Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2023. Т. 27, № 4. С. 745–752
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu2069
EDN: UMYSET

УДК 517.521.7

Об одном способе суммирования многомерных рядов

К. Б. Сабитов

Стерлитамакский филиал Уфимского университета науки и технологии,
Россия, 453103, Стерлитамак, пр. Ленина, 49.

Аннотация

Известно, что в курсах анализа кратные ряды рассматриваются лишь на понятийном уровне, приводятся их простейшие свойства. Широко распространены два способа суммирования кратных рядов Фурье — сферический и прямоугольный. В данной работе предлагается новый способ обоснования сходимости многомерных рядов путем их сведения к одномерному ряду, что позволяет применить известные утверждения для одномерных рядов к многомерным. В качестве иллюстрации указанного способа суммирования приведены примеры обоснования сходимости числовых и функциональных рядов.

Ключевые слова: многомерный числовой ряд, многомерный функциональный ряд, сведение к одномерному ряду, сходимость, равномерная сходимость, примеры.

Получение: 15 декабря 2023 г. / Исправление: 20 декабря 2023 г. / Принятие: 25 декабря 2023 г. / Публикация онлайн: 27 декабря 2023 г.

1. Рассмотрим положительный числовой ряд

$$\sum_{i_1,i_2,\ldots,i_n=1}^{\infty} a_{i_1 i_2 \ldots i_n}, \tag{1}$$

где $i_1, i_2, \ldots, i_n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $a_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ — неотрицательные действительные числа.

Как известно, теория одномерных числовых и функциональных рядов достаточно полно изложена в курсах по математическому анализу. Однако кратные ряды в них рассматриваются на понятийном уровне (см. например, [1, с. 359–376], [2, с. 59–66], [3, с. 665–671], [4, § 9.15] и др. авторов)

Дифференциальные уравнения и математическая физика
Краткое сообщение

Образец для цитирования
Сабитов К. Б. Об одном способе суммирования многомерных рядов // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2023. Т. 27, № 4. С. 745–752. EDN: UMYSET. DOI: 10.14498/vsgtu2069.

Сведения об авторе
Камиль Басирович Сабитов https://orcid.org/0000-0001-9516-2704
доктор физико-математических наук, профессор; главный научный сотрудник; сектор фундаментальных научных исследований; e-mail: sabitov_fmf@mail.ru

и приводятся лишь их простейшие свойства. В монографиях [5, 6] предприняты попытки систематического изложения теории двойных числовых рядов и некоторых важных классов функциональных рядов.

При изучении краевых задач для дифференциальных уравнений смешанного типа и других в многомерных областях, например, прямоугольном параллелепипеде, цилиндре, эллипсоиде, возникают многомерные ряды по системе собственных функций соответствующей задачи на собственные значения. Решение таких краевых задач и определяется с помощью таких рядов с малыми знаменателями [7–11]. В связи с этим возникают вопросы по обоснованию сходимости многомерных числовых и функциональных рядов.

В данной работе предлагается новый способ обоснования сходимости положительного ряда (1) путем его сведения к одномерному ряду.

Для числа $a_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ через M определим максимум конечного набора натуральных чисел $\{i_1, i_2, \ldots, i_n\}$:

$$M = \max\{i_1, i_2, \ldots, i_n\} = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} \{i_k\}.$$

Лемма 1. *Число членов $a_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ ряда (1), у которых хотя бы один из индексов i_k, $k = \overline{1, n}$, равен M, определяется по формуле*

$$M^n - (M-1)^n. \tag{2}$$

Доказательство. При заданном натуральном $M \geqslant 1$ число всех членов $a_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ ряда (1), где индексы i_k не превосходят M, т.е. $i_k \leqslant M$, $k = \overline{1, n}$, равно M^n и их для наглядности можно изобразить изолированными точками (целочисленными индексами) многомерного куба, расположенного в первом поликвадранте $1 \leqslant x_k$, $k = \overline{1, n}$, системы координат x_1, x_2, $\ldots$, x_n. Тогда все точки $a_{i_1, i_2 \ldots i_n}$ такого куба с заданными M, т.е. хотя бы один из индексов i_k, $k = \overline{1, n}$, равен M, лежат только на гранях $x_k = M$, $k = \overline{1, n}$. Внутри куба $1 \leqslant x_k \leqslant M - 1$, $k = \overline{1, n}$, не содержится ни одна такая точка. Следовательно, чтобы найти число членов ряда (1) с заданным M, надо из числа M^n вычесть число $(M-1)^n$. □

Лемма 2. *При любом $N \in \mathbb{N}$ справедливо равенство*[1]

$$\sum_{i_1, i_2, \ldots, i_n = 1}^{N} a_{i_1 i_2 \ldots i_n} = \sum_{M=1}^{N} a_{i_1 i_2 \ldots i_n}. \tag{3}$$

Доказательство. В левой части соотношения (3) всего N^n членов. Найдем число членов из правой части (3), используя формулу (2):

$$\sum_{M=1}^{N} (M^n - (M-1)^n) = 1 + 2^n - (2-1)^n + 3^n - (3-1)^n + \cdots +$$
$$+ (N-1)^n - (N-2)^n + N^n - (N-1)^n = N^n.$$

Это означает, что соотношение (3) является верным равенством. □

[1] Отметим, что в правой части равенства (3) и далее по тексту работы суммирование ведется по новому индексу M и эту часть следует понимать как сумму членов $a_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ ряда (1), у которых хотя бы один из индексов равен M.

Теорема 1. *Пусть при больших M коэффициенты ряда (1) имеют оценку $a_{i_1 i_2 \dots i_n} = O(M^{-p})$, $p = n + h$, $0 < h < 1$. Тогда ряд (1) сходится.*

Доказательство. В силу формулы (2) число членов ряда (1) с заданным M имеет порядок M^{n-1}. Тогда ряд (1) мажорируется сходящимся рядом

$$\sum_{i_1,i_2,\dots,i_n=1}^{\infty} a_{i_1 i_2 \dots i_n} = \sum_{M=1}^{\infty} a_{i_1 i_2 \dots i_n} \leqslant C_1 \sum_{M=1}^{\infty} \frac{1}{M^{1+h}} < +\infty,$$

где C_i — здесь и далее положительные постоянные, не зависящие от n. □

В качестве использования теоремы 1 рассмотрим следующие примеры.

Пример 1. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{i_1,i_2\dots i_n=1}^{\infty} \frac{1}{(i_1 + i_2 + \dots + i_n)^{\alpha}}, \quad \alpha > 0. \tag{4}$$

Для этого общий член ряда (4) оценим следующим образом:

$$\frac{1}{n^{\alpha} M^{\alpha}} < \frac{1}{(i_1 + i_2 + \dots + i_n)^{\alpha}} = \frac{1}{M^{\alpha}} \frac{1}{\left(\frac{i_1}{M} + \frac{i_2}{M} + \dots + \frac{i_n}{M}\right)^{\alpha}} < \frac{1}{M^{\alpha}}. \tag{5}$$

Тогда ряд (4) оценивается рядом

$$\sum_{i_1,i_2\dots i_n=1}^{\infty} \frac{1}{(i_1 + i_2 + \dots + i_n)^{\alpha}} = \sum_{M=1}^{\infty} \frac{1}{(i_1 + i_2 + \dots + i_n)^{\alpha}} < \\ < C_2 \sum_{M=1}^{\infty} \frac{M^{n-1}}{M^{\alpha}} = C_2 \sum_{M=1}^{\infty} \frac{1}{M^{\alpha+1-n}},$$

который сходится при $\alpha > n$. С другой стороны, в силу (5) ряд (4) снизу оценивается рядом

$$\sum_{i_1,i_2\dots i_n=1}^{\infty} \frac{1}{(i_1 + i_2 + \dots + i_n)^{\alpha}} > C_3 \sum_{M=1}^{\infty} \frac{1}{M^{\alpha-n+1}}.$$

Последний ряд при $\alpha \leqslant n$ расходится. Следовательно, ряд (4) сходится только при $\alpha > n$.

Пример 2. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{i_1,i_2,\dots,i_n=1}^{\infty} \frac{1}{(i_1^{\beta_1} + i_2^{\beta_2} + \dots + i_n^{\beta_n})^{\alpha}}, \tag{6}$$

где $\alpha > 0$, $\beta_i > 0$, $i = \overline{1,n}$.

Если все $\beta_i = \beta > 0$, то ряд (6) сходится только при $\alpha\beta > n$.

Если не все β_i равны между собой, то ряд (6) сходится при $\alpha\beta_m > n$ и расходится, когда $\alpha\beta_M \leqslant n$; здесь $\beta_m = \min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\beta_i\}$, $\beta_M = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\beta_i\}$.

2. В этом пункте рассмотрим многомерный функциональный ряд

$$\sum_{i_1,i_2,\ldots,i_n=1}^{\infty} u_{i_1 i_2 \ldots i_n}(x), \quad x \in D \subset \mathbb{R}^m, \tag{7}$$

где $n \geqslant 2$, $m \geqslant 1$, D — ограниченная область.

В указанной выше литературе по математическому анализу и других публикациях отсутствует теория обоснования поточечной, или равномерной, сходимости ряда (7) в области D.

На основании леммы 2 рассмотрим N-ю частичную сумму ряда (7):

$$S_N(x) = \sum_{M=1}^{N} u_{i_1 i_2 \ldots i_n}(x). \tag{8}$$

Будем называть ряд (7) сходящимся в точке $x \in D$, если в этой точке существует конечный предел последовательности частичных сумм (8):

$$\exists \lim_{N\to\infty} S_N(x). \tag{9}$$

Будем называть ряд (7) сходящимся поточечно в области D, если он сходится в каждой точке этой области в смысле сформулированного определения (9).

Будем называть ряд (7) сходящимся равномерно в области D, если последовательность частичных сумм $S_N(x)$ сходится равномерно в области D.

Для последовательности $S_N(x)$ справедливы все известные критерии и достаточные признаки равномерной сходимости.

В качестве применения указанного способа рассмотрим разложение непрерывной функции $f(x,y)$ в прямоугольнике $D = \{(x,y) : 0 < x < p, 0 < y < q\}$ в тригонометрический ряд Фурье по синусам:

$$v_{mn}(x,y) = \sqrt{\frac{2}{pq}} \sin\frac{m\pi x}{p} \sin\frac{n\pi y}{q}, \tag{10}$$

где p и q — заданные положительные числа. Этот ряд имеет вид

$$f(x,y) = \sum_{m,n=1}^{\infty} f_{mn} v_{mn}(x,y), \tag{11}$$

где

$$f_{mn} = \iint_D f(x,y) v_{mn}(x,y),$$

при этом справедливо неравенство Бесселя

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} f_{mn}^2 \leqslant \|f\|^2_{L_2(D)}. \tag{12}$$

Если $f(x,y) \in C^2(\overline{D})$ и $f(0,y) = f(p,y) = 0$, $0 \leqslant y \leqslant q$, $f(x,0) = f(x,q) = 0$, $0 \leqslant x \leqslant p$, то аналогично [12, с. 370–377], [2, с. 335–336] можно показать справедливость представления

$$|f_{mn}| = \left[|f_{mn}^{(2,0)}| + 2|f_{mn}^{(1,1)}| + f_{mn}^{(0,2)}|\right] \frac{1}{\pi^2}\left(\frac{m}{p} + \frac{n}{q}\right)^{-2} = \\ = \frac{1}{\pi^2}\left(\frac{m}{p} + \frac{n}{q}\right)^{-2} \sum_{\substack{0\leqslant i,j\leqslant 2,\\ i+j=2}} |f_{mn}^{(i,j)}|, \quad (13)$$

где $f_{mn}^{(i,j)}$ — коэффициенты Фурье производных при $\frac{\partial^{i+j} f(x,y)}{\partial x^i \partial y^j}$ по системе производных $\frac{\partial^{i+j} v(x,y)}{\partial x^i \partial y^j}$ функций (10).

При этом аналогично (12) справедливы неравенства

$$\sum_{m,n=1}^{+\infty} |f_{mn}^{(i,j)}|^2 \leqslant \left(\iint\limits_D \frac{\partial^{i+j} f(x,y)}{\partial x^i \partial y^j}\right)^2 dxdy = \left\|\frac{\partial^{i+j} f}{\partial x^i \partial y^j}\right\|_{L_2(D)}^2. \quad (14)$$

Пусть $d = \max\{p,q\}$. Тогда

$$\frac{1}{\left(\frac{m}{p} + \frac{n}{q}\right)^2} = \frac{d^2}{\left(\frac{d}{p}m + \frac{d}{q}n\right)^2} \leqslant \frac{d^2}{(m+n)^2}. \quad (15)$$

С учетом оценки (15) из (13) в силу неравенства $ab \leqslant \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$ имеем

$$|f_{mn}| \leqslant \left(\frac{d}{\pi}\right)^2 \frac{1}{(m+n)^2} \sum_{\substack{0\leqslant i,j\leqslant 2,\\ i+j=2}} |f_{mn}^{(i,j)}| \leqslant \\ \leqslant \left(\frac{d}{\pi}\right)^2 \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(m+n)^4} + \left(\sum_{\substack{0\leqslant i,j\leqslant 2,\\ i+j=2}} |f_{mn}^{(i,j)}|\right)^2\right) \leqslant \\ \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{d}{\pi}\right)^2 \left(\frac{1}{(m+n)^4} + 4\sum_{i+j=2} |f_{mn}^{(i,j)}|^2\right). \quad (16)$$

Тогда в силу оценок (16) и (14) ряд (11) мажорируется сходящимся числовым рядом

$$C_4 \sum_{m,n=1}^{\infty} |f_{mn}| \leqslant C_5\left(\sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{1}{(m+n)^4} + 4\sum_{m,n=1}^{+\infty} \sum_{\substack{0\leqslant i,j\leqslant 2,\\ i+j=2}} |f_{mn}^{(i,j)}|^2\right) \leqslant \\ \leqslant C_7\left(\sum_{M=1}^{+\infty} \frac{1}{M^3} + 4\sum_{\substack{0\leqslant i,j\leqslant 2,\\ i+j=2}} \sum_{m,n=1}^{+\infty} |f_{mn}^{(i,j)}|^2\right),$$

так как в силу леммы 1 в ряде $\sum\limits_{m,n=1}^{+\infty}\frac{1}{(m+n)^4}$ число членов с заданным $M = \max\{m, n\}$ имеет порядок 1, поэтому

$$\sum_{m,n=1}^{+\infty}\frac{1}{(m+n)^4} = \sum_{M=1}^{\infty}\frac{1}{M^4\left(\frac{m}{M}+\frac{n}{M}\right)^4} \leqslant C_6\sum_{M=1}^{\infty}\frac{1}{M^3}.$$

Следовательно, ряд (11) при указанных выше условиях относительно функции $f(x, y)$ сходится равномерно на $\overline{D}$.

Конкурирующие интересы. Конкурирующих интересов не имею.

Авторская ответственность. Я несу полную ответственность за предоставление окончательной версии рукописи в печать. Окончательная версия рукописи мною одобрена.

Финансирование. Исследование выполнялось без финансирования.

Библиографический список

1. Фихтенгольц Г. М. *Курс дифференциального и интегрального исчисления*. Т. 1. М.: Физматлит, Лаборатория Знаний, 2003. 863 с.
2. Ильин В. А., Садовничий В. А., Сендов Бл. Х. *Математический анализ*. Т. 2. М.: МГУ, 1987. 358 с.
3. Кудрявцев Л. Д. *Курс математического анализа*. Т. 1. М.: Высш. шк., 1981. 584 с.
4. Бугров Я. С., Никольский С. М. *Высшая математика. Дифференциальное и интегральное исчисление*. М.: Дрофа, 2005. 509 с. EDN: QJPBXF.
5. Челидзе В. Г. *Некоторые методы суммирования двойных рядов и двойных интегралов*. Тбилиси: Тбилисский ун-т, 1977. 399 с.
6. Янушаускас А. И. *Двойные ряды*. Новосибирск: Наука, 1980. 224 с.
7. Сабитов К. Б. Начально-граничная задача для трехмерного уравнения смешанного параболо-гиперболического типа / *Современные проблемы математики и механики*: Материалы международной научной конференции, посвященной 80-летию академика РАН В. А. Садовничего. М.: МАКС Пресс, 2019. С. 369–372.
8. Сабитов К. Б. Задача Дирихле для двумерного волнового уравнения / *Современные проблемы вычислительной математики и математической физики*: Тезисы докладов международной научной конференции, посвященной памяти академика А. А. Самарского, к 100-летию со дня рождения. М.: МГУ, 2019. С. 58–59.
9. Сабитов К. Б., Сидоров С. Н. Начально-граничная задача для трехмерного уравнения параболо-гиперболического типа // *Диффер. уравн.*, 2021. Т. 58, № 8. С. 1071–1080. EDN: LSLNUR. DOI: https://doi.org/10.31857/S0374064121080082.
10. Sabitov K. B., Sidorov S. N. Initial-boundary problem for a three-dimensional inhomogeneous equation of parabolic-hyperbolic type // *Lobachevskii J. Math.*, 2020. vol. 41, no. 11. pp. 2257–2268. EDN: GBAUPE. DOI: https://doi.org/10.1134/S1995080220110190.
11. Сабитов К. Б. Начально-граничные задачи для уравнения колебаний прямоугольной пластины // *Изв. вузов. Матем.*, 2021. № 10. С. 60–70. EDN: RZSSHV. DOI: https://doi.org/10.26907/0021-3446-2021-10-60-70.
12. Ильин В. А., Позняк Э. Г. *Основы математического анализа*. Часть II. М.: Физматлит, 2001. 453 с. EDN: UGLQPL.

Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2023, vol. 27, no. 4, pp. 745–752
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu2069

MSC: 65B10

One way of summing multidimensional series

K. B. Sabitov

Sterlitamak Branch of the Ufa University of Science and Technology,
49, Lenin Ave., Sterlitamak, 453103, Russian Federation.

Abstract

It is known that in analysis courses, multiple series are considered only at a conceptual level, and their simplest properties are provided. Two widely used methods for summing multiple Fourier series are the spherical and rectangular methods. The present study is devoted to a new method of proving the convergence of multidimensional series by reducing them to a one-dimensional series, allowing applicating known statements for one-dimensional series to multidimensional ones. Examples of justifying the convergence of numerical and functional series are provided as an illustration of this summing method.

Keywords: multidimensional number series, multidimensional functional series, reduction to a one-dimensional series, convergence, uniform convergence, examples.

Received: 15th December, 2023 / Revised: 20th December, 2023 / Accepted: 25th December, 2023 / First online: 27th December, 2023

Competing interests. I have no competing interests.

Author's Responsibilities. I take full responsibility for submitting the final version of the manuscript for printing. The final version of the manuscript has been approved by me.

Funding. The study was carried out without funding.

Differential Equations and Mathematical Physics
Short Communication

Please cite this article in press as:
Sabitov K. B. One way of summing multidimensional series, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2023, vol. 27, no. 4, pp. 745–752. EDN: UMYSET. DOI: 10.14498/vsgtu2069 (In Russian).

Authors' Details:
Kamil B. Sabitov https://orcid.org/0000-0001-9516-2704
Dr. Phys. & Math. Sci., Professor; Senior Researcher; Sector of Basic Scientific Research; e-mail: sabitov_fmf@mail.ru

References

1. Fichtenholz G. M. *Kurs differentsial'nogo i integral'nogo ischisleniia* [Course of Differential and Integral Calculus], vol. 1. Moscow, Fizmatlit, Laboratoriia Znanii, 2003, 863 pp. (In Russian)
2. Il'in V. A., Sadovnichii V. A., Sendov Bl. Kh. *Matematicheskii analiz* [Mathematical Analysis], vol. 2. Moscow, Moscow State Univ., 1987, 358 pp.
3. Kudryavtsev L. D. *Kurs matematicheskogo analiza* [A Course of Mathematical Analysis], vol. 1. Moscow, Vyssh. shk., 1981, 584 pp. (In Russian)
4. Bugrov Ya. S., Nikol'skii S. M. *Vysshaia matematika. Differentsial'noe i integral'noe ischislenie* [Higher Mathematics. Differential and Integral Calculus]. Moscow, Drofa, 2005, 509 pp. (In Russian). EDN: QJPBXF.
5. Chelidze V. G. *Nekotorye metody summirovaniia dvoinykh riadov i dvoinykh integralov* [Some Methods of Summation of Double Series and Double Integrals]. Tbilisi, Tbilisi Univ., 1977, 399 pp. (In Russian)
6. Yanushauskas A. I. *Dvoinye riady* [Double Series]. Novosibirsk, Nauka, 1980, 224 pp. (In Russian)
7. Sabitov K. B. Initial-boundary problem for a three-dimensional equation of mixed parabolic-hyperbolic type, In: *Modern Problems of Mathematics and Mechanics*. Moscow, MAKS Press, 2019, pp. 369–372 (In Russian).
8. Sabitov K. B. Dirichlet problem for a two-dimensional wave equation, In: *Modern Problems of Computational Mathematics and Mathematical Physics*. Moscow, Moscow State Univ., 2019, pp. 58–59 (In Russian).
9. Sabitov K. B., Sidorov S. N. Initial-boundary value problem for a three-dimensional equation of the parabolic-hyperbolic type, *Differ. Equat.*, 2021, vol. 57, no. 8, pp. 1042–1052. EDN: OOAAGT. DOI: https://doi.org/10.1134/S0012266121080085.
10. Sabitov K. B., Sidorov S. N. Initial-boundary problem for a three-dimensional inhomogeneous equation of parabolic-hyperbolic type, *Lobachevskii J. Math.*, 2020, vol. 41, no. 11, pp. 2257–2268. EDN: GBAUPE. DOI: https://doi.org/10.1134/S1995080220110190.
11. Sabitov K. B. Initial-boundary value problems for equation of oscillations of a rectangular plate, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2021, vol. 65, no. 10, pp. 52–62. EDN: FCMYHQ. DOI: https://doi.org/10.3103/S1066369X21100054.
12. Il'in V. A., Pozniak E. G. *Osnovy matematicheskogo analiza* [Fundamentals of Mathematical Analysis] Part II. Moscow, Fizmatlit, 2001, 453 pp. (In Russian). EDN: UGLQPL.