



УДК 517.977.5:681.5.015

Параметрическая идентификация сосредоточенных воздействий в многомерных обратных задачах теплопроводности

А. Н. Дилигенская, И. С. Бочкарева

Самарский государственный технический университет,
Россия, 443100, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

Аннотация

Работа посвящена дальнейшему исследованию и построению конструктивных методов последовательной параметрической оптимизации неизвестных характеристик нестационарных процессов технологической теплофизики на компактном множестве непрерывных и непрерывно-дифференцируемых функций. Предложенная методика распространяет разработанный алгоритмически точный метод решения на многомерную постановку обратных задач технологической теплофизики и позволяет отыскать физически обоснованную идентифицируемую характеристику на последовательно сходящихся компактных множествах.

В качестве объекта исследования рассматривается двумерное осесимметричное тело канонической формы, где искомой функцией является сосредоточенная величина мощности внутренних теплоисточников. Задача сформулирована в равномерной метрике оценивания температурного отклонения расчетного состояния от экспериментального. В качестве математической модели рассматриваемого объекта используется его модальное описание, на основе которого проведена редукция исходной обратной задачи теплопроводности, сформулированной в экстремальной постановке, к задаче оптимального управления.

Использование предварительной параметризации искомой характеристики процесса приводит к ее представлению в форме кусочно-параболических функций, конкретизируемых в рамках выбранной структуры с помощью вектора параметров. Количество учитываемых параметров определяет точное представление идентифицируемой величины, а

Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ
Научная статья

© Коллектив авторов, 2024

© СамГТУ, 2024 (составление, дизайн, макет)

  Контент публикуется на условиях лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru) (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Образец для цитирования

Дилигенская А. Н., Бочкарева И. С. Параметрическая идентификация сосредоточенных воздействий в многомерных обратных задачах теплопроводности // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2024. Т. 28, № 2. С. 286–301. EDN: **IBMBVN**. DOI: [10.14498/vsgtu2081](https://doi.org/10.14498/vsgtu2081).

Сведения об авторах

Анна Николаевна Дилигенская   <https://orcid.org/0000-0002-9867-9781>

доктор технических наук, доцент; профессор; каф. автоматизации и управления в технических системах; e-mail: adiligenskaya@mail.ru

Ирина Сергеевна Бочкарева  <https://orcid.org/0009-0005-3282-7680>

аспирант; каф. автоматизации и управления в технических системах;
e-mail: bo4karewa.i99@yandex.ru

их значения отыскиваются в результате решения полученной задачи параметрической оптимизации. Для решения полученной задачи математического программирования относительно оптимальных значений вектора параметров используются, аналогично одномерному случаю, альтернансные свойства искомого экстремалей, в результате чего задача сводится к замкнутой системе соотношений.

Полученные результаты демонстрируют эффективность распространения конструктивного метода последовательной параметрической оптимизации, опробованного на одномерных обратных задачах теплопроводности, на решение двумерных задач с использованием их модального представления. Увеличение числа параметров решений, образующих кусочно-параболическую форму искомой зависимости, приводит к уменьшению погрешности восстановления как искомой сосредоточенной функции, так и пространственно-временного температурного поля во всей двумерной области определения пространственных переменных.

Ключевые слова: двумерная обратная задача теплопроводности, параметрическая оптимизация, метод последовательных приближений.

Получение: 2 февраля 2024 г. / Исправление: 19 марта 2024 г. /

Принятие: 29 апреля 2024 г. / Публикация онлайн: 17 ноября 2024 г.

Введение. Общая проблема увеличения эффективности функционирования технологического оборудования при реализации производственных процессов приводит к необходимости поиска скрытых резервов технического, методического и алгоритмического обеспечения на всем производственном цикле: начиная от проектирования технологических установок и заканчивая оптимизацией режимных параметров при их функционировании.

Одним из возможных путей достижения заданной цели является построение и дальнейшее использование в расчетах точных математических моделей оптимизируемых процессов, учитывающих как существенные закономерности исследуемого явления, так и специфику реализации производственных процессов или режимов работы оборудования в каждом отдельном случае. Нестационарность исследуемых явлений, неучтенные взаимодействия приводят к отклонению основных характеристик от своих проектных значений, что вызывает необходимость их оценивания в реальных условиях. Построение моделей, содержащих не подлежащие непосредственному контролю факторы, невозможно без использования доступной экспериментальной информации. На основе экспериментальных данных, полученных в ограниченной области (отдельных точках контроля) исследуемого объекта, с помощью теории обратных задач математической физики возможно восстановить не подлежащие непосредственному измерению характеристики процесса [1, 2].

В сфере технологической теплофизики актуален ряд задач, предусматривающих идентификацию ненаблюдаемых в силу используемых технологий внутренних или граничных управляющих воздействий по экспериментальной информации о температуре, полученной в некоторых точках термометрирования, расположенных по объему нагреваемого тела. Данный класс задач относится к обратным задачам теплопроводности (ОЗТ), и для их решения создано и продолжает разрабатываться большое число различных методов:

численных и аналитических, методов подбора, на основе различных способов регуляризации и других [3–8].

Для получения математического описания с точностью, необходимой для решения реальных производственных задач управления процессами технологической теплофизики, математическая модель должна максимально полно воссоздавать процессы нагрева во всей пространственной области. Для этого нужно использовать многомерные модели (трехмерные или двумерные в случае осесимметричного нагрева) [9, 10].

В работах [11, 12] восстановление неизвестных пространственно-временных внутренних или внешних воздействий в результате решения одномерной и двумерной ОЗТ осуществлено с помощью модального описания температурного поля и искомым характеристикам в форме разложения в ряды по собственным функциям тепловой задачи. Однозначная зависимость между числом точек контроля температуры и количеством модальных составляющих, используемых для модального описания объекта, ограничивает возможности применения данного метода. Необходимость повышения точности решения задачи за счет увеличения количества учитываемых мод вступает в противоречие с требованиями минимизации числа размещаемых датчиков, нарушающих целостность конструкции и вносящих искажения в результаты измерений.

Поэтому разработка методов решения многомерных обратных задач теплопроводности по экспериментальной информации, полученной в точках контроля температуры, число которых будет минимальным, на сегодняшний день остается актуальной научно-технической проблемой. В статье метод последовательной параметрической оптимизации идентифицируемых воздействий [13–15], показавший свою эффективность при решении одномерных задач, распространен на случай многомерных ОЗТ. Решена обратная задача теплопроводности по идентификации сосредоточенного закона распределения внутренних источников тепла на примере процесса индукционного нагрева двумерного осесимметричного тела прямоугольной формы.

1. Модальное описание линейных моделей процесса теплопроводности. Поведение температурного поля $\theta(x, y, \varphi)$ в процессе индукционного нагрева осесимметричной бесконечной прямоугольной призмы [20] описывается линейным неоднородным уравнением Фурье в относительных декартовых координатах (x, y) на заданном временном интервале $\varphi \in [0, \varphi^*]$:

$$\frac{\partial \theta(x, y, \varphi)}{\partial \varphi} = \frac{\partial^2 \theta(x, y, \varphi)}{\partial x^2} + \beta^2 \frac{\partial^2 \theta(x, y, \varphi)}{\partial y^2} + \Psi(x, y, \varphi), \quad (1)$$

$$0 < x < 1, \quad 0 < y < 1, \quad 0 < \varphi < \varphi^*$$

и дополняется начальными (в данном случае нулевыми)

$$\theta(x, y, 0) = 0, \quad x \in [0, 1], \quad y \in [0, 1]$$

и граничными условиями (здесь – однородными граничными условиями второго рода)

$$\frac{\partial \theta(0, y, \varphi)}{\partial x} = \frac{\partial \theta(1, y, \varphi)}{\partial x} = \beta \frac{\partial \theta(x, 0, \varphi)}{\partial y} = \beta \frac{\partial \theta(x, 1, \varphi)}{\partial y} = 0, \quad \varphi \in (0, \varphi^*]. \quad (2)$$

Здесь $\Psi(x, y, \varphi)$ — функция внутренних теплоисточников, которая, как правило, в реальных промышленных условиях может быть представлена в виде $\Psi(x, y, \varphi) = F(x, y)u(\varphi)$, где $F(x, y)$ и $u(\varphi)$ — закон пространственного распределения электромагнитных источников тепла и их мощность соответственно, коэффициент $\beta = X/Y$ определяет отношение геометрических размеров тела, где X и Y — половина большей и меньшей сторон сечения призмы соответственно.

Применение метода конечных интегральных преобразований [16] приводит к представлению температурного поля

$$\theta(x, y, \varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} C_m^2 C_k^2 \bar{\theta}_{mk}(\mu_m, \eta_k, \varphi) \cos(\pi m x) \cos(\pi k y) \quad (3)$$

в форме его разложения в бесконечный сходящийся в среднем ряд [16] по собственным функциям $\cos(\pi m x)$ и $\cos(\pi k y)$ задачи (1), (2), определяемым собственными числами $\mu_m^2 = \pi^2 m^2$ и $\eta_k^2 = \pi^2 k^2$; C_m^2 и C_k^2 — нормирующие множители, которые равны 1 при $m = 0, k = 0$ или равны 2 при $m \geq 1, k \geq 1$. Модальные составляющие (временные моды) температурного поля также получены в результате применения конечных интегральных преобразований по пространственным координатам:

$$\bar{\theta}_{mk}(\mu_m, \eta_k, \varphi) = \int_0^1 \int_0^1 \theta(x, y, \varphi) \cos(\pi m x) \cos(\pi k y) dx dy, \quad (4)$$

а их поведение задано бесконечной системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{\bar{\theta}_{mk}}{d\varphi} = -(\mu_m^2 + \beta^2 \eta_k^2) \bar{\theta}_{mk}(\mu_m, \eta_k, \varphi) + \bar{F}_{mk}(\mu_m, \eta_k) u(\varphi), \quad (5)$$

$$m, k = 0, 1, \dots, \quad \varphi \in (0, \varphi^*],$$

где модальные переменные функции внутренних теплоисточников могут быть определены аналогично (4):

$$\bar{F}_{mk}(\mu_m, \eta_k) = \int_0^1 \int_0^1 F(x, y) \cos(\pi m x) \cos(\pi k y) dx dy \quad (6)$$

и позволяют получить ее соответствующее представление:

$$F(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} C_m^2 C_k^2 \bar{F}_{mk}(\mu_m, \eta_k) \cos(\pi m x) \cos(\pi k y).$$

Для однозначного описания процесса индукционного нагрева система дифференциальных уравнений (5) дополняется нулевыми начальными условиями для модальных переменных

$$\bar{\theta}_{mk}(\mu_m, \eta_k, 0) = 0, \quad m, k = 0, 1, \dots \quad (7)$$

и соответствующими граничными условиями (2).

2. Постановка и решение обратной задачи теплопроводности. Таким образом, модальное представление процесса индукционного нагрева задано математической моделью (2), (3), (5), (7). На основе этого математического описания рассматривается ОЗТ, в которой функция $u(\varphi)$ является неизвестной и подлежащей идентификации на основе дополнительной информации о температурном распределении $\theta^*(\varphi) = \theta^*(x^*, y^*, \varphi)$, полученном в одной фиксированной точке с координатами (x^*, y^*) : $x^* \in [0, 1]$, $y^* \in [0, 1]$ на интервале идентификации $\varphi \in (0, \varphi^*]$. В качестве точки контроля может быть выбрана любая точка из пространственной области, занимаемой объектом, это окажет влияние лишь на точность решения задачи, но все основные свойства предлагаемого метода останутся без изменений, что обусловлено его универсальным характером. Подобно ОЗТ в одномерном случае [13–15], формулируется минимаксная постановка задачи, в которой по экспериментальным данным $\theta^*(\varphi)$ требуется определить функцию $u(\varphi)$, минимизирующую функционал

$$I_0(u) = \max_{\varphi \in (0, \varphi^*)} |\theta_M(x^*, y^*, \varphi) - \theta^*(\varphi)| \rightarrow \min_{u(\varphi)} \quad (8)$$

где $\theta_M(x^*, y^*, \varphi)$ — рассчитанная на основе модели процесса (2), (3), (5), (7) температура в той же точке (x^*, y^*) на заданном интервале идентификации.

Аналогично [13–15] осуществляется сужение множества решений до физически реализуемых функций. Так, переход к классу функций, непрерывных вместе со своей производной, производится на основе соотношений

$$\frac{du(\varphi)}{d\varphi} = v(\varphi), \quad \frac{dv(\varphi)}{d\varphi} = w(\varphi); \quad u(0) = u_0; \quad v(0) = u'(0) = v_0 \quad (9)$$

и выполнения ограничений на максимально допустимое значение w_{\max} нового управления

$$|u''_{\varphi}| = |w(\varphi)| \leq |w_{\max}|, \quad \varphi \in (0, \varphi^*). \quad (10)$$

В таком случае осуществляется переход от задачи (8) к минимаксной задаче

$$I_1(w) = \max_{\varphi \in (0, \varphi^*)} |\theta_M(x^*, y^*, \varphi) - \theta^*(\varphi)| \rightarrow \min_{w(\varphi)} \quad (11)$$

с условным управляющим воздействием $w(\varphi)$, которая дополняется соотношениями (9), (10), что в совокупности соответствует поиску решения исходной задачи в заданном классе функций.

Решение задачи далее осуществляется по схеме аналитического метода параметрической оптимизации, представленного в [13–15], и сводится к переходу от задачи оптимального управления с минимаксным критерием (11) к задаче с интегральным функционалом

$$I_2(w, \alpha) = \frac{1}{\varphi^*} \int_0^{\varphi^*} \alpha d\varphi = \alpha \rightarrow \min_{w, \alpha} \quad (12)$$

при учете дополнительного фазового ограничения

$$|\theta_M(x^*, y^*, \varphi) - \theta^*(\varphi)| - \alpha \leq 0, \quad \varphi \in (0, \varphi^*). \quad (13)$$

В [13] обосновывается, что фазовое ограничение (13) не нарушается на всем интервале идентификации, следовательно, решение полученной задачи (12) осуществляется без его учета на основе принципа максимума Понтрягина. Процедура принципа максимума и последующее интегрирование соотношений (9) позволяют получить параметрическое представление искомой характеристики в виде кусочно-параболической функции времени:

$$u^*(\varphi, \Delta) = \begin{cases} u_0 + v_0\varphi + \frac{(\pm 1)w_{\max}}{2}\varphi^2, & \varphi \in [0, \tilde{\Delta}_1], \quad N \geq 1; \\ u_0 + v_0\varphi + \frac{(\pm 1)w_{\max}}{2}\varphi^2 + \\ + (\pm 1)w_{\max} \sum_{q=2}^j (-1)^{q+1} \left(\varphi - \sum_{i=1}^{q-1} \tilde{\Delta}_i \right)^2, & \\ \sum_{i=1}^{j-1} \tilde{\Delta}_i \leq \varphi \leq \sum_{i=1}^j \tilde{\Delta}_i, \quad j = \overline{2, N}, \quad N \geq 2. \end{cases} \quad (14)$$

Здесь число N соответствует количеству интервалов постоянства имеющего релейный характер оптимального условного управления $w^*(\varphi, \Delta)$, $\tilde{\Delta} = (\tilde{\Delta}_i)$, $i = \overline{1, N}$ – вектор длительностей интервалов постоянства $w^*(\varphi, \Delta)$, а вектор $\Delta = (\tilde{\Delta}^i, w_{\max}, u_0, v_0)$ коэффициентов параметрического представления $u^*(\varphi)$ дополнен соответствующими параметрами.

Далее с использованием полученного параметрического представления (14) на базе общего решения уравнения теплопроводности (1) с соответствующими нулевыми начальными и граничными условиями (2) вида

$$\theta(x, y, \varphi) = \int_0^\varphi \frac{\partial \Lambda(x, y, \varphi - \tau)}{\partial \varphi} u(\tau) d\tau, \quad (15)$$

где $\partial \Lambda(x, y, \varphi) / \partial \varphi$ является импульсной переходной функцией (функцией Грина краевой задачи), осуществляется переход к параметризованной форме температурного поля:

$$\theta(x, y, \varphi, \Delta) = \begin{cases} \Lambda(x, y, \varphi, u_0, v_0, w_{\max}), & \varphi \in [0, \tilde{\Delta}_1], \quad N \geq 1; \\ \Lambda(x, y, \varphi, u_0, v_0, w_{\max}) + \\ + 2 \sum_{q=2}^j (-1)^{q+1} \Lambda \left(x, y, \varphi - \sum_{i=1}^{q-1} \tilde{\Delta}_i, w_{\max} \right)^2, & \\ \sum_{i=1}^{j-1} \tilde{\Delta}_i \leq \varphi \leq \sum_{i=1}^j \tilde{\Delta}_i, \quad j = \overline{2, N}, \quad N \geq 2. \end{cases} \quad (16)$$

Найденное параметрическое представление (16) $\theta(x, y, \varphi, \Delta)$ позволяет рассчитать модельную температурную зависимость $\theta_M(x^*, y^*, \varphi, \Delta)$ в точке с заданными координатами (x^*, y^*) на временном интервале идентификации $\varphi \in (0, \varphi^*]$, что в дальнейшем используется для перехода от задачи (11) к задаче параметрической оптимизации

$$I_2(\Delta) = \max_{\varphi \in (0, \varphi^*)} |\theta_M(x^*, y^*, \varphi, \Delta) - \theta^*(\varphi)| \rightarrow \min_{\Delta}. \quad (17)$$

Дальнейшее решение полученной специальной задачи математического программирования (17) осуществляется с помощью альтернансных условий экстремума [17], соответствует оцениванию температурной невязки между модельной $\theta_M(x^*, y^*, \varphi, \Delta)$ и экспериментальной $\theta^*(\varphi)$ кривыми в равномерной (чебышевской) метрике и реализуется аналогично одномерному случаю [13–15].

Альтернансные свойства распределения невязки $\theta_M(x^*, y^*, \varphi, \Delta) - \theta^*(\varphi)$ проявляются при оптимальном решении Δ^0 и выражаются в достижении в определенных точках, количество которых, как правило, на единицу превышает число искомых параметров, знаменующихся максимальных по абсолютной величине отклонений $I_2(\Delta^0)$. Данные условия совместно с условиями существования экстремума температурной невязки во внутренних точках альтернанса на интервале идентификации приводят к замкнутой относительно всех неизвестных параметров системе уравнений. Решение сформированной таким образом системы уравнений и определяет оптимальные значения Δ^0 вектора параметров.

3. Вычислительный эксперимент и решение двумерной внутренней обратной задачи теплопроводности. На базе представленной методики была решена серия обратных задач теплопроводности, позволяющая восстановить неизвестное сосредоточенное воздействие по мощности внутренних источников тепла $u(\varphi)$.

Для задачи (2), (3), (5), (7) общее решение (15) принимает вид

$$\begin{aligned} \theta(x, y, \varphi) = & U_{\max} \left(\int_0^\varphi \bar{F}_{00} u(\tau) d\tau + \right. \\ & + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \bar{F}_{m0} \cos(\pi m x) \int_0^\varphi e^{-\pi^2 m^2 (\varphi - \tau)} u(\tau) d\tau + \\ & + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \bar{F}_{0k} \cos(\pi k y) \int_0^\varphi e^{-\beta^2 \pi^2 k^2 (\varphi - \tau)} u(\tau) d\tau + \\ & \left. + 4 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \bar{F}_{mk} \cos(\pi m x) \cos(\pi k y) \int_0^\varphi e^{-(\pi^2 m^2 + \beta^2 \pi^2 k^2) (\varphi - \tau)} u(\tau) d\tau \right), \quad (18) \end{aligned}$$

где необходимые коэффициенты \bar{F}_{00} , \bar{F}_{m0} , \bar{F}_{0k} , \bar{F}_{mk} определяются по соотношениям (6).

В задачах индукционного нагрева под действием электромагнитного поля индуктора активируются внутренние источники, и нахождение функции $F(x, y)$ связано с определенными трудностями решения сложной электромагнитной двумерной задачи [18, 19]. В большинстве типовых процессов индукционного нагрева глубина проникновения электромагнитного воздействия, зависящая от частоты тока индуктора, настолько мала, что в первом приближении полагают, что все тепловыделение происходит в поверхностном слое металла. В таком случае приближенная аналитическая зависимость

$$F(x, y) = \delta(x - 1) + \beta \delta(y - 1), \quad (19)$$

которая отражает действие точечных источников тепла в виде дельта-функ-

ции, сосредоточенных в точках на внешних границах тела, достаточно адекватно описывает распределение данной функции [18, 19].

При вычислительном эксперименте по сбору экспериментальных данных $\theta^*(\varphi)$ характер изменения мощности тепловыделения соответствовал плавному нагреву

$$u^0(\varphi) = k(1 - e^{-\sigma\varphi}). \quad (20)$$

Вычислительный эксперимент был проведен на основе математической модели (18) температурного поля в процессе индукционного нагрева при принятых распределениях $F(x, y)$ и $u(\varphi)$ согласно (19) и (20). Далее, полагая функцию $u(\varphi)$ неизвестной и подлежащей идентификации на основе температурной кривой $\theta^*(\varphi)$, полученной в фиксированной точке ($x^* = 0.9, y^* = 0.9$) на интервале $\varphi \in (0, \varphi]$, была решена обратная задача теплопроводности (8) согласно (11), (14), (16), (17).

4. Результаты решения обратной задачи теплопроводности. На рис. 1–4 и в табл. 1 и 2 представлены некоторые полученные результаты решения серии внутренних ОЗТ в зависимости от числа $N = 1, 2, 3$ интервалов постоянства условного управляющего воздействия $w(\varphi)$.

На рис. 1 показана конфигурация

$$\varepsilon_\theta = \theta_M(x^*, y^*, \varphi, \Delta) - \theta^*(\varphi)$$

погрешности приближения экспериментальной зависимости в классе кусочно-параболических функций (16) при $N = 1, 2, 3$ на интервале идентификации в точке контроля (x^*, y^*).

На рис. 2 продемонстрирована разность

$$\varepsilon_u = u^*(\varphi, \Delta) - u^0(\varphi)$$

между восстановленной и идентифицируемой зависимостью сосредоточенной мощности тепловыделения в том же классе функций при $\varphi \in (0, \varphi^*]$.

Табл. 1 отражает минимаксную погрешность для восстанавливаемой температуры $\bar{\varepsilon}_\theta = \max_{\varphi \in (0, \varphi^*)} |\theta_M(x^*, y^*, \varphi, \Delta) - \theta^*(\varphi)|$ и мощности тепловыделения $\bar{\varepsilon}_u = \max_{\varphi \in (0, \varphi^*)} |u^*(\varphi, \Delta) - u^0(\varphi)|$ на интервале $\varphi \in (0, \varphi^*]$ в точке с заданными координатами.

Особый интерес при решении двумерных задач представляет анализ погрешности восстановления результирующего температурного поля и идентифицируемой характеристики не только в точке контроля температуры, но и во всей пространственной области, занимаемой объектом. Рис. 3, 4 и табл. 2 демонстрируют некоторые результаты подобного анализа.

Так, на рис. 3 представлена температурная погрешность

$$\theta_M(x, y, \varphi^*, \Delta) - \theta^*(x, y, \varphi^*, u^0(\varphi^*))$$

во всей области изменения пространственных координат $0 < x < 1, 0 < y < 1$ в конечный момент времени при $N = 3$. Максимальное отклонение восстановленного температурного поля от полученного с использованием точного выражения идентифицируемой характеристики (20) достигается в точке $x = 1, y = 1$. Аналогичная ситуация наблюдается и при $N = 1, 2$.

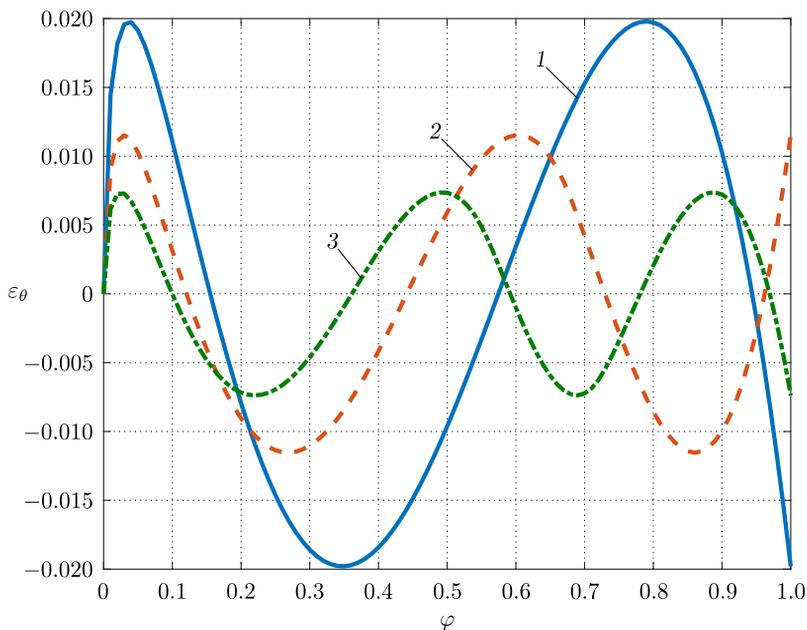


Рис. 1. Ошибка приближения заданного температурного распределения:
 1 – $N = 1$; 2 – $N = 2$; 3 – $N = 3$
 [Figure 1. Error in approximating of the given temperature distribution:
 1 – $N = 1$; 2 – $N = 2$; 3 – $N = 3$]

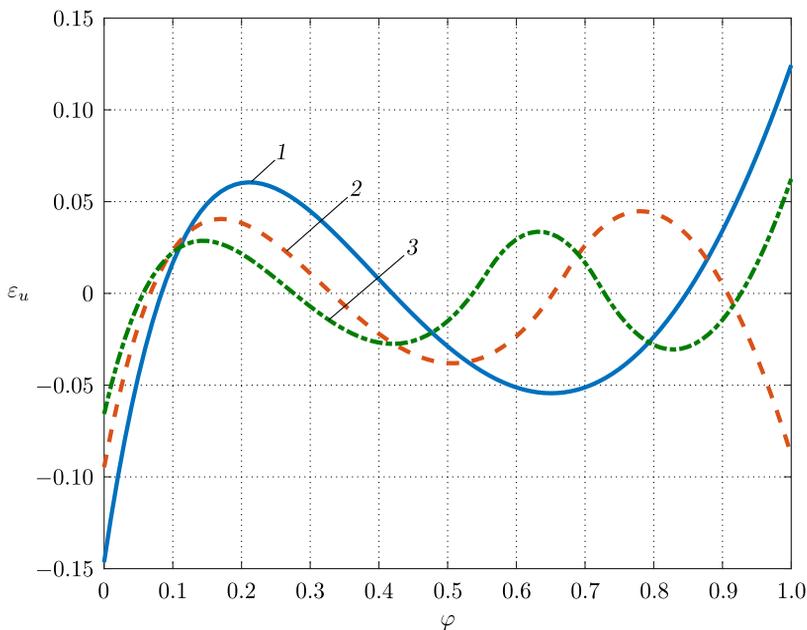


Рис. 2. Погрешность аппроксимации идентифицируемой функции: 1 –
 $N = 1$; 2 – $N = 2$; 3 – $N = 3$
 [Figure 2. Approximation error of the identified function: 1 – $N = 1$;
 2 – $N = 2$; 3 – $N = 3$]

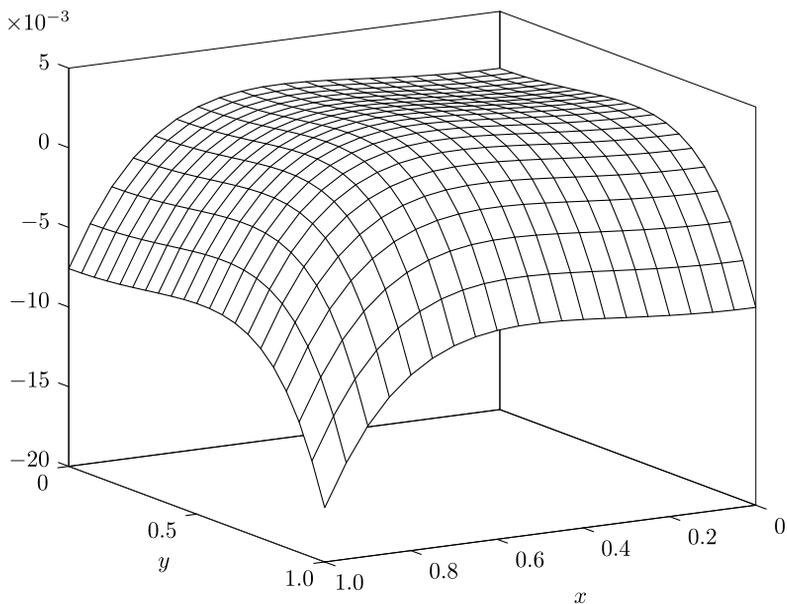


Рис. 3. Температурное отклонение расчетного значения от принятого во всей пространственной области в конечный момент времени
 [Figure 3. The temperature deviation of the calculated value from the one taken in the entire spatial region at the final moment of time]

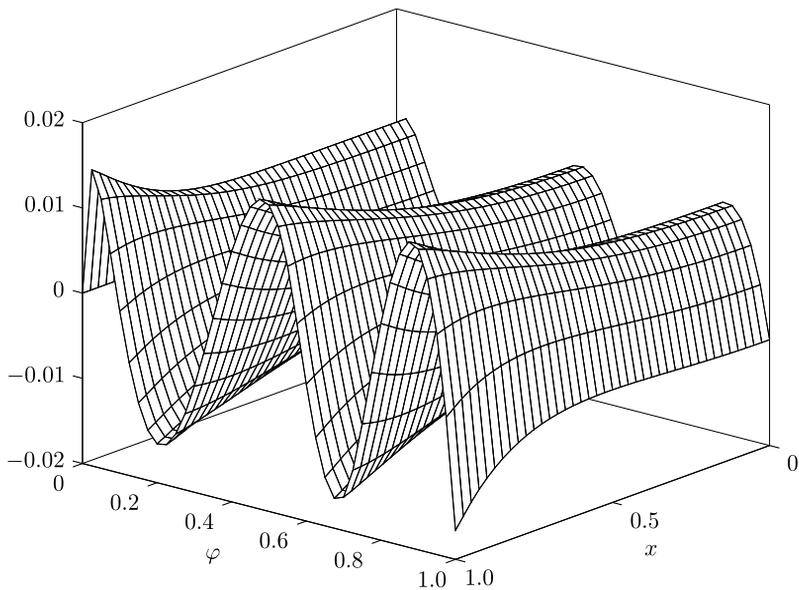


Рис. 4. Температурная невязка на границе $y = 1$ в процессе идентификации
 [Figure 4. Temperature discrepancy at the boundary of $y = 1$ in the identification process]

Таблица 1

Погрешность восстановления температуры и идентифицируемой функции в точке контроля в зависимости от числа $N + 3$ учитываемых параметров
 [The error in restoring the temperature and the identified function at the control point, depending on the number of $N + 3$ parameters taken into account]

N	1	2	3
$\bar{\varepsilon}_\theta$	0.0198	0.0115	0.0074
$\bar{\varepsilon}_u$	0.1465	0.0947	0.0657

Таблица 2

Погрешность восстановления температуры во всей пространственной области в зависимости от числа $N + 3$ учитываемых параметров
 [The error of temperature recovery in the entire spatial domain, depending on the number of $N + 3$ parameters taken into account]

N	1	2	3
$\tilde{\varepsilon}_\theta$	0.0503	0.0268	0.0166

Рис. 4 отражает погрешность температурного распределения

$$\theta_M(x, 1, \varphi, \Delta) - \theta^*(x, 1, \varphi, u^0(\varphi))$$

на границе $0 < x < 1$, $y = 1$ на протяжении интервала идентификации $\varphi \in (0, \varphi^*)$ при $N = 3$. Вследствие симметричного характера нагрева температурное отклонение вдоль оси $x = 1$, $0 < y < 1$ будет иметь аналогичное поведение.

В табл. 2 приведено максимальное абсолютное отклонение

$$\tilde{\varepsilon}_0 = \max |\theta_M(x, y, \varphi^*, \Delta) - \theta^*(x, y, \varphi^*, u^0(\varphi^*))|$$

рассчитанного температурного поля от экспериментального во всей пространственной области $0 < x < 1$, $0 < y < 1$ для $N = 1, 2, 3$.

Как видно из данных, представленных в табл. 1 и 2, с ростом числа N , задающего количество используемых параметров в модельном описании температуры (16), (18), ошибка приближения истинного температурного состояния уменьшается как в точке контроля (x^*, y^*) на всем интервале идентификации, так и во всей пространственной области, занимаемой объектом. Аналогично, с увеличением значения N снижается погрешность восстановления идентифицируемого воздействия — сосредоточенной мощности внутренних источников тепла. Зависимость точности идентификации искомой характеристики и аппроксимации температурного состояния от координат точки контроля температуры имеет сложный неоднозначный характер и требует дополнительного исследования.

Заключение. Проведенное исследование показывает возможность решения многомерных ОЗТ по восстановлению неизвестных характеристик процессов технологической теплофизики на основе экспериментальной информации о температуре, полученной в одной точке контроля. Представленные результаты демонстрируют эффективность предложенной методики как для определения неизвестной сосредоточенной мощности теплоисточников, так и

для восстановления температуры по всей пространственной области, занимаемой объектом, в любой момент времени.

Предложенный подход на основе модального описания объекта с распределенными параметрами в процессе нестационарной теплопроводности может быть распространен с необходимыми изменениями и дополнениями на идентификацию другого класса характеристик — пространственно распределенных или пространственно-временных внутренних и внешних воздействий.

Конкурирующие интересы. У нас нет конфликта интересов в отношении авторства и публикации этой статьи.

Авторский вклад и ответственность. Все авторы принимали участие в разработке концепции статьи и в написании рукописи. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23–29–00521, <https://rscf.ru/project/23-29-00521/>.

Библиографический список

1. Алифанов О. М. *Обратные задачи теплообмена*. М.: Машиностроение, 1988. 280 с.
2. Özişik M. N., Orlande H. R. B. *Inverse Heat Transfer: Fundamentals and Applications*. New York: Routledge, 2000. xx+330 pp. DOI: <https://doi.org/10.1201/9781003155157>.
3. Самарский А. А., Вабищевич П. Н. *Численные методы решения обратных задач математической физики*. М.: ЛКИ, 2009. 480 с.
4. Алифанов О. М., Артюхин Е. А., Румянцев С. В. *Экстремальные методы решения некорректных задач и их приложения к задачам теплообмена*. М.: Наука, 1988. 288 с.
5. Данилаев П. Г. Сравнение двух регуляризирующих алгоритмов решения одной коэффициентной обратной задачи // *Изв. вузов. Матем.*, 2003. № 5. С. 3–8. EDN: [HQEQQB](https://www.edn.ru/HQEQQB).
6. Пилипенко Н. В., Гладских Д. А. Решение прямых и обратных задач теплопроводности на основе дифференциально-разностных моделей теплопереноса // *Изв. вузов. Приборостр.*, 2007. Т. 50, № 3. С. 69–74. EDN: [HEJTCV](https://www.edn.ru/HEJTCV).
7. Grysa K. Inverse heat conduction problems / V. S. Vikhrenko (ed.) *Heat Conduction — Basic Research*. IntechOpen, 2011. pp. 3–36. DOI: <https://doi.org/10.5772/26575>.
8. Япарова Н. М. О различных подходах к решению обратных граничных задач тепловой диагностики // *Вестн. Южно-Уральск. гос. ун-та. Сер. Математика. Механика. Физика*, 2012. № 34. С. 60–67. EDN: [NRJZKZ](https://www.edn.ru/NRJZKZ).
9. Алифанов О. М., Ненарокомов А. В. Трехмерная граничная обратная задача теплопроводности // *ТВТ*, 1999. Т. 37, № 2. С. 231–238.
10. Guerrier B., Benard C. Two-dimensional linear transient inverse heat conduction problem — Boundary condition identification // *J. Thermophys. Heat Transfer*, 1993. vol. 7, no. 3. pp. 472–478. DOI: <https://doi.org/10.2514/3.442>.
11. Рапопорт Э. Я., Дилигенская А. Н. Модальная идентификация граничного воздействия в двумерной обратной задаче теплопроводности // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2018. Т. 22, № 2. С. 380–394. EDN: [XWXSNN](https://www.edn.ru/XWXSNN). DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1627>.
12. Дилигенская А. Н. Аналитическая идентификация пространственно-временного управления в обратных задачах теплопроводности на основе модального представления // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Техн. науки*, 2012. № 4. С. 31–38. EDN: [QBUTFD](https://www.edn.ru/QBUTFD).
13. Дилигенская А. Н., Рапопорт Э. Я. Аналитические условия оптимальности в обратных задачах теплопроводности // *ТВТ*, 2021. Т. 59, № 3. С. 401–410. EDN: [WBKMPI](https://www.edn.ru/WBKMPI). DOI: <https://doi.org/10.31857/S0040364421030030>.

14. Дилигенская А. Н. Решение ретроспективной обратной задачи теплопроводности на основе параметрической оптимизации // *TBT*, 2018. Т. 56, № 3. С. 399–406. EDN: **RSXXBR**. DOI: <https://doi.org/10.7868/S0040364418030110>.
15. Дилигенская А. Н., Рапопорт Э. Я. Аналитические методы параметрической оптимизации в обратных задачах теплопроводности с внутренним тепловыделением // *Инж.-физ. ж.*, 2014. Т. 87, № 5. С. 1082–1089. EDN: **SNHAHJ**.
16. Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М. *Уравнения в частных производных математической физики*. М.: Высш. шк., 1970. 336 с.
17. Рапопорт Э. Я. *Альтернативный метод в прикладных задачах оптимизации*. М.: Наука, 2000. 336 с. EDN: **TTRVMB**.
18. Немков В. С., Демидович В. Б. *Теория и расчет устройств индукционного нагрева*. Л.: Энергоатомиздат, 1988. 280 с. EDN: **SCTRLM**.
19. Rudnev V. I., Loveless D., Cook R. L. *Handbook of Induction Heating*. Boca Raton: CRC Press, 2017. 772 pp. DOI: <https://doi.org/10.1201/9781315117485>.
20. Рапопорт Э. Я., Плешивцева Ю. Э. *Оптимальное управление температурными режимами индукционного нагрева*. М.: Наука, 2012. 309 с. EDN: **QNDGWJ**.

MSC: 80A23, 35K05, 93C20

Parametric identification of concentrated effects in multidimensional inverse heat conduction problems

A. N. Diligenskaya, I. S. Bochkareva

Samara State Technical University,

244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russian Federation.

Abstract

The study is dedicated to further research and development of constructive methods for sequential parametric optimization of unknown characteristics of nonstationary processes in technological heat physics on a compact set of continuous and continuously differentiable functions. The proposed methodology extends the algorithmically accurate method developed for solving inverse problems in technological heat physics to the multidimensional case of the inverse heat conduction problem, allowing the identification of a physically justified characteristic on sequentially converging compact sets.

The research focuses on a two-dimensional axisymmetric body of canonical shape. The problem is formulated in a uniform metric for assessing the temperature deviation of the calculated state from the experimental one. The mathematical model of the studied object is based on its modal description, which led to the reduction of the original inverse heat conduction problem, formulated in an extremal setting, to an optimal control problem.

The use of preliminary parameterization of the sought-after characteristic of the process results in its representation in the form of piecewise-parabolic functions defined by a parameter vector. The number of considered parameters determines the specific type of approximating function, and their values are found by solving the obtained parametric optimization problem. To solve the mathematical programming problem for optimal parameter vector values, alternating properties of the sought extremals are used, similar to the one-dimensional case, leading to the formulation of a closed system of relationships.

Mathematical Modeling, Numerical Methods and Software Complexes

Research Article

© Authors, 2024

© Samara State Technical University, 2024 (Compilation, Design, and Layout)

 The content is published under the terms of the [Creative Commons Attribution 4.0 International License](http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Diligenskaya A. N., Bochkareva I. S. Parametric identification of concentrated effects in multidimensional inverse heat conduction problems, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2024, vol. 28, no. 2, pp. 286–301. EDN: **IBMBBN**. DOI: [10.14498/vsgtu2081](https://doi.org/10.14498/vsgtu2081) (In Russian).

Authors' Details:

Anna N. Diligenskaya  <https://orcid.org/0000-0002-9867-9781>Dr. Eng. Sci., Associate Professor; Professor; Dept. of Automation and Control in Technical Systems; e-mail: adiligenskaya@mail.ru*Irina S. Bochkareva*  <https://orcid.org/0009-0005-3282-7680>Postgraduate Student; Dept. of Automation and Control in Technical Systems; e-mail: bo4karewa.i99@yandex.ru

The obtained results demonstrate the effectiveness of extending the constructive method of sequential parametric optimization, tested on one-dimensional inverse heat conduction problems, to solving two-dimensional problems using their modal representation. Increasing the number of parameters of solutions forming the piecewise-parabolic form of the sought dependence leads to a reduction in the reconstruction error of both the sought concentrated function and the spatial-temporal temperature field throughout the domain of spatial variables.

Keywords: two-dimensional inverse heat conduction problem, parametric optimization, method of successive approximations.

Received: 2nd February, 2024 / Revised: 19th March, 2024 /

Accepted: 29th April, 2024 / First online: 17th November, 2024

Competing interests. We have no conflict of interest regarding the authorship and publication of this article.

Authors' contributions and responsibilities. All authors participated in the development of the article's concept and in writing the manuscript. The authors bear full responsibility for submitting the final manuscript for publication. The final version of the manuscript was approved by all authors.

Funding. The research was funded by the Russian Science Foundation (project no. 23–29–00521), <https://rscf.ru/en/project/23-29-00521/>.

References

1. Alifanov O. M. *Obratnye zadachi teploobmena* [Inverse Heat Transfer Problems]. Moscow, Mashinostroenie, 1988, 280 pp. (In Russian)
2. Özişik M. N., Orlande H. R. B. *Inverse Heat Transfer: Fundamentals and Applications*. New York, Routledge, 2000, xx+330 pp. DOI: <https://doi.org/10.1201/9781003155157>.
3. Samarskii A. A., Vabishchevich P. N. *Numerical Methods for Solving Inverse Problems of Mathematical Physics*, Inverse and Ill-Posed Problems Series. Berlin, New York, de Gruyter, 2007, xiv+438 pp. DOI: <https://doi.org/10.1515/9783110205794>.
4. Alifanov O. M., Artyukhin E. A., Rumyantsev S. V. *Extreme Methods for Solving Ill-Posed Problems with Applications to Inverse Heat Transfer Problems*. New York, Begell House, 1995, xii+306 pp.
5. Danilaev P. G. Comparison of two regularizing algorithms for the solution of a coefficient inverse problem, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2003, vol. 47, no. 5, pp. 1–6.
6. Pilipenko N. V., Gladskikh D. A. Solving direct and inverse problems of thermal conductivity based on differential-difference models of heat transfer, *Izv. Vuzov. Priborostr.*, 2007, vol. 50, no. 3, pp. 69–74 (In Russian). EDN: HEJTCV.
7. Grysa K. Inverse heat conduction problems, In: V. S. Vikhrenko (ed.) *Heat Conduction — Basic Research*. IntechOpen, 2011, pp. 3–36. DOI: <https://doi.org/10.5772/26575>.
8. Yaparova N. M. On various approaches to solving inverse boundary value problems of thermal diagnostics, *Vestn. Yuzhno-Uralsk. Gosud. Univ. Ser. Matematika. Mekhanika. Fizika*, 2012, no. 34, pp. 60–67 (In Russian). EDN: NRJZKZ.
9. Alifanov O. M., Nenarokomov A. V. Three-dimensional boundary-value inverse heat-conduction problem, *High Temperature*, 1999, vol. 37, no. 2, pp. 209–216.
10. Guerrier B., Benard C. Two-dimensional linear transient inverse heat conduction problem — Boundary condition identification, *J. Thermophys. Heat Transfer*, 1993, vol. 7, no. 3, pp. 472–478. DOI: <https://doi.org/10.2514/3.442>.
11. Rapoport E. Ya., Diligenskaya A. N. Modal identification of a boundary input in the two-dimensional inverse heat conduction problem, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.*

- Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2018, vol. 22, no. 2, pp. 380–394 (In Russian). EDN: **XWXSNN**. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1627>.
12. Diligenskaya A. N. Analytical identification of spatiotemporal control in inverse problems of thermal conductivity based on modal representation, *Vestn. Samar. Gosud. Tekhn. Univ. Ser. Tekhn. Nauki*, 2012, no. 4, pp. 31–38 (In Russian). EDN: **QBUTFD**.
 13. Diligenskaya A. N., Rapoport E. Ya. Analytical conditions for optimality in inverse problems of heat conduction, *High Temp.*, 2021, vol. 59, no. 3, pp. 292–301. EDN: **GIRKEM**. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0018151X21030032>.
 14. Diligenskaya A. N. Solution of the retrospective inverse heat conduction problem with parametric optimization, *High Temp.*, 2018, vol. 56, no. 3, pp. 382–388. EDN: **YBTJWH**. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0018151X18020050>.
 15. Diligenskaya A. N., Rapoport E. Ya. Analytical methods of parametric optimization in inverse heat-conduction problems with internal heat release, *J. Eng. Phys. Thermophys.*, 2014, vol. 87, no. 5, pp. 1126–1134. EDN: **UFURCF**. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10891-014-1114-1>.
 16. Koshlyakov N. S., Gliner E. B., Smirnov M. M. *Uravneniia v chastnykh proizvodnykh matematicheskoi fiziki* [Partial Differential Equations of Mathematical Physics]. Moscow, Vyssh. Shk., 1970, 336 pp. (In Russian)
 17. Rapoport E. Ya. *Al'ternansnyy metod v prikladnykh zadachakh optimizatsii* [Alternance Method in Applied Optimization Problems]. Moscow, Nauka, 2000, 336 pp. (In Russian). EDN: **TTRVMB**.
 18. Nemkov V. S., Demidovich V. B. *Teoriia i raschet ustroistv induktsionnogo nagreva* [Theory and Calculation of Induction Heating Devices]. Leningrad, Energoatomizdat, 1988, 280 pp. (In Russian). EDN: **SCTRML**.
 19. Rudnev V. I., Loveless D., Cook R. L. *Handbook of Induction Heating*. Boca Raton, CRC Press, 2017, 772 pp. DOI: <https://doi.org/10.1201/9781315117485>.
 20. Rapoport E. Ya., Pleshivtseva Yu. E. *Optimal Control of Induction Heating Processes*. Boca Raton, CRC Press, 2007, 349 pp. EDN: **UIEQHJ**. DOI: <https://doi.org/10.1201/9781420019490>.