



УДК 622.276.1:519.6:532.5

Расчетная модель вертикальной скважины с трещиной автоматического гидравлического разрыва пласта для интерпретации параметров при гидродинамических исследованиях скважин

Д. Н. Майков^{1,2}, С. В. Исупов¹, С. С. Макаров²

¹ ООО «Сиама Мастер», Россия, 634003, Томск, ул. Белая, 3.

² Удмуртский федеральный исследовательский центр
Уральского отделения Российской академии наук,
Россия, 426067, Ижевск, ул. Т. Барамзиной, 34.

Аннотация

Представлена новая расчетная модель вертикальной скважины с трещиной гидравлического разрыва пласта, позволяющая учитывать изменение полудлины трещины при интерпретации данных гидродинамических исследований скважин (ГДИС). Основу модели составляет численный алгоритм, основанный на аналитическом решении с использованием оригинальной зависимости изменения полудлины трещины от времени и ее геометрических параметров. Данная зависимость получена на основе анализа промысловых данных ГДИС.

Модель реализована с использованием уравнения трещины бесконечной проводимости и принципа суперпозиции для описания изменения геометрии трещины. Принцип суперпозиции применен через последовательность запусков и остановок фиктивных скважин с различными полудлинами трещин, где каждая скважина активируется на определенный временной интервал, после чего останавливается.

Установлено, что изменение полудлины трещины на этапе ее закрытия описывается функциональной зависимостью от начальной и конечной полудлины трещины, а также от времени работы скважины. Результаты расчетов по предложенной модели, учитывающей зависимость полудлины трещины при определении давления в вертикальной скважине с трещиной гидравлического разрыва пласта, демонстрируют хорошее согласование с экспериментальными данными. На основе разработанного численного алгоритма проведен параметрический анализ модели

Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ
Научная статья

© Коллектив авторов, 2025

© СамГТУ, 2025 (составление, дизайн, макет)

 Контент публикуется на условиях лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru) (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Образец для цитирования

Майков Д. Н., Исупов С. В., Макаров С. С. Расчетная модель вертикальной скважины с трещиной автоматического гидравлического разрыва пласта для интерпретации параметров при гидродинамических исследованиях скважин // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2025. Т. 29, № 1. С. 91–108. EDN: [AMYRIA](#). DOI: [10.14498/vsgtu2080](https://doi.org/10.14498/vsgtu2080).

Сведения об авторах

Дмитрий Николаевич Майков  <https://orcid.org/0000-0002-6526-4870>

ведущий специалист¹, младший научный сотрудник²; e-mail: dmaykov@integra.ru

Сергей Вадимович Исупов  <https://orcid.org/0009-0006-5599-4366>

начальник отдела автоматизации¹; e-mail: svisupov@integra.ru

Сергей Сергеевич Макаров  <https://orcid.org/0000-0003-1500-6950>

доктор технических наук; ведущий научный сотрудник²; e-mail: ssmak15@mail.ru

вертикальной скважины с трещиной гидравлического разрыва пласта. Выявлено влияние конечной полудлины трещины и длительности ее закрытия на изменение давления и производную давления в скважине.

Результаты численного анализа подтверждают обоснованность использования предложенной зависимости изменения полудлины трещины при расчете эксплуатационных режимов. Применение данной модели позволяет более точно интерпретировать данные ГДИС с учетом изменяющейся длины трещины.

Ключевые слова: скважина, трещина, автоматический гидроразрыв, аналитическое решение, принцип суперпозиции, функции зависимости полудлины трещины, параметрический анализ.

Получение: 31 января 2024 г. / Исправление: 7 февраля 2025 г. /

Принятие: 21 февраля 2025 г. / Публикация онлайн: 11 марта 2025 г.

Введение. При эксплуатации нагнетательных скважин происходит автоматический гидроразрыв пласта (автоГРП), вызванный высоким давлением закачки флюида. Геометрия трещин, образующихся в результате автоГРП, в частности, их длина, напрямую зависит от давления на забое скважины. В процессе дальнейшей эксплуатации скважин геометрия трещин может изменяться, что негативно влияет на разработку месторождений из-за незапланированных изменений в системе «скважина–пласт». Наличие изменений геометрии трещин можно отследить с помощью гидродинамических исследований скважин (ГДИС).

В связи с этим разработка новых модельных решений, описывающих работу скважины с учетом изменяющейся геометрии трещины автоГРП во времени, является актуальной задачей. Полученные результаты позволяют повысить достоверность оценки эксплуатационных параметров скважин при разработке месторождений углеводородов.

Во многих работах, например [1–7], рассматривается процесс фильтрации флюида к скважине с трещиной гидроразрыва для моделей равномерного потока, конечной и бесконечной проводимости, постоянного размера, заполненной проппантом. В меньшей степени в литературе приведены результаты исследований процесса формирования трещины при автоГРП и фильтрации флюида к скважине с трещиной автоГРП.

Так, в работе [8] исследован процесс фильтрации в нагнетательной скважине с трещиной ГРП на раннем временном этапе методом падения давления. В работе [9] с использованием метода свертки и учета закрытия трещины получено решение уравнения пьезопроводности, приведенного в работе [8]. В работе [11], основанной на исследованиях [8–10], представлено полуаналитическое решение уравнения пьезопроводности для модели скважины с трещиной автоГРП. Решение получено при разделении влияния ствола скважины на ствол и трещину с допущением, что полудлина и высота трещины остаются постоянными при снижении давления. В работе [12] описано геомеханическое моделирование направления и траектории развития трещин гидроразрыва пласта при разработке низкопроницаемых коллекторов. В работе [13] представлены результаты численного моделирования закачки ньютоновской жидкости в скважину с образованием трещины гидравлического

разрыва в продуктивном пласте, а также рассмотрено влияние проницаемости пласта и эффекта ствола скважины на развитие техногенной трещины, давление в скважине и расход жидкости на ее забое. В работе [14] предложен упрощенный подход к моделированию самопроизвольного развития трещины при закачке ньютоновской жидкости в однородный изотропный пласт, а в [15] представлена модель фильтрации двухфазного потока в трехмерных пластах с учетом механических свойств пород, оценки пластовых напряжений и динамического роста трещин, вызванных нагнетанием. В работе [16] описана модель роста трещины при закачке полимера. В работах [17, 18] предложен метод оценки длины техногенной трещины в зависимости от забойного давления нагнетания, а также рассмотрены техногенные и петрологические факторы, влияющие на процессы инициации, распространения и деградации трещин автоГРП. В работе [19] представлена модель для расчета напряженного состояния пласта в присутствии произвольно ориентированных трещин и неоднородного поля давления, основанная на континуальной теории фильтрации [20], дополненной критерием максимальных растягивающих напряжений для расчета траектории растущих трещин. В работе [21] использована сопряженная гидрогеомеханическая модель сектора разработки, учитывающая развитие автоГРП в нагнетательных скважинах рядной системы разработки.

Настоящая работа посвящена разработке расчетной модели вертикальной скважины с трещиной автоматического гидравлического разрыва пласта для интерпретации параметров при гидродинамических исследованиях скважин.

1. Постановка задачи. Рассмотрим вертикальную скважину с трещиной, схема которой представлена на рис. 1.

Анализ диагностических графиков исследований скважин, в которых наблюдался эффект закрытия трещины автоГРП, позволил выделить характерные участки, на которых происходит изменение производной функции давления (см. рис. 2). Первый участок (I) соответствует линейному режиму течения к трещине с исходной геометрией. На втором участке (II) наблюдается закрытие трещины, что сопровождается характерным изгибом производной.

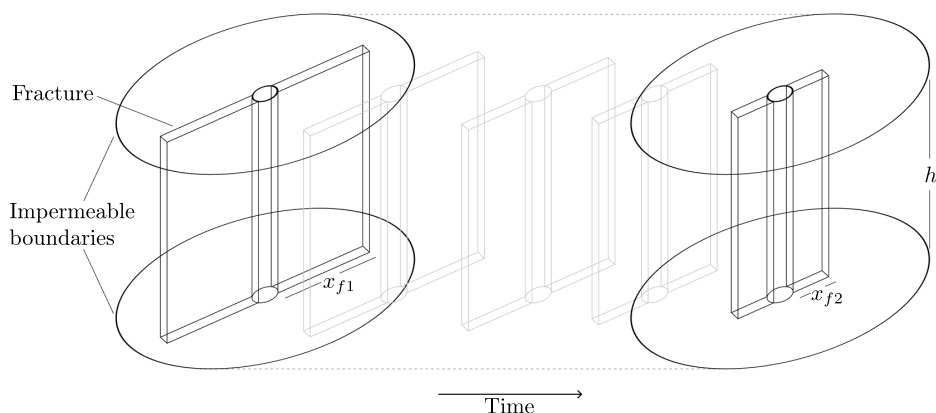


Рис. 1. Схема вертикальной скважины с изменяющейся трещиной
[Figure 1. Scheme of a vertical well with a changing fracture]

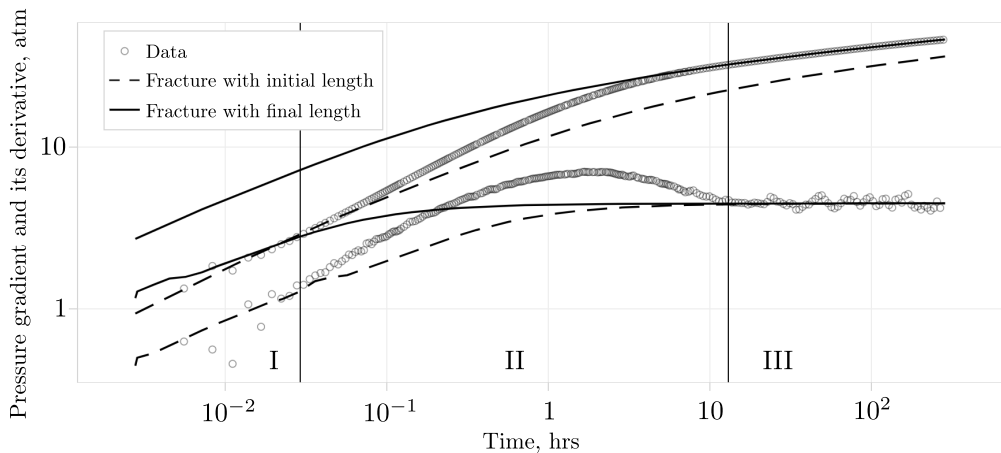


Рис. 2. Пример диагностического графика с трещиной автоГРП
[Figure 2. Example of log-log plot with waterflooding fracturing]

Третий участок (III) диагностического графика описывает радиальный режим течения к трещине со стабильной измененной геометрией.

При разработке модели вертикальной скважины с трещиной автоГРП предполагается, что при постоянном давлении трещина имеет постоянную длину, а при переменном давлении ее размер функционально зависит от изменения давления. Основой описания процесса изменения геометрии трещины является уравнение трещины бесконечной проводимости [5–7], а также принцип суперпозиции [23, 24]. Влияние соседних скважин и влияние ствола скважины (ВСС) не учитывается.

Кроме того, приняты следующие допущения:

- 1) коллектор представляет собой бесконечный горизонтальный пласт с заданной постоянной толщиной, с однородной структурой и физическими свойствами;
- 2) кровля и подошва пласта являются непроницаемыми границами;
- 3) скважина является вертикальной и вскрывает пласт на всю толщину;
- 4) скважина обладает трещиной, которая вскрывает пласт по всей толщине, имеет однородную структуру и симметрична относительно вертикального ствола скважины;
- 5) фильтрация флюида является однофазной и изотермической.

2. Численный алгоритм. За основу построения модели взято выражение для расчета безразмерного давления в вертикальной скважине с трещиной равномерного потока, вскрывающей пласт по всей толщине [6, 7]:

$$\bar{p}_d(x_d, y_d, s) = \frac{1}{2x_{fd}s} \int_{-x_{fd}}^{x_{fd}} K_0(\sqrt{s} \sqrt{(x_d - x)^2 + y_d^2}) dx, \quad x_{fd} = \frac{x_f}{r_w}, \quad (1)$$

где K_0 — модифицированная функция Бесселя второго рода нулевого порядка; x_d — безразмерная координата x ; y_d — безразмерная координата y ; x_f — полудлина трещины; r_w — радиус скважины; x_{fd} — безразмерная полудлина трещины; $\bar{p}_d$ — безразмерное давление; s — переменная преобразования Лапласа.

При расчете безразмерного давления $\bar{p}_d$ в скважине по модели трещины равномерного потока величины x_d и y_d принимаются равными нулю. В работе [5] показано, что при $x_d = 0.732$ расчет безразмерного давления $\bar{p}_d$ по уравнению (1) совпадает с расчетом для модели трещины бесконечной проводимости. В данной работе используется модель трещины бесконечной проводимости, поэтому принимается $x_d = 0.732$ и $y_d = 0$. Обратное преобразование Лапласа выполняется с использованием алгоритма Стефеста [22].

Процесс изменения геометрии полудлины трещины описывается с помощью принципа суперпозиции [23, 24]. Изменение длины трещины моделируется путем последовательного запуска и остановки фиктивных (модельных) скважин с различными полудлинами трещины, где каждая скважина активируется на определенный интервал времени, а затем останавливается. Соответственно, поведение давления в вертикальной скважине с автоГРП описывается уравнением

$$p(t) = p_i + \sum_{j=1}^{N-1} [\Delta p(x_{fj}, t - t_{j-1}) - \Delta p(x_{fj}, t - t_j)] + \Delta p(x_{fN}, t - t_{N-1}), \quad (2)$$

где t — время; $p(t)$ — расчетное давление в момент времени t ; p_i — начальное давление; Δp — функция перепада давления модели трещины; N — общее количество изменяющихся по времени полудлин трещины; x_{fj} — рассматриваемая полудлина трещины; t_j — время запуска рассматриваемой фиктивной скважины.

В уравнении (2) индекс $j = 1$ соответствует трещине с исходной полудлиной, а $j = N$ — трещине с конечной полудлиной. Полудлина трещины для промежуточных элементов имеет функциональную зависимость от давления.

Результаты тестовых расчетов по уравнению (2) показали, что точность результатов зависит от количества разбиений полудлин трещины на этапе ее закрытия. С увеличением количества разбиений погрешность уменьшается. Сложность расчета, согласно принципу суперпозиции, для каждого последующего шага растет линейно, а расчет всей функции в целом имеет квадратичную сложность.

Изменение полудлины трещины $\bar{x}_f$ на этапе закрытия трещины описывается функциональной зависимостью от начальной x_{f1} и конечной x_{fN} полудлин трещины, а также от расчетного давления. Поскольку давление также зависит от полудлины трещины x_f согласно уравнению (1), возникает циклическая зависимость. Для упрощения дальнейших исследований зависимость полудлины трещины определяется не от давления, а от времени, что не искажает физический смысл, так как давление также является функцией времени:

$$\bar{x}_f = f(t, x_{f1}, x_{fN}).$$

3. Определение функциональной зависимости полудлины трещины. Для определения функциональной зависимости использовались реальные данные ГДИС, в которых наблюдался эффект закрытия трещины автоГРП. Данные были предоставлены ООО «Сиама Мастер» на основе информации, полученной от заказчика с различных объектов. В рамках текущей работы было отобрано 10 исследований ГДИС, где явно наблюдался данный эффект.

Для анализа функции закрытия трещины определялись начальные параметры модели: начальная полудлина трещины x_{fs} , конечная полудлина трещины x_{fe} , время начала закрытия трещины t_s и время окончания закрытия трещины t_e . Алгоритм определения этих параметров представлен ниже (см. рис. 3):

- 1) определение проницаемости по участку радиального режима течения;
- 2) определение начальной полудлины трещины по линейному режиму течения с использованием полученной проницаемости;
- 3) определение конечной полудлины трещины, описывающей давление на поздних временах, с использованием полученной проницаемости;
- 4) визуальное определение времени начала и окончания процесса закрытия трещины на диагностическом графике Бурде [26].

Для построения диагностического графика использовалась упрощенная история работы скважины, включающая единственный продолжительный период закачки, что соответствует реальным условиям эксплуатации скважин согласно отчетам по закачке флюида.

После определения временного интервала, в течение которого происходило закрытие трещины, а также начальных и конечных полудлин трещины моделировался процесс закрытия с использованием функции суперпозиции (2). Временной интервал был разбит на логарифмические шаги с дискретностью 20 точек на $\log$ -цикл. В каждом временном интервале определялось значение полудлины трещины x_{fi} , обеспечивающее соответствие модели исходным данным исследования по давлению.

Поиск значений полудлины трещины осуществлялся с помощью алгоритма оптимизации Левенберга—Марквардта [25]. Целевая функция поиска имела вид

$$\epsilon = \sum_{i=1}^N [f_i(\bar{x}_f) - g_i],$$

где индекс i соответствует определенному моменту времени измерения; N — общее число моментов измерения; f и g — векторы вычисленных и измерен-

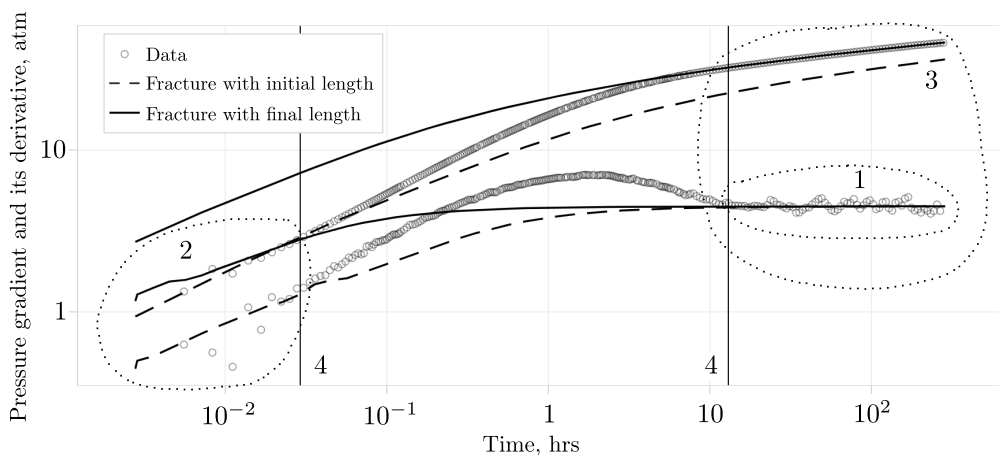


Рис. 3. Алгоритм определения начальных параметров модели автоГРП

[Figure 3. Algorithm for determining initial parameters of the waterflooding fracturing model]

ных значений давления; $\bar{x}_f$ — вектор искоемых полудлин трещины. Вектор вычисленных значений рассчитывался по уравнению (2).

Для унификации всех экспериментальных данных в одном диапазоне они были приведены к безразмерному виду. Значения времени и полудлины трещины были логарифмированы по основанию 10, а затем нормализованы в диапазон от 0 до 1 по линейной зависимости, где $\log_{10}(x_{fs}) \rightarrow 1$, $\log_{10}(x_{fe}) \rightarrow 0$, $\log_{10}(t_s) \rightarrow 0$, $\log_{10}(t_e) \rightarrow 1$.

Результат поиска полудлин трещин с учетом преобразования показан на рис. 4, где видна схожесть распределения зависимости для экспериментальных данных с функцией $\cos(x)$. Итоговая функция полудлины трещины с учетом обратного преобразования из безразмерных величин имеет вид

$$\begin{aligned} x_f(t) &= 10^{g[v(t), \log_{10}(x_{fe}), \log_{10}(x_{fs})]}, \\ v(t) &= 0.5 + 0.5 \cos(\pi u[\log_{10}(t), \log_{10}(t_s), \log_{10}(t_e)]), \end{aligned} \quad (3)$$

$$u(x, x_{\min}, x_{\max}) = \frac{x - x_{\min}}{x_{\max} - x_{\min}}, \quad g(x_n, x_{\min}, x_{\max}) = x_{\min} + x_n(x_{\max} - x_{\min}).$$

Здесь x_{fs} — начальная полудлина трещины; x_{fe} — конечная полудлина трещины; t_s — время начала закрытия трещины; t_e — время окончания закрытия трещины; $v(t)$ — промежуточная функция, зависящая от времени t ; $u(x, x_{\min}, x_{\max})$ — промежуточная функция, аргументами которой являются параметры x , $x_{\min}$ и $x_{\max}$; $g(x_n, x_{\min}, x_{\max})$ — промежуточная функция, аргументами которой являются параметры x_n , $x_{\min}$ и $x_{\max}$.

Следует отметить, что существуют различные функции, способные описать полученные экспериментальные данные. В данной работе выбор функции обоснован ее простотой и соответствием эмпирическим наблюдениям.

На рис. 4 приведена зависимость изменения длины трещины, описываемая уравнением (3), в сравнении с экспериментальными результатами. Полученная зависимость изменения полудлины трещины от времени (см. рис. 4) хорошо описывает экспериментальные данные на всем временном интервале.

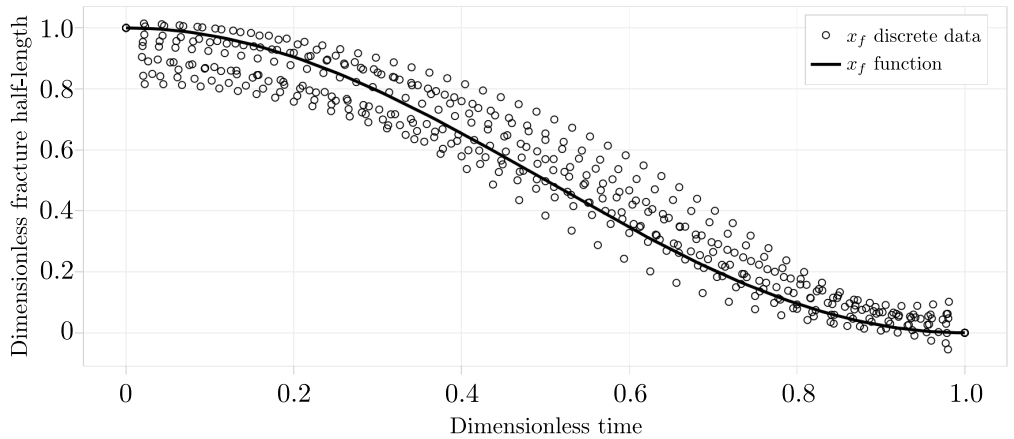


Рис. 4. Зависимость полудлины трещины от времени
[Figure 4. Fracture half-length dependence on time]

Среднеквадратичное отклонение расчетных значений полудлины трещины от экспериментальных данных ГДИС составило 4.31 %.

4. Верификация зависимости по расчету полудлины трещины. Верификация полученной зависимости (3) для расчета полудлины трещины проводилась на основе данных трех исследований ГДИС, в которых также наблюдался эффект автоГРП. Сопоставление результатов, полученных по разработанной модели, с промысловыми данными для этих случаев представлено на диагностических графиках Бурде (см. рис. 5). Параметры моделей приведены в табл. 1. Для построения диагностического графика использовалась упрощенная история работы скважины, включающая единственный продолжительный период закачки.

На диагностических графиках (рис. 5) видно, что рассчитанное давление по модели с использованием предложенной зависимости (3) изменения полудлины трещины хорошо согласуется с результатами исследований ГДИС реальных скважин.

Таблица 1

Основные параметры модели [The main model parameters]

Parameters	Values		
	Fig. 5, a	Fig. 5, b	Fig. 5, c
Layer height, h (m)	16.2	10.7	15
Layer permeability, k (mD)	15.367	16.3909	1.6911
Total compressibility, ct (atm ⁻¹)	$5.021 \cdot 10^{-5}$	$8.604 \cdot 10^{-5}$	$4.878 \cdot 10^{-5}$
Porosity, ϕ	0.15	0.16	0.17
Fluid volume factor, B (m ³ /st.m ³)	1	1	1.045
Fluid viscosity, μ (cp)	1.21	1.03	0.35
Rate, q (m ³ /day)	88	109	56
Initial fracture half-length, x_{fs} (m)	18.704	8.8887	4.9078
Final fracture half-length, x_{fe} (m)	4.2315	3.0296	2.384
Fracture closure start time, t_s (hour)	0.0316	0.07943	0.07943
Fracture closure end time, t_e (hour)	14.1254	6.3096	3.9811

5. Численный анализ параметров модели вертикальной скважины с трещиной автоГРП. Численный анализ проводился для модели вертикальной скважины с трещиной автоГРП на основе уравнений (2) и (3). Исходные данные, используемые для расчета по предлагаемой модели, приведены в табл. 2. Для расчетов использовалась модель трещины бесконечной проводимости (уравнение (1)).

Результаты расчета давления для заданных модельных условий представлены на рис. 6, на котором выделяются три этапа изменения трещины автоГРП: начальный этап, этап закрытия трещины и конечный этап. Начальный этап (в интервале времени 10^{-5} –0.01 ч) соответствует расчету по модели трещины бесконечной проводимости с начальной полудлиной трещины $x_{fs} = 200$ м. Этап закрытия трещины (0.01–1 ч) соответствует изменению полудлины трещины от начальной x_{fs} до конечной x_{fe} . Конечный этап (1 – 10^5 ч) соответствует расчету давления по модели трещины бесконечной проводимости с конечной полудлиной $x_{fe} = 50$ м. Полное соответствие расчета модели трещины бесконечной проводимости при $x_{fe} = 50$ м наблюдается с 10 ч, что связано с применением принципа суперпозиции.

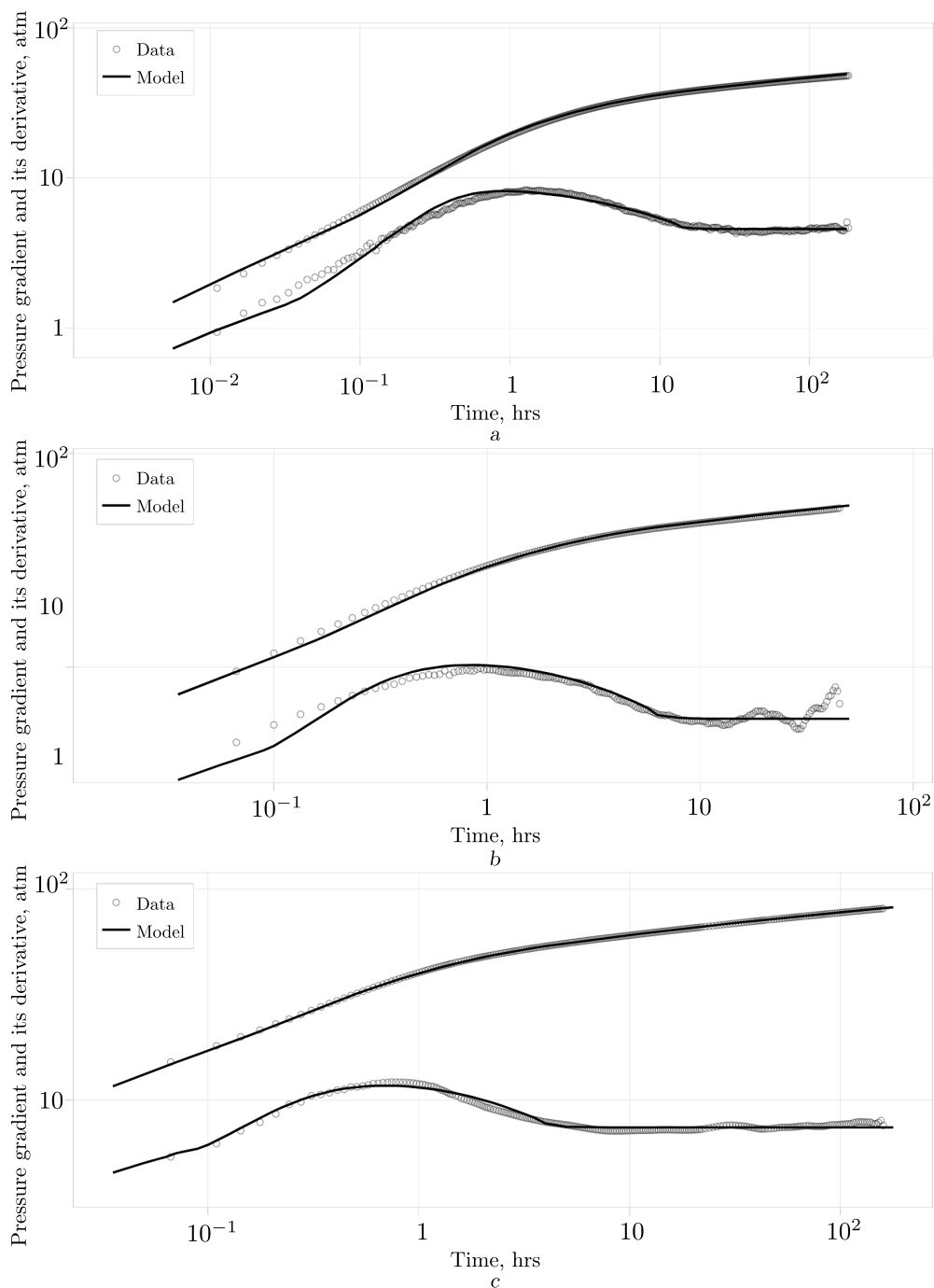


Рис. 5. Сравнение расчетных данных модели с результатами гидродинамических исследований скважин для параметров, приведенных в табл. 1: *a* — столбец 1; *b* — столбец 2; *c* — столбец 3

[Figure 5. Comparison of the model calculations with the well test analysis data for parameters listed in Table 1: *a* — column 1; *b* — column 2; *c* — column 3]

На рис. 7 показано влияние длительности закрытия трещины на изменение давления в скважине. Из рис. 7 видно, что при увеличении времени завершения закрытия трещины t_e увеличивается длительность процесса закрытия, а при уменьшении t_e возрастает изменение давления в интервале времени закрытия трещины. При малых значениях t_e (менее 10^{-2} ч) на производной может наблюдаться пик. Чем больше время закрытия трещины, тем плавнее происходит изменение перепада давления. С момента начала процесса и до 0.01 ч, а также после 10 ч расчетные значения перепада давления для всех случаев идентичны.

На рис. 8 показано влияние конечной полудлины трещины на изменение давления в скважине. Из рис. 8 видно, что с уменьшением конечной полудлины трещины x_{fe} увеличивается изменение давления с момента начала закрытия трещины (0.01 ч). При уменьшении x_{fe} в 2 раза (с 200 до 100 м) изменение давления в скважине на последней расчетной точке 10^5 ч увеличивается в 1.145 раза (с 44.672 до 51.132 атм). При уменьшении x_{fe} в 4 раза (с 200 до 50 м) изменение давления увеличивается в 1.288 раза (с 44.672 до

Таблица 2

Основные параметры модели [The main model parameters]

Parameter	Value
Layer height, h	10 m
Layer permeability, k	100 mD
Total compressibility, c_t	0.00005 atm ⁻¹
Porosity, ϕ	0.2
Fluid volume factor, B	1 m ³ /st.m ³
Fluid viscosity, μ	5 cp
Rate, q	100 m ³ /day
Initial fracture half-length, x_{fs}	200 m
Final fracture half-length, x_{fe}	50 m
Changing stage start time, t_s	0.01 hour
Changing stage end time, t_e	1 hour

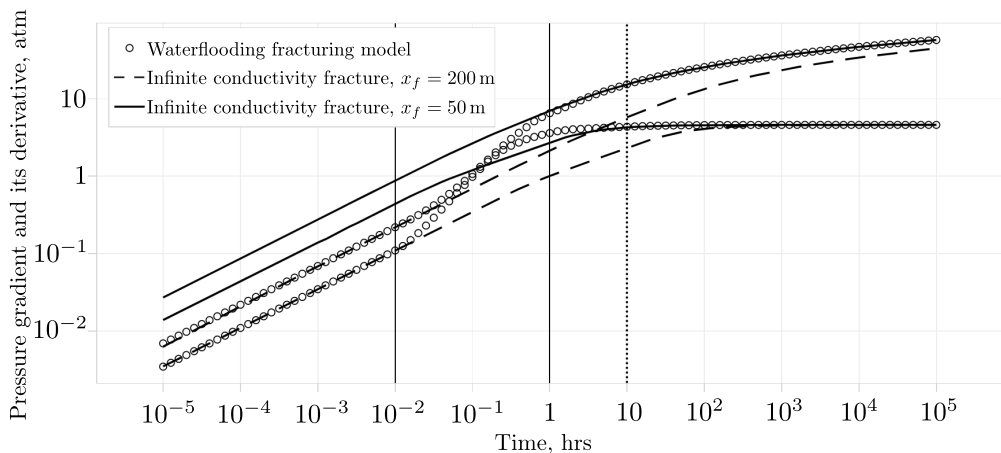


Рис. 6. Расчетное давление по модели трещины автоГРП для параметров, приведенных в табл. 2

[Figure 6. Calculated pressure according to the waterflooding fracturing model for parameters listed in Table 2]

57.516 атм). Производная изменения давления в интервале времени закрытия трещины (0.01–1 ч) возрастает с уменьшением x_{fe} . После 500 ч производная изменения давления для всех случаев идентична. При $x_{fe} = 200$ м модель вертикальной скважины с трещиной автоГРП полностью соответствует модели трещины бесконечной проводимости с полудлиной $x_f = 200$ м. Начальный этап (до 0.01 ч) для всех случаев также идентичен.

На рис. 9 показано влияние проницаемости пласта k на изменение давления в скважине. Из рис. 9 видно, что с уменьшением проницаемости пласта k увеличивается изменение давления и его производная на всем временном интервале. При уменьшении k в 10 раз (с 1000 до 100 мД) изменение давления в скважине на последней расчетной точке 10^5 ч увеличивается в 8.443

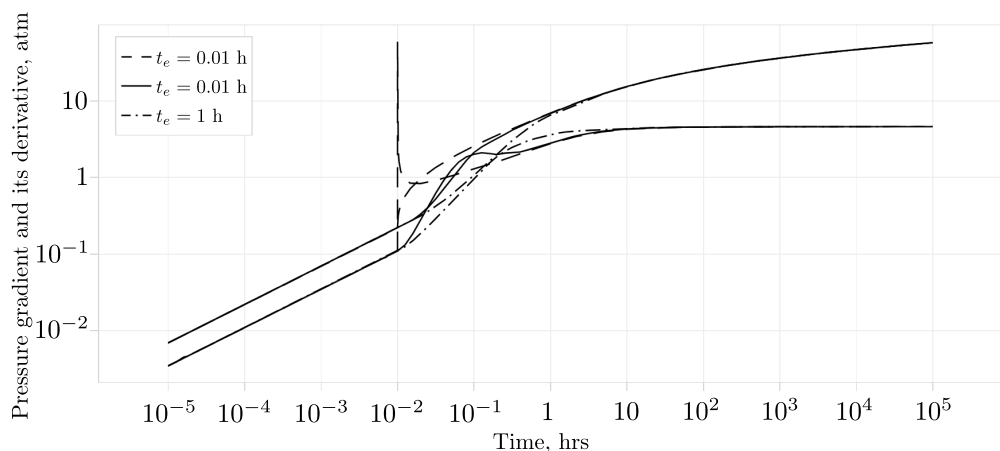


Рис. 7. Влияние длительности закрытия трещины на изменение давления для параметров, приведенных в табл. 2

[Figure 7. Influence of the fracture closure duration on pressure change for parameters listed in Table 2]

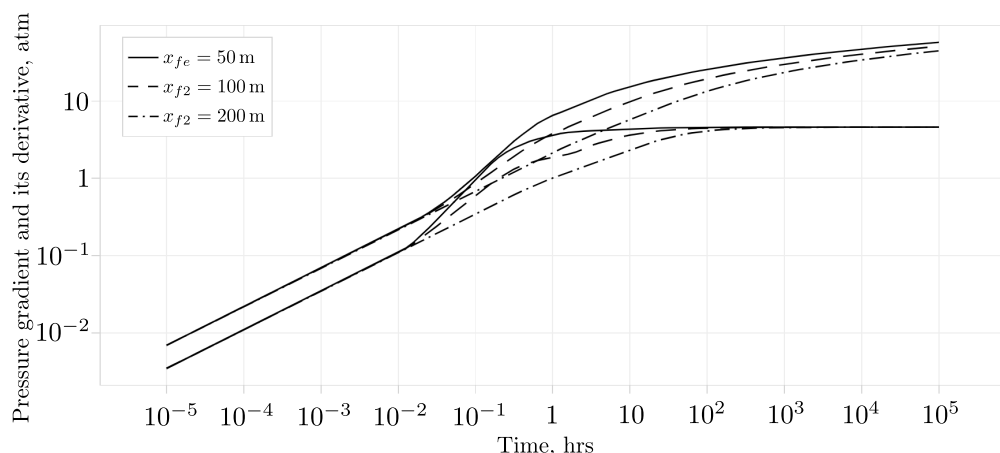


Рис. 8. Влияние конечной полудлины трещины на изменение давления для параметров, приведенных в табл. 2

[Figure 8. Influence of the final fracture half-length on pressure change for parameters listed in Table 2]

раза (с 6.812 до 57.516 атм). При уменьшении k в 100 раз (с 1000 до 10 мД) изменение давления увеличивается в 68.865 раза (с 6.812 до 469.119 атм).

На рис. 10 показано влияние скин-фактора S на изменение давления в скважине. Для учета скин-фактора S в уравнении (1) использованы положения, изложенные в работе [27]. Из рис. 10 видно, что с увеличением скин-фактора S увеличивается изменение давления на всем временном интервале. При увеличении S от 0 до 0.5 изменение давления в скважине на последней расчетной точке 10^5 ч увеличивается в 1.08 раза (с 57.516 до 62.122 атм). При увеличении S от 0 до 1 изменение давления увеличивается в 1.16 раза (с 57.516 до 66.727 атм). Производная изменения давления для всех случаев идентична на всем временном интервале.

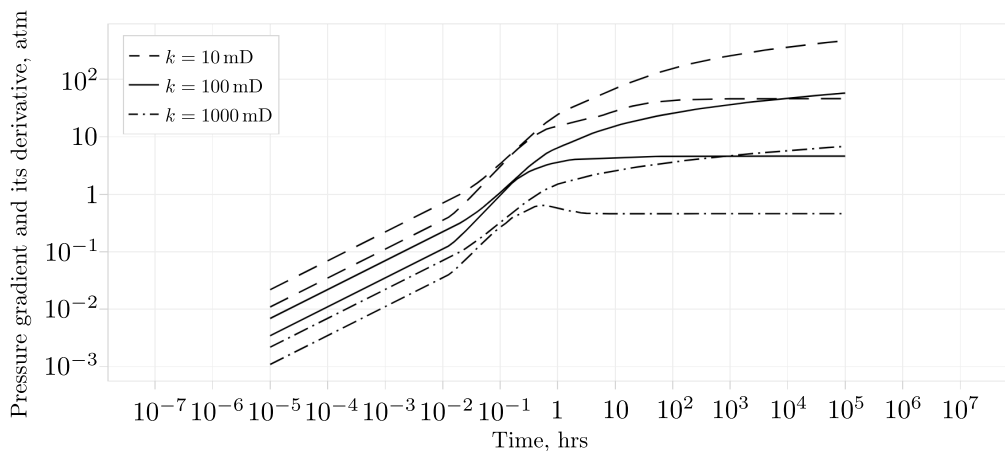


Рис. 9. Влияние проницаемости пласта на изменение давления для параметров, приведенных в табл. 2

[Figure 9. Influence of the layer permeability on pressure change for parameters listed in Table 2]

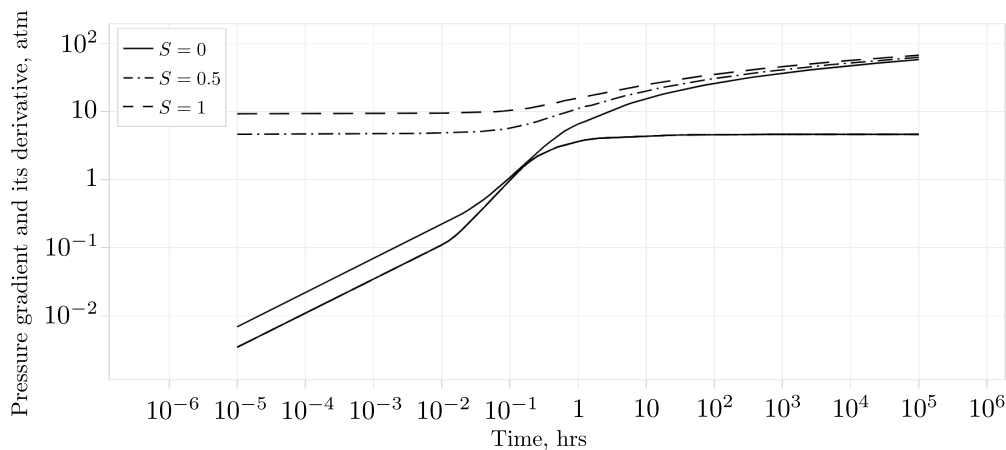


Рис. 10. Влияние скин-фактора на изменение давления для параметров, приведенных в табл. 2

[Figure 10. Influence of skin on pressure change for parameters listed in Table 2]

Выводы. В статье представлена новая расчетная модель вертикальной скважины с трещиной автоматического гидравлического разрыва пласта, позволяющая учитывать изменение полудлины трещины во времени при интерпретации параметров ГДИС. Модель основана на уравнении трещины бесконечной проводимости и принципе суперпозиции для описания изменения параметров трещины во времени.

Предложена функциональная зависимость изменения полудлины трещины, полученная на основе промысловых данных ГДИС, где наблюдался эффект автоГРП. Результаты расчетов по предлагаемой модели с использованием функции изменения полудлины трещины хорошо согласуются с экспериментальными данными по давлению. Функция описывает дискретные данные полудлин трещины на всем расчетном интервале, при этом максимальное среднеквадратичное отклонение между модельными и экспериментальными значениями составило 4.31 %.

В результате численного анализа параметров модели вертикальной скважины с трещиной автоГРП показано, что использование предложенной зависимости изменения полудлины трещины при расчете эксплуатационных режимов является обоснованным.

Конкурирующие интересы. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов в отношении авторства и публикации данной статьи.

Авторский вклад и ответственность. Все авторы внесли равный вклад в разработку концепции статьи и написание рукописи. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной версии рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Исследование выполнено без привлечения внешнего финансирования.

Благодарность. Авторы выражают благодарность рецензентам за внимательное прочтение статьи, а также за ценные предложения и комментарии, которые способствовали улучшению работы.

Библиографический список

1. Nolte K. G. Determination of proppant and fluid schedules from fracturing-pressure decline // *SPE Prod. Eng.*, 1986. vol. 1, no. 4. pp. 255–265, SPE-13278-PA. DOI: <https://doi.org/10.2118/13278-PA>.
2. Cinco-Ley H., Samaniego F., Dominguez N. Transient pressure behavior for a well with a finite-conductivity vertical fracture // *SPE J.*, 1978. vol. 18, no. 4. pp. 253–264, SPE-6014-PA. DOI: <https://doi.org/10.2118/6014-PA>.
3. Cinco-Ley H., Samaniego F. Transient pressure analysis for fractured wells // *J. Pet. Technol.*, 1981. vol. 33, no. 9. pp. 1749–1766, SPE-7490-PA. DOI: <https://doi.org/10.2118/7490-PA>.
4. Wong D. W., Harrington A. G., Cinco-Ley H. Application of the pressure derivative function in the pressure-transient testing of fractured wells // *SPE Form. Eval.*, 1986. vol. 1, no. 5. pp. 470–480, SPE-13056-PA. DOI: <https://doi.org/10.2118/13056-PA>.
5. Gringarten A. C., Ramey H. J., Raghavan R. Unsteady-state pressure distributions created by a well with a single infinite-conductivity vertical fracture // *SPE J.*, 1974. vol. 14, no. 4. pp. 347–360, SPE-4051-PA. DOI: <https://doi.org/10.2118/4051-PA>.
6. Ozkan E., Raghavan R. New solutions for well-test-analysis problems: Part 1 – Analytical considerations // *SPE Form. Eval.*, 1991. vol. 6, no. 3. pp. 359–368, SPE-18615-PA. DOI: <https://doi.org/10.2118/18615-PA>.

7. Ozkan E., Raghavan R. New solutions for well-test-analysis problems: Part 2 – Computational considerations and applications // *SPE Form. Eval.*, 1991. vol. 6, no. 3. pp. 369–378, SPE-18616-PA. DOI: <https://doi.org/10.2118/18616-PA>.
8. Hagoort J. *Waterflood-induced hydraulic fracturing*: PhD Thesis. Delft Techn. Univ., 1981. <http://resolver.tudelft.nl/uuid:93b1fede-e03e-48d7-99c9-1c709d69397c>.
9. Koning E. J. L. *Waterflooding under fracturing conditions*: PhD Thesis. Delft Techn. Univ., 1988. <http://resolver.tudelft.nl/uuid:c0bd1703-8cc5-46e0-a724-142a879298bd>.
10. Larsen L., Bratvold R. B. Effects of propagating fractures on pressure-transient injection and fall-off data // *SPE Form. Eval.*, 1994. vol. 9, no. 2. pp. 105–114, SPE-20580-PA. DOI: <https://doi.org/10.2118/20580-PA>.
11. van den Hoek P. J. Pressure transient analysis in fractured produced water injection wells // *SPE Asia Pacific Oil Gas Conf. Exhib.*, 2002, SPE-77946-MS. DOI: <https://doi.org/10.2118/77946-MS>.
12. Давлетова А. Р., Бикбулатова Г. Р., Федоров А. И., Давлетбаев А. Я. Геомеханическое моделирование направления и траектории развития трещин гидроразрыва пласта при разработке низкопроницаемых коллекторов // *Научно-технический вестник ОАО “НК Роснефть”*, 2014. № 1. С. 40–43. EDN: **RZSVCV**.
13. Давлетбаев А. Я., Мухаметова З. С. Моделирование закачки жидкости в скважину с развитием трещины гидравлического разрыва пласта // *Инж.-физ. ж.*, 2019. Т. 92, № 4. С. 1074–1082. EDN: **WDYTNQ**.
14. Губайдуллин М. Р., Давлетбаев А. Я., Штинов В. А. [и др.] Численное исследование самопроизвольного развития трещины автоГРП в нагнетательной скважине // *Вестн. Акад. наук Республики Башкортостан*, 2022. Т. 45, № 4. С. 47–59. EDN: **ECSMZY**. DOI: https://doi.org/10.24412/1728-5283_2022_4_47_59.
15. Bhardwaj P., Hwang J., Manchanda R., Sharma M. Injection induced fracture propagation and stress reorientation in waterflooded reservoirs // *SPE Annual Techn. Conf. Exhib.*, 2016, SPE-181883-MS. DOI: <https://doi.org/10.2118/181883-MS>.
16. Lee K., Huh C., Sharma M. Impact of fracture growth on well injectivity and reservoir sweep during waterflood and chemical EOR processes // *SPE Annual Techn. Conf. Exhib.*, 2011, SPE-146778-MS. DOI: <https://doi.org/10.2118/146778-MS>.
17. Сюндюков А. В., Сагитов Д. К. Факторы влияния на развитие трещин авто-ГРП // *Изв. вузов. Нефть и газ*, 2023. № 1. С. 73–84. EDN: **YWOMBX**. DOI: <https://doi.org/10.31660/0445-0108-2023-1-73-84>.
18. Сюндюков А. В., Сагитов Д. К. Метод оценки длины техногенной трещины в зависимости от забойного давления нагнетания // *Проблемы сбора, подготовки и транспорта нефти и нефтепродуктов*, 2023. № 2. С. 40–51. EDN: **XVZVPR**. DOI: <https://doi.org/10.17122/ntj-oil-2023-2-40-51>.
19. Федоров А. И., Давлетова А. Р. Симулятор напряженного состояния пласта для определения направления развития трещин // *Геофизические исследования*, 2014. Т. 15, № 1. С. 15–26. EDN: **RXQWXN**.
20. Блохин А. М., Доровский В. Н. *Проблемы математического моделирования в теории многократного континуума*. Новосибирск: ОИГГМ СО РАН, 1994. 184 с.
21. Копейкин Р. Р., Абдуллин Р. Ф., Калинин С. А. [и др.] Моделирование гидродинамических исследований скважин с учетом автоГРП в рядной системе разработки // *Нефтяное хозяйство*, 2023. № 12. С. 30–35. EDN: **EVTWCW**. DOI: <https://doi.org/10.24887/0028-2448-2023-12-30-35>.
22. Stehfest H. Algorithm 368: Numerical inversion of Laplace transforms [D5] // *Comm. ACM*, 1970. vol. 13, no. 1. pp. 47–49. DOI: <https://doi.org/10.1145/361953.361969>.
23. Stewart G. *Well Test Design and Analysis*. Nashville, Tennessee: PennWell, 2011.
24. Майков Д. Н., Исупов С. В., Макаров С. С., Аниканов А. С. Метод ускорения расчета давления при изменяющихся дебитах по истории эксплуатации скважины // *Нефтяное хозяйство*, 2021. № 9. С. 105–107. EDN: **MVQWDU**. DOI: <https://doi.org/10.24887/0028-2448-2021-9-105-107>.

25. Майков Д. Н., Макаров С. С. Численное исследование алгоритмов оптимизации при адаптации гидродинамической модели по результатам исследований скважин // *Матем. моделирование*, 2022. Т. 34, № 9. С. 71–82. EDN: GBKCDW. DOI: <https://doi.org/10.20948/mm-2022-09-05>.
26. Bourdet D. A new set of type curves simplifies well test analysis // *World Oil*, 1983. vol. 196, no. 6. pp. 95–106.
27. Hegeman P. S., Halford D. L., Joseph J. A. Well-test analysis with changing wellbore storage // *SPE Form. Eval.*, 1993. vol. 8, no. 03. pp. 201–207, SPE-21829-PA. DOI: <https://doi.org/10.2118/21829-PA>.

MSC: 76S05, 65C20, 86A60

A computational model of a vertical well with waterflooding fracturing for pressure transient analysis

*D. N. Maykov^{1,2}, S. V. Isupov¹, S. S. Makarov²*¹ SIAM MASTER Ltd, 3, Belaya st., Tomsk, 634003, Russian Federation.² Udmurt Federal Research Center of the
Ural Branch of the Russian Academy of Sciences,
34, T. Baramzina st., Izhevsk, 426067, Russian Federation.

Abstract

A new computational model for a vertical well with waterflooding fracturing is presented, which accounts for changes in the fracture half-length during the interpretation of pressure transient analysis (PTA) parameters. The model is based on a numerical algorithm derived from an analytical solution, utilizing a proposed relationship between the fracture half-length, process time, and its geometric dimensions. This functional dependence is developed using available PTA data.

The model employs the infinite-conductivity fracture equation and the superposition principle to describe changes in fracture geometry. The superposition principle is implemented through a series of activations and deactivations of fictitious wells with varying fracture half-lengths, where each well operates for a specific time interval before being shut down.

It is demonstrated that the change in fracture half-length during the closure stage follows a functional dependence on the initial and final fracture half-lengths, as well as the well operation time. The results obtained from the proposed model, incorporating the fracture half-length dependence function, show good agreement with experimental data when calculating pressure in a well with waterflooding fracturing.

A numerical analysis of the vertical well model with waterflooding fracturing is conducted using the developed algorithm. The influence of the final fracture half-length and the duration of fracture closure on pressure changes and the pressure derivative in the well is established. The use of the proposed fracture half-length dependence in calculating well operating conditions is

Mathematical Modeling, Numerical Methods and Software Complexes

Research Article

© Authors, 2025

© Samara State Technical University, 2025 (Compilation, Design, and Layout)

 The content is published under the terms of the [Creative Commons Attribution 4.0 International License](http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Maykov D. N., Isupov S. V., Makarov S. S. A computational model of a vertical well with waterflooding fracturing for pressure transient analysis, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2025, vol. 29, no. 1, pp. 91–108. EDN: [AMYRIA](https://doi.org/10.14498/vsgtu2080). DOI: [10.14498/vsgtu2080](https://doi.org/10.14498/vsgtu2080) (In Russian).

Authors' Details:

Dmitriy N. Maykov  <https://orcid.org/0000-0002-6526-4870>Leading Specialist¹, Junior Researcher²; e-mail: dmaykov@integra.ru*Sergey V. Isupov*  <https://orcid.org/0009-0006-5599-4366>Head of the Automation Dept.¹; e-mail: svisupov@integra.ru*Sergey S. Makarov*  <https://orcid.org/0000-0003-1500-6950>Doctor of Engineering Science; Senior Researcher²; e-mail: ssmak15@mail.ru

shown to be justified. The application of this model allows for a more accurate description of parameter changes during PTA interpretation in wells with fractures of variable length.

Keywords: well, fracture, waterflooding fracturing, analytical solution, superposition principle, fracture half-length dependence functions, numerical analysis.

Received: 31st January, 2024 / Revised: 7th February, 2025 /

Accepted: 21st February, 2025 / First online: 11th March, 2025

Competing interests. The authors declare no conflict of interest regarding the authorship and publication of this article.

Authors' contributions and responsibilities. All authors contributed equally to the development of the article's concept and the writing of the manuscript. The authors take full responsibility for submitting the final version of the manuscript for publication. The final version of the manuscript is approved by all authors.

Funding. The research is conducted without external funding.

Acknowledgments. The authors would like to thank the reviewers for their careful reading of the manuscript and for their valuable suggestions and comments, which helped improve the quality of the manuscript.

References

1. Nolte K. G. Determination of proppant and fluid schedules from fracturing-pressure decline, *SPE Prod. Eng.*, 1986, vol. 1, no. 4, pp. 255–265, SPE-13278-PA. DOI: <https://doi.org/10.2118/13278-PA>.
2. Cinco-Ley H., Samaniego F., Dominguez N. Transient pressure behavior for a well with a finite-conductivity vertical fracture, *SPE J.*, 1978, vol. 18, no. 4, pp. 253–264, SPE-6014-PA. DOI: <https://doi.org/10.2118/6014-PA>.
3. Cinco-Ley H., Samaniego F. Transient pressure analysis for fractured wells, *J. Pet. Technol.*, 1981, vol. 33, no. 9, pp. 1749–1766, SPE-7490-PA. DOI: <https://doi.org/10.2118/7490-PA>.
4. Wong D. W., Harrington A. G., Cinco-Ley H. Application of the pressure derivative function in the pressure-transient testing of fractured wells, *SPE Form. Eval.*, 1986, vol. 1, no. 5, pp. 470–480, SPE-13056-PA. DOI: <https://doi.org/10.2118/13056-PA>.
5. Gringarten A. C., Ramey H. J., Raghavan R. Unsteady-state pressure distributions created by a well with a single infinite-conductivity vertical fracture, *SPE J.*, 1974, vol. 14, no. 4, pp. 347–360, SPE-4051-PA. DOI: <https://doi.org/10.2118/4051-PA>.
6. Ozkan E., Raghavan R. New solutions for well-test-analysis problems: Part 1 – Analytical considerations, *SPE Form. Eval.*, 1991, vol. 6, no. 3, pp. 359–368, SPE-18615-PA. DOI: <https://doi.org/10.2118/18615-PA>.
7. Ozkan E., Raghavan R. New solutions for well-test-analysis problems: Part 2 – Computational considerations and applications, *SPE Form. Eval.*, 1991, vol. 6, no. 3, pp. 369–378, SPE-18616-PA. DOI: <https://doi.org/10.2118/18616-PA>.
8. Hagoort J. *Waterflood-induced hydraulic fracturing*, PhD Thesis. Delft Techn. Univ., 1981. <http://resolver.tudelft.nl/uuid:93b1fede-e03e-48d7-99c9-1c709d69397c>.
9. Koning E. J. L. *Waterflooding under fracturing conditions*, PhD Thesis. Delft Techn. Univ., 1988. <http://resolver.tudelft.nl/uuid:c0bd1703-8cc5-46e0-a724-142a879298bd>.
10. Larsen L., Bratvold R. B. Effects of propagating fractures on pressure-transient injection and fall-off data, *SPE Form. Eval.*, 1994, vol. 9, no. 2, pp. 105–114, SPE-20580-PA. DOI: <https://doi.org/10.2118/20580-PA>.

11. van den Hoek P. J. Pressure transient analysis in fractured produced water injection wells, *SPE Asia Pacific Oil Gas Conf. Exhib.*, 2002, SPE-77946-MS. DOI: <https://doi.org/10.2118/77946-MS>.
12. Davletova A. R., Bikbulatova G. R., Fedorov A. I., Davletbaev A. Y. Geomechanical simulation of hydraulic fractures growth direction and trajectory in the low permeability reservoirs development, *Nauchno-Tekhnich. Vestn. Rosneft*, 2014, no. 1, pp. 40–43 (In Russian). EDN: RZSVCV.
13. Davletbaev A. Y., Mukhametova Z. S. Simulation of the injection of a liquid into a well in a payout bed with hydraulic fracturing, *J. Eng. Phys. Thermophys.*, 2019, vol. 92, no. 4, pp. 1041–1049. EDN: KSWBY. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10891-019-02018-1>.
14. Gubaidullin M. R., Davletbaev A. Ya., Shtinov V. A., et al. Numerical study of spontaneous development of autohf crack in injection well, *Herald of the Academy of Sciences of the Republic of Bashkortostan*, 2022, vol. 45, no. 4, pp. 47–59 (In Russian). EDN: ECSMZY. DOI: https://doi.org/10.24412/1728-5283_2022_4_47_59.
15. Bhardwaj P., Hwang J., Manchanda R., Sharma M. Injection induced fracture propagation and stress reorientation in waterflooded reservoirs, *SPE Annual Techn. Conf. Exhib.*, 2016, SPE-181883-MS. DOI: <https://doi.org/10.2118/181883-MS>.
16. Lee K., Huh C., Sharma M. Impact of fracture growth on well injectivity and reservoir sweep during waterflood and chemical EOR processes, *SPE Annual Techn. Conf. Exhib.*, 2011, SPE-146778-MS. DOI: <https://doi.org/10.2118/146778-MS>.
17. Syundyukov A. V., Sagitov D. K. Factors of influence on the development of self-induced hydraulic fracturing cracks, *Oil and Gas Studies*, 2023, no. 1, pp. 73–84 (In Russian). EDN: YWOMBX. DOI: <https://doi.org/10.31660/0445-0108-2023-1-73-84>.
18. Syundyukov A. V., Sagitov D. K. Method for estimating the length of man-caused fracture depending on bottomhole injection pressure, *Problems of Gathering, Treatment and Transportation of Oil and Oil Products*, 2023, no. 2, pp. 40–51 (In Russian). EDN: XVZVPR. DOI: <https://doi.org/10.17122/ntj-oil-2023-2-40-51>.
19. Fedorov A. I., Davletova A. R. Reservoir stress state simulator for determining of fracture growth direction, *Geophysical Research*, 2014, vol. 15, no. 1, pp. 15–26 (In Russian). EDN: RXQWXN.
20. Blokhin A. M., Dorovsky V. N. *Mathematical Modelling in the Theory of Multivelocity Continuum*. NY, Nova Science, 1995, 192 pp. (In Russian)
21. Kopeykin R. R., Abdullin R. F., Kalinin S. A., et al. Well test simulation accounting induced fracture in a linear development system, *Oil Industry*, 2023, no. 12, pp. 30–35 (In Russian). EDN: EVTWCW. DOI: <https://doi.org/10.24887/0028-2448-2023-12-30-35>.
22. Stehfest H. Algorithm 368: Numerical inversion of Laplace transforms [D5], *Comm. ACM*, 1970, vol. 13, no. 1, pp. 47–49. DOI: <https://doi.org/10.1145/361953.361969>.
23. Stewart G. *Well Test Design and Analysis*. Nashville, Tennessee, PennWell, 2011.
24. Maykov D. N., Isupov S. V., Makarov S. S., Anikanov A. S. The efficient method for pressure calculation at variable rate, *Oil Industry*, 2021, no. 9, pp. 105–107 (In Russian). EDN: MVQWDU. DOI: <https://doi.org/10.24887/0028-2448-2021-9-105-107>.
25. Maykov D. N., Makarov S. S. Numerical investigation of optimization algorithms for adapting the hydrodynamic model based on the results of well tests, *Math. Models Comput. Simul.*, 2023, vol. 15, no. 2, pp. 289–296. EDN: SAFGZB. DOI: <https://doi.org/10.1134/S2070048223020126>.
26. Bourdet D. A new set of type curves simplifies well test analysis, *World Oil*, 1983, vol. 196, no. 6, pp. 95–106.
27. Hegeman P. S., Halford D. L., Joseph J. A. Well-test analysis with changing wellbore storage, *SPE Form. Eval.*, 1993, vol. 8, no. 03, pp. 201–207, SPE-21829-PA. DOI: <https://doi.org/10.2118/21829-PA>.