



УДК 539.4

## Уточненная модель термовязкоупругопластического динамического деформирования армированных гибких пологих оболочек

А. П. Янковский

Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН,  
Россия, 630090, Новосибирск, ул. Институтская, 4/1.

### Аннотация

Сформулирована задача термовязкоупругопластического деформирования армированных пологих оболочек при динамическом нагружении. При этом использована уточненная теория их изгиба, простейшим вариантом которой является теория Амбарцумяна. Геометрическая нелинейность учитывается в приближении Кармана. Неупругое поведение материалов фаз композиции описывается уравнениями теории пластического течения; вязкоупругое их деформирование описывается соотношениями модели Максвелла–Больцмана. Температура в трансверсальном направлении аппроксимирована полиномами высоких порядков. Численное интегрирование связанной нелинейной термомеханической задачи осуществляется с использованием явной схемы шагов по времени. Исследовано вязкоупругопластическое изгибающее поведение цилиндрической панели из стеклопластика с ортогональной 2D-структурой армирования. Конструкция кратковременно нагружается в поперечном направлении давлением высокой интенсивности. Проведен сравнительный анализ расчетов, выполненных с учетом и без учета температурного отклика в полой оболочке. Дополнительно исследованы случаи предварительного нагрева панели со стороны одной из лицевых поверхностей. Показано, что для расчета термовязкоупругопластического поведения стеклопластиковых искривленных панелей следует применять уточненную теорию изгиба, а не традиционно используемую теорию Амбарцумяна, которая существенно искажает форму расчетного остаточного прогиба и поля остаточных деформаций компонентов композиции. Продемонстрировано, что учет температурного отклика в

### Механика деформируемого твердого тела Научная статья

© Коллектив авторов, 2024

© СамГТУ, 2024 (составление, дизайн, макет)

 Контент публикуется на условиях лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru) (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

### Образец для цитирования

Янковский А. П. Уточненная модель термовязкоупругопластического динамического деформирования армированных гибких пологих оболочек // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2024. Т. 28, № 3. С. 562–585. EDN: LBASMU. DOI: 10.14498/vsgtu2079.

### Сведения об авторе

Андрей Петрович Янковский  <https://orcid.org/0000-0002-2602-8357>

доктор физико-математических наук; ведущий научный сотрудник; лаб. физики быстропротекающих процессов; e-mail: [yankovsky\\_ap@itam.nsc.ru](mailto:yankovsky_ap@itam.nsc.ru)

пологой армированной оболочке может привести не только к количественно, но и качественно неверному представлению о расчетной форме ее остаточного прогиба. Наличие предварительного нагрева стеклопластиковой панели приводит к заметному изменению ее остаточного прогиба. При этом важную роль играет то обстоятельство, со стороны какой именно лицевой поверхности осуществляется дополнительный нагрев или охлаждение тонкостенной конструкции.

**Ключевые слова:** пологие оболочки, геометрическая нелинейность, армирование волокнами, связанная термовязкоупругопластичность, уточненная теория изгиба, неупругая динамика, остаточное состояние, явный метод шагов по времени.

Получение: 19 января 2024 г. / Исправление: 12 сентября 2024 г. /

Принятие: 21 октября 2024 г. / Публикация онлайн: 29 октября 2024 г.

**Введение.** Изделия из композиционных материалов (КМ) часто подвергаются интенсивному термосиловому нагружению [1–8], при котором материалы фаз композиции могут деформироваться пластически [1–3, 5–7, 9, 10]. Следовательно, актуальна проблема математического моделирования неупругого деформирования анизотропных и композитных тонкостенных элементов конструкций, которая на данный момент времени находится в стадии становления [5–7, 9–24]. Так, в работе [22] была разработана структурная модель неизо-термического вязкоупругопластического деформирования многонаправленно армированного материала и проведены соответствующие расчеты неупругой динамики гибких КМ-пластин, по толщине которых температурное поле аппроксимировалось традиционно полиномом второго порядка. Однако в [23, 24] на примерах изгибного динамического поведения армированных пластин и пологих оболочек было показано, что для более точного определения теплового отклика в таких тонкостенных гибких КМ-конструкциях температуру в поперечном направлении нужно аппроксимировать полиномами 6–7-го порядков.

Для моделирования волновых процессов в динамически деформируемых тонкостенных элементах КМ-конструкций и учета их ослабленного сопротивления поперечным сдвигам традиционно используют простейшие неклассические теории Тимошенко—Рейсснера [5, 7, 16, 25–27], Амбарцумяна [22, 24, 28] и Редди—Немировского [29, 30], а также теории более высоких порядков [5, 16, 23, 31, 32], как правило, базирующиеся на гипотезе ломаной линии [5, 16, 31, 32]. В работе [23] было показано, что термоупругопластическую динамику армированных пологих оболочек следует описывать более точными соотношениями изгиба, простейшим вариантом которых является теория Амбарцумяна. Однако в [23] не учитывались вязкие свойства компонентов композиции при их упругом деформировании, поэтому разработанная в [23] теория не позволяет определять в рамках уточненной теории изгиба остаточные прогибы и остаточные деформированные состояния фаз композиции после прекращения осцилляций таких КМ-конструкций.

Нелинейные задачи динамики тонкостенных элементов, как правило, интегрируют численно с использованием явных [5, 22–24] или неявных [6, 33] схем.

На основании вышеизложенного в данной работе моделируется неизотермическая вязкоупругопластическая динамика гибких, многонправленно армированных пологих оболочек при использовании уточненной теории их изгиба [23] и аппроксимации температуры в поперечном направлении полиномами высоких порядков [23, 24]. Численное решение этой связанной нелинейной термомеханической задачи строится с применением явной пошаговой схемы [5, 22–24].

**1. Постановка начально-краевой задачи и метод ее решения.** Рассматривается гибкая пологая оболочка толщиной  $2h$ . Ортогональная система координат  $x_i$  введена так, что срединная поверхность конструкции — отсчетная ( $|x_3| \leq h$ ); координатные линии  $x_1, x_2$  — линии главной кривизны поверхности  $x_3 = 0$  (рис. 1, на котором искривленность оболочки в силу ее малости не изображена). Панель усилена  $N$  семействами непрерывных волокон с плотностями армирования  $\omega_k$  ( $1 \leq k \leq N$ ). По толщине конструкции структура перекрестного армирования однородна и в общем случае может быть пространственной [4].

С каждым  $k$ -м семейством арматуры связана локальная ортогональная система координат  $x_i^{(k)}$ , в которой ось  $x_1^{(k)}$  направлена вдоль траектории волокна, а ее ориентация в пространстве  $Ox_1x_2x_3$  задается углами сферической системы координат  $\theta_k, \varphi_k$  (рис. 2). Направляющие косинусы  $l_{ij}^{(k)}$  между осями  $x_i^{(k)}$  и  $x_j$  ( $i, j = \overline{1, 3}, 1 \leq k \leq N$ ) вычисляются по формулам [23]:

$$\begin{aligned} l_{11}^{(k)} &= \sin \theta_k \cos \varphi_k, & l_{12}^{(k)} &= \sin \theta_k \sin \varphi_k, & l_{13}^{(k)} &= \cos \theta_k, \\ l_{21}^{(k)} &= -\sin \varphi_k, & l_{22}^{(k)} &= \cos \varphi_k, & l_{23}^{(k)} &= 0, \\ l_{31}^{(k)} &= -\cos \theta_k \cos \varphi_k, & l_{32}^{(k)} &= -\cos \theta_k \sin \varphi_k, & l_{33}^{(k)} &= \sin \theta_k, \quad 1 \leq k \leq N. \end{aligned} \quad (1)$$

Распределенными касательными напряжениями на лицевых поверхностях КМ-конструкции традиционно пренебрегаем [5–7, 16, 22–32]. В случае про-

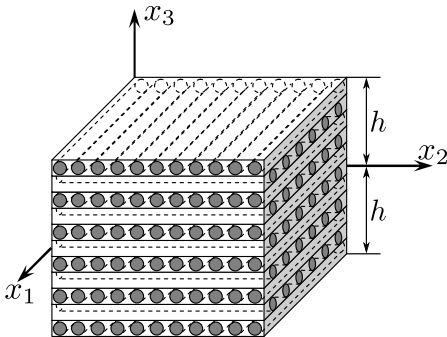


Рис. 1. Элемент пологой оболочки с 2D-структурой армирования [Figure 1. Element of a shallow shell with a 2D reinforcement structure]

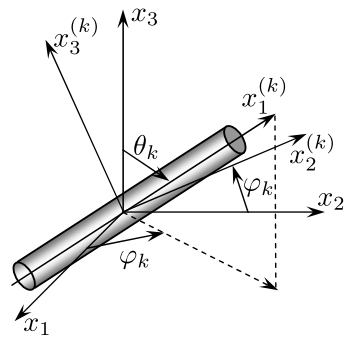


Рис. 2. Взаимная ориентация глобальной и локальной (связанной с волокном  $k$ -го семейства) систем координат [Figure 2. The mutual orientation of the global and local (associated with the  $k$ -th family of fibers) coordinate systems]

пространственной структуры армирования предполагаем: если арматура некоторого  $k$ -го семейства наклонна ( $0 < \theta_k < \pi/2$ ; см. рис. 2 и равенства (1)), то обязательно имеется другое  $m$ -е семейство наклонных волокон, изготовленных из того же материала, параметры армирования которого таковы:  $\theta_m = \pi - \theta_k$ ,  $\varphi_m = \varphi_k$  и  $\omega_m = \omega_k$  ( $1 \leq k, m \leq N$ ,  $m \neq k$ ). Структуры с таким пространственным армированием часто реализуются на практике [4]. Плоско-перекрестные структуры армирования (см. рис. 1) автоматически удовлетворяют этому требованию (в этом случае следует формально принять  $\omega_m = \omega_k \equiv 0$ ).

При выполнении приведенных выше условий перемещения точек гибкой искривленной панели  $U_i$  и осредненные деформации ее композиции  $\varepsilon_{ij}$  в рамках уточненной теории изгиба аппроксимируются так (геометрическая нелинейность моделируется в приближении Кармана) [23]:

$$U_i(t, \mathbf{r}) = u_i(t, \mathbf{x}) - x_3 \partial_i w(t, \mathbf{x}) + 2 \sum_{m=0}^M \frac{x_3^{m+1}}{h^2} \left( \frac{h^2}{m+1} - \frac{x_3^2}{m+3} \right) \bar{\varepsilon}_{i3}^{(m)}(t, \mathbf{x}), \quad i = 1, 2, \quad (2)$$

$$U_3(t, \mathbf{r}) = w(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2), \quad \mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3);$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij}(t, \mathbf{r}) = & \frac{1}{2}(\partial_i u_j + \partial_j u_i) - x_3 \partial_i \partial_j w + \\ & + \sum_{m=0}^M \frac{x_3^{m+1}}{h^2} \left( \frac{h^2}{m+1} - \frac{x_3^2}{m+3} \right) (\partial_i \bar{\varepsilon}_{j3}^{(m)} + \partial_j \bar{\varepsilon}_{i3}^{(m)}) + \\ & + \frac{\delta_{ij} w}{R_i} + \frac{1}{2} \partial_i w \partial_j w, \quad i, j = 1, 2, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\varepsilon_{i3}(t, \mathbf{r}) = \frac{h^2 - x_3^2}{h^2} \sum_{m=0}^M x_3^m \bar{\varepsilon}_{i3}^{(m)}(t, \mathbf{x}), \quad i = 1, 2, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad |x_3| \leq h, \quad t \geq t_0,$$

где  $u_i$  — тангенциальные перемещения точек срединной поверхности ( $x_3 = 0$ ) в направлениях  $x_i$ ;  $w$  — прогиб;  $R_i$  — главные радиусы кривизны отсчетной поверхности;  $t_0$  — начальный момент времени  $t$ ;  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера;  $\partial_i$  — частная производная по переменной  $x_i$ ;  $\Omega$  — область, занимаемая конструкцией в плане;  $M$  — целое число, задающее количество слагаемых в степенных разложениях по переменной  $x_3$ . В случае  $M = 0$  из равенств (2), (3) получаем кинематические соотношения теорий изгиба Амбарцумяна [28] и Редди—Немировского [29, 30]. В выражениях (2) и (3) определению подлежат нестационарные двумерные функции  $w$ ,  $u_i$  и  $\bar{\varepsilon}_{i3}^{(m)}$  ( $i = 1, 2$ ,  $0 \leq m \leq M$ ).

В настоящей работе изучается неупругая динамика искривленной КМ-панели как гибкой тонкостенной механической системы, поэтому нормальное напряжение  $\sigma_{33}(t, \mathbf{r})$  с приемлемой для практических приложений точностью по толщине оболочки можно аппроксимировать формулой [23, 27]:

$$\begin{aligned} \sigma_{33}(t, \mathbf{r}) = & \frac{\sigma_{33}^{(+)}(t, \mathbf{x}) - \sigma_{33}^{(-)}(t, \mathbf{x})}{2h} x_3 + \\ & + \frac{\sigma_{33}^{(+)}(t, \mathbf{x}) + \sigma_{33}^{(-)}(t, \mathbf{x})}{2}, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad |x_3| \leq h, \quad t \geq t_0, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $\sigma_{33}^{(\pm)}(t, \mathbf{x}) \equiv \sigma_{33}(t, \mathbf{x}, \pm h)$  — известные из силовых граничных условий напряжения на нижней (−) и верхней (+) лицевых поверхностях оболочки.

Как уже отмечалось во введении, решение рассматриваемой задачи будем строить, используя явную численную схему [22–24]. Согласно этому искомые функции будем вычислять в дискретные моменты времени  $t_{n+1} = t_n + \Delta$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ), где  $\Delta = \text{const} > 0$  — шаг по времени. Как и в [22], предполагаем, что при  $t = t_{n-1}, t_n$  уже определены следующие функции:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^{(k)}(\mathbf{r}) &\equiv \sigma_{ij}^{(k)}(t_m, \mathbf{r}), & \dot{\sigma}_{ij}^{(k)}(\mathbf{r}) &\equiv \dot{\sigma}_{ij}^{(k)}(t_{n-1}, \mathbf{r}), \\ \Theta(\mathbf{x}) &\equiv \Theta(t_m, \mathbf{x}), & \dot{\Theta}(\mathbf{x}) &\equiv \dot{\Theta}(t_{n-1}, \mathbf{x}), \\ i, j &= \overline{1, 3}, m = n - 1, n, & 0 \leq k \leq N, \mathbf{x} \in \Omega, |\mathbf{x}_3| \leq h, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $\sigma_{ij}^{(k)}$  — напряжения в  $k$ -м компоненте композиции ( $k = 0$  — связующее,  $k \geq 1$  — арматура  $k$ -го семейства);  $\Theta$  — температура КМ-конструкции; точка сверху — частная производная по времени  $t$ . Тогда в текущий момент времени  $t_n$  определяющие соотношения для  $k$ -го материала композиции, связывающие скорости его деформаций  $\dot{\varepsilon}_{ij}^{(k)}$ , скорости напряжений  $\dot{\sigma}_{ij}^{(k)}$  и температуру  $\Theta$ , при учете обозначений, аналогичных (5), можно записать в следующей матричной форме [22]:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}_k = \mathbf{B}_k \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_k + \mathbf{p}_k, \quad 0 \leq k \leq N, \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}_k &= (\sigma_1^{(k)} \sigma_2^{(k)} \sigma_3^{(k)} \sigma_4^{(k)} \sigma_5^{(k)} \sigma_6^{(k)})^\top \equiv (\sigma_{11}^{(k)} \sigma_{22}^{(k)} \sigma_{33}^{(k)} \sigma_{23}^{(k)} \sigma_{31}^{(k)} \sigma_{12}^{(k)})^\top, \\ \boldsymbol{\varepsilon}_k &= (\varepsilon_1^{(k)} \varepsilon_2^{(k)} \varepsilon_3^{(k)} \varepsilon_4^{(k)} \varepsilon_5^{(k)} \varepsilon_6^{(k)})^\top \equiv (\varepsilon_{11}^{(k)} \varepsilon_{22}^{(k)} \varepsilon_{33}^{(k)} 2\varepsilon_{23}^{(k)} 2\varepsilon_{31}^{(k)} 2\varepsilon_{12}^{(k)})^\top; \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_k &\equiv \bar{\mathbf{V}}_k^{-1} (\bar{\mathbf{Z}}_k - \bar{\bar{\mathbf{Z}}}_k), \\ \mathbf{p}_k &\equiv \bar{\mathbf{V}}_k^{-1} \left[ \mathbf{V}_k^{n-1/2} \boldsymbol{\sigma}_k + \frac{2}{\Delta} (\bar{\Theta} - \bar{\Theta}^{n-1/2}) \boldsymbol{\beta}_k \right], \\ \bar{\mathbf{V}}_k &\equiv \mathbf{I} - \frac{\Delta}{2} \mathbf{V}_k; \end{aligned} \quad (8)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_k^{n-1/2} = \boldsymbol{\sigma}_k^{n-1} + \frac{\Delta}{2} \dot{\boldsymbol{\sigma}}_k^{n-1}, \quad \bar{\Theta}^{n-1/2} \equiv \bar{\Theta}^{n-1} + \frac{\Delta}{2} \dot{\bar{\Theta}}^{n-1}, \quad 0 \leq k \leq N; \quad (9)$$

$\mathbf{I}$  — единичная  $6 \times 6$ -матрица;  $\bar{\mathbf{V}}_k^{-1}$  — матрица, обратная  $\bar{\mathbf{V}}_k$ ;  $\bar{\mathbf{Z}}_k = (\bar{z}_{ij}^{(k)})$ ,  $\bar{\bar{\mathbf{Z}}}_k = (\bar{\bar{z}}_{ij}^{(k)})$  и  $\mathbf{V}_k = (v_{ij}^{(k)})$  — симметричные матрицы;  $\boldsymbol{\beta}_k = (\beta_i^{(k)})$  ( $i, j = \overline{1, 6}$ ) — вектор-столбец, ненулевые элементы которых определяются так:

$$\begin{aligned} \bar{z}_{ij}^{(k)} &= 2\delta_{ij} G_k + \bar{\lambda}_k, \quad \bar{z}_{ll}^{(k)} = G_k, \\ v_{ij}^{(k)} &= \frac{1}{3} \left[ \frac{G_k}{\eta_k} \left( 1 - \frac{\gamma_k}{1 + g_k} \right) - \frac{K_k}{\mu_k} \right] - \delta_{ij} \frac{G_k}{\eta_k} \left( 1 - \frac{\gamma_k}{1 + g_k} \right), \\ v_{ll}^{(k)} &= -\frac{G_k}{\eta_k} \left( 1 - \frac{\gamma_k}{1 + g_k} \right), \\ \beta_i^{(k)} &= \frac{\gamma_k \tau_\Theta^{(k)} s_i^{(k)}}{\tau_s^{(k)} (1 + g_k)} - 3\alpha_k K_k, \quad \beta_l^{(k)} = \frac{\gamma^{(k)} \tau_\Theta^{(k)} s_l^{(k)}}{\tau_s^{(k)} (1 + g_k)}, \quad i, j = \overline{1, 3}, l = \overline{4, 6}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bar{z}_{ij}^{(k)} &= \frac{\gamma_k G_k s_i^{(k)} s_j^{(k)}}{\tau_s^{(k)2} (1 + g_k)}, \quad i, j = \overline{1, 6}; \\
 G_k &= \frac{E_k}{2(1 + \nu_k)}, \quad K_k = \frac{E_k}{3(1 - 2\nu_k)}, \\
 \bar{\lambda}_k &= \frac{\nu_k E_k}{(1 + \nu_k)(1 - 2\nu_k)}, \quad g_k = \frac{\bar{G}_k}{G_k}, \\
 \gamma_k &= \begin{cases} 0 & \text{при } T_k < \tau_s^{(k)}(\chi_k, \Theta) \text{ или } T_k = \tau_s^{(k)}(\chi_k, \Theta), W_k \leq 0, \\ 1 & \text{при } T_k = \tau_s^{(k)}(\chi_k, \Theta), W_k > 0, \end{cases} \\
 W_k &\equiv \mathbf{s}_k^\top \dot{\mathbf{e}}_k - \frac{\tau_s^{(k)2}(\chi_k, \Theta)}{\eta_k} - \frac{\tau_s^{(k)}(\chi_k, \Theta) \tau_\Theta^{(k)}(\chi_k, \Theta)}{G_k} \dot{\Theta}, \quad \tau_\Theta^{(k)} \equiv \frac{\partial \tau_s^{(k)}}{\partial \Theta}, \\
 \bar{G}_k &\equiv \frac{\partial \tau_s^{(k)}}{\partial \chi_k}, \quad T_k^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 (s_i^{(k)})^2 + \sum_{i=4}^6 (s_i^{(k)})^2, \quad \chi_k = \int_{t_0}^t \sqrt{2 \sum_{i,j=1}^3 \dot{p}_{ij}^{(k)} \dot{p}_{ij}^{(k)}} dt, \\
 \dot{p}_{ij}^{(k)} &= \frac{s_{ij}^{(k)} W_k}{\tau_s^{(k)2} (1 + g_k)}, \quad s_{ij}^{(k)} = \sigma_{ij}^{(k)} - \frac{\delta_{ij}}{3} \sum_{m=1}^3 \sigma_{mm}^{(k)}, \quad i, j = \overline{1, 3}, \\
 \mathbf{s}_k &= (s_1^{(k)} s_2^{(k)} s_3^{(k)} s_4^{(k)} s_5^{(k)} s_6^{(k)})^\top \equiv (s_{11}^{(k)} s_{22}^{(k)} s_{33}^{(k)} s_{23}^{(k)} s_{31}^{(k)} s_{12}^{(k)})^\top;
 \end{aligned} \tag{10}$$

$E_k = E_k(\Theta)$ ,  $\nu_k = \nu_k(\Theta)$  — модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала  $k$ -й фазы композиции;  $\eta_k = \eta_k(\Theta)$ ,  $\mu_k = \mu_k(\Theta)$  — коэффициенты линейной сдвиговой и объемной вязкости (предполагается: вязкоупругое поведение компонентов композиции описывается соотношениями модели Максвелла—Больцмана; см. (2) в [22]);  $\alpha_k = \alpha_k(\Theta)$  — коэффициент линейного температурного расширения;  $\tau_s^{(k)}(\chi_k, \Theta)$  — предел текучести при чистом сдвиге, который при активном пластическом деформировании равен интенсивности касательных напряжений  $T_k$  и зависит от параметра упрочнения  $\chi_k$  и температуры  $\Theta$ ;  $\dot{p}_{ij}^{(k)}$  — скорости пластических деформаций;  $\gamma_k$  — параметр переключения, задающий при  $\gamma_k = 0$  термовязкоупругое деформирование, нейтральное нагружение или разгрузку, а при  $\gamma_k = 1$  — активное нагружение  $k$ -го материала композиции при его пластическом деформировании; индекс  $\top$  — операция транспонирования. В соотношениях (10) по повторяющемуся индексу  $l$  суммирования нет; в выражении для  $W_k$  скорость температуры  $\dot{\Theta}$  при  $t = t_n$  следует заменить ее конечно-разностным аналогом, полученным на основе формулы трапеций [22]:

$$\dot{\Theta} \approx \frac{n}{\Delta} (\Theta - \Theta^{n-1/2}), \quad n = 1, 2, 3, \dots \tag{11}$$

Согласно формулам (9) и предположениям (5), в момент времени  $t_n$  в соотношениях (8) и (11) уже известны значения функций  $\sigma_k^{n-1/2}$  и  $\Theta^{n-1/2}$ .

Как видно из выражений (10), элементы матриц  $\bar{\mathbf{Z}}_k$ ,  $\mathbf{V}_k$ ,  $\bar{\mathbf{V}}_k$  и вектора  $\beta_k$  (а в случае термочувствительности материалов композиции и матрицы  $\bar{\mathbf{Z}}_k$ ) зависят от решения задачи, поэтому определяющие соотношения (6) при учете (8) и (10) являются нелинейными. Линеаризуем равенства (6), применяя

итерационный процесс, который аналогичен методу переменных параметров упругости [34]. Используя линеаризованные соотношения (6) при учете (8)–(11) и повторяя рассуждения из [22], в рассматриваемый момент времени  $t_n$  на текущей итерации получим линейное определяющее уравнение, записанное в матричной форме и характеризующее неизотермическое вязкоупруго-пластическое поведение КМ:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} \equiv \mathbf{B} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \mathbf{p}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &\equiv \left( \omega_0 \mathbf{B}_0 + \sum_{k=1}^N \omega_k \mathbf{B}_k \mathbf{E}_k \right) \mathbf{H}^{-1}, \quad \mathbf{p} \equiv \mathbf{f} - \mathbf{B} \mathbf{g}, \quad \mathbf{f} \equiv \omega_0 \mathbf{p}_0 + \sum_{k=1}^N \omega_k (\mathbf{p}_k + \mathbf{B}_k \mathbf{r}_k), \\ \mathbf{H} &\equiv \omega_0 \mathbf{I} + \sum_{k=1}^N \omega_k \mathbf{E}_k, \quad \mathbf{g} \equiv \sum_{k=1}^N \omega_k \mathbf{r}_k, \quad \omega_0 \equiv 1 - \sum_{k=1}^N \omega_k, \quad \mathbf{r}_k \equiv \mathbf{D}_k^{-1} \boldsymbol{\varsigma}_k, \quad (13) \\ \mathbf{E}_k &\equiv \mathbf{D}_k^{-1} \mathbf{C}_k, \quad 1 \leq k \leq N; \end{aligned}$$

$\dot{\boldsymbol{\sigma}}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$  — шестикомпонентные векторы-столбцы скоростей усредненных напряжений  $\dot{\sigma}_{ij}$  и деформаций  $\dot{\varepsilon}_{ij}$  в композиции, по структуре аналогичные (7);  $\mathbf{B}, \mathbf{E}_k$  и  $\mathbf{C}_k$  —  $6 \times 6$ -матрицы;  $\mathbf{D}_k^{-1}$  и  $\mathbf{H}^{-1}$  — матрицы, обратные  $6 \times 6$ -матрицам  $\mathbf{D}_k$  и  $\mathbf{H}$ ;  $\mathbf{p}, \mathbf{f}, \mathbf{g}, \mathbf{r}_k$  и  $\boldsymbol{\varsigma}_k$  — шестикомпонентные векторы-столбцы;  $\omega_0$  — относительное объемное содержание связующего в репрезентативной ячейке КМ. Элементы вектора  $\boldsymbol{\varsigma}_k = (\varsigma_i^{(k)})$  и матриц  $\mathbf{C}_k = (c_{ij}^{(k)})$ ,  $\mathbf{D}_k = (d_{ij}^{(k)})$  вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} c_{1j}^{(k)} &= d_{1j}^{(k)} = q_{1j}^{(k)}, \quad c_{ij}^{(k)} = \sum_{l=1}^6 g_{il}^{(k)} b_{lj}^{(0)}, \quad d_{ij}^{(k)} = \sum_{l=1}^6 g_{il}^{(k)} b_{lj}^{(k)}, \\ \varsigma_1^{(k)} &= 0, \quad \varsigma_i^{(k)} = \sum_{l=1}^6 g_{il}^{(k)} (p_l^{(0)} - p_l^{(k)}), \quad i = \overline{2, 6}, \quad j = \overline{1, 6}, \quad 1 \leq k \leq N, \end{aligned} \quad (14)$$

где

$$\begin{aligned} g_{11}^{(k)} &= q_{11}^{(k)} = l_{11}^{(k)} l_{11}^{(k)}, \quad g_{12}^{(k)} = q_{12}^{(k)} = l_{12}^{(k)} l_{12}^{(k)}, \quad \dots, \\ g_{16}^{(k)} &= 2q_{16}^{(k)} = 2l_{12}^{(k)} l_{11}^{(k)}, \quad \dots, \\ 2g_{61}^{(k)} &= q_{61}^{(k)} = 2l_{21}^{(k)} l_{11}^{(k)}, \quad \dots, \\ g_{66}^{(k)} &= q_{66}^{(k)} = l_{11}^{(k)} l_{22}^{(k)} + l_{12}^{(k)} l_{21}^{(k)}, \quad 1 \leq k \leq N; \end{aligned} \quad (15)$$

$b_{lj}^{(k)}$  и  $p_l^{(k)}$  ( $l, j = \overline{1, 6}$ ) — линеаризованные элементы матриц  $\mathbf{B}_k$  и векторов  $\mathbf{p}_k$  ( $0 \leq k \leq N$ ) в равенствах (6); направляющие косинусы  $l_{ij}^{(k)}$  ( $i, j = \overline{1, 3}$ ) определены в (1). Не выписанные в явном виде в (15) элементы  $6 \times 6$ -матриц  $\mathbf{G}_k = (g_{ij}^{(k)})$ ,  $\mathbf{Q}_k = (q_{ij}^{(k)})$  приведены в табл. (21.40), (21.44) в [26]. Эти матрицы соответственно определяют преобразования векторов  $\dot{\boldsymbol{\sigma}}_k$  и  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_k$  (см. (6), (7)) при переходе от глобальной системы  $x_j$  к локальной  $x_i^{(k)}$  (см. рис. 2). Попутно при выводе соотношений (12) и (13) получаются матричные зависимости

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_0 = \mathbf{H}^{-1} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \mathbf{H}^{-1} \mathbf{g}, \quad \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_k = \mathbf{E}_k \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_0 + \mathbf{r}_k, \quad 1 \leq k \leq N, \quad (16)$$

которые позволяют последовательно определить скорости деформаций связующего материала  $\dot{\epsilon}_0$  и армирующих волокон  $k$ -го семейства  $\dot{\epsilon}_k$  через скорости деформаций КМ  $\dot{\epsilon}$ . Используя же (6) и (16), можно через  $\dot{\epsilon}$  выразить и скорости напряжений в компонентах композиции  $\dot{\sigma}_k$  ( $0 \leq k \leq N$ ).

Согласно структуре вектор-столбцов  $\dot{\sigma}$  и  $\dot{\epsilon}$ , из третьего уравнения линеаризованной системы (12) можно определить скорость линейной поперечной деформации:

$$\dot{\epsilon}_{33} = b_{33}^{-1}(\dot{\sigma}_{33} - p_3 - b_{31}\dot{\epsilon}_{11} - b_{32}\dot{\epsilon}_{22} - 2b_{34}\dot{\epsilon}_{23} - 2b_{35}\dot{\epsilon}_{31} - 2b_{36}\dot{\epsilon}_{12}). \quad (17)$$

Здесь  $b_{3i}$  ( $i = \overline{1,6}$ ) и  $p_3$  — элементы матрицы  $\mathbf{B}$  и вектора  $\mathbf{p}$  в определяющем соотношении (12). Значение скорости  $\dot{\sigma}_{33}$  в (17) определяется за счет дифференцирования по времени аппроксимации (4), а скорости деформаций  $\dot{\epsilon}_{ij}$  в правой части (17) — путем дифференцирования по  $t$  кинематических соотношений (3), т. е. в конечном итоге выражаются через искомые функции  $w$ ,  $\dot{w}$ ,  $\dot{u}_i$  и  $\dot{\epsilon}_{i3}^{(m)}$ ,  $i = 1, 2$ ,  $0 \leq m \leq M$ . (В соотношениях (10), (13), (14), (16) и (17) опущен верхний индекс  $n$ , означающий текущий дискретный момент времени  $t_n$ .)

Как и в [22–24], температуру в поперечном направлении оболочки аппроксимируем полиномом порядка  $L$ :

$$\Theta(t, \mathbf{r}) - \Theta^0 = \sum_{l=0}^L \Theta_l(t, \mathbf{x}) x_3^l, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad |x_3| \leq h, \quad t \geq t_0, \quad (18)$$

где  $\Theta_l$  ( $0 \leq l \leq L$ ) — неизвестные двумерные нестационарные функции;  $\Theta^0 = \text{const}$  — температура естественного состояния КМ-конструкции.

К указанным выше соотношениям необходимо присоединить приведенные уравнения динамического равновесия пологой оболочки, соответствующие уточненной теории изгиба, и уравнения теплового баланса, соответствующие разложению (18). (Их конечно-разностные аналоги по времени выписаны ниже.) А также нужно использовать начальные и краевые механические и тепловые граничные условия, соответствующие этим двумерным нестационарным уравнениям [23].

Как уже ранее отмечалось (см. (5)), численное решение сформулированной нелинейной начально-краевой задачи будем строить, используя явную схему по времени. Согласно этому предполагаем, что при  $t = t_m$  кроме значений функций (5) уже определены или заданы значения следующих функций [22–24]:

$$\begin{aligned} \overset{m}{w}(\mathbf{x}) &\equiv w(t_m, \mathbf{x}), \quad \overset{m}{u}_l^{(p)}(\mathbf{x}) \equiv u_l^{(p)}(t_m, \mathbf{x}), \quad \overset{m}{\sigma}_{ij}(\mathbf{r}) \equiv \sigma_{ij}(t_m, \mathbf{r}), \\ \overset{m}{\sigma}_{33}^{(\pm)}(\mathbf{x}) &\equiv \sigma_{33}^{(\pm)}(t_m, \mathbf{x}), \quad \overset{n}{U}(\mathbf{r})(x) \equiv U(\mathbf{r})(t_n, \mathbf{x}), \quad \overset{n}{q}_i(\mathbf{r}) \equiv q_i(t_n, \mathbf{r}), \\ \overset{m}{\Theta}_s(\mathbf{x}) &\equiv \Theta_s(t_m, \mathbf{x}), \quad \overset{n-1}{\dot{\Theta}}_s(\mathbf{x}) \equiv \dot{\Theta}_s(t_{n-1}, \mathbf{x}), \quad \overset{n}{q}_\infty^{(\pm)}(\mathbf{x}) \equiv q_\infty^{(\pm)}(t_n, \mathbf{x}), \\ \overset{m}{\varepsilon}_{ij}^{(k)}(\mathbf{r}) &\equiv \varepsilon_{ij}^{(k)}(t_m, \mathbf{r}), \quad \overset{m}{e}_{ij}^{(k)}(\mathbf{r}) \equiv e_{ij}^{(k)}(t_m, \mathbf{r}), \quad \overset{m}{\chi}_k(\mathbf{r}) \equiv \chi_k(t_m, \mathbf{r}), \\ l &= 1, 2, \quad i, j = \overline{1, 3}, \quad m = n - 1, n, \quad 0 \leq p \leq M + 1, \quad 0 \leq r \leq L - 2, \\ 0 &\leq s \leq L, \quad 0 \leq k \leq N, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad |x_3| \leq h, \end{aligned} \quad (19)$$

где

$$\begin{aligned} u_l^{(p)}(t, \mathbf{x}) &\equiv \int_{-h}^h U_l(t, \mathbf{r}) x_3^p dx_3, \quad U^{(r)}(t, \mathbf{x}) \equiv \int_{-h}^h U(t, \mathbf{r}) x_3^r dx_3, \\ \sigma_{ij}(t, \mathbf{r}) &= \sum_{k=0}^N \omega_k(\mathbf{x}) \sigma_{ij}^{(k)}(t, \mathbf{r}), \quad \varepsilon_{ij}(t, \mathbf{r}) = \sum_{k=0}^N \omega_k(\mathbf{x}) \varepsilon_{ij}^{(k)}(t, \mathbf{r}), \\ i, j &= \overline{1, 3}, \quad l = 1, 2, \quad 0 \leq p \leq M+1, \quad 0 \leq r \leq L-2; \end{aligned} \quad (20)$$

$U$  — удельная внутренняя энергия КМ;  $e_{ij}^{(k)}$  — упругие деформации  $k$ -го материала композиции;  $q_i$  — компоненты усредненного вектора теплового потока в КМ, связанные с  $\text{grad } \Theta$  законом Фурье для армированной среды [22, 24];  $q_{\infty}^{(\pm)}$  — известные тепловые потоки через верхнюю (+) и нижнюю (−) лицевые поверхности конструкции. В выражениях (2), (3) неизвестные функции  $u_i$ ,  $\bar{\varepsilon}_{i3}^{(m)}$  ( $i = 1, 2, 0 \leq m \leq M$ ) связаны с  $\text{grad } w$  и новыми кинематическими переменными  $u_l^{(p)}$  (см. (20)) известными матричными соотношениями [23]. Из предположений (19) при учете (18) следуют два последних предположения (5).

Для интегрирования двумерных уравнений движения пологой КМ-оболочки используем численную схему типа «крест», тогда их конечно-разностные аналоги в рамках уточненной теории изгиба будут иметь вид [23]:

$$\begin{aligned} \frac{2h\rho}{\Delta^2} ({}^{n+1}w - 2{}^nw + {}^{n-1}w) &= \\ &= \sum_{j=1}^2 \partial_j \left( M_{j3}^{(0)} + \sum_{i=1}^2 M_{ji}^{(0)} \partial_i {}^nw \right) - \sum_{i=1}^2 R_i^{-1} M_{ii}^{(0)} + \sigma_{33}^{(+)} - \sigma_{33}^{(-)}, \\ \frac{\rho}{\Delta^2} ({}^{n+1}u_i^{(l)} - 2{}^nu_i^{(l)} + {}^{n-1}u_i^{(l)}) &= \sum_{j=1}^2 \partial_j (M_{ij}^{(l)} - M_{j3}^{(l)} \partial_i {}^nw) - \\ &- h^l [\sigma_{33}^{(+)} - (-1)^l \sigma_{33}^{(-)}] \partial_i {}^nw - l M_{i3}^{(l-1)} + l M_{33}^{(l-1)} \partial_i {}^nw + R_i^{-1} M_{i3}^{(l)}, \\ \mathbf{x} \in \Omega, \quad i &= 1, 2, \quad 0 \leq l \leq M+1, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \end{aligned} \quad (21)$$

где

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{x}) &\equiv \sum_{k=0}^N \rho_k \omega_k(\mathbf{x}), \quad M_{ij}^{(l)}(t, \mathbf{x}) \equiv \int_{-h}^h \sigma_{ij}(t, \mathbf{r}) x_3^l dx_3, \quad i, j = \overline{1, 3}, \\ l M_{33}^{(l-1)}(t, \mathbf{x}) &\equiv l \int_{-h}^h \sigma_{33}(t, \mathbf{r}) x_3^{l-1} dx_3 = \\ &= \frac{h^l}{2} \left[ (\sigma_{33}^{(+)} + \sigma_{33}^{(-)}) (1 - (-1)^l) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{l}{l+1} (\sigma_{33}^{(+)} - \sigma_{33}^{(-)}) (1 + (-1)^l) \right], \quad 0 \leq l \leq M+1; \end{aligned} \quad (22)$$

$\rho_k$  — объемная плотность материала  $k$ -го компонента композиции. По формулам (21) при учете выражений (22) и предположений (19) можно определить значения неизвестных функции  ${}^{n+1}w$  и  $u_i^{(l)}$  в следующий момент времени  $t_{n+1}$ .

Нестационарные двумерные уравнения теплопроводности пологой КМ-оболочки также интегрируются по явной схеме с шагом вперед. Дискретные по времени аналоги этих уравнений имеют вид [23, 24]:

$$\frac{\rho}{\Delta}(U^{(m)} - U^{(m)}) = -\partial_1 Q_1^{(m)} - \partial_2 Q_2^{(m)} - \bar{Q}_3^{(m)} + W^{(m)}, \quad (23)$$

$$\mathbf{x} \in \Omega, \quad 0 \leq m \leq L-2, \quad n = 0, 1, 2, \dots;$$

$$-\sum_{l=0}^L (-1)^l h^{l-1} (l\lambda_{33}^{(-)} + h\alpha^{(-)}) \Theta_l(t, \mathbf{x}) = \alpha^{(-)} (\Theta_\infty^{(-)} - \Theta^0) + q_\infty^{(-)}(t, \mathbf{x}),$$

$$\sum_{l=0}^L h^{l-1} (l\lambda_{33}^{(+)} + h\alpha^{(+)}) \Theta_l(t, \mathbf{x}) = \alpha^{(+)} (\Theta_\infty^{(+)} - \Theta^0) - q_\infty^{(+)}(t, \mathbf{x}), \quad (24)$$

$$\mathbf{x} \in \Omega, \quad t \geq t_0;$$

$$C_0 \sum_{i=0}^L H(i+m) \Theta_i + \frac{C_1}{2} \sum_{i=0}^L \sum_{j=0}^L H(i+j+m) \Theta_i \Theta_j +$$

$$+ \frac{C_2}{3} \sum_{i=0}^L \sum_{j=0}^L \sum_{l=0}^L H(i+j+l+m) \Theta_i \Theta_j \Theta_l = U^{(m)}(t, \mathbf{x}), \quad (25)$$

$$\mathbf{x} \in \Omega, \quad t \geq t_0, \quad 0 \leq m \leq L-2.$$

Здесь

$$H(s) \equiv \frac{h^{s+1}}{s+1} [1 - (-1)^{s+1}], \quad Q_i^{(m)}(t, \mathbf{x}) \equiv \int_{-h}^h q_i(t, \mathbf{r}) x_3^m dx_3, \quad i = \overline{1, 3},$$

$$\bar{Q}_3^{(m)}(t, \mathbf{x}) \equiv \int_{-h}^h \partial_3 q_3(t, \mathbf{r}) x_3^m dx_3 = h^m [q_3^{(+)} - (-1)^m q_3^{(-)}] - m Q_3^{(m-1)}(t, \mathbf{x}), \quad (26)$$

$$W^{(m)}(t, \mathbf{x}) \equiv \int_{-h}^h \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} x_3^m dx_3, \quad C_l(\mathbf{x}) \equiv \frac{1}{\rho} \sum_{k=0}^K c_l^{(k)} \rho_k \omega_k(\mathbf{x}), \quad l = 0, 1, 2,$$

$$\lambda_{33}^{(\pm)} \equiv \lambda_{33}|_{\Theta=\Theta(t, \mathbf{x}, \pm h)}, \quad q_3^{(\pm)} \equiv q_3(t, \mathbf{x}, \pm h) = q_\infty^{(\pm)}(t, \mathbf{x});$$

$\Theta_\infty^{(\pm)}$  — температура окружающей среды со стороны верхней (+) и нижней (−) лицевой поверхности конструкции;  $\alpha^{(\pm)}$  — коэффициент теплоотдачи на той же поверхности;  $\lambda_{33}$  — коэффициент теплопроводности КМ в направлении  $x_3$ , рассчитанный по формулам (51) из [22]. Предполагается, что в случае учета термочувствительности  $k$ -го компонента композиции его удельную теплоемкость  $c_k$  можно аппроксимировать следующей зависимостью от температуры [22–24]:

$$c_k(\Theta - \Theta^0) = c_0^{(k)} + c_1^{(k)} \cdot (\Theta - \Theta^0) + c_2^{(k)} \cdot (\Theta - \Theta^0)^2, \quad 0 \leq k \leq N, \quad (27)$$

где  $c_l^{(k)}$  — известные характеристики материала. Коэффициенты разложения (27) использованы для вычисления величин  $C_l$  ( $l = 0, 1, 2$ ) в равенстве (25) (см. выражения (26)).

Напомним, что равенства (23) — двумерные уравнения теплового баланса, соотношения (24) — граничные условия общего вида на лицевых поверхностях КМ-панели, равенства (25) выражают двумерные функции  $U^{(m)}$  (см.

(20)) через коэффициенты аппроксимации температуры (18) при учете разложения (27).

По формулам (23) при учете (26) и предположений (19) по явной схеме можно рассчитать значения функций  $U^{(m)}$  в момент времени  $t_{n+1}$ . После этого при  $t = t_{n+1}$  из замкнутой системы нелинейных уравнений (24) и (25) определяются коэффициенты  $\Theta_l^{n+1}$  ( $0 \leq l \leq L$ ) в полиномиальном представлении температуры (18). На каждом шаге по времени сначала интегрируется теплофизическая составляющая рассматриваемой задачи (см. (23)–(25) при учете (26) и (27)), а затем при уже известной температуре  $\Theta^{n+1}$  — механическая составляющая задачи (см. (21) при учете (3), (12)–(17) и (22)). В остальном эта численная схема реализуется так же, как описано в [22–24].

**2. Анализ результатов расчетов.** Рассмотрим неизотермическое вязкоупругопластическое изгибное динамическое поведение пологой цилиндрической КМ-оболочки толщиной  $2h = 2$  см, которая в плане имеет прямоугольную удлиненную форму ( $\Omega$ :  $|x_1| \leq a$ ,  $|x_2| \leq b$ ,  $a = 3b$ ;  $1/R_1 \equiv 0$ ,  $R_2 \equiv R = \text{const}$ ;  $b = 50$  см). Стрела подъема срединной поверхности  $f$  над продольными кромками ( $x_2 = \pm b$ ) равна 10 см. Радиус кривизны  $R$  при этом выражается так [23]:  $R = (b^2 + f^2)/(2f)$ . Конструкция жестко закреплена по всем кромкам:  $u_i^{(m)} = 0$ ,  $w = 0$ ,  $\mathbf{x} \in \Gamma$  и  $t \geq t_0$  (см. (20) и (21)), где  $\Gamma$  — контур, ограничивающий область  $\Omega$ . До момента времени  $t = t_0 = 0$  искривленная панель покоится ( $u_i^{(m)} = 0$ ,  $w = 0$ ,  $\mathbf{x} \in \Omega$ ,  $t \leq t_0$ ,  $i = 1, 2$ ,  $0 \leq m \leq M + 1$ ) либо при температуре естественного состояния  $\Theta = \Theta^0 = 20^\circ\text{C}$  ( $\mathbf{x} \in \Omega$ ,  $|x_3| \leq h$  и  $t \leq t_0$ ), либо предварительно нагрета со стационарным распределением температуры (подробнее см. ниже).

При  $t = t_0 = 0$  пологая КМ-оболочка начинает испытывать механическое нагружение со стороны верхней или нижней лицевой поверхности, которое условно соответствует давлению в воздушной взрывной волне [33]:

$$\begin{aligned} p(t) &= \begin{cases} p_{\max} t / t_{\max}, & 0 \leq t \leq t_{\max}, \\ p_{\max} \exp[-\beta(t - t_{\max})], & t > t_{\max}, \end{cases} \\ \sigma_{33}^{(-)}(t) &= \begin{cases} -p(t), & p_{\max} > 0, \\ 0, & p_{\max} < 0, \end{cases} \quad \sigma_{33}^{(+)}(t) = \begin{cases} 0, & p_{\max} > 0, \\ p(t), & p_{\max} < 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (28)$$

Здесь

$$\beta = -\ln(0.01)/(t_{\min} - t_{\max}) > 0, \quad t_{\min} \gg t_{\max}; \quad (29)$$

$t_{\max}$  — время, при котором  $|p(t)|$  достигает максимума  $|p_{\max}|$ ;  $t_{\min}$  — время, при превышении которого уже можно не учитывать  $|p(t)|$  по сравнению с  $|p_{\max}|$  (выражение (29) получено при условии  $p(t_{\min}) = 0.01p_{\max}$ ). Согласно равенствам (28), при  $p_{\max} > 0$  КМ-конструкция испытывает нагружение со стороны нижней лицевой поверхности, которая вогнута, а при  $p_{\max} < 0$  — со стороны верхней поверхности. Исходя из экспериментальных данных [33] примем  $t_{\max} = 0.1$  мс,  $t_{\min} = 2$  мс,  $|p_{\max}| = 6$  МПа.

Конструкция изготовлена из эпоксисвязующего [2] и усилена стекловолокнами [3]. Диаграмма мгновенного упругопластического активного дефор-

мирования  $k$ -го компонента композиции при постоянной температуре  $\Theta$  аппроксимируется билинейной зависимостью:

$$\sigma = \begin{cases} E_k \varepsilon, & |\varepsilon| \leq \varepsilon_s^{(k)} = \sigma_s^{(k)} / E_k, \\ \text{sign}(\varepsilon) \sigma_s^{(k)} + E_s^{(k)} (\varepsilon - \text{sign}(\varepsilon) \varepsilon_s^{(k)}), & |\varepsilon| > \varepsilon_s^{(k)}, \quad 0 \leq k \leq N, \end{cases}$$

где  $\sigma$  и  $\varepsilon$  — напряжение растяжения–сжатия и соответствующая деформация;  $E_s^{(k)} = E_s^{(k)}(\Theta)$  и  $\sigma_s^{(k)} = \sigma_s^{(k)}(\Theta)$  — модуль линейного упрочнения и предел текучести. Физико-механические характеристики материалов композиций представлены в табл. 1, где  $\lambda_k$  — коэффициент теплопроводности  $k$ -го компонента. (Объемная вязкость фаз композиции не учитывается:  $\mu_k \rightarrow \infty$ ,  $0 \leq k \leq N$ ; см. (10).) В расчетах использовались линейные зависимости этих характеристик от температуры  $\Theta$ , аппроксимированные по данным, приведенным в табл. 1.

Таблица 1

Физико-механические характеристики компонентов композиции [2, 3]

[Physical and mechanical characteristics of the composition components [2, 3]]

| Material<br>Characteristics             | Epoxy Binder ( $k = 0$ )    |                              | Glass Fibers ( $k = 1, 2$ ) |                              |
|-----------------------------------------|-----------------------------|------------------------------|-----------------------------|------------------------------|
|                                         | $\Theta = 20^\circ\text{C}$ | $\Theta = 100^\circ\text{C}$ | $\Theta = 20^\circ\text{C}$ | $\Theta = 100^\circ\text{C}$ |
| $\rho_k$ , kg/m <sup>3</sup>            | 1210.0                      | 1208.0                       | 2520.0                      | 2519.6                       |
| $E_k$ , GPa                             | 2.8                         | 2.6                          | 86.8                        | 86.5                         |
| $\nu_k$                                 | 0.330                       | 0.333                        | 0.250                       | 0.254                        |
| $\eta_k$ , MPa · s                      | 340                         | 300                          | 1250                        | 1200                         |
| $\sigma_s^{(k)}$ , MPa                  | 20                          | 15                           | 4500                        | 4400                         |
| $E_s^{(k)}$ , GPa                       | 1.114                       | 0.763                        | 6.230                       | 6.079                        |
| $\lambda_k$ , W/m · K                   | 0.243                       | 0.236                        | 0.89                        | 0.86                         |
| $\alpha_k \cdot 10^6$ , K <sup>-1</sup> | 68.1                        | 73.2                         | 2.5                         | 2.6                          |
| $c_k$ , kJ/kg · K                       | 1.54                        | 1.71                         | 0.80                        | 0.84                         |

Панель армирована по ортогональным направлениям  $x_1, x_2$  двумя ( $N = 2$ ) семействами стеклянных волокон (см. рис. 1) с плотностями армирования  $\omega_1 = 0.1$  и  $\omega_2 = 0.3$  соответственно. В этом случае углы армирования (см. рис. 2) имеют следующие значения:  $\theta_1 = \theta_2 = \pi/2$ ,  $\varphi_1 = 0$ ,  $\varphi_2 = \pi/2$ .

На кромках КМ-панели поддерживается температура  $\Theta^0$ . Через лицевые поверхности теплообмен с окружающей средой осуществляется в условиях естественной конвекции ( $q_\infty^{(\pm)} \equiv 0$  и  $\alpha^{(\pm)} = 30$  Вт/м · K [35]) при температуре воздуха  $\Theta_\infty^{(\pm)} = \Theta^0$  (см. (24)). Кроме того, дополнительно оболочка может быть предварительно нагрета внешним стационарным тепловым потоком через нижнюю ( $x_3 = -h$ :  $q_\infty^{(-)} = 3$  кВт/м<sup>2</sup>,  $q_\infty^{(+)} \equiv 0$ ) или верхнюю ( $x_3 = h$ :  $q_\infty^{(+)} = -3$  кВт/м<sup>2</sup>,  $q_\infty^{(-)} \equiv 0$ ) лицевую поверхность. В этих случаях предполагается, что при  $t < t_0$  конструкция квазистатически деформируется под действием только теплового нагружения и к моменту времени  $t = t_0 = 0$  достигает стационарного состояния. Предварительное термомеханическое состояние при этом можно определить, используя, например, метод установления. Так как рассматриваемая конструкция является относительно тонкой ( $h/b = 1/50$ ) и ее искривленность мала, при таком предварительном

нагреве к моменту времени  $t = t_0 = 0$  за пределами пограничных слоев, которыми здесь пренебрегаем, стационарная температура по толщине панели изменяется практически по линейному закону. При этом наибольшее значение температуры  $\Theta_{\max}^0 \approx 93^\circ\text{C}$  достигается на той лицевой поверхности, через которую подается тепловой поток, а наименьшее значение  $\Theta_{\min}^0 \approx 47^\circ\text{C}$  — в точках противоположной лицевой поверхности. Таким образом, при наличии дополнительного теплового потока через лицевые поверхности пологой КМ-оболочки предварительно наведенное температурное поле существенно неоднородно по ее толщине.

Дискретизация задачи по координатам  $x_1$  и  $x_2$  проводилась с использованием равномерной сетки с шагами  $\Delta x_1 = \Delta x_2 = b/50 = 1$  см, шаг же по времени  $\Delta = 1$  мкс. При этом необходимые условия устойчивости используемой численной схемы (условия Куранта) выполняются с запасом (см. (82) в [22]).

На основании результатов работ [23, 24] порядок полинома в аппроксимации температуры (18) принят равным  $L = 7$  (при  $L \geq 8$  линеаризованная система (24) и (25) плохо обусловлена, поэтому решение задачи расходится). В настоящем исследовании изучается влияние применения уточненной теории изгиба (см. (2), (3) и (21) при  $M \neq 0$  [23]) на результаты расчета остаточного термомеханического состояния гибкой пологой КМ-оболочки после окончания ее осцилляций, вызванных приложением кратковременной, но интенсивной динамической нагрузки. Поэтому на рис. 3 представлены зависимости от времени наибольших значений температуры  $\Theta_m(t; M) = \max_{\mathbf{r}} \Theta(t, \mathbf{r}; M)$  ( $|x_1| \leq a$ ,  $|x_2| \leq b$  и  $|x_3| \leq h$ ) в рассматриваемой конструкции при отсутствии (рис. 3, а и 3, b:  $q_\infty^{(\pm)} \equiv 0$ ) и наличии дополнительного теплового потока через верхнюю лицевую поверхность (рис. 3, с:  $q_\infty^{(+)} = -3$  кВт/м<sup>2</sup>,  $q_\infty^{(-)} \equiv 0$ ). Кривые 1 и 2 получены соответственно при  $M = 7$  (уточненная теория изгиба) и при  $M = 0$  (теория Амбарцумяна). Выбор значения  $M = 7$  в соотношениях (2), (3) и (21) в рамках использования уточненной теории изгиба обоснован в [23]. Зависимости  $\Theta_m(t; M)$  на рис. 3, а соответствуют случаю, когда искривленная панель нагружается снизу ( $p_{\max} = 6$  МПа; см. (28), (29)) — со стороны вогнутой лицевой поверхности, а на рис. 3, b и 3, с — случаям нагружения сверху ( $p_{\max} = -6$  МПа). Из поведения кривых на рис. 3 видно, что осцилляции максимальных значений температуры  $\Theta_m$  к моменту времени  $t = 100$  мс существенно уменьшаются, а при  $t \approx 200$  мс их можно считать полностью затухшими (см. рис. 3 в [22]). Кривые 1 и 2 на рис. 3 заметно различаются, особенно при нагружении КМ-панели давлением (28) сверху (см. рис. 3, b и 3, с), т. е. использование уточненной теории изгиба (кривые 1) действительно приводит к уточнению температурного отклика в пологой армированной оболочке. Кривые на рис. 3, а в основном расположены ниже аналогичных кривых на рис. 3, b. Следовательно, температурный отклик в рассматриваемой конструкции является более интенсивным при ее механическом нагружении со стороны выпуклой лицевой поверхности. В частности, при  $p_{\max} = -6$  МПа дополнительный нагрев искривленной панели может превышать  $12^\circ\text{C}$  (см. кривые на рис. 3, b и 3, с при  $t \approx 9.8$  мс), а при  $p_{\max} = 6$  МПа не превышает  $7^\circ\text{C}$  (см. кривые на рис. 3, а при  $t \approx 12.4$  мс).

Несмотря на то, что температурный отклик в исследуемой стеклопластиковой оболочке при рассматриваемом ее динамическом нагружении невелик

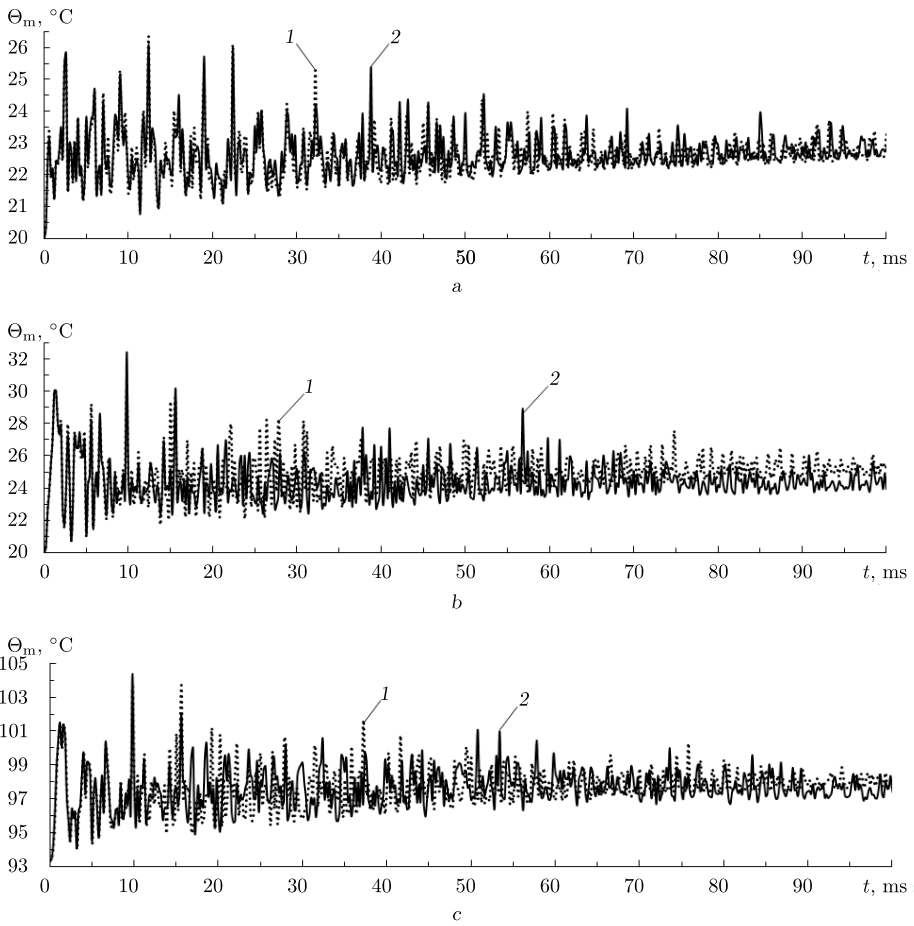


Рис. 3. Зависимость от времени наибольших значений температуры в полой оболочке из стеклопластика: а — случай  $q_{\infty}^{(\pm)} \equiv 0$  и  $p_{\max} > 0$ ; б — случай  $q_{\infty}^{(\pm)} \equiv 0$  и  $p_{\max} < 0$ ; в — случай  $q_{\infty}^{(+)} = -3 \text{ кВт/м}^2$ ,  $q_{\infty}^{(-)} \equiv 0$  и  $p_{\max} < 0$

[Figure 3. Time dependence of the highest temperature values in a shallow fiberglass shell: а — case  $q_{\infty}^{(\pm)} \equiv 0$  and  $p_{\max} > 0$ ; б — case  $q_{\infty}^{(\pm)} \equiv 0$  and  $p_{\max} < 0$ ; в — case  $q_{\infty}^{(+)} = -3 \text{ kW/m}^2$ ,  $q_{\infty}^{(-)} \equiv 0$  and  $p_{\max} < 0$ ]

(дополнительный нагрев в отдельных точках не превосходит  $7 \div 12^\circ\text{C}$ ), он все же может оказывать заметное влияние на остаточный прогиб такой КМ-панели. Так, на рис. 4 представлены зависимости от переменной  $x_2$  прогиба  $w$  в центральном сечении удлиненной конструкции ( $x_1 = 0$ ), рассчитанные при отсутствии (рис. 4, а) и наличии дополнительного теплового потока через одну из лицевых поверхностей: верхнюю (рис. 4, б) или нижнюю (рис. 4, в). Кривые на рис. 4 получены при  $t = 500 \text{ мс}$ , когда осцилляции полой КМ-оболочки практически прекратились.

Кривые с номерами 1 (со штрихами и без них) на рис. 4 соответствуют случаям механического нагружения панели (28) со стороны вогнутой лицевой поверхности, а кривые с номерами 2 — со стороны выпуклой поверхности. Кривые с номерами без штрихов рассчитаны по уточненной теории изгиба, а кривые, номера которых помечены одним штрихом, — по теории Амбарцумяна. Кривые 1'' и 2'' на рис. 4, а рассчитаны при тех же условиях, что

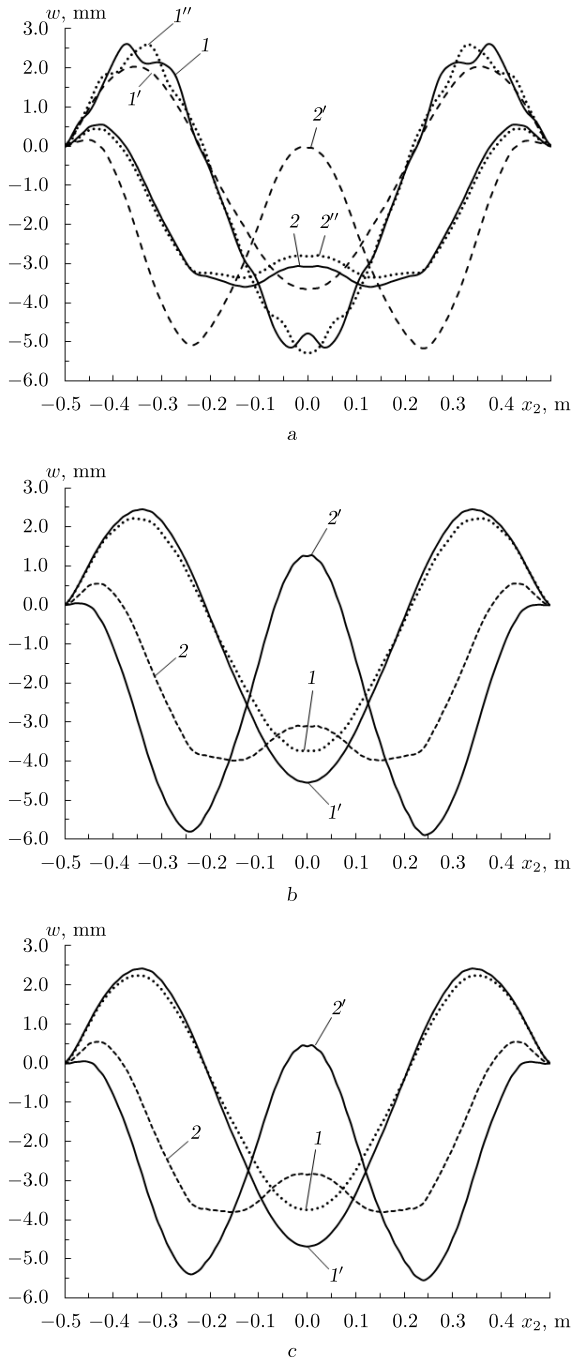


Рис. 4. Зависимости остаточных прогибов от координаты  $x_2$  в центральном сечении  $x_1 = 0$  стеклопластиковой панели: а – случай  $q_{\infty}^{(\pm)} \equiv 0$ ; б – случай  $q_{\infty}^{(+)} = -3 \text{ кВт/м}^2$  и  $q_{\infty}^{(-)} \equiv 0$ ; в – случай  $q_{\infty}^{(-)} = 3 \text{ кВт/м}^2$ ,  $q_{\infty}^{(+)} \equiv 0$

[Figure 4. Dependences of residual deflections on coordinate  $x_2$  in the central section  $x_1 = 0$  of a fiberglass panel: а – case  $q_{\infty}^{(\pm)} \equiv 0$ ; б –  $q_{\infty}^{(+)} = -3 \text{ кВт/м}^2$  and  $q_{\infty}^{(-)} \equiv 0$ ; в – case  $q_{\infty}^{(-)} = 3 \text{ кВт/м}^2$  and  $q_{\infty}^{(+)} \equiv 0$ ]

и кривые 1 и 2, но без учета температурного отклика в армированной панели (вязкоупругопластическое деформирование).

Кривые 1 и 2 на рис. 4 существенно отличаются от кривых 1' и 2' соответственно. Следовательно, использование простейшей традиционной неклассической теории изгиба Амбарцумяна (кривые 1' и 2') приводит к существенному искажению расчетного остаточного прогиба рассматриваемой КМ-оболочки по сравнению с расчетом по уточненной теории изгиба (кривые 1 и 2). Сравнение кривых 2 и 2' на рис. 4 свидетельствует о том, что это искажение носит не только количественный, но и качественный характер. Этот вывод относится и к кривым 1, 1' на рис. 4, а. Кривые на рис. 4, b и 4, c существенно отличаются от кривых с такими же номерами на рис. 4, а. А значит, дополнительное тепловое воздействие немеханического происхождения значительно влияет на величину остаточного прогиба рассматриваемой искривленной панели. Кроме того, сравнение кривых 2 на рис. 4, b и 4, c показывает, что при механическом нагружении полой оболочки сверху на ее остаточный прогиб заметное влияние оказывает и выбор лицевой поверхности, через которую к КМ-конструкции подводится дополнительный тепловой поток. Так, максимальные по модулю ординаты точек на кривой 2 рис. 4, b на 5.9 % больше аналогичных величин на кривой 2 рис. 4, c. Сравнение же максимальных по модулю ординат точек на кривых 1 на рис. 4, b и 4, c показывает, что они различаются всего на 0.1 %. Следовательно, при нагружении искривленной панели избыточным давлением снизу выбор лицевой поверхности, через которую подводится дополнительный тепловой поток, в рассматриваемой задаче практически не оказывает влияния на форму и величину ее остаточного прогиба.

Сопоставление кривых 1 и 1'' на рис. 4, а демонстрирует, что неучет теплового отклика в КМ-конструкции (кривая 1'') может привести к качественно неверному представлению о форме остаточного прогиба полой стеклопластиковой оболочки. Так, кривая 1 на рис. 4, а в центральной точке ( $x_2 = 0$ ) выпукла вверх, а кривая 1'' — вниз, хотя максимальные по модулю прогибы при этом различаются незначительно (всего на 2.7 %). Сравнение же кривых 2 и 2'' на рис. 4, а показывает, что при механическом нагружении искривленной панели сверху неучет температурного отклика в ней (кривая 2'') приводит к качественно верному представлению о форме ее остаточного прогиба, однако дает значительную ошибку при оценке максимального прогиба. Так, наибольшие по модулю значения ординат точек на кривых 2 и 2'' рис. 4, а различаются уже на 7.2 %.

Использование теории изгиба Амбарцумяна может приводить не только к существенному искажению расчетного остаточного прогиба полой КМ-оболочки, но и к значительному искажению представления о деформированном состоянии компонентов ее композиции. С целью демонстрации этого факта были рассмотрены зависимости от времени максимальных значений интенсивности деформаций  $\varepsilon_*^{(k)}$  в  $k$ -х фазах композиции стеклопластиковой панели ( $\varepsilon_m^{(k)}(t; M) = \max_r \varepsilon_*^{(k)}(t, \mathbf{r}; M)$ ,  $|x_1| \leq a$ ,  $|x_2| \leq b$ ,  $|x_3| \leq h$ ,  $k = 0, 1, 2$ ). В табл. 2 приведены некоторые характерные значения величин  $\varepsilon_m^{(k)}$  для эпоксисвязывающего ( $k = 0$ ) и волокон второго семейства ( $k = 2$ ), которые в процессе осцилляций КМ-конструкции испытывают наиболее интенсивное деформиро-

Таблица 2

Характерные наибольшие значения интенсивности деформаций некоторых компонентов композиции [Characteristic maximum values of the intensity of deformations of some components of the composition]

| nos. | $q_{\infty}^{(-)}$ , kW/m <sup>2</sup> | $q_{\infty}^{(+)}$ , kW/m <sup>2</sup> | $p_{\max}$ , МПа | $M$ | $L$ | $\varepsilon_{\max}^{(0)}$ , % | $\varepsilon_{0.5}^{(0)}$ , % | $\varepsilon_{\max}^{(2)}$ , % | $\varepsilon_{0.5}^{(2)}$ , % |
|------|----------------------------------------|----------------------------------------|------------------|-----|-----|--------------------------------|-------------------------------|--------------------------------|-------------------------------|
| 1    | 0                                      | 0                                      | 6                | 0   | 7   | 5.16                           | 1.69                          | 2.55                           | 0.493                         |
| 2    | 0                                      | 0                                      | 6                | 7   | 7   | 5.16                           | 1.79                          | 2.83                           | 0.731                         |
| 3    | 0                                      | 0                                      | 6                | 7   | 0   | 5.16                           | 1.83                          | 2.83                           | 0.736                         |
| 4    | 0                                      | 0                                      | −6               | 0   | 7   | 6.48                           | 2.18                          | 3.53                           | 0.644                         |
| 5    | 0                                      | 0                                      | −6               | 7   | 7   | 6.19                           | 2.25                          | 4.00                           | 0.673                         |
| 6    | 0                                      | 0                                      | −6               | 7   | 0   | 6.17                           | 2.34                          | 3.96                           | 0.654                         |
| 7    | 3                                      | —                                      | 6                | 0   | 7   | 5.31                           | 1.87                          | 2.58                           | 0.596                         |
| 8    | 3                                      | —                                      | 6                | 7   | 7   | 5.08                           | 1.77                          | 2.84                           | 0.731                         |
| 9    | 3                                      | —                                      | −6               | 0   | 7   | 6.54                           | 2.23                          | 3.39                           | 0.779                         |
| 10   | 3                                      | —                                      | −6               | 7   | 7   | 6.24                           | 2.27                          | 3.89                           | 0.711                         |
| 11   | —                                      | −3                                     | 6                | 0   | 7   | 5.32                           | 1.87                          | 2.58                           | 0.549                         |
| 12   | —                                      | −3                                     | 6                | 7   | 7   | 5.22                           | 1.86                          | 2.80                           | 0.699                         |
| 13   | —                                      | −3                                     | −6               | 0   | 7   | 6.90                           | 2.14                          | 3.43                           | 0.698                         |
| 14   | —                                      | −3                                     | −6               | 7   | 7   | 6.38                           | 2.33                          | 3.84                           | 0.674                         |

вание. В табл. 2 приняты следующие обозначения:  $\varepsilon_{\max}^{(k)}(M) = \max_{t \geq 0} \varepsilon_m^{(k)}(t; M)$  и  $\varepsilon_{0.5}^{(k)}(M) = \varepsilon_m^{(k)}(0.5; M)$ , т. е. величины  $\varepsilon_{0.5}^{(k)}$  можно трактовать как максимальные значения интенсивности остаточных деформаций, так как они соответствуют значениям  $\varepsilon_m^{(k)}$  ( $k = 0, 2$ ), полученным в момент времени  $t = 500$  мс, когда осцилляции искривленной панели практически полностью прекратились. Данные, представленные в табл. 2 при  $L = 0$ , соответствуют случаям, когда температурный отклик в конструкции не учитывается (вязкоупруго-пластический расчет).

Сравнение значений  $\varepsilon_{\max}^{(2)}$  в расчетах с номерами 4 и 5 (см. табл. 2) показывает, что использование теории Амбарцумяна в этом случае приводит к занижению максимальной величины интенсивности деформаций второго семейства волокон на 11.3%, в расчетах 13 и 14 — на 12%, а в расчетах 9 и 10 — на 14.7%. В еще большей степени теория Амбарцумяна может приводить к искажению расчетного остаточного деформированного состояния фаз композиции. Так, значение  $\varepsilon_{0.5}^{(2)}$  в расчете 1 на 48.3% меньше, чем в расчете 2.

Сравнение величин  $\varepsilon_{\max}^{(k)}$  и  $\varepsilon_{0.5}^{(k)}$  ( $k = 0, 2$ ) в расчетах 2, 3 и 5, 6 демонстрирует, что учет теплового отклика в полой КМ-оболочке (см. расчеты 3 и 6) не оказывает существенного влияния на изменение этих величин, в отличие от его влияния на величину и форму остаточного прогиба. Так, значения  $\varepsilon_{0.5}^{(0)}$  в расчетах 5 и 6 различаются всего на 4%, а остальные величины  $\varepsilon_{\max}^{(k)}$  и  $\varepsilon_{0.5}^{(k)}$  в указанных расчетах различаются менее чем на 3%.

**Закключение.** Разработанная теория термовязкоупруго-пластического деформирования гибких пологих армированных оболочек позволяет с разной степенью точности определять их температурный и механический отклик при интенсивном кратковременном динамическом нагружении, в том чис-

ле и остаточные состояния после полного затухания осцилляций таких конструкций.

Полученные результаты показали, что, как и в [23], для расчета неизотермического вязкоупругопластического динамического поведения искривленных стеклопластиковых панелей необходимо использовать уточненную теорию их изгиба. Использование же простейшего варианта этой теории — традиционной неклассической теории Амбарцумяна [22, 24, 28] — может привести к существенному как количественному, так и качественному искажению расчетного остаточного прогиба и, в еще большей степени, расчетного остаточного деформированного состояния компонентов композиции по сравнению с расчетами, выполненными по уточненной теории изгиба [23].

Продemonстрировано, что учет температурного отклика в динамически изгибаемых стеклопластиковых пологих оболочках после их неупругого деформирования может привести к заметному искажению представления об остаточном прогибе такой КМ-конструкции, причем это искажение может носить как количественный, так и качественный характер.

Дополнительное тепловое воздействие немеханического происхождения также может оказывать значительное влияние на остаточное состояние стеклопластиковых искривленных панелей. При этом существенным является то, к какой именно лицевой поверхности подводится дополнительный тепловой поток.

Прямоугольные, удлинённые в плане цилиндрические панели из стеклопластика после затухания неупругих колебаний приобретают гофрированную остаточную форму со складками, которые ориентированы в продольном направлении. Форма остаточного прогиба существенно зависит от того, с какой стороны (выпуклой или вогнутой лицевой поверхности) нагружается избыточным динамическим давлением пологая КМ-оболочка.

**Конкурирующие интересы.** У меня нет конфликта интересов в авторстве и публикации этой статьи.

**Авторская ответственность.** Я несу полную ответственность за предоставление окончательной версии рукописи в печать. Окончательная версия рукописи мною одобрена.

**Финансирование.** Работа выполнена в рамках государственного задания (№ госрегистрации 121030900260-6).

## Библиографический список

1. *Composites: State of Art* / ed. L. W. Weeton, E. Scala. New York: Metallurgical Society of AIME, 1974. 365 pp.
2. *Handbook of Composites* / ed. G. Lubin. New York: Van Nostrand Reinhold, 1982. 786 pp.
3. *Композиционные материалы: Справочник* / ред. Д. М. Карпинос. Киев: Наук. думка, 1985. 592 с.
4. Тарнопольский Ю. М., Жигун И. Г., Поляков В. А. *Пространственно-армированные композиционные материалы: Справочник*. М.: Машиностроение, 1987. 224 с.
5. Абросимов Н. А., Баженов В. Г. *Нелинейные задачи динамики композитных конструкций*. Н. Новгород: ННГУ, 2002. 400 с.
6. Kazanci Z. Dynamic response of composite sandwich plates subjected to time-dependent pressure pulses // *Int. J. Non-Linear Mech.*, 2011. vol. 46, no. 5. pp. 807–817. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2011.03.011>.
7. Соломонов Ю. С., Георгиевский В. П., Недбай А. Я., Андрияшин В. А. *Прикладные*

- задачи механики композитных цилиндрических оболочек. М.: Физматлит, 2014. 408 с. EDN: UGLCQJ.
8. Димитриенко Ю. И. *Механика композитных конструкций при высоких температурах*. М.: Физматлит, 2019. 448 с.
  9. Yonezu A., Yoneda K., Hirakata H., et al. A simple method to evaluate anisotropic plastic properties based on dimensionless function of single spherical indentation – Application to SiC whisker-reinforced aluminum alloy // *Mat. Sci. Eng. A*, 2010. vol. 527, no. 29–30. pp. 7646–7657. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.msea.2010.08.014>.
  10. He G., Liu Y., Hammi Y., Bammann D. J., Horstemeyer M. F. A combined viscoelasticity-viscoplasticity-anisotropic damage model with evolving internal state variables applied to fiber reinforced polymer composites // *Mech. Adv. Mater. Struct.*, 2020. vol. 28, no. 17. pp. 7646–7657. DOI: <https://doi.org/10.1080/15376494.2019.1709673>.
  11. Yu M.-h. Advances in strength theories for materials under complex stress state in the 20th century // *Appl. Mech. Rev.*, 2002. vol. 55, no. 3. pp. 169–218. DOI: <https://doi.org/10.1115/1.1472455>.
  12. Qatu M. S., Sullivan R. W., Wang W. Recent research advances on the dynamic analysis of composite shells: 2000–2009 // *Comp. Struct.*, 2010. vol. 93, no. 1. pp. 14–31. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2010.05.014>.
  13. Morinière F. D., Alderliesten R. C., Benedictus R. Modelling of impact damage and dynamics in fibre-metal laminates — A review // *Int. J. Impact Eng.*, 2014. vol. 67. pp. 27–38. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijimpeng.2014.01.004>.
  14. Vena P., Gastaldi D., Contro R. Determination of the effective elastic-plastic response of metal-ceramic composites // *Int. J. Plasticity*, 2008. vol. 24, no. 3. pp. 483–508. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.iplas.2007.07.001>.
  15. Brassart L., Stainier L., Doghri I., Delannay L. Homogenization of elasto-(visco) plastic composites based on an incremental variational principle // *Int. J. Plasticity*, 2012. vol. 36. pp. 86–112. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.iplas.2012.03.010>.
  16. Vasiliev V. V., Morozov E. *Advanced Mechanics of Composite Materials and Structural Elements*. Amsterdam: Elsevier, 2013. xii+412 pp. EDN: UERHXD. DOI: <https://doi.org/10.1016/C2011-0-07135-1>.
  17. Gibson R. F. *Principles of Composite Material Mechanics*. Boca Raton: CRC Press, 2016. xxiii+700 pp. DOI: <https://doi.org/10.1201/b19626>.
  18. Ахундов В. М. Инкрементальная каркасная теория сред волокнистого строения при больших упругих и пластических деформациях // *Мех. композ. матер.*, 2015. Т. 51, № 3. С. 539–558.
  19. Rajhi W., Saanouni K., Sidhom H. Anisotropic ductile damage fully coupled with anisotropic plastic flow: Modeling, experimental validation, and application to metal forming simulation // *Int. J. Damage Mech.*, 2014. vol. 23, no. 8. pp. 1211–1256. DOI: <https://doi.org/10.1177/1056789514524076>.
  20. Lee E.-H., Stoughton T. B., Yoon J. W. A yield criterion through coupling of quadratic and non-quadratic functions for anisotropic hardening with non-associated flow rule // *Int. J. Plasticity*, 2017. vol. 99. pp. 120–143. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.iplas.2017.08.007>.
  21. Nizolek T. J., Pollock T. M., McMeeking R. M. Kink band and shear band localization in anisotropic perfectly plastic solids // *J. Mech. Phys. Solids*, 2021. vol. 146, 104183. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2020.104183>.
  22. Янковский А. П. Моделирование неизотермического вязкоупругопластического поведения гибких армированных пластин // *Вычисл. мех. сплош. сред*, 2020. Т. 13, № 3. С. 350–370. EDN: MZKPHT. DOI: <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2020.13.3.28>.
  23. Янковский А. П. Моделирование неизотермического упругопластического поведения армированных пологих оболочек в рамках уточненной теории изгиба // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2023. Т. 27, № 1. С. 119–141. EDN: YRWNPW. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1958>.

24. Янковский А. П. Моделирование термоупруговязкопластического деформирования гибких армированных пластин // *ПММ*, 2022. Т. 86, № 1. С. 121–150. EDN: **EKGCRN**. DOI: <https://doi.org/10.31857/S003282352201009X>.
25. Reissner E. On transverse vibrations of thin shallow elastic shells // *Quart. Appl. Math.*, 1955. vol. 13, no. 2. pp. 169–176. DOI: <https://doi.org/10.1090/qam/69715>.
26. Малмейстер А. К., Тамуж В. П., Тетерс Г. А. *Сопротивление жестких полимерных материалов*. Рига: Зинатне, 1972. 500 с.
27. Богданович А. Е. *Нелинейные задачи динамики цилиндрических композитных оболочек*. Рига: Зинатне, 1987. 295 с.
28. Амбарцумян С. А. *Общая теория анизотропных оболочек*. М.: Наука, 1974. 446 с.
29. Reddy J. N. *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells. Theory and Analysis*. Boca Raton: CRC Press, 2004. xxiii+831 pp. DOI: <https://doi.org/10.1201/b12409>.
30. Андреев А. *Упругость и термоупругость слоистых композитных оболочек. Математическая модель и некоторые аспекты численного анализа*. Saarbrücken: Palmarium Academic Publ., 2013. 93 с. EDN: **QZAPNP**.
31. Болотин В. В., Новичков Ю. Н. *Механика многослойных конструкций*. М.: Машиностроение, 1980. 375 с.
32. Куликов Г. М. Термоупругость гибких многослойных анизотропных оболочек // *Изв. РАН. МТТ*, 1994. № 2. С. 33–42. EDN: **SLRUCB**.
33. Houlston R., DesRochers C. G. Nonlinear structural response of ship panels subjected to air blast loading // *Comp. Struct.*, 1987. vol. 26, no. 1–2. pp. 1–15. DOI: [https://doi.org/10.1016/0045-7949\(87\)90232-X](https://doi.org/10.1016/0045-7949(87)90232-X).
34. Хажинский Г. М. *Модели деформирования и разрушения металлов*. М.: Научный мир, 2011. 231 с.
35. Луканин В. Н., Шатров М. Г., Камфер Г. М. [и др.] *Теплотехника* / ред. В. Н. Луканин. М.: Высш. шк., 2003. 671 с. EDN: **QMHYSH**.

MSC: 74K20

## Refined model of thermo-visco-elastic-plastic dynamic deformation of reinforced flexible shallow shells

*A. P. Yankovskii*

Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics,  
Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences,  
4/1, Institutskaya st., Novosibirsk, 630090, Russian Federation.

### Abstract

The problem of thermo-visco-elastic-plastic deformation of reinforced shallow shells under dynamic loading is formulated. In this case, a refined theory of their bending is used, the simplest version of which is the Ambartsumyan theory. Geometric nonlinearity is taken into account in the Karman approximation. The inelastic behavior of the materials of the composition phases is described by the equations of the theory of plastic flow; their viscoelastic deformation is described by the relations of the Maxwell–Boltzmann model. Temperature in the transversal direction is approximated by high-order polynomials. Numerical integration of the coupled nonlinear thermomechanical problem is carried out using an explicit time-stepping scheme. The visco-elastic-plastic flexural behavior of a cylindrical fiberglass panel with an orthogonal 2D-reinforcement structure is studied. The structure is briefly loaded in the transverse direction with high-intensity pressure. A comparative analysis of calculations performed with and without taking into account the temperature response in a shallow shell is carried out. Additionally, cases of preheating the panel from one of the front surfaces are studied. It is shown that to calculate the thermo-visco-elastic-plastic behavior of fiberglass curved panels, a refined theory of bending should be used, rather than the traditionally used Ambartsumyan theory, which significantly distorts the shape of the calculated residual deflection and the field of residual deformations of the components of the composition. It is demonstrated that failure to take into account the temperature response in a shallow reinforced shell can lead not only to a quantitative, but also a qualitatively incorrect idea of the calculated form of its residual deflection. The presence of preheating of the fiberglass panel leads to a noticeable change in its residual deflection. In this case, an important role is played by the

### Mechanics of Solids

#### Research Article

© Authors, 2024

© Samara State Technical University, 2024 (Compilation, Design, and Layout)

 The content is published under the terms of the [Creative Commons Attribution 4.0 International License](http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

#### Please cite this article in press as:

Yankovskii A. P. Refined model of thermo-visco-elastic-plastic dynamic deformation of reinforced flexible shallow shells, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2024, vol. 28, no. 3, pp. 562–585. EDN: **LBASMU**. DOI: [10.14498/vsgtu2079](https://doi.org/10.14498/vsgtu2079) (In Russian).

#### Author's Details:

*Andrei P. Yankovskii*  <https://orcid.org/0000-0002-2602-8357>

Dr. Phys. &amp; Math. Sci.; Leading Research Scientist; Lab. of Fast Processes Physics;

e-mail: [yankovsky\\_ap@itam.nsc.ru](mailto:yankovsky_ap@itam.nsc.ru)

fact from which particular front surface additional heating or cooling of the thin-walled structure is carried out.

**Keywords:** shallow shells, geometric nonlinearity, fiber reinforcement, coupled thermo-visco-elastic-plasticity, refined bending theory, inelastic dynamics, residual state, explicit time step method.

Received: 19<sup>th</sup> January, 2024 / Revised: 12<sup>th</sup> September, 2024 /

Accepted: 21<sup>st</sup> October, 2024 / First online: 29<sup>th</sup> October, 2024

**Competing interests.** I have no conflicts of interest regarding the authorship and publication of this article.

**Author responsibility.** I take full responsibility for providing the final version of the manuscript for publication. The final version of the manuscript has been approved by me.

**Funding.** The research was carried out within the state assignment of Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (project no. 121030900260-6).

## References

1. *Composites: State of Art*, ed. L. W. Weeton, E. Scala. New York, Metallurgical Society of AIME, 1974, 365 pp.
2. *Handbook of Composites*, ed. G. Lubin. New York, Van Nostrand Reinhold, 1982, 786 pp.
3. *Kompozitsionnye materialy: Spravochnik* [Composite Materials: Handbook], ed. D. M. Karpinos. Kiev, Nauk. Dumka, 1985, 592 pp. (In Russian)
4. Tarnopol'sky Yu. M., Zhigun I. G., Polyakov V. A. *Prostranstvenno-armirovannye kompozitsionnye materialy: Spravochnik* [Spatially Reinforced Composite Materials: Handbook]. Moscow, Mashinostroenie, 1987, 224 pp. (In Russian)
5. Abrosimov N. A., Bazhenov V. G. *Nelineinye zadachi dinamiki kompozitnykh konstruksii* [Nonlinear Problems of Dynamics Composites Designs]. Nizhniy Novgorod, Nizhniy Novgorod State Univ., 2002, 400 pp. (In Russian)
6. Kazanci Z. Dynamic response of composite sandwich plates subjected to time-dependent pressure pulses, *Int. J. Non-Linear Mech.*, 2011, vol. 46, no. 5, pp. 807–817. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2011.03.011>.
7. Solomonov Yu. S., Georgievskii V. P., Nedbai A. Ya., Andryushin V. A. *Prikladnye zadachi mekhaniki kompozitnykh tsilindricheskikh obolochek* [Applied Problems of Mechanics of Composite Cylindrical Shells]. Moscow, Fizmatlit, 2014, 408 pp (In Russian). EDN: UGLCQJ.
8. Dimitrienko Yu. I. *Mekhanika kompozitnykh konstruksii pri vysokikh temperaturakh* [Mechanics of Composite Structures under High Temperatures]. Moscow, Fizmatlit, 2019, 448 pp. (In Russian)
9. Yonezu A., Yoneda K., Hirakata H., et al. A simple method to evaluate anisotropic plastic properties based on dimensionless function of single spherical indentation – Application to SiC whisker-reinforced aluminum alloy, *Mat. Sci. Eng. A*, 2010, vol. 527, no. 29–30, pp. 7646–7657. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.msea.2010.08.014>.
10. He G., Liu Y., Hammi Y., Bammann D. J., Horstemeyer M. F. A combined viscoelasticity-viscoplasticity-anisotropic damage model with evolving internal state variables applied to fiber reinforced polymer composites, *Mech. Adv. Mater. Struct.*, 2020, vol. 28, no. 17, pp. 7646–7657. DOI: <https://doi.org/10.1080/15376494.2019.1709673>.
11. Yu M.-h. Advances in strength theories for materials under complex stress state in the 20th century, *Appl. Mech. Rev.*, 2002, vol. 55, no. 3, pp. 169–218. DOI: <https://doi.org/10.1115/1.1472455>.
12. Qatu M. S., Sullivan R. W., Wang W. Recent research advances on the dynamic analysis of composite shells: 2000–2009, *Comp. Struct.*, 2010, vol. 93, no. 1, pp. 14–31. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2010.05.014>.

13. Morinière F. D., Alderliesten R. C., Benedictus R. Modelling of impact damage and dynamics in fibre-metal laminates — A review, *Int. J. Impact Eng.*, 2014, vol. 67, pp. 27–38. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijimpeng.2014.01.004>.
14. Vena P., Gastaldi D., Contro R. Determination of the effective elastic-plastic response of metal-ceramic composites based on an incremental variational principle, *Int. J. Plasticity*, 2008, vol. 24, no. 3, pp. 483–508. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2007.07.001>.
15. Brassart L., Stainier L., Doghri I., Delannay L. Homogenization of elasto-(visco) plastic composites based on an incremental variational principle, *Int. J. Plasticity*, 2012, vol. 36, pp. 86–112. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2012.03.010>.
16. Vasiliev V. V., Morozov E. *Advanced Mechanics of Composite Materials and Structural Elements*. Amsterdam, Elsever, 2013, xii+412 pp. EDN: UERHXD. DOI: <https://doi.org/10.1016/C2011-0-07135-1>.
17. Gibson R. F. *Principles of Composite Material Mechanics*. Boca Raton, CRC Press, 2016, xxiii+700 pp. DOI: <https://doi.org/10.1201/b19626>.
18. Akhundov V. M. Incremental carcass theory of fibrous media under large elastic and plastic deformations, *Mech. Compos. Mater.*, 2015, vol. 51, no. 3, pp. 383–396. EDN: MCFUEJ. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11029-015-9509-4>.
19. Rajhi W., Saanouni K., Sidhom H. Anisotropic ductile damage fully coupled with anisotropic plastic flow: Modeling, experimental validation, and application to metal forming simulation, *Int. J. Damage Mech.*, 2014, vol. 23, no. 8, pp. 1211–1256. DOI: <https://doi.org/10.1177/1056789514524076>.
20. Lee E.-H., Stoughton T. B., Yoon J. W. A yield criterion through coupling of quadratic and non-quadratic functions for anisotropic hardening with non-associated flow rule, *Int. J. Plasticity*, 2017, vol. 99, pp. 120–143. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2017.08.007>.
21. Nizolek T. J., Pollock T. M., McMeeking R. M. Kink band and shear band localization in anisotropic perfectly plastic solids, *J. Mech. Phys. Solids*, 2021, vol. 146, 104183. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2020.104183>.
22. Yankovskii A. P. Modeling of non-isothermic viscoelastic-plastic behavior of flexible reinforced plates, *Comput. Cont. Mech.*, 2020, vol. 13, no. 3, pp. 350–370 (In Russian). EDN: MZKPHT. DOI: <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2020.13.3.28>.
23. Yankovskii A. P. Modeling of non-isothermal elastic-plastic behavior of reinforced shallow shells in the framework of a refined bending theory, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2023, vol. 27, no. 1, pp. 119–141 (In Russian). EDN: YRWNPW. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1958>.
24. Yankovskii A. P. Modeling of thermoelastic-visco-plastic deformation of flexible reinforced plates, *Mech. Solids*, 2022, vol. 57, no. 7, pp. 111–133. DOI: <https://doi.org/10.3103/S0025654422070184>.
25. Reissner E. On transverse vibrations of thin shallow elastic shells, *Quart. Appl. Math.*, 1955, vol. 13, no. 2, pp. 169–176. DOI: <https://doi.org/10.1090/qam/69715>.
26. Malmeister A. K., Tamuzh V. P., Teters G. A. *Soprotivlenie zhestkikh polimernykh materialov* [Resistance of Rigid Polymeric Materials]. Riga, Zinatne, 1972, 500 pp. (In Russian)
27. Bogdanovich A. E. *Nelineinye zadachi dinamiki tsilindricheskikh kompozitnykh obolochek* [Nonlinear Problems of the Dynamics of Cylindrical Composite Shells]. Riga, Zinatne, 1987, 295 pp. (In Russian)
28. Ambartsumian S. A. *Obshchaia teoriia anizotropnykh obolochek* [The General Theory of Anisotropic Shells]. Moscow, Nauka, 1974, 446 pp. (In Russian)
29. Reddy J. N. *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells. Theory and Analysis*. Boca Raton, CRC Press, 2004, xxiii+831 pp. DOI: <https://doi.org/10.1201/b12409>.
30. Andreev A. *Uprugost' i termouprugost' sloistykh kompozitnykh obolochek. Matematicheskaya model' i nekotorye aspekty chislennogo analiza* [Elasticity and Thermoelasticity of Layered Composite Shells. Mathematical Model and Some Aspects of Numerical Analysis]. Saarbrücken, Palmarium Academic Publ., 2013, 93 pp (In Russian). EDN: QZAPNP.

31. Bolotin V. V., Novichkov Yu. N. *Mekhanika mnogosloinykh konstrukttsii* [Mechanics of Multilayer Structures]. Moscow, Mashinostroenie, 1980, 375 pp. (In Russian)
32. Kulikov G. M. Thermoelasticity of flexible multilayer anisotropic shells, *Mech. Solids*, 1994, vol. 29, no. 2, pp. 27–35. EDN: **TVBRLF**.
33. Houlston R., DesRochers C. G. Nonlinear structural response of ship panels subjected to air blast loading, *Comp. Struct.*, 1987, vol. 26, no. 1–2, pp. 1–15. DOI: [https://doi.org/10.1016/0045-7949\(87\)90232-X](https://doi.org/10.1016/0045-7949(87)90232-X).
34. Khazhinskii G. M. *Modeli deformirovaniia i razrusheniia metallov* [The Models of Metal Deformation and Destruction]. Moscow, Nauchnyi Mir, 2011, 231 pp. (In Russian)
35. Lukanin V. N., Shatrov M. G., Kamfer G. M., et al. *Teplotekhnika* [Heat Engineering], ed. V. N. Lukanin. Moscow, Vyssh. Shk., 2003, 671 pp. (In Russian). EDN: **QMHYSH**.