



УДК 539.3

Термомеханические состояния гиротропных микрополярных тел

*Е. В. Мурашкин, Ю. Н. Радаев*Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН,
Россия, 119526, Москва, просп. Вернадского, 101, корп. 1.

Аннотация

Статья посвящена вопросам моделирования процессов теплопроводности в микрополярных телах, термомеханические состояния которых реагируют на зеркальные отражения трехмерного пространства. Построен новый вариант теории теплопроводности, в рамках которого тепловой поток оказывается псевдовектором алгебраического веса $+1$, подобным псевдовектору спинорных перемещений. С этим вариантом теории связаны определяющие псевдоинварианты нечетного отрицательного веса (например, коэффициент теплопроводности и теплоемкость). Этой цели удалось достичь, выбрав естественные элементы объема и площади в виде псевдоинвариантов веса -1 . Для представления трансляционных перемещений использовался абсолютный контравариантный вектор, а для спинорных перемещений фиксировался контравариантный псевдовектор веса $+1$. В результате тепловой поток, тензор силовых напряжений, плотность массы и теплоемкость оказываются псевдотензорными величинами нечетного веса. В качестве термодинамического потенциала используется свободная энергия Гельмгольца, отнесенная к единице естественного элемента объема, а функциональными аргументами выступают: температура, симметричные части и сопутствующие векторы линейного асимметричного тензора деформаций и псевдотензора изгиба-кручения. Обсуждается принцип абсолютной инвариантности абсолютной термодинамической температуры. Получено нелинейное уравнение теплопроводности и выполнена его линеаризация.

Ключевые слова: теплопроводность, микрополярность, тензорный элемент объема, псевдовектор потока тепла, псевдотензор, зеркальное от-

Механика деформируемого твердого тела**Научная статья**

© Коллектив авторов, 2023

© СамГТУ, 2023 (составление, дизайн, макет)

 Контент публикуется на условиях лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru) (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)**Образец для цитирования**

Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Термомеханические состояния гиротропных микрополярных тел // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, 2023. Т. 27, № 4. С. 659–678. EDN: CRRHLO. DOI: [10.14498/vsgtu2062](https://doi.org/10.14498/vsgtu2062).

Сведения об авторах*Евгений Валерьевич Мурашкин*  <https://orcid.org/0000-0002-3267-4742>кандидат физико-математических наук; старший научный сотрудник; лаб. моделирования в механике деформируемого твердого тела; e-mail: evmurashkin@gmail.com*Юрий Николаевич Радаев*  <https://orcid.org/0000-0002-0866-2151>доктор физико-математических наук, профессор; ведущий научный сотрудник; лаб. моделирования в механике деформируемого твердого тела; e-mail: radayev@ipmnet.ru, y.radayev@gmail.com

ражение, полуизотропное тело, гиротропное тело, абсолютная термодинамическая температура, правило баланса весов.

Получение: 9 сентября 2023 г. / Исправление: 10 ноября 2023 г. /

Принятие: 13 декабря 2023 г. / Публикация онлайн: 26 декабря 2023 г.

1. Введение и предварительные сведения. Конструкционные метаматериалы и биоккомпозиты обладают сложной микроструктурой [1–3]. Зачастую микро- и наноструктурные состояния таких материалов оказываются чувствительными к преобразованиям трехмерного пространства, меняющим его ориентацию на противоположную (с левой на правую и, наоборот, с правой на левую). Моделирование термомеханического отклика указанных материалов следует выполнять средствами теорий микрополярной термомеханики. Фундаментальным определяющим параметром, характеризующим микроструктурные особенности материала, в таких теориях является характерная микродлина L^1 [4–6], связанная с характерным размером микроструктуры (гранулы, волокна, соты, диполи жидких кристаллов, полимерные молекулы и т.д.). При этом в стандартных длинах: для макромеханики следует положить $L \sim 1$, для микромеханики — $L \sim 10^{-6}$, а для наномеханики — $L \sim 10^{-9}$. Важно отметить, что характерная микродлина микрополярной теории L — важнейший из модулей, которому может быть естественным образом приписан алгебраический вес, т.е. ее можно трактовать как определяющий псевдоскаляр, реагирующий на изменение ориентации координатного базиса.

В работах [7–11] было показано, что характерная микродлина L является ковариантно постоянным псевдоскаляром веса -1 , чувствительным к преобразованиям зеркального отражения, что в свою очередь можно вывести из условия ковариантного постоянства:

$$\nabla_s^{[-1]} L = 0,$$

откуда немедленно следует

$$L = 1^{[-1]} L.$$

Определение псевдоскалярной единицы $1^{[-1]}$ будет дано в следующем разделе настоящей статьи.

Несмотря на то, что аппарат алгебры и анализа псевдотензоров достаточно хорошо развит [12–19], подавляющее большинство математических теорий разрабатывается в терминах абсолютных тензоров [20–24] и лишь сравнительно малое число публикаций посвящено описанию в рамках псевдотензорного формализма [7–11].

Построение теорий микрополярной термоупругости следует начинать с выбора тензорных измерений элементарных объемов и площадей. Такой выбор существенным образом влияет на алгебраический вес, приписываемый основным характеристикам микро-, нано- термомеханических состояний микрополярного континуума. Например, при выборе дублетного элемента объема

¹В работах Нейбера [5, 6] характерная микродлина обозначалась l .

и соответствующего элемента площади тензор силовых напряжений оказывается псевдотензором отрицательного веса -1 , тензор моментных напряжений — псевдотензором отрицательного веса -2 , тепловой поток — псевдовектором алгебраического веса -1 , массовая плотность — псевдоскаляром алгебраического веса -1 , что было продемонстрировано в работе [25]. В настоящей работе для измерения элементарных объемов и площадей использованы естественные элементы объема и площади. Как было показано ранее [13, 26, 27], в этом случае тензор силовых напряжений оказывается псевдотензором положительного алгебраического веса $+1$. Отметим, что использование естественных элементов объема характерно для вариационных функционалов физических теорий поля [28, 29]. Несмотря на то, что тензорные элементы объема и площади в N -мерном пространстве наиболее просто задаются в терминах псевдотензоров [30, 31], описание обычно проводится с использованием формализма кососимметричных дифференциальных форм [32–34], существенно искажающих очевидные свойства указанных объектов и их псевдотензорную природу.

Другим фундаментальным аспектом разрабатываемой теории, на который следует обратить внимание, является задание кинематики микрополярного тела, базирующейся на одной из трех знаменитых теорем Шаля [35]. Из трех теорем Шаля, по существу, только вторая применялась в формулировках основных положений линейной микрополярной теории упругости [20–24]. Литературный поиск показывает скудность информации об использовании при математическом моделировании микрополярного континуума винтовой (третьей) теоремы Шаля, в которой кинематика микрополярного тела представляется как скользящий поворот. В конвенциональных микрополярных теориях упругости и термоупругости [20–24] обычно оперируют двумя независимыми полями трансляционных и спинорных перемещений (микроповоротов), последнее из которых наиболее просто задается псевдовектором. Возможны различные способы задания псевдовектора спинорных перемещений. В частности, представлению с помощью контравариантного псевдовектора $\phi^{[+1]k}$ положительного веса $+1$ посвящены работы [7–10], а моделям микрополярных тел, в которых использовался ковариантный псевдовектор $\phi_k^{[-1]}$ отрицательного веса -1 , посвящены работы [11, 36]. Указанные псевдовекторы легко преобразуются к абсолютным векторам спинорных перемещений ϕ^k (или ϕ_k).

В настоящей статье обсуждаются вопросы моделирования процессов теплопроводности в микро- и наноструктурных телах, термомеханические состояния которых могут быть сенсibilизированы к зеркальным отражениям трехмерного пространства. Построен новый вариант теории теплопроводности, в рамках которого тепловой поток оказывается псевдовектором алгебраического веса $+1$, подобным псевдовектору спинорных перемещений. Сформулирован принцип абсолютной инвариантности абсолютной температуры, следующий из определения и строгой положительности, что демонстрирует свойство неизменности поля температуры при зеркальных отражениях трехмерного пространства и невозможность приписать этому фундаментальному физическому полю ненулевой алгебраический вес.

Во втором разделе статьи приводятся минимально необходимые для по-

нимания статьи сведения и понятия из алгебры псевдотензоров и многомерной геометрии. Вводятся псевдоскалярные единицы. Обсуждается правило баланса весов (the weights balance rule).

В **третьем** разделе обсуждаются понятия элементарных псевдотензорных объемов в N -пространстве. Приводятся определения естественного и дублетного элементов объема. Устанавливаются соотношения, связывающие контр- и ковариантные тензорные элементы объема.

В **четвертом** разделе результаты, полученные в предыдущем разделе статьи, проецируются на трехмерный случай. Подробно обсуждаются двумерные элементы площади и их пространственные ориентации. Приводятся соотношения, связывающие псевдовекторные и псевдоскалярные элементы площади.

В **пятом** разделе статьи обсуждаются вопросы распространения тепла в микро- и наноструктурных телах, чувствительных к преобразованиям, меняющим ориентацию пространства. Обсуждается процедура, позволяющая приписать вектору теплового потока нечетный алгебраический вес. После этого вычисляются алгебраические веса массовой плотности, тензоров силовых и моментных напряжений, а также сопутствующих им векторов.

В **шестом** разделе сформулирован фундаментальный принцип абсолютной инвариантности абсолютной температуры.

Седьмой, заключительный раздел статьи, посвящен выводу уравнения теплопроводности и определяющих уравнений для микро- и наноструктурных тел, чувствительных к преобразованиям, меняющим ориентацию трехмерного пространства. Продемонстрировано, что для гиротропных упругих микрополярных тел тензор теплопроводности и теплоемкость сводятся к псевдоскалярам нечетного веса, реагирующим на изменение ориентации пространства на противоположную.

2. Псевдотензоры в N -мерном пространстве. Здесь и далее будем использовать терминологию и понятия современной геометрии и тензорного анализа [15, 38]. В дальнейшем изложении, где это не очевидно, сверху корневого символа псевдотензора в квадратных скобках будем отмечать его вес, а снизу в круглых скобках его ранг. Нулевой вес абсолютных тензоров и веса некоторых фундаментальных псевдотензоров в обозначениях отражаться не будут. Рассмотрим N -мерное евклидово пространство.

Фундаментальными объектами многомерной геометрии ориентируемых пространств, связанными с ориентацией локальных базисов, являются символы перестановок:

$$\epsilon_{h_1 h_2 \dots h_N}^{[-1]} = \epsilon_{k_1 k_2 \dots k_N}^{[+1]}. \quad (1)$$

Отметим, что равенство (1) нарушает принятые в псевдотензорной алгебре соглашения о балансе индексов и весов псевдотензоров. Кроме того, для символов перестановок требуются специальные правила жонглирования индексами:

$$\epsilon_{h_1 h_2 \dots h_N} = e^{-2} g_{h_1 k_1} g_{h_2 k_2} \dots g_{h_N k_N} \epsilon_{k_1 k_2 \dots k_N}. \quad (2)$$

Введем в N -мерном пространстве ковариантный базис $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \dots, \mathbf{z}_N$. Косое произведение векторов базиса [38]

$$[\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \dots, \mathbf{z}_N] = e \quad (3)$$

позволяет ввести понятие фундаментального ориентирующего псевдоскаляра e и тем самым разделить локальные базисные системы на право- и лево-ориентированные.

В трехмерном пространстве фундаментальный ориентирующий псевдоскаляр веса $+1$ (3) и две псевдоскалярные единицы определим согласно [36]:

$$e = \mathbf{e}_1 \cdot (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3), \quad \stackrel{[+1]}{1} = e, \quad \stackrel{[-1]}{1} = e^{-1}. \quad (4)$$

Отметим, что знак псевдоскалярной единицы в (4) определяет ориентацию координатных систем, т.е. для правоориентированных $\stackrel{[+1]}{1} > 0$, для левоориентированных $\stackrel{[+1]}{1} < 0$.

Кроме того, целые степени псевдоскалярных единиц ковариантно постоянны, т.е.

$$\nabla_k \stackrel{[\pm g]}{1} = \stackrel{[\pm g]}{0},$$

где ∇_k — оператор ковариантного дифференцирования в метрике g_{js} .

В дальнейшем изложении припишем функции w.g.t значение веса псевдотензора, на который действует эта функция. Например,

$$\text{w.g.t} \left(\stackrel{[g]}{1} \right) = g. \quad (5)$$

Псевдотензор $\stackrel{[g]}{T}_{(n) \dots k_1 k_2 \dots k_r}^{h_1 h_2 \dots h_s \dots}$ алгебраического веса g ранга $n = s + r$ с помощью степеней псевдоскалярной единицы можно преобразовать к абсолютному тензору того же ранга согласно

$$\stackrel{[g]}{T}_{(n) \dots k_1 k_2 \dots k_r}^{h_1 h_2 \dots h_s \dots} = \stackrel{[-g]}{1} \stackrel{[g]}{T}_{(n) \dots k_1 k_2 \dots k_r}^{h_1 h_2 \dots h_s \dots}.$$

В последнем равенстве выполняется правило баланса весов (the weights balance rule) [37, 39, 40]. Действительно, учитывая (5), имеем

$$\text{w.g.t} \left(\stackrel{[g]}{T}_{(n) \dots k_1 k_2 \dots k_r}^{h_1 h_2 \dots h_s \dots} \right) = \text{w.g.t} \left(\stackrel{[-g]}{1} \stackrel{[g]}{T}_{(n) \dots k_1 k_2 \dots k_r}^{h_1 h_2 \dots h_s \dots} \right) = -g + g = 0.$$

3. Псевдоинвариантные элементы площади и объема в N -мерном пространстве. В N -мерном евклидовом пространстве выберем криволинейную систему координат x^k ($k = 1, 2, \dots, N$). Рассмотрим погруженное в него многообразие (поверхность) Σ размерности M ($M \leq N$). Пусть многообразие Σ задано его гауссовой параметризацией u^α ($\alpha = 1, 2, \dots, M$):

$$x^k = x^k(u^1, u^2, \dots, u^M). \quad (6)$$

В формуле (6) x^k являются внешними координатами для Σ , а u^α — внутренними.

Тензорный элемент объема, следуя концепциям А. Пуанкаре [41, 42], задается согласно правилу

$$d\tau^{i_1 i_2 \dots i_M} = M! dx_1^{i_1} dx_2^{i_2} \dots dx_M^{i_M}. \quad (7)$$

Здесь в квадратные скобки заключены индексы, по которым выполняется альтернирование.

Нетрудно заметить, что формулу (7) можно представить в следующем виде [15, см. с. 256–257]:

$$d\tau^{i_1 i_2 \dots i_M} = \epsilon^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_M} \partial_{\alpha_1} x^{i_1} \partial_{\alpha_2} x^{i_2} \dots \partial_{\alpha_M} x^{i_M} \det_b(du^\gamma). \quad (8)$$

Для случая $M = N$ с учетом формулы (8) получим псевдотензорный элемент объема:

$$d\tau^{i_1 i_2 \dots i_N} = d\tau^{[-1]_{12 \dots N} [+1]_{i_1 i_2 \dots i_N}}, \quad (9)$$

где $d\tau^{[-1]_{12 \dots N}}$ — естественный элемент объема, представляющий собой псевдоскаляр веса -1 , который определяется согласно

$$d\tau^{[-1]_{12 \dots N}} = \det(\partial_\alpha x^k) du^1 du^2 \dots du^N = dx^1 dx^2 \dots dx^N.$$

Опустив в формуле (9) индексы, т.е. применив правило жонглирования индексами для символов перестановок (2), определим ковариантный тензорный элемент объема в виде

$$d\tau_{i_1 i_2 \dots i_N} = e^2 d\tau^{[-1]_{12 \dots N} [-1]_{i_1 i_2 \dots i_N}} = d\tau_{12 \dots N}^{[+1]} \epsilon_{i_1 i_2 \dots i_N}^{[-1]}, \quad (10)$$

где $d\tau_{12 \dots N}^{[+1]}$ — дублетный элемент объема, представляющий собой псевдоскаляр веса $+1$.

С помощью псевдоскаляров $d\tau^{[-1]_{12 \dots N}}$, $d\tau_{12 \dots N}^{[+1]}$ и псевдоскалярных единиц $[\mp 1]$

1 можно образовать абсолютный скаляр $d\tau$, являющийся инвариантным элементом объема:

$$d\tau = \begin{matrix} [+1] \\ 1 \end{matrix} d\tau^{[-1]_{12 \dots N}} = \begin{matrix} [-1] \\ 1 \end{matrix} d\tau_{12 \dots N}^{[+1]}.$$

4. Проекция на трехмерный случай ($N = 3$). Рассмотрим случай трехмерного пространства. В качестве многообразия выберем двумерную поверхность, заданную естественной (гауссовой) параметризацией u^1, u^2 . Для этого случая в формуле (8) примем $N = 3$, $M = 2$, откуда получим контравариантный тензорный элемент площади поверхности [30, 31]:

$$d\tau^{ij} = \epsilon^{\alpha_1 \alpha_2} \partial_{\alpha_1} x^i \partial_{\alpha_2} x^j du^1 du^2 = 2\partial_1 x^{[i} \partial_2 x^{j]} du^1 du^2. \quad (11)$$

Ковариантный тензорный элемент площади $d\tau_{ij}$ можно получить, опустив индексы у $d\tau^{ij}$ в (11) в соответствии с правилом жонглирования индексами (10).

Антисимметричным абсолютным тензорам $d\tau^{ij}$ и $d\tau_{ij}$ сопутствуют ковариантный и контравариантный псевдовекторы

$$\stackrel{[-1]}{dA}_k = \frac{1}{2}\epsilon_{kij}d\tau^{ij}, \quad \stackrel{[+1]}{dA}^k = \frac{1}{2}\epsilon^{kij}d\tau_{ij}. \quad (12)$$

Абсолютные векторные элементы площади поверхности можно определить, домножив псевдовекторные элементы площади (12) на соответствующую степень псевдоскалярной единицы:

$$dA_k = \stackrel{[+1][-1]}{1} dA_k, \quad dA^k = \stackrel{[-1][+1]}{1} dA^k. \quad (13)$$

Псевдоскалярные элементы площади поверхности задаются следующими формулами:

$$\stackrel{[-1]}{dA} = (\text{sgn } e) \sqrt{g^{sk} \stackrel{[-1]}{dA}_s \stackrel{[-1]}{dA}_k}, \quad \stackrel{[+1]}{dA} = (\text{sgn } e) \sqrt{g_{sk} \stackrel{[+1]}{dA}^s \stackrel{[+1]}{dA}^k}. \quad (14)$$

И тот и другой элемент площади (14) чувствительны к изменению ориентации координатной системы, что обусловлено знаком фундаментального ориентирующего псевдоскаляра.

Инвариантный элемент площади поверхности определяется через абсолютные векторные элементы площади (13) согласно

$$dA = \sqrt{dA^k dA_k} > 0. \quad (15)$$

Используя введенные выше определения для элементов площади (14) и (15), можно показать, что

$$\left(\stackrel{[\pm 1]}{dA}\right)^2 = \frac{1}{2} \stackrel{[\pm 2]}{1} d\tau^{is} d\tau_{is}, \quad (dA)^2 = \frac{1}{2} d\tau^{is} d\tau_{is}.$$

5. Распространение тепла в микрополярных средах. Рассмотрим распространение тепла в средах, термомеханические характеристики которых проявляют чувствительность к зеркальным отражениям и инверсиям трехмерного евклидова пространства. Как отмечалось ранее, выбор тензорных элементов объема и площади существенным образом влияет на алгебраический вес, приписываемый основным характеристикам микро- и наноструктурных термомеханических состояний микрополярного континуума. Основываясь на результатах предыдущих разделов настоящей статьи, следует отметить, что существует три варианта развития микрополярной термоупругости, различающихся элементарными объемами: $d\tau$, $\stackrel{[+1]}{d\tau}$, $\stackrel{[-1]}{d\tau}$. Их можно определить следующей диаграммой весов элементарных объемов, элементарных площадей, тепловых потоков, коэффициентов теплопроводности и теплоемкостей:

$$\begin{array}{llllll} (1) & d\tau & dA & h^k & \lambda & c \\ & \stackrel{[+1]}{d\tau} & \stackrel{[+1]}{dA} & \stackrel{[-1]}{h}^k & \stackrel{[-1]}{\lambda} & \stackrel{[-1]}{c} \\ (2) & & & & & \\ & \stackrel{[-1]}{d\tau} & \stackrel{[-1]}{dA} & \stackrel{[+1]}{h}^k & \stackrel{[+1]}{\lambda} & \stackrel{[+1]}{c} \\ (3) & & & & & \end{array}$$

Эта диаграмма отражает возможную чувствительность теплоемкости к преобразованиям, меняющим ориентацию пространства, в теориях, развиваемых в терминах псевдоинвариантных элементов объема и площади.

Здесь и далее примем для измерения элементарных площадей и объемов псевдоинвариантные (естественные) элементы:

$$\begin{matrix} [-1] \\ dA, \end{matrix} \quad \begin{matrix} [-1] \\ dA_k, \end{matrix} \quad \begin{matrix} [-1] \\ d\tau. \end{matrix} \quad (16)$$

Количество тепла Q , поступающее через фиксированную замкнутую поверхность ∂ в единицу времени, с учетом (16) будет определяться соотношением

$$Q = \oint_{\partial} \begin{matrix} [+1] \\ h \end{matrix}^k \begin{matrix} [-1] \\ n_k \end{matrix} dA = \oint_{\partial} \begin{matrix} [+1] \\ h \end{matrix}^k \begin{matrix} [-1] \\ dA_k, \end{matrix} \quad (17)$$

где $\begin{matrix} [+1] \\ h \end{matrix}^k$ — псевдовектор потока тепла, n_k — единичный вектор внешней нормали к поверхности ∂ (абсолютный вектор [26, 43]).

Баланс весов в (17) базируется на фундаментальном утверждении

$$\text{w.g.t}(Q) = 0,$$

означающем невозможность приписать какой бы то ни было целый алгебраический вес количеству тепла Q . Отсюда немедленно следует, что

$$\text{w.g.t} \left(\begin{matrix} [+1] \\ h \end{matrix}^k \begin{matrix} [-1] \\ dA_k \end{matrix} \right) = 0.$$

Важно отметить, что в этом случае вектор потока тепла оказывается псевдовектором положительного веса $+1$.

Правило баланса весов позволяет заключить, что для алгебраических весов плотности ρ , псевдотензора силовых t^{ik} и тензора моментных $\mu_{\cdot k}^{i\cdot}$ напряжений справедливы равенства

$$\text{w.g.t}(\rho) = +1, \quad \text{w.g.t}(t^{ik}) = +1, \quad \text{w.g.t}(\mu_{\cdot k}^{i\cdot}) = 1 - 1 = 0. \quad (18)$$

Для ассоциированных (сопутствующих) векторов силовых напряжений τ_i и псевдовектора моментных напряжений $\begin{matrix} [+1] \\ \mu \end{matrix}_i$, учитывая (18), имеем

$$2\tau_i = -\epsilon_{ijk} \begin{matrix} [+1] \\ t \end{matrix}^{[jk]}, \quad 2 \begin{matrix} [+1] \\ \mu \end{matrix}_i = \epsilon^{iks} \mu_{[ks]},$$

что подтверждается выполнением равенств

$$\begin{aligned} \text{w.g.t}(\tau_i) &= \text{w.g.t}(\epsilon_{ijk} \begin{matrix} [+1] \\ t \end{matrix}^{[jk]}) = -1 + 1 = 0, \\ \text{w.g.t}(\begin{matrix} [+1] \\ \mu \end{matrix}_i) &= \text{w.g.t}(\epsilon^{iks} \mu_{[ks]}) = 1 + 0 = +1. \end{aligned}$$

6. Принцип абсолютной инвариантности абсолютной температуры в термомеханике. В этом разделе работы рассматривается абсолютная термодинамическая температура с целью решения вопроса о возможности приписать ей целый алгебраический вес, т.е. рассматривать ее как псевдоинвариант.² В качестве термодинамического потенциала сначала выберем внутреннюю энергию u как функцию термодинамических переменных состояния:

$$u = \bar{u}(\epsilon_{(kl)}, \kappa_{(kl)}^{[+1]}, \varphi^{[+1]}_i, \kappa_i, s).$$

Чертой сверху будем в дальнейшем обозначать потенциалы состояния. Здесь в качестве термодинамических переменных, кроме энтропии, выбраны симметричные части асимметричного тензора деформаций и тензора изгиба-кручения:

$$\epsilon_{(kl)} = \nabla_{(k} u_{l)} = \frac{1}{2}(\nabla_k u_l + \nabla_l u_k), \quad \kappa_{(kl)}^{[+1]} = \nabla_{(k} \phi_{l)}^{[+1]} = \frac{1}{2}(\nabla_k \phi_l^{[+1]} + \nabla_l \phi_k^{[+1]}), \quad (19)$$

а также сопутствующие псевдовектор и вектор:

$$\varphi^{[+1]}_i = -\frac{1}{2}\epsilon^{ikl}\epsilon_{[kl]}, \quad \kappa_i = \frac{1}{2}\epsilon_{ikl}\kappa^{[+1]}_{[kl]}. \quad (20)$$

Абсолютная температура θ в термомеханике сплошных сред определяется как функция параметров термодинамического состояния и вычисляется как частная производная потенциальной функции (внутренней энергии u) по энтропии s :

$$\theta = \frac{\partial \bar{u}(\epsilon_{(kl)}, \kappa_{(kl)}^{[+1]}, \varphi^{[+1]}_i, \kappa_i, s)}{\partial s}. \quad (21)$$

Для наших целей удобно использовать плотности в расчете на единицу объема:

$$S = \rho s, \quad \bar{U} = \rho u.$$

Тогда формула (21) преобразуется к виду

$$\theta = \frac{\partial \bar{U}(\epsilon_{(kl)}, \kappa_{(kl)}^{[+1]}, \varphi^{[+1]}_i, \kappa_i, S)}{\partial S}.$$

Кроме того, следует принимать во внимание фундаментальное термодинамическое неравенство

$$\inf \theta > 0,$$

постулирующее как положительность абсолютной температуры,³ так и невозможность достичь абсолютного нуля ни при каком допустимом термодинамическом процессе.

²В классической термомеханике континуума абсолютная термодинамическая температура θ — всегда абсолютный инвариант, не зависящий ни от поворотов ни от зеркальных отражений пространства.

³Положительность абсолютной температуры может быть доказана исходя из канонического распределения Гиббса для ансамбля элементарных термодинамических систем.

Из определения (21) видно, что независимо от выбора веса элементарного объема, веса плотности внутренней энергии и веса плотности энтропии⁴

$$\text{w.g.t}(\theta) = \text{w.g.t}(\bar{U}) - \text{w.g.t}(S) = 0.$$

Отсюда немедленно следует фундаментальное утверждение, что абсолютная температура является абсолютным инвариантом, сохраняющим неизменным свое значение при поворотах и отражениях пространства, что показывает принципиальную нереализуемость приписывания какого бы то ни было алгебраического веса абсолютной термодинамической температуре. Последнее обстоятельство обусловлено различной природой внутренней энергии (аддитивность) и температуры (неаддитивность).

7. Уравнение теплопроводности и определяющие уравнения для гиротропных микрополярных тел. Учитывая (18) и правило баланса весов, псевдоскалярное уравнение баланса энтропии в рамках развиваемой схемы исследования можно записать в виде

$$^{[+1]}_{\rho} \dot{s} = -\nabla_j ^{[+1]} J^j + ^{[+1]}_{\rho} \sigma + ^{[+1]}_{\rho} \xi, \quad (22)$$

где $^{[+1]} J^j$ — псевдовектор потока энтропии, ξ — неконтролируемое производство энтропии (в единицу времени в расчете на единицу массы), σ — контролируемое производство энтропии (в единицу времени в расчете на единицу массы). Отметим, что s , ξ и σ являются абсолютными скалярами, т.е. не меняются при любых преобразованиях пространства. В дальнейшем изложении будем полагать отсутствие лучистого тепла, т.е. $\sigma = 0$.

При этом для энтропии справедливо следующее соотношение:

$$s = -\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \theta}.$$

Здесь в качестве термодинамического потенциала выбрана свободная энергия Гельмгольца ψ в расчете на единицу массы как функция термодинамических переменных состояния:

$$\psi = \bar{\psi}(\epsilon_{(kl)}, ^{[+1]}_{\kappa_{(kl)}}, ^{[+1]}_{\varphi_i}, \kappa_i, \theta). \quad (23)$$

В дальнейшем удобно ввести следующие обозначения:

$$^{[+1]}_S = ^{[+1]}_{\rho} \bar{s}, \quad ^{[+1]}_{\Psi} = ^{[+1]}_{\rho} \bar{\psi}, \quad ^{[+1]}_{\Xi} = ^{[+1]}_{\rho} \bar{\xi}. \quad (24)$$

Тогда приведенное уравнение баланса энергии с учетом (19), (20), (23) в обозначениях (24) примет вид

$$\begin{aligned} & -(\partial_i ^{[+1]} \Psi + ^{[+1]}_S \partial_i \theta) + ^{[+1]}_t (ij) \partial_i \epsilon_{(ij)} + \mu^{(ik)} \partial_i ^{[+1]}_{\kappa_{(ik)}} \\ & + \tau_i \partial_i ^{[+1]}_{\varphi} + ^{[+1]}_{\mu} \partial_i \kappa_i - \theta^{-1} h^i \nabla_i \theta = ^{[+1]}_{\Xi} \theta. \end{aligned}$$

⁴В данном контексте подразумевается, что плотности берутся в расчете на единицу объема.

Здесь ∂ — производная по времени при фиксированных координатах x^k . В приближении малых деформаций мы считаем $\dot{a} = \partial a$.

Следствием второго закона термодинамики для гиротропных микрополярных тел, чувствительных к зеркальным отражениям трехмерного пространства, являются определяющие псевдотензорные уравнения:

$$\begin{aligned} {}^{[+1]}_t(ij) &= \frac{\partial {}^{[+1]}\Psi}{\partial \epsilon_{(ij)}}, & \mu^{(ik)} &= \frac{\partial {}^{[+1]}\Psi}{\partial {}^{[+1]}\kappa_{(ik)}}, \\ \tau_i &= \frac{\partial {}^{[+1]}\Psi}{\partial {}^{[+1]}\varphi_i}, & {}^{[+1]}\mu_i &= \frac{\partial {}^{[+1]}\Psi}{\partial \kappa_i}, \\ {}^{[+1]}S &= -\frac{\partial {}^{[+1]}\Psi}{\partial \theta}, & {}^{[+1]}J^j &= \frac{{}^{[+1]}J^j}{J}(\nabla_k \ln \theta). \end{aligned} \quad (25)$$

Для неконтролируемого производства энтропии справедлива следующая цепочка равенств:

$${}^{[+1]}\Xi = -\theta^{-2} h^j \nabla_j \theta = -\theta^{-1} \frac{{}^{[+1]}J^j}{J} \nabla_j \theta = -\frac{{}^{[+1]}J^j}{J} (\nabla_k \ln \theta) \nabla_j \ln \theta.$$

Нелинейное уравнение теплопроводности получим подстановкой определяющих уравнений (25) в уравнение баланса энтропии (22), учитывая

$$\theta \frac{{}^{[+1]}J^j}{J} = \frac{{}^{[+1]}J^j}{h^j}.$$

В силу абсолютной инвариантности температуры веса потока тепла и энтропии совпадают.

В итоге получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial {}^{[+1]}S}{\partial \epsilon_{(ij)}} \partial \epsilon_{(ij)} + \frac{\partial {}^{[+1]}S}{\partial {}^{[+1]}\kappa_{(ik)}} \partial {}^{[+1]}\kappa_{(ik)} + \frac{\partial {}^{[+1]}S}{\partial {}^{[+1]}\varphi_i} \partial {}^{[+1]}\varphi_i + \\ + \frac{\partial {}^{[+1]}S}{\partial \kappa_i} \partial \kappa_i + \frac{\partial {}^{[+1]}S}{\partial \theta} \partial \theta = -\theta^{-1} \nabla_j \frac{{}^{[+1]}J^j}{h^j}. \end{aligned} \quad (26)$$

Примем линеаризованную по функциональным аргументам свободную энергию Гельмгольца для анизотропного микрополярного термоупругого континуума в виде

$$\begin{aligned} {}^{[+1]}\Psi &= E_I^{[+1](ik)(lm)} \epsilon_{(ik)} \epsilon_{(lm)} + E_{II}^{[-1](ik)(lm)} \kappa_{(ik)}^{[+1]} \kappa_{(lm)}^{[+1]} + \\ &+ E_{III}^{(ik)(lm)} \epsilon_{(ik)} \kappa_{(lm)}^{[+1]} + E_{IV}^{(ik).l} \epsilon_{(ik)} \varphi^{[+1]l} + E_V^{[-1](ik).l} \kappa_{(ik)}^{[+1]} \varphi^{[+1]l} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{E^{[+1]}(ik)l}{VI} \epsilon_{(ik)} \kappa_l + \frac{E^{(ik)l[+1]}}{VII} \kappa_{(ik)} \kappa_l + \frac{E^{[-1]}(il)}{VIII} \varphi^{[+1]i} \varphi^{[+1]l} + \frac{E^{[+1]}(il)}{IX} \kappa_i \kappa_l + \\
& + \frac{E^{[+1]}_{X \cdot l} \varphi^{[+1]i} \kappa_l}{X} + \frac{E^{[+1]}_{XI} (ik) \epsilon_{(ik)} \theta}{XI} + \frac{E^{(ik)[+1]}_{XII} \kappa_{(ik)} \theta}{XII} + \\
& + \frac{E^{[+1]}_{XIII} i \varphi^{[+1]i} \theta}{XIII} + \frac{E^{[+1]}_{XIV} i \kappa_i \theta}{XIV} + \frac{E^{[+1]}_{XV} \theta^2}{XV}, \quad (27)
\end{aligned}$$

где $\frac{E^{[+1]}(ik)(lm)}{I}$, $\frac{E^{[-1]}(ik)(lm)}{II}$, $\frac{E^{(ik)(lm)}}{III}$, $\frac{E^{(ik) \cdot l}}{IV}$, $\frac{E^{[-1]}(ik) \cdot l}{V}$, $\frac{E^{[+1]}(ik)l}{VI}$, $\frac{E^{(ik)l}}{VII}$, $\frac{E^{[-1]}(il)}{VIII}$, $\frac{E^{[+1]}(il)}{IX}$, $\frac{E^{[+1]}_{X \cdot l} i \varphi^{[+1]i} \kappa_l}{X}$, $\frac{E^{(ik)}}{XI}$, $\frac{E^{(ik)}}{XII}$, $\frac{E^{[+1]}_{XIII} i \varphi^{[+1]i} \kappa_l}{XIII}$, $\frac{E^{[+1]}_{XIV} i \kappa_i \theta}{XIV}$, $\frac{E^{[+1]}_{XV} \theta^2}{XV}$ — определяющие тензоры и псевдотензоры анизотропного микрополярного термоупругого континуума, $\theta \rightarrow \theta - \theta_0$ — малый температурный инкремент (считается малой первого порядка), θ_0 — референциальная температура.

Определяющие уравнения (25), соответствующие квадратичной форме свободной энергии Гельмгольца (27), принимают вид

$$\begin{cases}
t^{[+1]}(ik) = 2 \frac{E^{[+1]}(ik)(lm)}{I} \epsilon_{(lm)} + \frac{E^{(ik)(lm)[+1]}}{III} \kappa_{(lm)} + \frac{E^{(ik) \cdot l} \varphi^{[+1]i}}{IV} + \frac{E^{[+1]}(ik)l}{VI} \kappa_l + \frac{E^{[+1]}(ik)\theta}{XI}, \\
\mu^{[+1]}(ik) = 2 \frac{E^{[-1]}(ik)(lm)[+1]}{II} \kappa_{(lm)} + \frac{E^{(lm)(ik)}}{III} \epsilon_{(lm)} + \frac{E^{[-1]}(ik)l^{[+1]l}}{V} \varphi^{[+1]l} + \frac{E^{(ik)l}}{VII} \kappa_l + \frac{E^{(ik)\theta}}{XII}, \\
\tau_i = 2 \frac{E^{[-1]}(il)}{VIII} \varphi^{[+1]l} + \frac{E^{[+1]}_{X \cdot l} i \kappa_l}{X} + \frac{E^{(lm) \cdot l}}{IV} \epsilon_{(lm)} + \frac{E^{(lm) \cdot l}}{V} \kappa_{(lm)} + \frac{E^{[+1]}_{XIII} i \theta}{XIII}, \\
\mu^{[+1]}_i = 2 \frac{E^{[+1]}(il)}{IX} \kappa_l + \frac{E^{[+1]}_{X \cdot l} i \varphi^{[+1]l}}{X} + \frac{E^{(lm)i}}{VI} \epsilon_{(lm)} + \frac{E^{(lm)i[+1]}}{VII} \kappa_{(lm)} + \frac{E^{[+1]}_{XIV} i \theta}{XIV}, \\
S^{[+1]} = - \frac{E^{[+1]}(ik)}{XI} \epsilon_{(ik)} - \frac{E^{(ik)[+1]}}{XII} \kappa_{(ik)} - \frac{E^{[+1]}_{XIII} i \varphi^{[+1]i}}{XIII} - \frac{E^{[+1]}_{XIV} i \kappa_i}{XIV} - \frac{E^{[+1]}_{XV} \theta}{XV}.
\end{cases} \quad (28)$$

В качестве закона теплопроводности примем линейный закон Фурье

$$h^{[+1]k} = - \frac{E^{[+1]}_{XVI}{}^{ki}}{XVI} \nabla_i \theta, \quad (29)$$

где $\frac{E^{[+1]}_{XVI}{}^{ki}}{XVI}$ — псевдотензор коэффициентов теплопроводности. Отметим, что в (29) компоненты псевдотензора коэффициентов теплопроводности $\frac{E^{[+1]}_{XVI}{}^{ki}}{XVI}$, вообще говоря, проявляют чувствительность к зеркальным отражениям и инверсиям трехмерного пространства.

После линеаризации уравнения теплопроводности (26) с учетом (28) и (29) окончательно получим

$$\begin{aligned}
& \frac{E^{[+1]}(ij)}{XI} \partial_i \epsilon_{(ij)} + \frac{E^{(ij)}}{XII} \partial_i \kappa_{(ij)} + \frac{E^{[+1]}_{XIII} i \varphi^{[+1]i}}{XIII} + \\
& + \frac{E^{[+1]}_{XIV} i \partial_i \kappa_i}{XIV} + \theta_0^{-1} \frac{E^{[+1]}_{XVI}{}^{js}}{XVI} \partial_s \theta = \theta_0^{-1} \frac{E^{[+1]}_{XVI}{}^{js}}{XVI} \nabla_j \nabla_s \theta,
\end{aligned}$$

где $^{[+1]}C = \frac{^{[+1]}}{\rho} c$, c — теплоемкость в расчете на единицу массы (specific heat).

Для гиротропного микрополярного термоупругого тела определяющие тензоры и псевдотензоры четвертого ранга примут вид [44]:

$$\begin{aligned} E_I^{(ik)(lm)} &= A_I g^{ik} g^{lm} + C_I^{[+1]} g^{il} g^{km}, \\ E_{II}^{(ik)(lm)} &= A_{II} g^{ik} g^{lm} + C_{II}^{[-1]} g^{il} g^{km}, \\ E_{III}^{(ik)(lm)} &= A_{III} g^{ik} g^{lm} + C_{III} g^{il} g^{km}; \end{aligned} \quad (30)$$

определяющие тензоры и псевдотензоры третьего и первого ранга равны нулю:

$$E_{IV}^{(ik)\cdot} = E_V^{(ik)\cdot} = E_{VI}^{(ik)l} = E_{VII}^{(ik)l} = E_{XIII}^i = E_{XIV}^{[+1]i} = 0;$$

определяющие тензоры и псевдотензоры второго ранга оказываются шаровыми:

$$\begin{aligned} E_{VIII}^{(-1)(il)} &= B_{VIII}^{(-1)} g_{il}, & E_{IX}^{(+1)(il)} &= B_{IX}^{(+1)} g^{il}, & E_X^{il} &= B_X g_{il}^{il}, \\ E_{XI}^{(+1)(ik)} &= B_{XI}^{(+1)} g^{ik}, & E_{XII}^{(ik)} &= B_{XII} g^{ik}. \end{aligned} \quad (31)$$

Кроме того, для полуизотропного тела шаровым оказывается псевдотензор коэффициентов теплопроводности:

$$E_{XVI}^{[+1]js} = \lambda^{[+1]} g^{js}.$$

Псевдоскаляры нечетного алгебраического веса в (30) и (31), как и коэффициент теплопроводности $\lambda^{[+1]}$, реагируют на преобразования трехмерного пространства, меняющие его ориентацию на противоположную. То же самое касается и теплоемкости $C^{[+1]}$.

Заключение. В настоящей статье рассмотрены вопросы моделирования процессов теплопроводности в микро- и наноструктурных телах, термомеханические состояния которых реагируют на преобразования трехмерного пространства, меняющие его ориентацию на противоположную. Построен новый вариант теории теплопроводности, в рамках которого тепловой поток оказывается псевдовектором алгебраического веса $+1$, подобным псевдовектору спинорных перемещений.

1. Предложены элементарные тензорные площади и объемы, позволяющие представить вектор теплового потока в форме псевдовектора положительного веса $+1$, что делает его алгебраически подобным псевдовектору спинорных перемещений в точности того же алгебраического веса. Точно такие же тензорные элементы площади и объема используются в стандартных физических теориях поля.

2. Сформулирован фундаментальный принцип абсолютной инвариантности абсолютной термодинамической температуры, обусловленный балансом алгебраических весов плотности внутренней энергии и плотности энтропии.
3. Предложена квадратичная форма для свободной энергии Гельмгольца, включающая XV определяющих псевдотензоров.
4. Получено нелинейное уравнение теплопроводности. Выполнена его линеаризация с учетом линейного закона теплопроводности Фурье. Показано, что коэффициент теплопроводности и теплоемкость являются псевдоскалярами веса +1, реагирующими на преобразования, изменяющие ориентацию трехмерного пространства на противоположную.
5. Разработанный подход в перспективе может быть обобщен на дробные алгебраические веса.
6. Установлена принципиальная нереализуемость приписывания какого бы то ни было алгебраического веса абсолютной термодинамической температуре, обусловленная различной природой внутренней энергии (аддитивность) и температуры (неаддитивность).
7. Показано, что псевдовектор потока энтропии имеет тот же вес, что и псевдовектор потока тепла в силу абсолютной инвариантности абсолютной термодинамической температуры.

Конкурирующие интересы. Заявляем, что в отношении авторства и публикации этой статьи конфликта интересов не имеем.

Авторский вклад и ответственность. Все авторы принимали участие в разработке концепции статьи и в написании рукописи. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 23-21-00262).

Библиографический список

1. Lakes R. Elastic and viscoelastic behavior of chiral materials // *Int. J. Mech. Sci.*, 2001. vol. 43, no. 7. pp. 1579–1589. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0020-7403\(00\)00100-4](https://doi.org/10.1016/S0020-7403(00)00100-4).
2. Mackay T. G., Lakhtakia A. Negatively refracting chiral metamaterials: a review // *SPIE Reviews*, 2010. vol. 1, no. 1, 018003. DOI: <https://doi.org/10.1117/6.0000003>.
3. Tomar S. K., Khurana A. Wave propagation in thermo-chiral elastic medium // *Appl. Math. Model.*, 2013. vol. 37, no. 22. pp. 9409–9418. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.apm.2013.04.029>.
4. Радаев Ю. Н. Правило множителей в ковариантных формулировках микрополярных теорий механики континуума // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2018. Т. 22, № 3. С. 504–517. EDN: YOYJQD. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1635>.
5. Neuber H. Über Probleme der Spannungskonzentration im Cosserat-Körper // *Acta Mechanica*, 1966. vol. 2. pp. 48–69. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01176729>.
6. Neuber H. On the general solution of linear-elastic problems in isotropic and anisotropic Cosserat continua / *Applied Mechanics*; eds. H. Görtler. Berlin, Heidelberg: Springer, 1966. pp. 153–158. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-662-29364-5_16.
7. Радаев Ю. Н., Мурашкин Е. В. Псевдотензорная формулировка механики гемитропных микрополярных сред // *Пробл. прочн. пластичн.*, 2020. Т. 82, № 4. С. 399–412. EDN: TODIFV. DOI: <https://doi.org/10.32326/1814-9146-2020-82-4-399-412>.
8. Murashkin E. V., Radayev Yu. N. On a micropolar theory of growing solids // *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser.

- Phys. Math. Sci.], 2020. vol. 24, no. 3. pp. 424–444. EDN: TYGBER. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1792>.
9. Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. К теории линейных гемитропных микрополярных сред // *Вестн. ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Сер. Механика предельного состояния*, 2020. №4(46). С. 16–24. EDN: IZKTBQ. DOI: <https://doi.org/10.37972/chgpu.2020.89.81.031>.
10. Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Связанная термоупругость гемитропных сред. Псевдотензорная формулировка // *Изв. РАН. МТТ*, 2023. №3. С. 163–176. EDN: JMQVBJ.
11. Murashkin E. V., Radayev Yu. N. A negative weight pseudotensor formulation of coupled hemitropic thermoelasticity // *Lobachevskii J. Math.*, 2023. vol. 44, no. 6. pp. 2440–2449. EDN: PINYDI. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1995080223060392>.
12. Truesdell C., Toupin R. The classical field theories / *Encyclopedia of Physics*. vol. III/1 / Principles of Classical Mechanics and Field Theory; eds. S. Flügge. Berlin, Göttingen, Heidelberg: Springer, 1960. pp. 226–902. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-642-45943-6_2.
13. Schouten J. A. *Tensor Analysis for Physicist*. Oxford: Clarendon Press, 1951. 434 pp.
14. Sokolnikoff I. S. *Tensor Analysis: Theory and Applications to Geometry and Mechanics of Continua*. John Wiley & Sons, 1964. 361 pp.
15. Synge J. L., Schild A. *Tensor Calculus*. New York: Dover Publ., 1978. xi+324 pp.
16. Das A. J. *Tensors: The Mathematics of Relativity Theory and Continuum Mechanics*. Berlin: Springer Science & Business Media, 2007. xii+290 pp. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-0-387-69469-6>.
17. Gurevich G. B. *Foundations of the Theory of Algebraic Invariants*. Groningen: Noordhoff, 1964. 429 pp.
18. Veblen O., Thomas T. Y. Extensions of relative tensors // *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1924. vol. 26, no. 3. pp. 373–377. DOI: <https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1924-1501284-6>.
19. Veblen O. *Invariants of Quadratic Differential Forms*. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1927. viii+102 pp.
20. Cosserat E., Cosserat F. *Théorie des Corps déformables*. Paris: A. Herman et Fils, 1909. vi+226 pp.
21. Nowacki W. *Theory of Micropolar Elasticity*. Wien: Springer, 1972. 285 pp. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-7091-2720-9>.
22. Nowacki W. *Theory of Asymmetric Elasticity*. Oxford: Pergamon Press, 1986. viii+383 pp.
23. Dyszlewicz J. *Micropolar Theory of Elasticity / Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics*. Berlin, Heidelberg: Springer, 2004. xv+345 pp. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-540-45286-7>.
24. Besdo D. Ein Beitrag zur nichtlinearen Theorie des Cosserat-Kontinuums // *Acta Mechanica*, 1974. vol. 20, no. 1. pp. 105–131. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01374965>.
25. Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Теплопроводность микрополярных тел, чувствительных к зеркальным отражениям трехмерного пространства // *Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки*, 2023. Т. 165, №4 (в печати).
26. Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Тензор силовых напряжений Схоутена и аффинорные плотности положительного веса // *Пробл. прочн. пластичн.*, 2022. Т. 84, №4. С. 545–558. EDN: KPMGGN. DOI: <https://doi.org/10.32326/1814-9146-2022-84-4-545-558>.
27. Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. К теории ковариантного дифференцирования двухточечных псевдотензорных полей // *Изв. РАН. МТТ*, 2022. №6. С. 104–113. EDN: MZLHKD. DOI: <https://doi.org/10.31857/S0572329922060149>.
28. Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. *Элементы теории поля: вариационные симметрии и геометрические инварианты*. М.: Физматлит, 2009. 160 с. EDN: MWDGDN.
29. Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. *Волновые задачи теории поля и термомеханика*. Саратов: Сарат. ун-т, 2010. 328 с. EDN: QJXSXP.
30. Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. О согласовании ориентаций тензорных элементов площади в микрополярном континууме, погружаемом во внешнее плоское пространство //

- Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2021. Т. 25, № 4. С. 776–786. EDN: ZKIAAJ. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1883>.
31. Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. К теории ориентированных тензорных элементов площади микрополярного континуума, погруженного во внешнее плоское пространство // *Изв. РАН. МТТ*, 2022. № 2. С. 3–13. EDN: KRUCOL. DOI: <https://doi.org/10.31857/S0572329922020155>.
 32. Фиников С. П. *Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии*. Л., М.: ГИТТЛ, 1948. 432 с.
 33. Картан А. *Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы*. М.: Мир, 1971. 392 с.
 34. Ефимов Н. В. *Введение в теорию внешних форм*. М.: Наука, 1977. 88 с.
 35. Парс Л. А. *Аналитическая динамика*. М.: Наука, 1971. 636 с.
 36. Радаев Ю. Н. Тензоры с постоянными компонентами в определяющих уравнениях гemitропного микрополярного тела // *Изв. РАН. МТТ*, 2023. № 5. С. 98–110. EDN: PHNOCG. DOI: <https://doi.org/10.31857/S057232992370006X>.
 37. Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Алгебраический алгоритм систематического приведения одноточечных псевдотензоров к абсолютным тензорам // *Вестн. ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Сер. Механика предельного состояния*, 2022. № 1(51). С. 17–26. EDN: ZJWFGT. DOI: <https://doi.org/10.37972/chgpu.2022.51.1.002>.
 38. Розенфельд Б. А. *Многомерные пространства*. М.: Наука, 1966. 648 с.
 39. Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Ковариантно постоянные тензоры в пространствах Евклида. Элементы теории // *Вестн. ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Сер. Механика предельного состояния*, 2022. № 2(52). С. 106–115. EDN: FQVGRK. DOI: <https://doi.org/10.37972/chgpu.2022.52.2.012>.
 40. Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Ковариантно постоянные тензоры в пространствах Евклида. Приложения к механике континуума // *Вестн. ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Сер. Механика предельного состояния*, 2022. № 2(52). С. 118–127. EDN: ESTJSA. DOI: <https://doi.org/10.37972/chgpu.2022.52.2.013>.
 41. Poincaré H. Sur les residus des integrales doubles // *Acta math*, 1887. vol. 6. pp. 321–380.
 42. Poincaré H. Analysis situs // *J. Ёс. Politech.*, 1895. vol. 2, no. 1. pp. 1–123 (In French).
 43. Мурашкин Е. В. О формулировках краевых условий в задачах синтеза тканых 3D материалов // *Вестн. ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Сер. Механика предельного состояния*, 2021. № 1(47). С. 114–121. EDN: CSFKRW. DOI: <https://doi.org/10.37972/chgpu.2021.1.47.010>.
 44. Jeffreys H. *Cartesian Tensors*. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1931. 105 pp.

MSC: 15A72, 53A45, 74D05

Thermomechanical states of gyrotropic micropolar solids

*E. V. Murashkin, Yu. N. Radayev*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, Russian Academy of Sciences,
101–1, pr. Vernadskogo, Moscow, 119526, Russian Federation.

Abstract

The paper is devoted to problems of modeling heat conduction processes in micropolar elastic solids, all thermomechanical states of which may be sensible to mirror reflections of three-dimensional space. A new variant of the heat conduction theory is developed in terms of the heat fluxes treated as pseudovectors of algebraic weight $+1$ making their similar to the pseudovector of spinor displacements known from previous discussions. Constitutive pseudoinvariants (at least some of them) have odd negative weights (for example, thermal conductivity coefficient and specific heat). Having choosing elements of volume and area as natural known from the classical field theory formulations and considered as pseudoinvariants of weight -1 , the variant of theory is proposed. An absolute contravariant vector represents translational displacements and a contravariant pseudovector of weight $+1$ does spinor displacements. As a result, heat flux, force stress tensor, mass density and specific heat can be treated as pseudotensor quantities of odd weights. The Helmholtz free energy per unit natural volume element is used as the thermodynamic potential with the functional arguments: temperature, symmetrical parts and accompanying vectors of the linear asymmetric strain tensor and wryness pseudotensor. The principle of absolute invariance of absolute thermodynamic temperature is proposed and discussed. A non-linear heat conduction equation is obtained and linearized.

Keywords: heat conductivity, micropolarity, tensor volume element, pseudovector of heat flux, pseudotensor, mirror reflection, semiisotropic solid, gyrotropic solid, absolute thermodynamic temperature, weights balance rule.

Received: 9th September, 2023 / Revised: 10th November, 2023 /Accepted: 13th December, 2023 / First online: 26th December, 2023

Mechanics of Solids

Research Article

© Authors, 2023

© Samara State Technical University, 2023 (Compilation, Design, and Layout)

 The content is published under the terms of the [Creative Commons Attribution 4.0 International License](http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Murashkin E. V., Radayev Yu. N. Thermomechanical states of gyrotropic micropolar solids, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2023, vol. 27, no. 4, pp. 659–678. EDN: CRRHLO. DOI: [10.14498/vsgtu2062](https://doi.org/10.14498/vsgtu2062) (In Russian).

Authors' Details:

Evgenii V. Murashkin  <https://orcid.org/0000-0002-3267-4742>

Cand. Phys. & Math. Sci., PhD, MD; Senior Researcher; Lab. of Modeling in Solid Mechanics;
e-mail: evmurashkin@gmail.com

Yuri N. Radayev  <https://orcid.org/0000-0002-0866-2151>

D.Sc. (Phys. & Math. Sci.), Ph.D., M.Sc., Professor; Leading Researcher; Lab. of Modeling in Solid Mechanics; e-mail: radayev@ipmnet.ru, y.radayev@gmail.com

Competing interests. We declare that we have no competing interests.

Author's Responsibilities. Each author has participated in the article concept development and in the manuscript writing. We take full responsibility for submit the final manuscript to print. We approved the final version of the manuscript.

Funding. The study was financially supported by the Russian Science foundation (project no. 23-21-00262).

References

1. Lakes R. Elastic and viscoelastic behavior of chiral materials, *Int. J. Mech. Sci.*, 2001, vol. 43, no. 7, pp. 1579–1589. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0020-7403\(00\)00100-4](https://doi.org/10.1016/S0020-7403(00)00100-4).
2. Mackay T. G., Lakhtakia A. Negatively refracting chiral metamaterials: a review, *SPIE Reviews*, 2010, vol. 1, no. 1, 018003. DOI: <https://doi.org/10.1117/6.0000003>.
3. Tomar S. K., Khurana A. Wave propagation in thermo-chiral elastic medium, *Appl. Math. Model.*, 2013, vol. 37, no. 22, pp. 9409–9418. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.apm.2013.04.029>.
4. Radayev Yu. N. The Lagrange multipliers method in covariant formulations of micropolar continuum mechanics theories, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2018, vol. 22, no. 3, pp. 504–517 (In Russian). EDN: YOYJQD. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1635>.
5. Neuber H. Über Probleme der Spannungskonzentration im Cosserat-Körper, *Acta Mechanica*, 1966, vol. 2, pp. 48–69. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01176729>.
6. Neuber H. On the general solution of linear-elastic problems in isotropic and anisotropic Cosserat continua, In: *Applied Mechanics*; eds. H. Görtler. Berlin, Heidelberg, Springer, 1966, pp. 153–158. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-662-29364-5_16.
7. Radayev Yu. N., Murashkin E. V. Pseudotensor formulation of the mechanics of hemitropic micropolar media, *Problems of Strength and Plasticity*, 2020, vol. 82, no. 4, pp. 399–412 (In Russian). EDN: TODIFV. DOI: <https://doi.org/10.32326/1814-9146-2020-82-4-399-412>.
8. Murashkin E. V., Radayev Yu. N. On a micropolar theory of growing solids, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2020, vol. 24, no. 3, pp. 424–444. EDN: TYGBER. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1792>.
9. Murashkin E. V., Radayev Yu. N. On the theory of linear hemitropic micropolar media, *Vestn. I. Yakovlev Chuvach State Pedagogical Univ. Ser. Mechanics of a Limit State*, 2020, no. 4(46), pp. 16–24 (In Russian). EDN: IZKTBQ. DOI: <https://doi.org/10.37972/chggu.2020.89.81.031>.
10. Murashkin E. V., Radayev Yu. N. Coupled thermoelasticity of hemitropic media. Pseudotensor formulation, *Mech. Solids*, 2023, vol. 58, no. 3, pp. 802–813. DOI: <https://doi.org/10.3103/s0025654423700127>.
11. Murashkin E. V., Radayev Yu. N. A negative weight pseudotensor formulation of coupled hemitropic thermoelasticity, *Lobachevskii J. Math.*, 2023, vol. 44, no. 6, pp. 2440–2449. EDN: PINYDI. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1995080223060392>.
12. Truesdell C., Toupin R. The classical field theories, In: *Encyclopedia of Physics*, vol. III/1, Principles of Classical Mechanics and Field Theory; eds. S. Flügge. Berlin, Göttingen, Heidelberg, Springer, 1960, pp. 226–902. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-642-45943-6_2.
13. Schouten J. A. *Tensor Analysis for Physicist*. Oxford, Clarendon Press, 1951, 434 pp.
14. Sokolnikoff I. S. *Tensor Analysis: Theory and Applications to Geometry and Mechanics of Continua*, John Wiley & Sons, 1964, 361 pp.
15. Synge J. L., Schild A. *Tensor Calculus*. New York, Dover Publ., 1978, xi+324 pp.
16. Das A. J. *Tensors: The Mathematics of Relativity Theory and Continuum Mechanics*. Berlin, Springer Science & Business Media, 2007, xii+290 pp. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-0-387-69469-6>.

17. Gurevich G. B. *Foundations of the Theory of Algebraic Invariants*. Groningen, Noordhoff, 1964, 429 pp.
18. Veblen O., Thomas T. Y. Extensions of relative tensors, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1924, vol. 26, no. 3, pp. 373–377. DOI: <https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1924-1501284-6>.
19. Veblen O. *Invariants of Quadratic Differential Forms*. Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1927, viii+102 pp.
20. Cosserat E., Cosserat F. *Théorie des Corps déformables*. Paris, A. Herman et Fils, 1909, vi+226 pp.
21. Nowacki W. *Theory of Micropolar Elasticity*. Wien, Springer, 1972, 285 pp. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-7091-2720-9>.
22. Nowacki W. *Theory of Asymmetric Elasticity*. Oxford, Pergamon Press, 1986, viii+383 pp.
23. Dyszlewicz J. *Micropolar Theory of Elasticity*, Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics. Berlin, Heidelberg, Springer, 2004, xv+345 pp. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-540-45286-7>.
24. Besdo D. Ein Beitrag zur nichtlinearen Theorie des Cosserat-Kontinuums, *Acta Mechanica*, 1974, vol. 20, no. 1, pp. 105–131. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01374965>.
25. Murashkin E. V., Radayev Yu. N. Heat conduction of micropolar solids sensitive to mirror reflections of three-dimensional space, *Uchen. Zap. Kazan. Univ. Ser. Fiz.-Matem. Nauki*, 2023, vol. 165, no. 4 (to appear) (In Russian).
26. Murashkin E. V., Radayev Yu. N. Schouten's force stress tensor and affnor densities of positive weight, *Problems of Strength and Plasticity*, 2022, vol. 84, no. 4, pp. 545–558 (In Russian). EDN: KPMGGN. DOI: <https://doi.org/10.32326/1814-9146-2022-84-4-545-558>.
27. Murashkin E. V., Radayev Yu. N. The Schouten force stresses in continuum mechanics formulations, *Mech. Solids*, 2023, vol. 58, no. 1, pp. 153–160. DOI: <https://doi.org/10.3103/s0025654422700029>.
28. Kovalev V. A., Radayev Yu. N. *Elementy teorii polia: variatsionnye simmetrii i geometricheskie invarianty* [Elements of Field Theory: Variational Symmetries and Geometric Invariants]. Moscow, Fizmatlit, 2009, 160 pp (In Russian). EDN: MWDGDN.
29. Kovalev V. A., Radayev Yu. N. *Volnovye zadachi teorii polia i termomekhanika* [Wave Problems of Field Theory and Thermomechanics]. Saratov, Saratov Univ., 2010, 328 pp (In Russian). EDN: QJXSPX.
30. Murashkin E. V., Radayev Yu. N. On a ordering of area tensor elements orientations in a micropolar continuum immersed in an external plane space, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2021, vol. 25, no. 4, pp. 776–786 (In Russian). EDN: ZKIAAJ. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1883>.
31. Murashkin E. V., Radayev Yu. N. On theory of oriented tensor elements of area for a micropolar continuum immersed in an external plane space, *Mech. Solids*, 2022, vol. 57, no. 2, pp. 205–213. EDN: SNKUNC. DOI: <https://doi.org/10.3103/s0025654422020108>.
32. Finikov S. P. *Metod vneshnikh form Kartana v differentsial'noi geometrii* [Cartan's Method of External Forms in Differential Geometry]. Leningrad, Moscow, GITTL, 1948, 432 pp. (In Russian)
33. Cartan H. *Differentsial'noe ischislenie. Differentsial'nye formy* [Differential Calculus. Differential Forms]. Moscow, Mir, 1971, 392 pp. (In Russian)
34. Efimov N. V. *Vvedenie v teoriyu vneshnikh form* [Introduction to the Theory of External Forms]. Moscow, Nauka, 1977, 88 pp. (In Russian)
35. Pars L. A. *Analiticheskaya dinamika* [Analytical Dynamics]. Moscow, Nauka, 1971, 636 pp. (In Russian)
36. Radayev Yu. N. Tensors with constant components in the constitutive equations of hemitropic micropolar solids, *Mech. Solids*, 2023, vol. 58, no. 5, pp. 1517–1527. DOI: <https://doi.org/10.3103/S0025654423700206>.
37. Murashkin E. V., Radayev Yu. N. Algebraic algorithm for systematically reducing one-point pseudotensors to absolute tensors, *Vestn. I. Yakovlev Chuvach State Pedagogical Univ.*

- Ser. Mechanics of a Limit State*, 2022, no.1(51), pp. 17–26 (In Russian). EDN: ZJWFGT. DOI: <https://doi.org/10.37972/chgpu.2022.51.1.002>.
38. Rozenfel'd B. A. *Mnogomernye prostranstva* [Multidimensional Spaces]. Moscow, Nauka, 1966, 648 pp. (In Russian)
39. Murashkin E. V., Radayev Yu. N. Covariantly constant tensors in Euclidean spaces. Elements of the theory, *Vestn. I. Yakovlev Chuvach State Pedagogical Univ. Ser. Mechanics of a Limit State*, 2022, no. 2(52), pp. 106–115 (In Russian). EDN: FQVGRK. DOI: <https://doi.org/10.37972/chgpu.2022.52.2.012>.
40. Murashkin E. V., Radayev Yu. N. Covariantly constant tensors in Euclidean spaces. Applications to continuum mechanics, *Vestn. I. Yakovlev Chuvach State Pedagogical Univ. Ser. Mechanics of a Limit State*, 2022, no. 2(52), pp. 118–127 (In Russian). EDN: ESTJSA. DOI: <https://doi.org/10.37972/chgpu.2022.52.2.013>.
41. Poincaré H. Sur les residus des integrales doubles, *Acta math*, 1887, vol. 6, pp. 321–380.
42. Poincaré H. Analysis situs, *J. Éc. Politech.*, 1895, vol. 2, no. 1, pp. 1–123 (In French).
43. Murashkin E. V. On the formulation of boundary conditions in problems of synthesis of woven 3D materials, *Vestn. I. Yakovlev Chuvach State Pedagogical Univ. Ser. Mechanics of a Limit State*, 2021, no. 1(47), pp. 114–121 (In Russian). EDN: CSFKRW. DOI: <https://doi.org/10.37972/chgpu.2021.1.47.010>.
44. Jeffreys H. *Cartesian Tensors*. Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1931, 105 pp.