Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2024. Т. 28, № 2. С. 247–266
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu2078
EDN: CXTSHY

УДК 517.958

К расчету приближенных симметрий дробно-дифференциальных уравнений

В. О. Лукащук, С. Ю. Лукащук

Уфимский университет науки и технологий,
Россия, 450076, Уфа, ул. Заки Валиди, 32.

Аннотация

Предлагается новый алгоритм нахождения приближенных симметрий для дробно-дифференциальных уравнений с производными типа Римана–Лиувилля и Герасимова–Капуто, порядок которых близок к целому. Алгоритм основан на разложении дробной производной в ряд по малому параметру, выделяемому из порядка дробного дифференцирования. В линейном приближении такое разложение содержит нелокальный интегро-дифференциальный оператор с логарифмическим ядром.

В результате исходное дробно-дифференциальное уравнение приближается интегро-дифференциальным уравнением с малым параметром, для которого могут быть найдены приближенные симметрии. Доказывается теорема о виде продолжения однопараметрической группы точечных преобразований на новую переменную, порождаемую нелокальным оператором, входящим в разложение дробной производной. Знание такого продолжения позволяет применить к рассматриваемому уравнению приближенный критерий инвариантности.

Предлагаемый алгоритм иллюстрируется на задаче нахождения приближенных симметрий для нелинейного дробно-дифференциального уравнения фильтрации субдиффузионного типа. Показано, что размерность алгебры приближенных симметрий такого уравнения оказывается существенно больше размерности алгебры точных симметрий, что открывает возможность построения большого числа приближенно инвариантных решений. Также на примере линейного дробно-дифференциального уравнения субдиффузии показывается, что алгоритм дает принципиальную возможность находить нелокальные приближенные симметрии определенного вида.

Дифференциальные уравнения и математическая физика
Научная статья

Образец для цитирования
Лукащук В. О., Лукащук С. Ю. К расчету приближенных симметрий дробно-дифференциальных уравнений // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2024. Т. 28, № 2. С. 247–266. EDN: CXTSHY. DOI: 10.14498/vsgtu2078.

Сведения об авторах

Вероника Олеговна Лукащук https://orcid.org/0000-0002-3082-1446
кандидат физико-математических наук; доцент; каф. высокопроизводительных вычислительных технологий и систем; e-mail: voluks@gmail.com

Станислав Юрьевич Лукащук https://orcid.org/0000-0001-9209-5155
доктор физико-математических наук, доцент; профессор; каф. высокопроизводительных вычислительных технологий и систем; e-mail: lsu@ugatu.su

Ключевые слова: дробно-дифференциальное уравнение, малый параметр, приближенная группа преобразований, приближенная формула продолжения, приближенная симметрия, нелокальная симметрия.

Получение: 23 ноября 2023 г. / Исправление: 11 февраля 2024 г. / Принятие: 26 апреля 2024 г. / Публикация онлайн: 8 октября 2024 г.

Введение. Групповой анализ дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений [1–3] является эффективным математическим инструментом исследования их симметрийных свойств, построения законов сохранения и нахождения точных решений. Одним из современных направлений его развития является симметрийный анализ дифференциальных уравнений с производными дробных порядков различных типов [4, 5], называемых также дробно-дифференциальными уравнениями [6]. В течение последних 15 лет для таких уравнений активно развивались как методы классического группового анализа (см. [7–9] и цитируемую там литературу), так и некоторые методы современного группового анализа, направленные на нахождение приближенных [10] и высших [11] симметрий.

Построение приближенных симметрий для дробно-дифференциального уравнения возможно в тех случаях, когда в нем имеется малый параметр либо когда такое уравнение может быть приближено в некотором смысле уравнением с малым параметром. Если порядок входящей в уравнение дробной производной близок к целому числу, то из такого порядка возможно выделение малого параметра с последующим разложением по нему в ряд соответствующей дробной производной. Например, для левосторонней дробной производной Римана—Лиувилля

$$({}_{t_0}D_t^{\alpha} f)(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_{t_0}^{t} \frac{f(s)ds}{(t-s)^{\alpha-n+1}}, \quad n = [\alpha]+1,$$

для случая $\alpha = n - \varepsilon$, где $\varepsilon \in (0, 0.5]$, в работе [10] получено следующее разложение по ε:

$$({}_{t_0}D_t^{n-\varepsilon} f)(t) = f^{(n)}(t) - \varepsilon \Bigg\{ [\psi(n+1) - \ln(t-t_0)] f^{(n)}(t) - \\ - \sum_{\substack{k=0 \\ k\neq n}}^{\infty} \frac{(-1)^{k-n}}{k-n} \frac{n!}{k!} (t-t_0)^{k-n} f^{(k)}(t) \Bigg\} + o(\varepsilon). \quad (1)$$

Данное разложение справедливо для всех $t > t_0$ при $\varepsilon \to 0$ в случае, когда функция $f(t)$ бесконечно дифференцируема при $t > t_0$. Если ε — малый параметр ($0 < \varepsilon \ll 1$), то в (1) можно ограничиться приведенным линейным разложением, отбросив малые порядка $o(\varepsilon)$. Если дробно-дифференциальное уравнение содержит только дробные производные вида ${}_{t_0}D_t^{m-\varepsilon} f$ ($m = 1, 2, \ldots, M$), то, заменяя их на соответствующие линейные по ε разложения вида (1), получим уравнение с малым параметром. В нулевом порядке по ε такое уравнение будет дифференциальным уравнением целого порядка M.

Необходимо, однако, отметить, что линейное разложение (1) не является равномерным, оно справедливо с точностью $o(\varepsilon \ln(t-t_0))$. Поэтому для любого фиксированного ε замена дробно-дифференциального уравнения соответствующим уравнением с малым параметром будет справедлива лишь для $t \in [c, d]$, где $c = c(\varepsilon)$ и $d = d(\varepsilon)$ согласованы с условием малости отбрасываемой части разложения.

Замена, пусть и в ограниченной области, дробно-дифференциального уравнения уравнением с малым параметром, получаемым с использованием разложения вида (1), дает возможность применять к его исследованию методы теории приближенных групп преобразований [12–14]. На основе данного подхода в работах [15, 16] были успешно решены задачи групповой классификации по допускаемым приближенным группам преобразований для нелинейного уравнения субдиффузии и дробно-дифференциального обобщения уравнения Бюргерса, а в работах [17–19] для ряда дробно-дифференциальных уравнений найдены приближенные симметрии, приближенно инвариантные решения и приближенные законы сохранения.

Важно отметить, что допускаемая дробно-дифференциальным уравнением группа преобразований практически всегда оказывается более «бедной», чем группа соответствующего ему дифференциального уравнения целого порядка. Это обусловлено в первую очередь требованием неподвижности постоянного предела интегрирования дробно-дифференциального оператора при преобразовании. Переход к приближенным преобразованиям существенно расширяет группу симметрий, что дает возможность строить новые приближенно инвариантные решения и законы сохранения, которые не могут быть получены на основе точных симметрий.

Тем не менее разложение (1) обладает рядом существенных недостатков. Во-первых, оно требует бесконечной дифференцируемости функции $f(t)$ при $t > t_0$, что для дробно-дифференциальных уравнений справедливо далеко не всегда. Во-вторых, практическое использование (1) для нахождения допускаемой соответствующим уравнением приближенной группы преобразований требует построения продолжений группы, допускаемой уравнением в нулевом порядке по ε, на все производные $f^{(k)}(t)$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Решение определяющего уравнения для приближенной группы в этом случае требует аккуратной работы с бесконечными рядами, сходимость которых необходимо дополнительно контролировать. В-третьих, разложение (1) неприменимо при бесконечном нижнем пределе интегрирования в операторе дробного дифференцирования. Однако уравнения с такими операторами возникают при описании процессов с полной степенной памятью или степенной пространственной нелокальностью в $\mathbb{R}^n$.

Преодолеть указанные недостатки позволяет переход к другому виду разложений дробных производных, которые могут быть построены на основе известной [4] формулы для дробного интеграла порядка ε при $\varepsilon \to 0$:

$$({}_{t_0}I_t^{\varepsilon} f)(t) = f(t) + \varepsilon\left[\gamma f(t) + \frac{d}{dt}\int_{t_0}^{t} \ln(t-s) f(s)\,ds\right] + o(\varepsilon), \tag{2}$$

где

$$({}_{t_0}I_t^{\varepsilon} f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\varepsilon)}\int_{t_0}^{t} \frac{f(s)\,ds}{(t-s)^{1-\varepsilon}}, \quad \varepsilon \in (0,1)$$

— левосторонний интеграл дробного порядка ε, $\gamma \approx 0.57721566$ — постоянная Эйлера. С использованием (2) могут быть получены соответствующие разложения для левосторонних дробных производных Римана—Лиувилля и Капуто, порядок которых близок к целому. В работах [20–22] разложение (2) было использовано для нахождения приближенных решений дробно-дифференциальных уравнений.

В результате применения разложения (2) дробно-дифференциальное уравнение приближается уравнением с малым параметром ε, содержащим в ε-порядке интегро-дифференциальный оператор с логарифмическим ядром. Разработка алгоритма нахождения приближенных симметрий таких уравнений и является целью данной работы.

1. Формулы продолжения. Рассмотрим функцию $u = u(t, x)$, где $x = (x^1, \ldots, x^m)$, определенную в области $Q_T = \{(t, x) : -\infty \leqslant t_0 < t < T \leqslant \infty, x \in \Omega \subset \mathbb{R}^m\}$, суммируемую по переменной t на интервале (t_0, T). Тогда существует дробный интеграл $({}_{t_0}I_t^\varepsilon u)(t, x)$ $(0 < \varepsilon \ll 1)$ и почти всюду справедливо разложение вида (2) (см. [4, замечание 2.5]):

$$({}_{t_0}I_t^\varepsilon u)(t, x) = u(t, x) + \varepsilon\Big[\gamma u(t, x) + \frac{\partial}{\partial t}(Lu)(t, x)\Big] + o(\varepsilon), \tag{3}$$

$$(Lu)(t, x) = \int_{t_0}^{t} \ln(t - s)u(s, x)ds. \tag{4}$$

Для построения конструктивного алгоритма нахождения приближенных симметрий уравнений с малым параметром, получаемых из дробно-дифференциальных уравнений с использованием разложения (3), необходимо знать продолжение группы преобразований на интеграл $(Lu)(t, x)$.

Рассмотрим однопараметрическую группу G точечных преобразований

$$\begin{aligned} &\bar t = \varphi(t, x, u, a), && \bar x^i = \psi^i(t, x, u, a) \quad (i = 1, \ldots, m), && \bar u = \theta(t, x, u, a),\\ &\varphi|_{a=0} = t, && \psi^i|_{a=0} = x^i \quad (i = 1, \ldots, m), && \theta|_{a=0} = u, \end{aligned} \tag{5}$$

где $a \in \Delta$ — параметр группы и $\Delta \in \mathbb{R}$ — симметричный относительно нуля интервал. Как обычно в групповом анализе (см., например, [1]), функции φ, ψ^i и θ предполагаются бесконечно дифференцируемыми по всем своим аргументам при $(t, x) \in \overline{Q}_T$ и $a \in \Delta$.

Пусть соответствующие инфинитезимальные преобразования группы G имеют вид

$$\begin{aligned} &\bar t = t + a\tau(t, x, u) + o(a),\\ &\bar x^i = x + a\xi^i(t, x, u) + o(a) \quad (i = 1, \ldots, m),\\ &\bar u = u + a\eta(t, x, u) + o(a). \end{aligned} \tag{6}$$

Тогда оператор

$$X = \tau\frac{\partial}{\partial t} + \xi^i\frac{\partial}{\partial x^i} + \eta\frac{\partial}{\partial u} \tag{7}$$

является инфинитезимальным оператором (генератором) группы G. Здесь и далее используется правило суммирования по повторяющимся индексам.

В дальнейшем для сокращенной записи сложных функций от $u(t, x)$, ее производных и интегралов будем использовать обозначение

$$f(t, x, u(t, x), u_t(t, x), \ldots) = f[t, x].$$

Через D_t и D_i будем обозначать операторы полного дифференцирования по переменным t и x^i $(i = 1, \ldots, m)$ соответственно, а через u_i — частную производную функции u по x^i.

Теорема. *Пусть $u(t, x) \in C^1(Q_T) \cap L_1(t_0, T)$ и выполнено условие*

$$\tau[t, x]|_{t=t_0} = 0, \quad t_0 > -\infty. \tag{8}$$

Тогда инфинитезимальное преобразование интеграла $(Lu)(t, x)$ под действием группы G с оператором (7) имеет вид

$$(L\bar{u})(\bar{t}, \bar{x}) = (Lu)(t, x) + a\zeta_{Lu}[t, x] + o(a), \tag{9}$$

где $\zeta_{Lu}[t, x]$ определяется формулой продолжения

$$\zeta_{Lu}[t, x] = L(\eta - \tau u_t - \xi^i u_i)(t, x) + \tau D_t(Lu)(t, x) + \xi^i D_i(Lu)(t, x). \tag{10}$$

Доказательство. Используя обратное для (6) инфинитезимальное преобразование

$$\begin{aligned} &t = \bar{t} - a\tau[\bar{t}, \bar{x}] + o(a), \\ &x^i = \bar{x}^i - a\xi^i[\bar{t}, \bar{x}] + o(a) \quad (i = 1, \ldots, m), \\ &u = \bar{u} - a\eta[\bar{t}, \bar{x}] + o(a), \end{aligned}$$

запишем

$$\bar{u}(\bar{t}, \bar{x}) = u(\bar{t} - a\tau[\bar{t}, \bar{x}], \bar{x} - a\xi[\bar{t}, \bar{x}]) + a\eta[\bar{t}, \bar{x}] + o(a),$$

где $\xi = (\xi^1, \ldots, \xi^m)$. С учетом этого представления изменение интеграла $(L\bar{u})(\bar{t}, \bar{x})$ под действием инфинитезимального преобразования (6) можно представить в виде

$$\begin{aligned} (L\bar{u})(\bar{t}, \bar{x}) = \int_{t_0}^{t + a\tau[t,x]} &\ln(t + a\tau[t, x] - \bar{s}) \times \\ &\times \{u(\bar{s} - a\tau[\bar{s}, x], x + a\xi[t, x] - a\xi[\bar{s}, x]) + a\eta[\bar{s}, x]\}\, d\bar{s} + o(a). \end{aligned}$$

Выполним замену переменных по правилу $\bar{s} = s + a\tau[s, x]$. Заметим, что в силу условия (8) нижний предел интегрирования t_0 при такой замене остается неизменным. Имеем

$$\begin{aligned} (L\bar{u})(\bar{t}, \bar{x}) = \int_{t_0}^{t} &\ln(t - s + a\tau[t, x] - a\tau[s, x]) \times \\ &\times \big\{u(s, x + a\xi[t, x] - a\xi[s, x]) + a\eta[s, x]\big\}(1 + aD_s\tau[s, x])ds + o(a). \end{aligned}$$

Используя разложения

$$\ln(t - s + a\tau[t, x] - a\tau[s, x]) = \ln(t - s) + a\frac{\tau[t, x] - \tau[s, x]}{t - s} + o(a)$$

и

$$u(s, x + a\xi[t, x] - a\xi[s, x]) = u(s, x) + a(\xi^i[t, x] - \xi^i[s, x])u_i(s, x) + o(a),$$

получаем

$$(L\bar{u})(\bar{t},\bar{x}) = \int_{t_0}^{t} \ln(t-s)u(s,x)ds + a\int_{t_0}^{t}\Big\{\frac{\tau[t,x]-\tau[s,x]}{t-s}u(s,x) +$$
$$+\ln(t-s)\big[\eta[s,x] + (D_s\tau[s,x])u(s,x) + (\xi^i[t,x]-\xi^i[s,x])u_i(s,x)\big]\Big\}ds + o(a).$$

Так как $u(t,x)\in C^1(Q_T)\cap L_1(t_0,T)$, справедливы соотношения

$$(D_s\tau[s,x])u(s,x) = D_s(\tau[s,x]u(s,x)) - \tau[s,x]u_s(s,x),$$

$$\int_{t_0}^{t}\ln(t-s)\xi^i[t,x]u_i(s,x)ds = \xi^i[t,x]D_i(Lu)(t,x).$$

В результате получаем

$$(L\bar{u})(\bar{t},\bar{x}) = (Lu)(t,x) + a[L(\eta-\tau u_t-\xi^i u_i)(t,x) + \xi^i(t,x)D_i(Lu)(t,x)] +$$
$$+a\int_{t_0}^{t}\Big\{\frac{\tau[t,x]-\tau[s,x]}{t-s}u(s,x) + \ln(t-s)D_s(\tau[s,x]u(s,x))\Big\}ds + o(a).$$

Для преобразования последнего интеграла в этом выражении воспользуемся формулой

$$D_t\int_{t_0}^{t}\ln(t-s)u(s,x)ds = \ln(t-t_0)u(t,x) + \int_{t_0}^{t}\frac{u(s,x)-u(t,x)}{t-s}ds,$$

справедливость которой вытекает из дифференцируемости $u(s,x)$ по s при $s>t_0$. Имеем

$$\int_{t_0}^{t}\Big\{\frac{\tau[t,x]-\tau[s,x]}{t-s}u(s,x) + \ln(t-s)D_s(\tau[s,x]u(s,x))\Big\}ds =$$
$$=\int_{t_0}^{t}\Big\{\frac{\tau[t,x]u(t,x)-\tau[s,x]u(s,x)}{t-s} + \ln(t-s)D_s(\tau[s,x]u(s,x))\Big\}ds +$$
$$+\tau[t,x]\int_{t_0}^{t}\frac{u(s,x)-u(t,x)}{t-s}ds =$$
$$=\int_{t_0}^{t}D_s\left(\ln(t-s)[\tau[s,x]u(s,x)-\tau[t,x]u(t,x)]\right)ds +$$
$$+\tau[t,x]\left(D_t\int_{t_0}^{t}\ln(t-s)u(s,x)ds - \ln(t-t_0)u(t,x)\right) =$$
$$=\lim_{s\to t-0}\big\{\ln(t-s)[\tau[s,x]u(s,x)-\tau[t,x]u(t,x)]\big\} -$$
$$-\ln(t-t_0)\lim_{s\to t_0+0}\tau[s,x]u(s,x) + \tau[t,x]D_t(Lu)(t,x).$$

В полученном выражении первый предел обращается в нуль в силу дифференцируемости функций $\tau[s,x]$ и $u(s,x)$ по s при $s>t_0$, а второй — в силу дифференцируемости функции $\tau[t,x]$ в точке $t=t_0$, условия (8) и суммируемости $u(t,x)$ по переменной t. В результате получаем

$$(L\bar{u})(\bar{t},\bar{x}) = (Lu)(t,x) + \\ + a[L(\eta - \tau u_t - \xi^u u_i)(t,x) + \xi^i(t,x)D_i(Lu)(t,x)] + \\ + a\tau[t,x]D_t(Lu)(t,x) + o(a).$$

Таким образом, справедливость инфинитезимального преобразования (9), (10) доказана. □

Замечание. В предельном случае $t_0 \to -\infty$ условие (8) не требуется.

На основе формулы продолжения (9) получаются формулы продолжения для интегро-дифференциальных переменных $D_t^k(Lu)$:

$$D_{\bar{t}}^k(L\bar{u})(\bar{t},\bar{x}) = D_t^k(Lu)(t,x) + a\zeta_{D^k(Lu)}[t,x] + o(a),$$

где

$$\zeta_{D_t^k(Lu)}[t,x] = D_t^k L(\eta - \tau u_t - \xi^i u_i)(t,x) + \\ + \tau D_t^{k+1}(Lu)(t,x) + \xi^i D_i D_t^k(Lu)(t,x) \quad (11)$$

(функция Lu в этом случае предполагается дифференцируемой $k+1$ раз по переменной t).

2. Приближение дробно-дифференциальных уравнений уравнениями с малым параметром. Рассмотрим дробно-дифференциальное уравнение

$${}_{t_0}D_t^\alpha u = F(t,x,u,u_{(1)},\ldots,u_{(r)}), \quad n-1<\alpha<n, \quad n,\ r\in\mathbb{N}, \quad (12)$$

где ${}_{t_0}D_t^\alpha u = D_t^n({}_{t_0}I_t^{n-\alpha}u)$ — дробная производная Римана—Лиувилля и

$$u_{(1)} = u_{i_1}, \quad \ldots, \quad u_{(r)} = u_{i_1\ldots i_r},$$

$$u_{i_1} = D_{i_1}u, \quad \ldots, \quad u_{i_1\ldots i_r} = D_{i_r}\ldots D_{i_1}u, \quad i_1,\ldots,i_r = 1,\ldots,m.$$

Пусть $\alpha = n-\varepsilon$, $0<\varepsilon\ll 1$. Тогда с учетом разложения (3) уравнение (12) с точностью до $o(\varepsilon)$ приближается уравнением с малым параметром ε:

$$(1+\varepsilon\gamma)\frac{\partial^n u}{\partial t^n} + \varepsilon\frac{\partial^{n+1}}{\partial t^{n+1}}(Lu) \approx F(t,x,u,u_{(1)},\ldots,u_{(r)}), \quad n,r\in\mathbb{N}. \quad (13)$$

Здесь и далее приближенное равенство $f\approx g$ означает $f = g + o(\varepsilon)$.

Аналогично, дробно-дифференциальное уравнение

$${}_{t_0}^{C}D_t^\alpha u = F(t,x,u,u_{(1)},\ldots,u_{(r)}), \quad n-1<\alpha<n, \quad n,\ r\in\mathbb{N}, \quad (14)$$

с дробной производной Герасимова—Капуто ${}_{t_0}^{C}D_t^\alpha u = {}_{t_0}I_t^{n-\alpha}(D_t^n u)$, при $\alpha = n-\varepsilon$, $0<\varepsilon\ll 1$, с точностью до $o(\varepsilon)$ приближается уравнением

$$(1+\varepsilon\gamma)\frac{\partial^n u}{\partial t^n} + \varepsilon\frac{\partial}{\partial t}L(D_t^n u) \approx F(t,x,u,u_{(1)},\ldots,u_{(r)}), \quad n,\ r\in\mathbb{N}. \quad (15)$$

Отметим, что в силу наличия в уравнениях (13) и (15) интегрального оператора L, определенного в (4), данные уравнения являются интегро-дифференциальными. Однако в нулевом порядке по ε эти уравнения являются дифференциальными уравнениями целого порядка n по t и порядка r по x. Поэтому данные уравнения могут рассматриваться как дифференциальные уравнения с малыми нелокальными возмущениями. Наличие таких возмущений сохраняет в уравнениях (13) и (15) нелокальную природу исходных дробно-дифференциальных уравнений (12) и (14) соответственно.

Однако в некоторых простейших случаях нелокальность в уравнениях с малым параметром может быть исключена.

Пример. Рассмотрим простейшее обыкновенное дробно-дифференциальное уравнение

$$ {}_0D_t^\alpha u = 0, \quad \alpha \in (1,2), \quad t > 0. $$

Его решение хорошо известно [4]:

$$ u(t) = C_1 t^{\alpha-1} + C_2 t^{\alpha-2}, \tag{16} $$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

Пусть $\alpha = 2 - \varepsilon$. Тогда соответствующее приближенное уравнение (13) примет вид

$$ (1+\varepsilon\gamma)\frac{d^2u}{dt^2} + \varepsilon\frac{d^3}{dt^3}\int_0^t \ln(t-s)u(s)ds \approx 0. \tag{17} $$

Это уравнение дважды интегрируется:

$$ (1+\varepsilon\gamma)u(t) + \varepsilon\frac{d}{dt}\int_0^t \ln(t-s)u(s)ds \approx At + B, $$

где A, B — постоянные интегрирования. С точностью $o(\varepsilon)$ отсюда имеем

$$ \varepsilon u(t) \approx \varepsilon(At+B). $$

После подстановки этого представления в интеграл и его вычисления находим

$$ (1+\varepsilon\gamma)u(t) + \varepsilon[At(\ln t - 1) + B\ln t] \approx At + B. $$

С точностью до $o(\varepsilon)$ получаем

$$ u(t) \approx At(1+\varepsilon-\varepsilon\gamma-\varepsilon\ln t) + B(1-\varepsilon\gamma-\ln t) $$

или, обозначая $C_1 = (1+\varepsilon-\varepsilon\gamma)A$, $C_2 = (1-\varepsilon\gamma)B$, находим

$$ u(t) \approx (C_1 t + C_2)(1-\varepsilon\ln t), $$

что соответствует разложению решения (16) при $\alpha = 2-\varepsilon$ в ряд по ε с точностью до $o(\varepsilon)$.

Теперь заметим, что второе слагаемое в уравнении (17) можно упростить с учетом приближенного равенства $\varepsilon u'' \approx 0$:

$$\varepsilon \frac{d^3}{dt^3} \int_0^t \ln(t-s)u(s)ds = \varepsilon \frac{d^3}{dt^3} \int_0^t \ln(s)u(t-s)ds =$$
$$= \varepsilon \frac{d^2}{dt^2}\Big[u(0)\ln t + \int_0^t \ln(s)u'(t-s)ds\Big] =$$
$$= \varepsilon \frac{d}{dt}\Big[\frac{u(0)}{t} + u'(0)\ln t\Big] + \frac{d}{dt}\int_0^t \ln(s)\varepsilon u''(t-s)ds \approx \varepsilon\Big[\frac{u'(0)}{t} - \frac{u(0)}{t^2}\Big].$$

В силу уравнения $\varepsilon u'' \approx 0$ справедливы равенства $\varepsilon u'(0) \approx \varepsilon u'(t)$, $\varepsilon u(0) = \varepsilon u(t) - \varepsilon u'(t)$. В результате уравнение (17) приводится к виду

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \varepsilon\Big(\frac{2}{t}\frac{du}{dt} - \frac{u(t)}{t^2}\Big) \approx 0,$$

то есть становится обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка с малым параметром. Его исследование может быть выполнено классическими методами теории возмущений для дифференциальных уравнений с малым параметром.

Тем не менее подавляющее большинство получающихся в результате описанной выше процедуры приближенных нелокальных уравнений, особенно нелинейных, не может быть приведено к локальным. В этой связи при их симметрийном анализе возникает ряд важных особенностей, которые будут рассмотрены далее.

3. Приближенные точечные симметрии. Приближенные преобразования получаются в результате введения в функции φ, ψ^i и θ из (5) дополнительной переменной — малого параметра ε с последующим разложением по нему этих функций в ряд Тейлора с удержанием нескольких (обычно двух) первых членов разложения. Теория групп таких приближенных преобразований применительно к дифференциальным уравнениям с малым параметром была развита в работах [12, 13] (см. также [14]). С точностью $o(\varepsilon)$ инфинитезимальный оператор такой группы имеет вид

$$X \equiv X_{(0)} + \varepsilon X_{(1)} = (\tau_{(0)} + \varepsilon\tau_{(1)})\frac{\partial}{\partial t} + (\xi^i_{(0)} + \varepsilon\xi^i_{(1)})\frac{\partial}{\partial x^i} + (\eta_{(0)} + \varepsilon\eta_{(1)})\frac{\partial}{\partial u}. \quad (18)$$

Здесь $\tau_{(0)}$, $\tau_{(1)}$, $\xi^i_{(0)}$, $\xi^i_{(1)}$, $\eta_{(0)}$, $\eta_{(1)}$ являются функциями переменных t, x, u.

Определение. *Приближенной точечной симметрией* дифференциального или интегро-дифференциального уравнения с малым параметром называется оператор вида (18), соответствующий группе приближенных преобразований, допускаемых этим уравнением с точностью $o(\varepsilon)$.

Рассмотрим алгоритм нахождения приближенных симметрий на примере уравнений (13) и (15). Он сводится к следующим основным шагам.

1. Методами классического группового анализа находится группа точечных симметрий (все операторы $X_{(0)}$) невозмущенного уравнения

$$\frac{\partial^n u}{\partial t^n} = F(t, x, u, u_{(1)}, \ldots, u_{(r)}), \quad n,\ r \in \mathbb{N}.$$

2. С использованием приведенных в разделе 1 формул продолжения, найденная невозмущенная группа продолжается на интегро-дифференциальные переменные $D_t^{n+1}(Lu)$ или $D_tL(D_t^n u)$, а также на все дифференциальные переменные, входящие в соответствующее уравнение.
3. На основе критерия приближенной инвариантности, имеющего вид

$$\Big\{(\tilde{X}_{(0)} + \varepsilon\tilde{X}_{(1)})\Big[\frac{\partial^n u}{\partial t^n} - F(t, x, u, u_{(1)}, \dots, u_{(r)})\Big] + \\ + \varepsilon\tilde{X}_{(0)}\Big[\gamma\frac{\partial^n u}{\partial t^n} + \frac{\partial^{n+1}}{\partial t^{n+1}}(Lu)\Big]\Big\}\Big|_{(13)} \approx 0$$

для уравнения (13), и

$$\Big\{(\tilde{X}_{(0)} + \varepsilon\tilde{X}_{(1)})\Big[\frac{\partial^n u}{\partial t^n} - F(t, x, u, u_{(1)}, \dots, u_{(r)})\Big] + \\ + \varepsilon\tilde{X}_{(0)}\Big[\gamma\frac{\partial^n u}{\partial t^n} + \frac{\partial}{\partial t}L(D_t^n u)\Big]\Big\}\Big|_{(15)} \approx 0$$

для уравнения (15), строится определяющее уравнение, решением которого являются координаты оператора $X_{(1)}$. Здесь $\tilde{X}_{(0)}$ и $\tilde{X}_{(1)}$ — соответствующие продолженные операторы.

В результате решения определяющего уравнения находятся приближенные точечные симметрии вида (18).

Важно отметить, что определяющее уравнение, возникающее из критерия приближенной инвариантности, является относительно координат искомого оператора $X_{(1)}$ линейным дифференциальным уравнением в частных производных целого порядка, а не интегро-дифференциальным уравнением.

Пример. Рассмотрим в качестве примера нелинейное дробно-дифференциальное уравнение фильтрации субдиффузионного типа:

$$ {}_0D_t^\alpha u = e^{u_x}u_{xx}, \quad t > 0 \quad \alpha \in (0, 1). \tag{19}$$

В предельном случае $\alpha = 1$ это уравнение переходит в классическое уравнение фильтрации с производной первого порядка по времени, допускающее пятимерную алгебру точечных симметрий (см. [26]) с базисом

$$\begin{aligned} &X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = 2t\frac{\partial}{\partial t} + x\frac{\partial}{\partial x} + u\frac{\partial}{\partial u}, \\ &X_3 = \frac{\partial}{\partial u}, \quad X_4 = t\frac{\partial}{\partial t} - x\frac{\partial}{\partial u}, \quad X_5 = \frac{\partial}{\partial t}. \end{aligned} \tag{20}$$

Симметрии дробно-дифференциального уравнения (19) находятся по алгоритму, приведенному в [8]. В этом случае алгебра точечных симметрий оказывается двумерной с базисом

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = 2t\frac{\partial}{\partial t} + \alpha x\frac{\partial}{\partial x} + \alpha u\frac{\partial}{\partial u}.$$

Таким образом, алгебра симметрий дробно-дифференциального уравнения оказывается существенно беднее алгебры симметрий соответствующего уравнения с производными целого порядка.

Теперь рассмотрим уравнение (19) в приближении $\alpha = 1 - \varepsilon$, $0 < \varepsilon \ll 1$. Тогда оно с точностью $o(\varepsilon)$ приближается уравнением

$$(1 + \varepsilon\gamma)u_t + \varepsilon D_t^2(Lu) = e^{u_x} u_{xx}, \tag{21}$$

где оператор L определяется (4) с $t_0 = 0$. Найдем приближенные симметрии данного уравнения, используя представленный выше алгоритм.

При $\varepsilon = 0$ уравнение (21) совпадает с (19) и поэтому допускает пятипараметрическую группу преобразований с операторами (20). Общий оператор такой группы может быть записан в виде

$$X_{(0)} \equiv \sum_{i=1}^{5} A_i X_i = (A_5 + (2A_2 - A_4)t)\frac{\partial}{\partial t} + (A_1 + A_2 x)\frac{\partial}{\partial x} + \\ + (A_2 u + A_3 + A_4 x)\frac{\partial}{\partial u}, \tag{22}$$

где A_i — произвольные постоянные. Таким образом, п. 1 приведенного выше алгоритма выполнен.

Далее в соответствии с п. 2 алгоритма найдем продолжение инфинитезимального оператора (22) пятипараметрической группы преобразований на нелокальную переменную $D_t^2(Lu)$. Формула продолжения (11) после элементарных преобразований дает

$$\zeta_{D_t^2(Lu)} = \frac{A_3 + A_4 x}{t} + A_2 D_t^2(Lu) - A_5 D_t^2(Lu_t) - (2A_2 - A_4)D_t^2 L(tu_t) + \\ + (A_5 + (2A_2 - A_4)t)D_t^3(Lu).$$

Воспользуемся тождествами

$$D_t L(tu_t) = tD_t^2(Lu) - u, \quad L(u_t) - D_t(Lu) = u(0,x)\ln t,$$

справедливость которых легко проверяется непосредственными вычислениями. Тогда

$$\zeta_{D_t^2(Lu)} = \frac{A_5}{t}u(0,x) + \frac{A_3 + A_4 x}{t} + (2A_2 - A_4)u_t + (A_4 - A_2)D_t^2(Lu).$$

Продолжения оператора (22) на переменные u_t, u_x и u_{xx} находятся по классическим формулам (см., например, [1, 2]) и имеют, соответственно, вид

$$\zeta_{(0)t} = (A_4 - A_2)u_t, \quad \zeta_{(0)x} = A_4, \quad \zeta_{(0)xx} = -A_2 u_{xx}.$$

В результате продолженный оператор нулевого приближения имеет вид

$$\tilde{X}_{(0)} = [A_5 + (2A_2 - A_4)t]\frac{\partial}{\partial t} + [A_1 + A_2 x]\frac{\partial}{\partial x} + [A_2 u + A_3 + A_4 x]\frac{\partial}{\partial u} + \\ + [(A_4 - A_2)u_t]\frac{\partial}{\partial u_t} + A_4\frac{\partial}{\partial u_x} - A_2 u_{xx}\frac{\partial}{\partial u_{xx}} +$$

$$+\left[\frac{A_5}{t}u(0,x)+\frac{A_3+A_4x}{t}+(2A_2-A_4)u_t+(A_4-A_2)D_t^2(Lu)\right]\frac{\partial}{\partial D_t^2(Lu)}.$$

Продолженный оператор первого приближения записывается в виде

$$\tilde{X}_{(1)}=\tau_{(1)}\frac{\partial}{\partial t}+\xi_{(1)}\frac{\partial}{\partial x}+\eta_{(1)}\frac{\partial}{\partial u}+\zeta_{(1)t}\frac{\partial}{\partial u_t}+\zeta_{(1)x}\frac{\partial}{\partial u_x}+\zeta_{(1)xx}\frac{\partial}{\partial u_{xx}},$$

где $\tau_{(1)}$, $\xi_{(1)}$ и $\eta_{(1)}$ — функции переменных t, x, u, а $\zeta_{(1)t}$, $\zeta_{(1)x}$ и $\zeta_{(1)xx}$ определяются классическими формулами продолжения [1, 2]

$$\begin{aligned}
&\zeta_{(1)t}=D_t(\eta_{(1)})-D_t(\tau_{(1)})u_t-D_t(\xi_{(1)})u_x,\\
&\zeta_{(1)x}=D_x(\eta_{(1)})-D_x(\tau_{(1)})u_t-D_x(\xi_{(1)})u_x,\\
&\zeta_{(1)xx}=D_x^2(\eta_{(1)})-D_x^2(\tau_{(1)})u_t-D_x^2(\xi_{(1)})u_x-2D_x(\tau_{(1)})u_{tx}-2D_x(\xi_{(1)})u_{xx}.
\end{aligned}$$

В результате определяющее уравнение из п. 3 алгоритма после несложных преобразований приобретает вид

$$\zeta_{(1)t}-\zeta_{(1)x}e^{u_x}u_{xx}-\zeta_{(1)xx}e^{u_x}=-\frac{A_5}{t}u(0,x)-\frac{A_3+A_4x}{t}+(A_4-2A_2)u_t. \quad (23)$$

Это уравнение соответствует первому порядку разложения по ε, поэтому должно выполняться в силу невозмущенного уравнения $u_t=e^{u_x}u_{xx}$.

В (23) функция начального условия $u(0,x)$ должна рассматриваться как самостоятельная независимая переменная, т.к. уравнение должно быть выполнено при любых таких функциях. Поэтому расщепление по этой переменной дает $A_1=0$, т.е. группа переносов по времени, соответствующая оператору X_1, не наследуется возмущенным уравнением (21). Частное решение оставшейся части определяющего уравнения, соответствующее правой части уравнения (23), имеет вид

$$\tau_{(1)}=[2A_2-A_4(2-\ln t)]t, \quad \xi_{(1)}=0, \quad \eta_{(1)}=-(A_3+A_4x)\ln t.$$

В результате получено, что возмущенное уравнение (21) наследует первые четыре из пяти точечных симметрий (20) невозмущенного уравнения. Соответствующие приближенные точечные симметрии имеют вид

$$X_1=\frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2=2(1+\varepsilon)t\frac{\partial}{\partial t}+x\frac{\partial}{\partial x}+u\frac{\partial}{\partial u},$$
$$X_3=(1-\varepsilon\ln t)\frac{\partial}{\partial u}, \quad X_4=[1+\varepsilon(2-\ln t)]t\frac{\partial}{\partial t}-(1-\varepsilon\ln t)x\frac{\partial}{\partial u}.$$

При этом, как обычно [12–14], возмущенное уравнение (21) будет также обладать приближенными симметриями, полученными из симметрий (20) невозмущенного уравнения умножением на малый параметр ε:

$$X_5=\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}, \quad X_6=\varepsilon X_1, \quad X_7=\varepsilon X_2, \quad X_8=\varepsilon X_3, \quad X_9=\varepsilon X_4.$$

Таким образом, возмущенное уравнение (21) обладает 9-мерной алгеброй приближенных точечных симметрий с базисом X_i $(i=1,\ldots,9)$. Видно, что размерность алгебры приближенных симметрий дробно-дифференциального уравнения оказывается существенно больше размерности соответствующей алгебры точных симметрий, что дает возможность строить новые приближенно инвариантные решения такого уравнения, которые не могут быть получены из соответствующих точных инвариантных решений.

В заключение примера сделаем два замечания.

Во-первых, если в исходном уравнении (19) вместо дробной производной Римана—Лиувилля будет использована дробная производная Капуто, то алгебра симметрий такого уравнения оказывается трехмерной, так как в этом случае дополнительно будет допускаться оператор X_3 из (20). Операторы X_4 и X_5 по-прежнему не наследуются. Алгебра приближенных симметрий соответствующего возмущенного уравнения при этом останется 9-мерной.

Во-вторых, если в уравнении (19) используются дробные производные с $t_0 = -\infty$ (случай полной памяти системы) с дополнительным естественным физическим ограничением $\lim_{t\to-\infty} u(t,x) = 0$, то такое уравнение будет допускать группу переносов по времени, соответствующую оператору X_5. Данная симметрия будет без изменений наследоваться соответствующим возмущенным уравнением, в результате чего алгебра приближенных точечных симметрий такого уравнения станет 10-мерной.

4. Нелокальные приближенные симметрии. Важным преимуществом предлагаемого в данной работе подхода является возможность нахождения в ряде случаев не только точечных, но и нелокальных симметрий. Такие симметрии для дифференциальных уравнений целого порядка известны достаточно давно [23–25] и к их построению развит целый ряд подходов [26–28]. Для дробно-дифференциальных уравнений нелокальные симметрии представляются естественными в силу нелокальности самих дробно-дифференциальных операторов. Однако в настоящее время известны лишь отдельные примеры построения таких симметрий [11, 29, 30].

Для рассматриваемых в работе нелокальных уравнений с малым параметром процедура нахождения определенного вида нелокальных симметрий оказывается несколько проще, чем для исходных дробно-дифференциальных уравнений. Это связано с тем, что рассматриваемые уравнения являются нелокальными только в первом порядке по ε и нелокальная переменная определена явно в виде интегро-дифференциального слагаемого $D_t^n(Lu)$. В результате нелокальные симметрии могут быть найдены аналогично высшим симметриям при условии, что координаты инфинитезимального оператора в ε-порядке будут дополнительно зависеть от нелокальных переменных.

Известно [2], что инфинитезимальный оператор (18) может быть записан в каноническом виде в форме оператора Ли—Беклунда:

$$Y = (\omega_{(0)} + \varepsilon\omega_{(1)})\frac{\partial}{\partial u}, \quad \omega_{(j)} = \eta_{(j)} - \tau_{(j)}u_t - \xi^i_{(j)}u_i, \quad j = 0, 1.$$

Если дополнительно предположить зависимость координаты $\omega_{(1)}$ от нелокальной переменной Lu и ее производных, то такая координата может быть найдена из ε-части определяющего уравнения. Алгоритм нахождения приближенных симметрий при этом не изменяется, происходит только увеличение размерности пространства независимых переменных. При этом продолжение оператора Y на любую переменную вида Mu, где M — линейный оператор (дифференциальный, интегральный или интегро-дифференциальный) имеет вид

$$\tilde{Y} = Y + \zeta_{Mu}\frac{\partial}{\partial(Mu)}, \quad \zeta_{Mu} = M(\omega_{(0)} + \varepsilon\omega_{(1)}).$$

Проиллюстрируем описанный подход простым примером.

Пример. Рассмотрим линейное уравнение субдиффузии с полной памятью

$${}_{-\infty}D_t^{\alpha}u = u_{xx}, \quad \alpha \in (0,1).$$

При $\alpha = 1 - \varepsilon$ с точностью $o(\varepsilon)$ оно приближается уравнением

$$(1 + \varepsilon\gamma)u_t + \varepsilon\frac{\partial^2}{\partial t^2}Lu = u_{xx}. \tag{24}$$

Хорошо известно [1], что невозмущенное уравнение $u_t = u_{xx}$ обладает симметрией

$$X_{(0)} = -2t\frac{\partial}{\partial x} + xu\frac{\partial}{\partial u}. \tag{25}$$

С помощью алгоритма, описанного в предыдущем разделе, можно показать, что данная симметрия не наследуется уравнением (24) в виде приближенной точечной симметрии.

В канонической форме оператор $X_{(0)}$ имеет вид

$$Y_{(0)} = (xu + 2tu_x)\frac{\partial}{\partial u},$$

а координата его продолжения на нелокальную переменную $D_t^2(Lu)$ есть

$$\zeta_{D_t^2(Lu)} = D_t^2[xLu + 2L(tu_x)].$$

Определяющее уравнение в нулевом приближении в силу уравнения (24) обращается в нуль, а в ε-приближении принимает вид

$$D_t(\omega_{(1)}) - D_x^2(\omega_{(1)}) = -2\gamma u_x + 2tD_t^2(Lu_x) - 2D_t^2L(tu_x).$$

Так как нижний передел интегрирования в операторе L равен $-\infty$, справедливо представление

$$D_t^2L(tu_x) = D_t(Lu_x) + tD_t^2(Lu_x) - u_x.$$

В результате приходим к уравнению

$$D_t(\omega_{(1)}) - D_x^2(\omega_{(1)}) = 2(1-\gamma)u_x - 2D_t(Lu_x),$$

которое должно выполняться в силу уравнения $u_t = u_{xx}$. В результате находим

$$\omega_{(1)} = 2(1-\gamma)tu_x - 2tD_t(Lu_x).$$

Таким образом, для уравнения (24) найдена приближенная нелокальная симметрия

$$Y = \{xu + 2tu_x + \varepsilon[2(1-\gamma)tu_x - 2tD_t(Lu_x)]\}\frac{\partial}{\partial u}.$$

Данная симметрия может быть представлена и в классическом виде как

$$X = -2[1 + (1-\gamma)\varepsilon]t\frac{\partial}{\partial x} + [xu - 2\varepsilon t D_t(Lu_x)]\frac{\partial}{\partial u}.$$

Тем самым показано, что точечная симметрия (25) классического уравнения диффузии (или теплопроводности) $u_t = u_{xx}$ нелокально наследуется возмущенным уравнением (24).

Заключение. Предложен новый алгоритм нахождения приближенных симметрий для дробно-дифференциальных уравнений, основанный на разложении дробных производных в ряд по малому параметру, выделяемому из порядка дробного дифференцирования. Принципиальным его отличием от алгоритма, использованного ранее в работах [10, 15], является применение разложения на основе интегро-дифференциального оператора с логарифмическим ядром. Преимущества нового алгоритма заключаются в более низких требованиях к гладкости решения дробно-дифференциального уравнения, в возможности расчета приближенных симметрий для уравнений с дробными производными с бесконечными пределами интегрирования, а также в возможности построения нелокальных симметрий определенного вида. Эффективность алгоритма проиллюстрирована на нелинейном дробно-дифференциальном уравнении фильтрации субдиффузионного типа. Знание приближенной алгебры симметрий дробно-дифференциальных уравнений открывает возможность построения для них новых приближенно инвариантных решений и приближенных законов сохранения.

Конкурирующие интересы. Авторы заявляют об отсутствии конкурирующих интересов.

Авторский вклад и ответственность. Все авторы принимали участие в получении основных результатов статьи и в написании рукописи. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Исследование выполнялось без финансирования.

Библиографический список

1. Овсянников Л. В. *Групповой анализ дифференциальных уравнений.* М.: Наука, 1978. 400 с.
2. Ибрагимов Н.Х. *Группы преобразований в математической физике.* М.: Наука, 1983. 280 с.
3. Grigoriev Yu. N., Ibragimov N. H., Kovalev V. F., Meleshko S. V. *Symmetries of Integro-Differential Equations. With Applications in Mechanics and Plasma Physics* / Lecture Notes in Physics. vol. 806. Dordrecht: Springer, 2010. xiii+305 pp. DOI: https://doi.org/10.1007/978-90-481-3797-8.
4. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения.* Минск: Наука и техника, 1987. 688 с.
5. Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations* / North-Holland Mathematics Studies. vol. 204. Amsterdam: Elsevier, 2006. xv+523 pp. DOI: https://doi.org/10.1016/s0304-0208(06)x8001-5.
6. Учайкин В. В. *Метод дробных производных.* Ульяновск: Артишок, 2008. 512 с.
7. Gazizov R. K., Kasatkin A. A., Lukashchuk S. Yu. Symmetries and group invariant solutions of fractional ordinary differential equations / *Handbook of Fractional Calculus with*

Applications. vol. 2, Fractional Differential Equations; eds. A. Kochubei, Yu. Luchko. Berlin: De Gruyter, 2019. pp. 65–90. DOI: https://doi.org/10.1515/9783110571660-004.

8. Lukashchuk S. Yu. On the property of linear autonomy for symmetries of fractional differential equations and systems // *Mathematics*, 2022. vol. 10, no. 13, 2319. EDN: WBYZVC. DOI: https://doi.org/10.3390/math10132319.
9. Hashemi M. S., Baleanu D. *Lie Symmetry Analysis of Fractional Differential Equation*. Boca Raton: CRC Press, 2020. xiii+208 pp. DOI: https://doi.org/10.1201/9781003008552.
10. Gazizov R. K., Lukashchuk S. Yu. Approximations of fractional differential equations and approximate symmetries // *IFAC-PapersOnLine*, 2017. vol. 50, no. 1. pp. 14022–14027. EDN: XYGJKP. DOI: https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2017.08.2426.
11. Gazizov R. K., Lukashchuk S. Yu. Higher-order symmetries of a time-fractional anomalous diffusion equation // *Mathematics*, 2021. vol. 9, no. 3, 216. EDN: VEHQHB. DOI: https://doi.org/10.3390/math9030216.
12. Байков В. А., Газизов Р. К., Ибрагимов Н. Х. Приближенные симметрии // *Матем. сб.*, 1988. Т. 136(178), № 4(8). С. 435–450.
13. Байков В. А., Газизов Р. К., Ибрагимов Н. Х. Методы возмущений в групповом анализе / Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Нов. достиж., Т. 34. М.: ВИНИТИ, 1989. С. 85–147.
14. Ibragimov N. H. *Transformation groups and Lie algebras*. Hackensack: World Scientific, 2013. x+185 pp. DOI: https://doi.org/10.1142/8763.
15. Лукащук С. Ю. Групповая классификация одного нелинейного приближенного уравнения субдиффузии // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2016. Т. 20, № 4. С. 603–619. EDN: YHPUVH. DOI: https://doi.org/10.14498/vsgtu1520.
16. Лукащук В. О., Гаврюшина Л. О. Приближенные симметрии и законы сохранения дробно-дифференциального обобщения уравнения Бюргерса // *Математика и математическое моделирование*, 2019. № 5. С. 1–14. EDN: LCDIJL. DOI: https://doi.org/10.24108/mathm.0519.0000197.
17. Lashkarian E., Motamednezhad A., Hejazi S. R. Invariance properties and conservation laws of perturbed fractional wave equation // *Eur. Phys. J. Plus*, 2021. vol. 136, 615. DOI: https://doi.org/10.1140/epjp/s13360-021-01595-6.
18. Lashkarian E., Motamednezhad A., Hejazi S. R. Group analysis, invariance results, exact solutions and conservation laws of the perturbed fractional Boussinesq equation // *Int. J. Geom. Methods Mod. Phys.*, 2023. vol. 20, no. 1, 2350013. DOI: https://doi.org/10.1142/S0219887823500135.
19. Nadjafikhah M., Mirala M., Chaichi M. Approximate symmetries and conservation laws of forced fractional oscillator // *Int. J. Nonlinear Anal. Appl.*, 2023. vol. 14, no. 2. pp. 195–205. DOI: https://doi.org/10.22075/ijnaa.2022.25979.3178.
20. Tarasov V. E., Zaslavsky G. M. Dynamics with low-level fractionality // *Physica A*, 2006. vol. 368, no. 2. pp. 399–415. DOI: https://doi.org/10.1016/j.physa.2005.12.015.
21. Tofighi A., Golestani A. A perturbative study of fractional relaxation phenomena // *Physica A*, 2008. vol. 387, no. 8–9. pp. 1807–1817. DOI: https://doi.org/10.1016/j.physa.2007.11.046.
22. Tofighi A. An especial fractional oscillator // *Int. J. Stat. Mech.*, 2013. vol. 2013, 175273. DOI: https://doi.org/10.1155/2013/175273.
23. Виноградов А. М., Красильщик И. С. Один метод вычисления высших симметрий нелинейных эволюционных уравнений и нелокальные симметрии // *Докл. АН СССР*, 1980. Т. 253, № 6. С. 1289–1293.
24. Bluman G. W., Reid G. J., Kumei S. New classes of symmetries of partial differential equations // *J. Math. Phys.*, 1988. vol. 29, no. 4. pp. 806–811. DOI: https://doi.org/10.1063/1.527974.
25. Leach P.G.L., Andriopoulos K. Nonlocal symmetries past, present and future // *Appl. Anal. Discrete Math.*, 2007. vol. 1, no. 1. pp. 150–171.

26. Ахатов И. Ш., Газизов Р. К., Ибрагимов Н. Х. Нелокальные симметрии. Эвристический подход / Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Нов. достиж., Т. 34. М.: ВИНИТИ, 1989. С. 3–83.
27. Bluman G. W., Cheviakov A. F., Anco S. C. *Applications of Symmetry Methods to Partial Differential Equations* / Applied Mathematical Sciences. New York: Springer, 2010. xix+398 pp. DOI: https://doi.org/10.1007/978-0-387-68028-6.
28. *Симметрии и законы сохранения уравнений математической физики* / ред. А. М. Виноградов, И. С. Красильщик. М.: Факториал, 1997. 464 с.
29. Газизов Р. К., Касаткин А. А., Лукащук С. Ю. Уравнения с производными дробного порядка: замены переменных и нелокальные симметрии // *Уфимск. матем. журн.*, 2012. Т. 4, № 4. С. 54–68. EDN: OILYOP.
30. Ludu A. Nonlocal symmetries for time-dependent order differential equations // *Symmetry*, 2018. vol. 10, no. 12, 771. DOI: https://doi.org/10.3390/sym10120771.

Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2024, vol. 28, no. 2, pp. 247–266
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu2078

MSC: 35R11, 35B20, 70G65

On the calculation of approximate symmetries of fractional differential equations

V. O. Lukashchuk, S. Yu. Lukashchuk

Ufa University of Science and Technology,
32, Zaki Validi st., Ufa, 450076, Russian Federation.

Abstract

A new algorithm for finding approximate symmetries for fractional differential equations with the Riemann–Liouville and Gerasimov–Caputo fractional derivatives, the order of which is close to an integer, is proposed. The algorithm is based on the expansion of the fractional derivative into a series with respect to a small parameter isolated from the order of fractional differentiation. In the first-order, such an expansion contains a nonlocal integro-differential operator with a logarithmic kernel.

As a result, the original fractional differential equation is approximated by an integro-differential equation with a small parameter for which approximate symmetries can be found. A theorem is proved about the form of prolongation of one-parameter point transformations group to a new variable represented by a nonlocal operator included in the expansion of the fractional derivative. Knowing such a prolongation allows us to apply an approximate invariance criterion to the equation under consideration.

The proposed algorithm is illustrated by the problem of finding approximate symmetries for a nonlinear fractional filtration equation of subdiffusion type. It is shown that the dimension of approximate symmetries algebra for such an equation is significantly larger than the dimension of the algebra of exact symmetries. This fact opens the possibility of constructing a large number of approximately invariant solutions. Also, it is shown that the algorithm makes it possible to find nonlocal approximate symmetries of a certain type. This possibility is illustrated on a linear fractional differential subdiffusion equation.

Differential Equations and Mathematical Physics
Research Article

Please cite this article in press as:
Lukashchuk V. O., Lukashchuk S. Yu. On the calculation of approximate symmetries of fractional differential equations, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2024, vol. 28, no. 2, pp. 247–266. EDN: CXTSHY. DOI: 10.14498/vsgtu2078 (In Russian).

Authors' Details:
Veronika O. Lukashchuk https://orcid.org/0000-0002-3082-1446
Cand. Phys. & Math. Sci.; Associate Professor; Dept. of High Performance Computing Technologies and Systems; e-mail: voluks@gmail.com
Stanislav Yu. Lukashchuk https://orcid.org/0000-0001-9209-5155
Dr. Phys. & Math. Sci., Associate Professor; Professor; Dept. of High Performance Computing Technologies and Systems; e-mail: lsu@ugatu.su

Keywords: fractional differential equation, small parameter, approximate transformation group, approximate prolonfation formula, approximate symmetry, nonlocal symmetry.

Received: 23rd November, 2023 / Revised: 11th February, 2024 / Accepted: 26th April, 2024 / First online: 8th October, 2024

Competing interests. The authors declare that there are no competing interests.

Authors' contributions and responsibilities. All authors contributed to obtaining the main results of the article and to writing the manuscript. The authors bear full responsibility for submitting the final manuscript for publication. The final version of the manuscript has been approved by all authors.

Funding. The study was conducted without funding.

References

1. Ovsyannikov L. V. *Group analysis of differential equations*. New York, Academic Press, 1982, xvi+416 pp.
2. Ibragimov N. H. *Transformation Groups Applied to Mathematical Physics*, Mathematics and Its Applications (Soviet Series), vol. 3. Dordrecht, D. Reidel Publ., 1985, xv+394 pp.
3. Grigoriev Yu. N., Ibragimov N. H., Kovalev V. F., Meleshko S. V. *Symmetries of Integro-Differential Equations. With Applications in Mechanics and Plasma Physics*, Lecture Notes in Physics, vol. 806. Dordrecht, Springer, 2010, xiii+305 pp. DOI: https://doi.org/10.1007/978-90-481-3797-8.
4. Samko S. G., Kilbas A. A., Marichev O. I. *Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications*. New York, Gordon & Breach Sci. Publishers, 1993, xxxvi+976 pp.
5. Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, North-Holland Mathematics Studies, vol. 204. Amsterdam, Elsevier, 2006, xv+523 pp. DOI: https://doi.org/10.1016/s0304-0208(06)x8001-5.
6. Uchaikin V. V. *Metod drobnykh proizvodnykh* [Method of Fractional Derivatives]. Ulyanovsk, Artishok, 2008, 512 pp. (In Russian)
7. Gazizov R. K., Kasatkin A. A., Lukashchuk S. Yu. Symmetries and group invariant solutions of fractional ordinary differential equations, In: *Handbook of Fractional Calculus with Applications*, vol. 2, Fractional Differential Equations; eds. A. Kochubei, Yu. Luchko. Berlin, De Gruyter, 2019, pp. 65–90. DOI: https://doi.org/10.1515/9783110571660-004.
8. Lukashchuk S. Yu. On the property of linear autonomy for symmetries of fractional differential equations and systems, *Mathematics*, 2022, vol. 10, no. 13, 2319. EDN: WBYZVC. DOI: https://doi.org/10.3390/math10132319.
9. Hashemi M. S., Baleanu D. *Lie Symmetry Analysis of Fractional Differential Equation*. Boca Raton, CRC Press, 2020, xiii+208 pp. DOI: https://doi.org/10.1201/9781003008552.
10. Gazizov R. K., Lukashchuk S. Yu. Approximations of fractional differential equations and approximate symmetries, *IFAC-PapersOnLine*, 2017, vol. 50, no. 1, pp. 14022–14027. EDN: XYGJKP. DOI: https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2017.08.2426.
11. Gazizov R. K., Lukashchuk S. Yu. Higher-order symmetries of a time-fractional anomalous diffusion equation, *Mathematics*, 2021, vol. 9, no. 3, 216. EDN: VEHQHB. DOI: https://doi.org/10.3390/math9030216.
12. Baikov V. A., Gazizov R. K., Ibragimov N. Kh. Approximate symmetries, *Math. USSR-Sb.*, 1989, vol. 64, no. 2, pp. 427–441. DOI: https://doi.org/10.1070/sm1989v064n02abeh003318.
13. Baikov V. A., Gazizov R. K., Ibragimov N. H. Perturbation methods in group analysis, *J. Soviet Math.*, 1991, vol. 55, no. 1, pp. 1450–1490. DOI: https://doi.org/10.1007/BF01097534.
14. Ibragimov N. H. *Transformation groups and Lie algebras*. Hackensack, World Scientific, 2013, x+185 pp. DOI: https://doi.org/10.1142/8763.

15. Lukashchuk S. Yu An approximate group classification of a perturbed subdiffusion equation, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2016, vol. 20, no. 4, pp. 603–619 (In Russian). EDN: YHPUVH. DOI: https://doi.org/10.14498/vsgtu1520.
16. Lukashchuk V. O., Gavryushina L. O. Approximate Symmetries and Conservation Laws of Fractional Differential Generalization of the Burgers Equation, *Math. Math. Model.*, 2019, no. 5, pp. 1–14 (In Russian). EDN: LCDIJL. DOI: https://doi.org/10.24108/mathm.0519.0000197.
17. Lashkarian E., Motamednezhad A., Hejazi S. R. Invariance properties and conservation laws of perturbed fractional wave equation, *Eur. Phys. J. Plus*, 2021, vol. 136, 615. DOI: https://doi.org/10.1140/epjp/s13360-021-01595-6.
18. Lashkarian E., Motamednezhad A., Hejazi S. R. Group analysis, invariance results, exact solutions and conservation laws of the perturbed fractional Boussinesq equation, *Int. J. Geom. Methods Mod. Phys.*, 2023, vol. 20, no. 1, 2350013. DOI: https://doi.org/10.1142/S0219887823500135.
19. Nadjafikhah M., Mirala M., Chaichi M. Approximate symmetries and conservation laws of forced fractional oscillator, *Int. J. Nonlinear Anal. Appl.*, 2023, vol. 14, no. 2, pp. 195–205. DOI: https://doi.org/10.22075/ijnaa.2022.25979.3178.
20. Tarasov V. E., Zaslavsky G. M. Dynamics with low-level fractionality, *Physica A*, 2006, vol. 368, no. 2, pp. 399–415. DOI: https://doi.org/10.1016/j.physa.2005.12.015.
21. Tofighi A., Golestani A. A perturbative study of fractional relaxation phenomena, *Physica A*, 2008, vol. 387, no. 8–9, pp. 1807–1817. DOI: https://doi.org/10.1016/j.physa.2007.11.046.
22. Tofighi A. An especial fractional oscillator, *Int. J. Stat. Mech.*, 2013, vol. 2013, 175273. DOI: https://doi.org/10.1155/2013/175273.
23. Vinogradov A. M., Krasil'shchik I. S. A method of computing higher symmetries of nonlinear evolution equations, and nonlocal symmetries, *Soviet Math. Dokl.*, 1980, vol. 22, no. 1, pp. 235–239.
24. Bluman G. W., Reid G. J., Kumei S. New classes of symmetries of partial differential equations, *J. Math. Phys.*, 1988, vol. 29, no. 4, pp. 806–811. DOI: https://doi.org/10.1063/1.527974.
25. Leach P.G.L., Andriopoulos K. Nonlocal symmetries past, present and future, *Appl. Anal. Discrete Math.*, 2007, vol. 1, no. 1, pp. 150–171.
26. Akhatov I. Sh., Gazizov R. K., Ibragimov N. Kh. Nonlocal symmetries. Heuristic approach, *J. Soviet Math.*, 1991, vol. 55, no. 1, pp. 1401–1450. DOI: https://doi.org/10.1007/BF01097533.
27. Bluman G. W., Cheviakov A. F., Anco S. C. *Applications of Symmetry Methods to Partial Differential Equations*, Applied Mathematical Sciences. New York, Springer, 2010, xix+398 pp. DOI: https://doi.org/10.1007/978-0-387-68028-6.
28. *Simmetrii i zakony sokhraneniia uravnenii matematicheskoi fiziki* [Symmetries and Conservation Laws of Equations of Mathematical Physics], eds. A. M. Vinogradov, I. S. Krasil'shchik. Moscow, Factorial, 1997, 464 pp. (In Russian)
29. Gazizov R. K., Kasatkin A. A., Lukashchuk S. Yu. Fractional differential equations: Change of variables and nonlocal symmetries, *Ufa Math. J.*, 2012, vol. 4, no. 4, pp. 54–67.
30. Ludu A. Nonlocal symmetries for time-dependent order differential equations, *Symmetry*, 2018, vol. 10, no. 12, 771. DOI: https://doi.org/10.3390/sym10120771.