик части рукописи. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Исследование выполнялось без финансирования.

Библиографический список

1. A-man Z., Wen-shan Y., Xiong-liang Y. Numerical simulation of underwater contact explosion // *Applied Ocean Research*, 2012. vol. 34. pp. 10–20. <https://doi.org/10.1016/j.apor.2011.07.009>.
2. Zong Z., Zhao Y., Li H. A numerical study of whole ship structural damage resulting from close-in underwater explosion shock // *Marine Structures*, 2013. vol. 31. pp. 24–43. <https://doi.org/10.1016/j.marstruc.2013.01.004>.
3. Zhang N., Zong Z. Hydro-elastic-plastic dynamic response of a ship hull girder subjected to an underwater bubble // *Marine Structures*, 2012. vol. 29, no. 1. pp. 177–197. <https://doi.org/10.1016/j.marstruc.2012.05.008>.
4. Cole R. H. *Underwater explosions*. Princeton: Princeton Univ. Press, 1948. 437 pp.
5. Song F., Guo-ning, Jin-hua P. Experimental Study and Numerical Simulation of CL-20-

- Based Aluminized Explosive in Underwater Explosion Hanneng Cailiao // *Chinese J. Energetic Materials*, 2018. vol. 26, no. 8. pp. 686–695. <https://doi.org/10.11943/CJEM2017376>.
6. Kowsarinia E., Alizadeh Y., Salavati pour H. S. Experimental evaluation of blast wave parameters in underwater explosion of hexogen charges // *Int. J. Eng.*, 2012. vol. 25, no. 1(B). pp. 63–70. <https://doi.org/10.5829/idosi.ije.2012.25.01b.08>.
 7. Lawrence G. W. Shock wave pressure in free water as a function of explosive composition / *12th International Detonation Symposium* (San Diego, California, August 11–16, 2002), 2002. Retrieved from <http://www.intdetsymp.org/detsymp2002/PaperSubmit/FinalManuscript/pdf/Lawrence-221.pdf> (March 29, 2021).
 8. Moon S.-J., Kwon J.-I, Park J.-W., Chung J.-H. Assessment on shock pressure acquisition from underwater explosion using uncertainty of measurement // *Int. J. Nav. Archit. Ocean Eng.*, 2017. vol. 9, no. 6. pp. 589–597. <https://doi.org/10.1016/j.ijnaoe.2017.04.002>.
 9. Кедринский В. К. *Гидродинамика взрыва: эксперимент и модели*. Новосибирск: СО РАН, 2000. 435 с.
 10. Фань Чж.-Ц., Ма Х.-Х., Шень Чж.-У, Линь М.-Цз. Измерение давления при подводном взрыве алюминизированных взрывчатых веществ ПВДФ-датчиком // *Физика горения и взрыва*, 2015. Т. 51, №3. С. 106–111. <https://doi.org/10.15372/FGV20150301>.
 11. Wedberg R. Using underwater explosion and cylinder expansion tests to calibrate afterburn models for aluminized explosives // *AIP Conf. Proc.*, 2018. vol. 1979, 150040. <https://doi.org/10.1063/1.5044996>.
 12. Huang C., Liu M., Wang B., Zhang Y. Underwater explosion of slender explosives: Directional effects of shock waves and structure responses // *Int. J. Impact Eng.*, 2019. vol. 130. pp. 266–280. <https://doi.org/10.1016/j.ijimpeng.2019.04.018>.
 13. De Candia S. M., Ojeda R., Reid W., Ratcliffe M., Binns J. The whipping response of a submerged free-free cylinder due to underwater explosions / *Proc. of the Pacific 2017 International Maritime Conference*, Australia, Sydney, October 3–5, 2017, 2017. Retrieved from <https://eprints.utas.edu.au/31578/> (March 29, 2021).
 14. Park I.-K., Kim J.-C., An C.-W., Cho D.-S. Measurement of naval ship responses to underwater explosion shock loadings // *Shock and Vibration*, 2003. vol. 10. pp. 365–377, 803475. <https://doi.org/10.1155/2003/803475>.
 15. Murata K., Takahashi K., Kato Y. Precise measurements of underwater explosion phenomena by pressure sensor using fluoropolymer // *J. Mater. Process. Technol.*, 1999. vol. 85, no. 1–3. pp. 39–42. [https://doi.org/10.1016/S0924-0136\(98\)00251-9](https://doi.org/10.1016/S0924-0136(98)00251-9).
 16. Озерцовский О. И. *Действие взрыва на подводные объекты* / ред. Е. С. Шахиджанова. М.: ЦНИИХМ, 2007. 262 с.
 17. Geetha M., Nair U. R., Sarwade D. B., Gore G. M., Asthana S. N., Singh H. Studies on CL-20: The most powerful high energy material // *J. Therm. Anal. Calor.*, 2003. vol. 73, no. 3. pp. 913–922. <https://doi.org/10.1023/A:1025859203860>.
 18. Пановко Я. Г. *Основы прикладной теории колебаний и удара*. Л.: Машиностроение, 1976. 320 с.
 19. Грановский В. А., Сирая Т. Н. *Методы обработки экспериментальных данных при измерениях*. Л.: Энергоатомиздат, 1990. 288 с. [Granovskii V. A., Siraya T. N. *Metody obrabotki eksperimental'nykh dannykh pri izmereniiakh* [Methods of processing experimental data in measurements]. Leningrad: Energoatomizdat, 1990. 288 pp. (In Russian)]
 20. Draper N. R., Smith H. *Applied Regression Analysis* / Wiley Series in Probability and Statistics. New York: John Wiley & Sons, 1998. xix+716 pp. <https://doi.org/10.1002/9781118625590>.
 21. Демиденко Е. З. *Линейная и нелинейная регрессии*. М.: Финансы и статистика, 1981. 302 с.
 22. Marquardt D. W. An algorithm for least-squares estimation of nonlinear parameters // *J. Soc. Indust. Appl. Math.*, 1963. vol. 11, no. 2. pp. 431–441. <https://doi.org/10.1137/0111030>.

23. Hartley H. O., Booker A. Nonlinear least squares estimation // *Ann. Math. Statist.*, 1965. vol. 36, no. 2. pp. 638–650. <https://doi.org/10.1214/aoms/1177700171>.
24. Себер Дж. *Линейный регрессионный анализ*. М.: Мир, 1980. 456 с.
25. Вучков И., Бояджиева Л., Солаков О. *Прикладной линейный регрессионный анализ*. М.: Финансы и статистика, 1987. 238 с.
26. Зотеев В. Е. *Параметрическая идентификация диссипативных механических систем на основе разностных уравнений*. М.: Машиностроение, 2009. 344 с.
27. Зотеев В. Е., Стукалова Е. Д., Башкинова Е. В. Численный метод оценки параметров нелинейного дифференциального оператора второго порядка // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2017. Т. 21, № 3. С. 556–580. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1560>.
28. Зотеев В. Е. Численный метод нелинейного оценивания на основе разностных уравнений // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2018. Т. 22, № 4. С. 669–701. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1643>.
29. Воеводин В. В., Кузнецов Ю. А. *Матрицы и вычисления*. М.: Наука, 1984. 320 с.

MSC: 76L05

Mathematical modeling and noise-proof estimation of shock wave pulse parameters based on the results of an experiment in underwater explosions

© V. E. Zoteev, S. Yu. Ganigin, D. A. Demoretsky,
M. V. Nenashev, A. V. Gubinsky

Samara State Technical University,
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russian Federation.

Abstract

The article deals with the construction of a mathematical model of the underwater shock wave pulse based on the results of the experiment and numerical and analytical scientific research. The results of the development and comparative analysis of various numerical methods for nonlinear estimation of the parameters of this model are presented. A numerical method is proposed for estimating the pulse energy of a shock wave based on the experimental results in the form of an overpressure waveform both over an infinite period of time and at a given pulse duration. The results of testing the developed numerical methods for mathematical modeling of the underwater shock wave pulse when processing the results of the experiment at the explosion of model charge are presented. The reliability and efficiency of the computational algorithms and numerical methods of nonlinear estimation presented in this paper is confirmed by the results of numerical and analytical studies and mathematical models constructed on the basis of experimental data.


Keywords: underwater shock wave pulse, mathematical model, nonlinear regression analysis, generalized regression model, root-mean-square estimation, statistical processing of experimental results.

Received: 12th February, 2021 / Revised: 6th March, 2021 /
Accepted: 10th March, 2021 / First online: 29th March, 2021

Competing interests. We declare that we have no conflicts of interest in the authorship and publication of this article.

Authors' contributions and responsibilities. V.E. Zoteev: Obtaining analytical solutions and their analysis; Visualization and verification of results; Writing — original

Research Article

 The content is published under the terms of the [Creative Commons Attribution 4.0 International License](http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Zoteev V. E., Ganigin S. Yu., Demoretsky D. A., Nenashev M. V., Gubinsky A. V. Mathematical modeling and noise-proof estimation of shock wave pulse parameters based on the results of an experiment in underwater explosions, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2021, vol. 25, no. 1, pp. 127–162. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1849> (In Russian).

Authors' Details:

Vladimir E. Zoteev  <https://orcid.org/0000-0001-7114-4894>

Dr. Tech. Sci.; Professor; Dept. of Applied Mathematics and Computer Science;
e-mail: zoteev-ve@mail.ru

draft and review & editing. S.Yu. Ganigin: Consulting; Analysis of experiments; Writing — part of the original draft. D.A. Demoretsky: Idea of study; Formulation of research goals and aims; Supervision and consulting; Analysis of calculation results. M.V. Nenashev: Idea of study; Formulation of research goals and aims; Consulting; Analysis of calculation results. A.V. Gubinsky: Literature review; Analysis of experiments; Writing — part of the original draft. The authors are absolutely responsible for submitting the final manuscript in print. Each author has approved the final version of manuscript.

Funding. This research received no specific grant from any funding agency in the public, commercial, or not-for-profit sectors.

References

1. A-man Z., Wen-shan Y., Xiong-liang Y. Numerical simulation of underwater contact explosion, *Applied Ocean Research*, 2012, vol. 34, pp. 10–20. <https://doi.org/10.1016/j.apor.2011.07.009>.
2. Zong Z., Zhao Y., Li H. A numerical study of whole ship structural damage resulting from close-in underwater explosion shock, *Marine Structures*, 2013, vol. 31, pp. 24–43. <https://doi.org/10.1016/j.marstruc.2013.01.004>.
3. Zhang N., Zong Z. Hydro-elastic-plastic dynamic response of a ship hull girder subjected to an underwater bubble, *Marine Structures*, 2012, vol. 29, no. 1, pp. 177–197. <https://doi.org/10.1016/j.marstruc.2012.05.008>.
4. Cole R. H. *Underwater explosions*. Princeton, Princeton Univ. Press, 1948, 437 pp.
5. Song F., Guo-ning, Jin-hua P. Experimental Study and Numerical Simulation of CL-20-Based Aluminized Explosive in Underwater Explosion Hanneng Cailiao, *Chinese J. Energetic Materials*, 2018, vol. 26, no. 8, pp. 686–695. <https://doi.org/10.11943/CJEM2017376>.
6. Kowsarinia E., Alizadeh Y., Salavati pour H. S. Experimental evaluation of blast wave parameters in underwater explosion of hexogen charges, *Int. J. Eng.*, 2012, vol. 25, no. 1(B), pp. 63–70. <https://doi.org/10.5829/idosi.ije.2012.25.01b.08>.
7. Lawrence G. W. Shock wave pressure in free water as a function of explosive composition, In: *12th International Detonation Symposium* (San Diego, California, August 11–16, 2002), 2002. Retrieved from <http://www.intdetsymp.org/detsymp2002/PaperSubmit/FinalManuscript/pdf/Lawrence-221.pdf> (March 29, 2021).
8. Moon S.-J., Kwon J.-I, Park J.-W., Chung J.-H. Assessment on shock pressure acquisition from underwater explosion using uncertainty of measurement, *Int. J. Nav. Archit. Ocean Eng.*, 2017, vol. 9, no. 6, pp. 589–597. <https://doi.org/10.1016/j.ijnaoe.2017.04.002>.
9. Kedrinskiy V. K. *Hydrodynamics of Explosion. Experiment and Models*. Berlin, Springer, 2005, xii+362 pp. <https://doi.org/10.1007/3-540-28563-6>.
10. Fan Z., Ma H., Shen Z., Lin M. Application of polyvinylidene fluoride for pressure measurements in an underwater explosion of aluminized explosives, *Combust. Explos. Shock Waves*, 2015, vol. 51, no. 3, pp. 381–386. <https://doi.org/10.1134/S0010508215030156>.

Sergey Yu. Ganigin  <https://orcid.org/0000-0001-5778-6516>

Dr. Phys. & Math. Sci., Professor; Dept. of Solid Chemical Technology;
e-mail: ganigin.s.yu@yandex.ru

Dmitry A. Demoretsky  <https://orcid.org/0000-0002-4523-1465>

Dr. Phys. & Math. Sci., Professor; Head of Department; Dept. of Solid Chemical Technology;
e-mail: dda74@inbox.ru

Maxim V. Nenashev  <https://orcid.org/0000-0003-3918-5340>

Dr. Tech. Sci., Professor; First Vice-Rector — Vice-Rector for Research;
e-mail: nenashev.mv@samgtu.ru

Aleksey V. Gubinsky  <https://orcid.org/0000-0002-9732-2596>

Postgraduate Student; Dept. of Solid Chemical Technology; e-mail: gubinskiy.av@samgtu.ru

11. Wedberg R. Using underwater explosion and cylinder expansion tests to calibrate afterburn models for aluminized explosives, *AIP Conf. Proc.*, 2018, vol. 1979, 150040. <https://doi.org/10.1063/1.5044996>.
12. Huang C., Liu M., Wang B., Zhang Y. Underwater explosion of slender explosives: Directional effects of shock waves and structure responses, *Int. J. Impact Eng.*, 2019, vol. 130, pp. 266–280. <https://doi.org/10.1016/j.ijimpeng.2019.04.018>.
13. De Candia S. M., Ojeda R., Reid W., Ratcliffe M., Binns J. The whipping response of a submerged free-free cylinder due to underwater explosions, In: *Proc. of the Pacific 2017 International Maritime Conference*, Australia, Sydney, October 3–5, 2017, 2017. Retrieved from <https://eprints.utas.edu.au/31578/> (March 29, 2021).
14. Park I.-K., Kim J.-C., An C.-W., Cho D.-S. Measurement of naval ship responses to underwater explosion shock loadings, *Shock and Vibration*, 2003, vol. 10, pp. 365–377, 803475. <https://doi.org/10.1155/2003/803475>.
15. Murata K., Takahashi K., Kato Y. Precise measurements of underwater explosion phenomena by pressure sensor using fluoropolymer, *J. Mater. Process. Technol.*, 1999, vol. 85, no. 1–3, pp. 39–42. [https://doi.org/10.1016/S0924-0136\(98\)00251-9](https://doi.org/10.1016/S0924-0136(98)00251-9).
16. Ozeretskovskii O. I. *Deistvie vzryva na podvodnye ob"ekty* [The Effect of an Explosion on Underwater Objects], ed. E. S. Shakhidzhanova. Moscow, Central Scientific Research Institute of Chemistry and Mechanics, 2007, 262 pp. (In Russian)
17. Geetha M., Nair U. R., Sarwade D. B., Gore G. M., Asthana S. N., Singh H. Studies on CL-20: The most powerful high energy material, *J. Therm. Anal. Calor.*, 2003, vol. 73, no. 3, pp. 913–922. <https://doi.org/10.1023/A:1025859203860>.
18. Panovko Ya. G. *Osnovy prikladnoi teorii kolebaniĭ i udara* [Fundamentals of Applied Theory of Vibrations and Shock]. Leningrad, Mashinostroenie, 1976, 320 pp. (In Russian)
19. Granovskii V. A., Siraya T. N. *Metody obrabotki eksperimental'nykh dannykh pri izmereniiakh* [Methods of processing experimental data in measurements]. Leningrad, Energoatomizdat, 1990, 288 pp. (In Russian)
20. Draper N. R., Smith H. *Applied Regression Analysis*, Wiley Series in Probability and Statistics. New York, John Wiley & Sons, 1998, xix+716 pp. <https://doi.org/10.1002/9781118625590>.
21. Demidenko E. Z. *Lineinaia i nelineinaia regressii* [Linear and Nonlinear Regressions]. Moscow, Finance and Statistics, 1981, 302 pp. (In Russian)
22. Marquardt D. W. An algorithm for least-squares estimation of nonlinear parameters, *J. Soc. Indust. Appl. Math.*, 1963, vol. 11, no. 2, pp. 431–441. <https://doi.org/10.1137/0111030>.
23. Hartley H. O., Booker A. Nonlinear least squares estimation, *Ann. Math. Statist.*, 1965, vol. 36, no. 2, pp. 638–650. <https://doi.org/10.1214/aoms/1177700171>.
24. Seber G. A. F., Lee A. J. *Linear Regression Analysis*, Wiley Series in Probability and Statistics. Hoboken, NJ, Wiley, 2003, xvi+565 pp. <https://doi.org/10.1002/9780471722199>.
25. Vuchkov I., Boyadzhieva L., Solakov O. *Prikladnoi lineinyi regressionnyi analiz* [Applied Linear Regression Analysis]. Moscow, Finance and Statistics, 1987, 238 pp. (In Russian)
26. Zoteev V. E. *Parametricheskaiia identifikatsiia dissipativnykh mekhanicheskikh sistem na osnove raznostnykh uravnenii* [Parametric Identification of Dissipative Mechanical Systems Based on Difference Equations]. Moscow, Mashinostroenie, 2009, 344 pp. (In Russian)
27. Zoteev V. E., Stukalova E. D., Bashkinova E. V. Numerical method of estimation of parameters of the nonlinear differential operator of the second order, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2017, vol. 21, no. 3, pp. 556–580 (In Russian). <https://doi.org/10.14498/vsgtu1560>.
28. Zoteev V. E. A numerical method of nonlinear estimation based on difference equations, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2018, vol. 22, no. 4, pp. 669–701 (In Russian). <https://doi.org/10.14498/vsgtu1643>.
29. Voevodin V. V., Kuznetsov Yu. A. *Matritsy i vychisleniia* [Matrixes and Computations]. Moscow, Nauka, 1984, 320 pp. (In Russian)