



УДК 519.862.53

Разработка и сравнительный анализ математических моделей функционирования региональной энергосистемы Самарской области

В. Е. Зотеев, Л. А. Сагитова, А. А. Гаврилова

Самарский государственный технический университет,
Россия, 443100, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

Аннотация

Системные исследования деятельности региональной энергосистемы с целью повышения эффективности управления энергетическим комплексом с учетом вклада используемых ресурсов принципиально невозможны без совершенствования математических моделей и методов их идентификации на основе статистических данных.

В статье приводятся результаты анализа известного математического описания функционирования региональной энергосистемы, на основе которого отмечаются существенные недостатки, негативно влияющие как на достоверность оценок основных показателей эффективности энергетического комплекса, так и на точность прогноза, сделанного на основе построенной модели.

В работе рассматриваются и систематизируются по трем основным группам как различные трехфакторные регрессионные модели, так и ковариационно-стационарные модели временных рядов на основе линейной и нелинейной регрессии. Описаны алгоритмы численных методов среднеквадратического оценивания параметров этих моделей на основе результатов наблюдений.

Приведены результаты математического моделирования динамики выпуска продукции энергосистемы на основе статистических данных, публикуемых в ежегодной отчетности региональных министерств и энергетических компаний. Проведен статистический анализ полученных результатов. Сравнительный анализ разработанных математических мо-

Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ
Научная статья

© Коллектив авторов, 2024

© СамГТУ, 2024 (составление, дизайн, макет)

 Контент публикуется на условиях лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru) (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Образец для цитирования

Зотеев В. Е., Сагитова Л. А., Гаврилова А. А. Разработка и сравнительный анализ математических моделей функционирования региональной энергосистемы Самарской области // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2024. Т. 28, № 3. С. 586–608. EDN: [IWFHMA](#). DOI: [10.14498/vsgtu2091](https://doi.org/10.14498/vsgtu2091).

Сведения об авторах

Владимир Евгеньевич Зотеев  <https://orcid.org/0000-0001-7114-4894>

доктор технических наук, доцент; профессор; каф. прикладной математики и информатики; e-mail: zoteev.ve@samgtu.ru

Ляйсан Акзамовна Сагитова  <https://orcid.org/0000-0002-0833-983X>

старший преподаватель; каф. теплогазоснабжения и вентиляции; e-mail: 10410@mail.ru

Анна Александровна Гаврилова  <https://orcid.org/0000-0001-6598-6518>

кандидат технических наук, доцент; доцент; каф. управления и системного анализ тепло-энергетических и социотехнических комплексов; e-mail: a.a.gavrilova@mail.ru

делей на основе оценки погрешности прогноза позволил выбрать из рассматриваемой совокупности моделей наиболее эффективную математическую модель с минимальной ошибкой прогноза на период времени от одного года до пяти лет.

Ключевые слова: региональная энергосистема, мультипликативно-степенная производственная функция, факторная эластичность, ковариационно-стационарные модели временных рядов, авторегрессионные модели, статистический анализ.

Получение: 10 марта 2024 г. / Исправление: 16 сентября 2024 г. /

Принятие: 27 сентября 2024 г. / Публикация онлайн: 5 ноября 2024 г.

Введение. В условиях изменения внешней среды возникает необходимость изменения методов организации и управления энергетическими предприятиями, что требует системных исследований производственно-экономических взаимосвязей региональных энергосистем с промышленными предприятиями, путей повышения эффективности используемых ресурсов.

В работах, посвященных системному анализу эффективности региональной энергетики, особое внимание уделяется построению и идентификации математических моделей, как основы анализа эффективности функционирования энергетических производств и разработки систем поддержки принятия решений, построенных с использованием необходимого модельного обеспечения [1–8]. Для исследования энергопроизводств актуально направление, связанное с совершенствованием математических моделей и методов их идентификации на основе статистических данных, что подтверждается, во-первых, задачей выявления из большого числа действующих факторов тех, которые существенно влияют на протекание производственных процессов. Во-вторых, проблемой достоверной оценки основных показателей эффективности функционирования реальных производств, таких как средняя и предельная производительность ресурсов, эластичность выпуска используемого ресурса. В-третьих, при решении задач оптимизации энергопроизводства планирование деятельности энергосистем начинается с прогнозов потребления электрической и тепловой энергии, выявления основных тенденций развития процессов энергопроизводств, оценки границ диапазонов возможных значений параметров производственного плана.

1. Анализ известного математического описания функционирования региональной энергосистемы. В известных подходах к математическому моделированию функционирования энергетических систем в качестве исследовательского аппарата широкое распространение получили мультипликативно-степенные модели в виде производственных функций [9, 10]. В частности, в работах [1–3, 5, 7, 11], посвященных синтезу математических моделей региональной энергосистемы как многомерных производственных функций, используется нелинейная трехфакторная степенная зависимость вида

$$Y_s(t) = AK^\alpha(t)L^\beta(t)B^\gamma(t), \quad (1)$$

где $Y_s(t)$ — выпуск электрической и тепловой энергии; $K(t)$, $L(t)$ и $B(t)$ — капитальные, трудовые и топливные ресурсы соответственно.

Оценка параметров этой зависимости, прогноз и вычисление доверительных интервалов для результатов расчета в этих работах проводились на основе среднеквадратического оценивания коэффициентов линейной регрессионной модели

$$\ln y_k = \ln A + \alpha \ln x_{1k} + \beta \ln x_{2k} + \gamma \ln x_{3k} + \eta_k, \quad \|\hat{\eta}\|^2 = \sum_{k=0}^{31} \hat{\eta}_k^2 \rightarrow \min, \quad (2)$$

аппроксимирующей нелинейную зависимость (1), где y_k — статистические данные по выпуску энергии; x_{1k} , x_{2k} и x_{3k} — статистические данные по динамике капитальных, трудовых и топливных ресурсов соответственно за период наблюдений с 1990 по 2021 годы в Самарской области.

Применяемые в этих работах методы математического моделирования имеют ряд существенных недостатков, негативно влияющих как на достоверность оценок основных показателей эффективности функционирования региональной энергосистемы, так и на точность прогноза, сделанного на основе построенной модели. Во-первых, недостаточно обоснован выбор вида и формы математической модели — линейной регрессионной трехфакторной модели (2), построенной на основе аппроксимации мультипликативно-степенной производственной функции (1). Для такой функциональной зависимости факторные эластичности

$$E_K = \frac{K(t)}{Y_s(t)} \cdot \frac{\partial Y_s}{\partial K} = \alpha, \quad E_L = \frac{L(t)}{Y_s(t)} \cdot \frac{\partial Y_s}{\partial L} = \beta, \quad E_B = \frac{B(t)}{Y_s(t)} \cdot \frac{\partial Y_s}{\partial B} = \gamma$$

являются параметрами модели, величинами априори постоянными, не изменяющимися на промежутке наблюдений, равном 31 году, что вызывает сомнение и требует подтверждения на основе статистических методов обработки результатов наблюдений [11].

Применение методов прикладного регрессионного анализа в задаче оценки параметров мультипликативно-степенной производственной функции (1) основано на минимизации среднеквадратического отклонения результатов вычислений по модели $\hat{y}_k$ от результатов наблюдений y_k в точках t_k [11–14]:

$$\sum_{k=0}^{31} (y_k - \hat{y}_k)^2 = \|y - \hat{y}\|^2 = \|e\|^2 \rightarrow \min. \quad (3)$$

Использование линейной аппроксимации на основе логарифмирования трехфакторной степенной зависимости (1) в регрессии (2) и критерий среднеквадратического оценивания $\|\hat{\eta}\|^2 = \sum_{k=0}^{31} \hat{\eta}_k^2 \rightarrow \min$ вносят смещение в оценки параметров α , β и γ , величина которого может оказаться недопустимо большой. В работах [1–8] эта проблема не исследуется.

Во-вторых, статистические данные, публикуемые в ежегодной отчетности региональных министерств и энергетических компаний, на основе которых строится математическая модель динамики выпуска продукции энергосистемы, представляют собой временной ряд наблюдений y_k , $k = 0, 1, 2, \dots, 31$, за период времени с 1990 по 2021 годы. Следовательно, для описания исследуемой динамики целесообразно выбирать модель из класса ковариационно-

стационарных моделей временных рядов в форме стохастических разностных уравнений [16–20].

В-третьих, в работах [1–7] отсутствуют в необходимом объеме элементы статистического анализа результатов построения математической модели (1), а также выводы, сделанные на их основе. В частности, среднеквадратичное оценивание на основе минимизации суммы квадратов остатков $\|y - \hat{y}\|^2 = \|e\|^2 \rightarrow \min$ для регрессионной модели дает наилучшие оценки только при выполнении условий теоремы Гаусса—Маркова [12, 14]. Если эти условия не выполняются, например, имеет место сильная корреляция между элементами вектора случайной помехи ε_k и $\varepsilon_{k \pm p}$, $p \neq 0$, то применение метода наименьших квадратов (МНК) приводит к существенному занижению результатов расчета дисперсий и ковариаций среднеквадратичных оценок коэффициентов модели по сравнению с действительными значениями. Кроме того, оценки σ_ε^2 по остаточной сумме квадратов оказываются смещенными [12]. При этом создается ложное впечатление не только о точности оценок, но и о целесообразности проведения статистического анализа результатов оценивания, так как нет уверенности в корректности уровней значимости t - и F -критериев. Поэтому анализ остатков, выявление в них корреляции, например, на основе критерия Дарбина—Уотсона, является важнейшим элементом статистического анализа при построении математических моделей [13, 21]. Однако в работах [1–6] результаты таких исследований не приведены, что является серьезным недостатком.

Также можно отметить отсутствие в этих работах интервальных оценок прогноза и параметров модели, определяющих точность расчетов основных показателей эффективности функционирования энергосистемы. Отсутствие проверки значимости параметров модели на основе статистического анализа результатов расчета может привести к снижению эффективности среднеквадратичных оценок, завышению доверительных интервалов, а также исключает возможность упрощения модели, сделав ее более надежной и устойчивой.

В-четвертых, при использовании методов математического моделирования в опубликованных работах [1–6], посвященных системному анализу функционирования региональной энергосистемы, отсутствуют какие-либо исследования, связанные с проблемой мультиколлинеарности в регрессионном анализе [12, 14]. Игнорирование этой проблемы может привести к неустойчивости среднеквадратичных оценок, увеличению их дисперсий и, как следствие, к резкому снижению точности результатов расчета параметров модели и точности предсказания по модели.

Таким образом, завершая анализ известного математического описания функционирования региональной энергосистемы, можно сделать два основных вывода. Во-первых, принятая математическая модель в форме мультипликативно-степенной трехфакторной регрессии не учитывает в полной мере стохастического характера временного ряда статистических данных, публикуемых в ежегодной отчетности региональных министерств и энергетических компаний.

Во-вторых, при математическом моделировании эффективности функционирования энергосистемы отсутствует полнота статистического анализа результатов расчета и полезных практических выводов на его основе.

2. Постановка задачи исследования и методы ее решения. Для устранения этих серьезных недостатков в данной работе рассматривается применение в задаче моделирования функционирования региональной энергосистемы ковариационно-стационарных моделей временных рядов. Проводится их сравнительный анализ, в том числе с известной регрессионной моделью на основе мультипликативно-степенной производственной функции (1), а также с учетом этой регрессии строятся новые математические модели в форме стохастических разностных уравнений с детерминированным трендом.

При описании динамики выпуска продукции региональной энергосистемы может быть использована ковариационно-стационарная модель временного ряда в форме стохастического разностного уравнения в виде [20]

$$y_k = \sum_{j=1}^p \lambda_j y_{k-j} + \sum_{j=p+1}^{m+p+1} \lambda_j t_k^{j-(p+1)} + u(x_{1k}, x_{2k}, x_{3k}, \bar{a}) + \varepsilon_k, \quad (4)$$

где $y_k = \sum_{j=1}^p \lambda_j y_{k-j} + \varepsilon_k$ — стохастическое разностное уравнение в форме модели авторегрессии порядка p ; $P_m(t_k) = \sum_{j=p+1}^{m+p+1} \lambda_j t_k^{j-(p+1)}$ — детерминированный тренд в форме многочлена степени m относительно временной переменной t_k ; $u(x_{1k}, x_{2k}, x_{3k}, \bar{a})$ — детерминированная трехфакторная функция с вектором параметров $\bar{a} = (\lambda_{m+p+2}, \lambda_{m+p+3}, \dots, \lambda_n)^\top$, ε_k — последовательность независимых случайных величин с нулевым математическим ожиданием и одинаковыми дисперсиями σ_ε^2 :

$$M[\varepsilon_k] = 0, \quad \text{cov}[\varepsilon_k, \varepsilon_{k \pm p}] = \begin{cases} 0, & p \neq 0; \\ \sigma_\varepsilon^2, & p = 0. \end{cases}$$

При нелинейной зависимости $u(x_{1k}, x_{2k}, x_{3k}, \bar{a})$ на основе ее линеаризации в окрестности точки $\bar{a}^{(i)} = (\hat{\lambda}_{m+p+2}^{(i)}, \hat{\lambda}_{m+p+3}^{(i)}, \dots, \hat{\lambda}_n^{(i)})^\top$:

$$u(x_{1k}, x_{2k}, x_{3k}, \bar{a}) \approx u_k^{(i)} + \sum_{j=m+p+2}^n \frac{\partial u_k^{(i)}}{\partial \lambda_j} (\lambda_j - \hat{\lambda}_j^{(i)}),$$

где $u_k^{(i)} = (x_{1k}, x_{2k}, x_{3k}, \hat{\lambda}_{m+p+2}^{(i)}, \hat{\lambda}_{m+p+3}^{(i)}, \dots, \hat{\lambda}_n^{(i)})^\top$, ковариационно-стационарную модель временного ряда (4) можно привести к линейному виду $z_k^{(i)} = \lambda^\top f_k^{(i)} + \varepsilon_k$ или

$$z_k^{(i)} = F^{(i)} \lambda + \varepsilon, \quad (5)$$

где

$$z_k^{(i)} = y_k - u_k^{(i)} + \sum_{j=m+p+2}^n \frac{\partial u_k^{(i)}}{\partial \lambda_j} \hat{\lambda}_j^{(i)}$$

— k -тый элемент вектора $z^{(i)}$;

$$f_k^{(i)} = \left(y_{k-1}, y_{k-2}, \dots, y_{k-p}, 1, t_k, t_k^2, \dots, t_k^m, \frac{\partial u_k^{(i)}}{\partial \lambda_{m+p+2}}, \dots, \frac{\partial u_k^{(i)}}{\partial \lambda_n} \right)$$

— k -тая строка матрицы $F^{(i)}$;

$$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p, \lambda_{p+1}, \dots, \lambda_{p+m+1}, \lambda_{p+m+2}, \dots, \lambda_n)^\top$$

— вектор искомых коэффициентов линейной регрессионной модели (5) при $k = p, p+1, \dots, N-1$, где N — объем выборки результатов наблюдений.

С учетом критерия среднеквадратичного оценивания (3) новое уточненное значение вектора $\hat{\lambda}^{(i+1)}$ оценок коэффициентов разностного уравнения (4) находится по формуле

$$\hat{\lambda}^{(i+1)} = [F^{(i)\top} F^{(i)}]^{-1} F^{(i)\top} z^{(i)}, \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (6)$$

Рассматриваемые в данной работе математические модели, описывающие процессы энергопроизводства для задач системного анализа эффективности функционирования региональной энергосистемы, систематизированы по трем группам.

К первой группе относятся наиболее простые трехфакторные регрессионные модели, образованные на основе производственных функций: линейной и мультипликативно-степенной:

- трехфакторная линейная регрессионная модель, построенная на основе линейной производственной функции (модель 1):

$$y_k = \lambda_1 x_{1k} + \lambda_2 x_{2k} + \lambda_3 x_{3k} + \varepsilon_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1; \quad (7)$$

- трехфакторная нелинейная регрессионная модель, построенная на основе нелинейной мультипликативно-степенной производственной функции (модель 2):

$$y_k = \lambda_1 x_{1k}^{\lambda_2} x_{2k}^{\lambda_3} x_{3k}^{\lambda_4} + \varepsilon_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1. \quad (8)$$

Вторую группу образуют ковариационно-стационарные модели (4) в форме стохастических разностных уравнений временных рядов, включающие детерминированный полиномиальный тренд $P_m(t_k)$ и, в общем случае, нелинейную функцию входных воздействий (факторов) $u(x_{1k}, x_{2k}, x_{3k})$:

- ковариационно-стационарная стохастическая модель в форме разностного уравнения с полиномиальным трендом второго порядка (модель 3):

$$y_k = \lambda_1 y_{k-1} + \lambda_2 y_{k-2} + \lambda_3 + \lambda_4 t_k + \lambda_5 t_k^2 + \varepsilon_k, \quad k = 2, 3, 4, \dots, N-1; \quad (9)$$

- ковариационно-стационарная стохастическая модель в форме разностного уравнения с полиномиальным трендом нулевого порядка и линейной функцией входных воздействий/факторов (модель 4):

$$y_k = \lambda_1 y_{k-1} + \lambda_2 + \lambda_3 x_{1k} + \lambda_4 x_{2k} + \lambda_5 x_{3k} + \varepsilon_k, \quad k = 1, 2, 3, \dots, N-1; \quad (10)$$

- ковариационно-стационарная стохастическая модель в форме разностного уравнения с нелинейным трендом в форме мультипликативно-степенной трехфакторной функции (модель 5):

$$y_k = \lambda_1 y_{k-1} + \lambda_2 y_{k-2} + \lambda_3 x_{1k}^{\lambda_4} x_{2k}^{\lambda_5} x_{3k}^{\lambda_6} + \varepsilon_k, \quad k = 2, 3, 4, \dots, N-1. \quad (11)$$

Третью группу образуют ковариационно-стационарные стохастические модели временных рядов, построенные на основе регрессионных моделей вида $y_k = u(x_{1k}, x_{2k}, x_{3k}) + \eta_k$, в которых $u(x_{1k}, x_{2k}, x_{3k})$ — производственная функция (линейная или мультипликативно-степенная) [10], а случайное возмущение η_k описывается авторегрессионной моделью временного ряда первого или второго порядков соответственно:

$$\eta_k = \lambda_1 \eta_{k-1} + \varepsilon_k, \quad \eta_k = \lambda_1 \eta_{k-1} + \lambda_2 \eta_{k-2} + \varepsilon_k.$$

3. Разработка ковариационно-стационарных моделей временных рядов на основе линейной и нелинейной регрессии. При описании случайного возмущения моделью авторегрессии первого порядка имеем систему уравнений

$$\begin{cases} y_k = u(x_{1k}, x_{2k}, x_{3k}) + \eta_k, & k = 1, 2, 3, \dots, N-1; \\ \eta_k = \lambda_1 \eta_{k-1} + \varepsilon_k, & |\lambda_1| < 1, \quad k = 1, 2, 3, \dots, N-1. \end{cases} \quad (12)$$

Второе уравнение в (12) можно доопределить для η_0 . Найдем дисперсию σ_η^2 . С учетом стационарности процесса и очевидных условий $M[\eta_k] = 0$ и $M[\eta_{k-1}\varepsilon_k] = 0$ имеем

$$\begin{aligned} \sigma_\eta^2 = \sigma^2[\eta_k] &= M[(\eta_k - M[\eta_k])^2] = M[\eta_k^2] = M[(\lambda_1 \eta_{k-1} + \varepsilon_k)^2] = \\ &= \lambda_1^2 M[\eta_{k-1}^2] + 2\lambda_1 M[\eta_{k-1}\varepsilon_k] + M[\varepsilon_k^2] = \lambda_1^2 \sigma_\eta^2 + \sigma_\varepsilon^2. \end{aligned}$$

Отсюда $\sigma_\eta^2 = \sigma_\varepsilon^2 / (1 - \lambda_1^2)$. Величину η_0 будем искать из равенства $\mu\eta_0 = \varepsilon_0$ с учетом формулы $\sigma^2[\mu\eta_0] = \mu^2 \sigma^2[\eta_0] = \sigma^2[\varepsilon_0]$. Отсюда $\mu^2 = \sigma_\varepsilon^2 / \sigma_\eta^2 = 1 - \lambda_1^2$, $\sqrt{1 - \lambda_1^2} \eta_0 = \varepsilon_0$.

Тогда из соотношений

$$\begin{cases} \sqrt{1 - \lambda_1^2} \eta_0 = \varepsilon_0; \\ y_0 - u(x_{10}, x_{20}, x_{30}) = \eta_0, & k = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} \eta_k - \lambda_1 \eta_{k-1} = \varepsilon_k; \\ \eta_k = y_k - u(x_{1k}, x_{2k}, x_{3k}); \\ \eta_{k-1} = y_{k-1} - u(x_{1,k-1}, x_{2,k-1}, x_{3,k-1}), & k = 1, 2, 3, \dots, N-1, \end{cases}$$

получаем систему уравнений, описывающую временной ряд наблюдений:

$$\begin{cases} y_0 = y_0 - \sqrt{1 - \lambda_1^2} [y_0 - u(x_{10}, x_{20}, x_{30})] + \varepsilon_0; \\ y_k = u(x_{1k}, x_{2k}, x_{3k}) + \\ + \lambda_1 [y_{k-1} - u(x_{1,k-1}, x_{2,k-1}, x_{3,k-1})] + \varepsilon_k, & k = 1, 2, 3, \dots, N-1. \end{cases} \quad (13)$$

Аналогично можно сформировать систему уравнений при описании случайного возмущения моделью авторегрессии второго порядка:

$$\begin{cases} y_k = u(x_{1k}, x_{2k}, x_{3k}) + \eta_k, & k = 0, 1, 2, \dots, N-1; \\ \eta_k = \lambda_1 \eta_{k-1} + \lambda_2 \eta_{k-2} + \varepsilon_k, & |\lambda_2| < 1, \quad k = 2, 3, 4, \dots, N-1. \end{cases} \quad (14)$$

Найдем дисперсию σ_η^2 и ковариацию $\text{cov}[\eta_k, \eta_{k-1}]$. С учетом стационарности процесса и очевидных условий $M[\eta_k] = 0$, $M[\eta_{k-1}\varepsilon_k] = 0$ и $M[\eta_{k-2}\varepsilon_k] = 0$ имеем

$$\begin{aligned}\text{cov}[\eta_{k-1}, \eta_{k-2}] &= M[\eta_{k-1}\eta_{k-2}] = M[(\lambda_1\eta_{k-2} + \lambda_2\eta_{k-3} + \varepsilon_{k-1})\eta_{k-2}] = \\ &= \lambda_1\sigma_\eta^2 + \lambda_2M[\eta_{k-2}\eta_{k-3}] + M[\eta_{k-2}\varepsilon_{k-1}] = \lambda_1\sigma_\eta^2 + \lambda_2\text{cov}[\eta_{k-2}, \eta_{k-3}].\end{aligned}$$

Отсюда $\text{cov}[\eta_{k-1}, \eta_{k-2}] = \lambda_1\sigma_\eta^2/(1 - \lambda_2)$. Тогда

$$\begin{aligned}\sigma_\eta^2 &= M[\eta_k^2] = M[(\lambda_1\eta_{k-1} + \lambda_2\eta_{k-2} + \varepsilon_k)^2] = \\ &= \lambda_1^2\sigma_\eta^2 + \lambda_2^2\sigma_\eta^2 + \sigma_\varepsilon^2 + 2\lambda_1\lambda_2M[\eta_{k-1}\eta_{k-2}] + \\ &+ 2\lambda_1M[\eta_{k-1}\varepsilon_k] + 2\lambda_2M[\eta_{k-2}\varepsilon_k] = \lambda_1^2\sigma_\eta^2 + \lambda_2^2\sigma_\eta^2 + \sigma_\varepsilon^2 + \frac{2\lambda_1^2\lambda_2}{1 - \lambda_2}\sigma_\eta^2.\end{aligned}$$

Отсюда после простых алгебраических преобразований получаем

$$\sigma_\eta^2 = \frac{(1 - \lambda_2)\sigma_\varepsilon^2}{(1 + \lambda_2)[(1 - \lambda_2)^2 - \lambda_1^2]}.$$

Доопределим систему уравнений (14) для η_0 и η_1 , которые будем искать из соотношений

$$\begin{cases} \mu_{11}\eta_0 = \varepsilon_0; \\ \mu_{21}\eta_0 + \mu_{22}\eta_1 = \varepsilon_1. \end{cases} \quad (15)$$

Из первого уравнения системы (15) получаем $\sigma^2[\mu_{11}\eta_0] = \mu_{11}^2\sigma^2[\eta_0] = \sigma^2[\varepsilon_0]$. Отсюда $\mu_{11}^2 = \sigma_\varepsilon^2/\sigma_\eta^2 = (1 + \lambda_2)[(1 - \lambda_2)^2 - \lambda_1^2]/(1 - \lambda_2)$, следовательно,

$$\mu_{11} = \sqrt{(1 + \lambda_2)[(1 - \lambda_2)^2 - \lambda_1^2]/(1 - \lambda_2)}. \quad (16)$$

Элементы μ_{21} и μ_{22} найдем из системы равенств

$$\begin{cases} \sigma^2[\mu_{21}\eta_0 + \mu_{22}\eta_1] = \sigma^2[\varepsilon_1]; \\ \text{cov}[\varepsilon_0, \varepsilon_1] = 0. \end{cases}$$

Из первого равенства получаем $\mu_{21}^2\sigma_\eta^2 + 2\mu_{21}\mu_{22}\text{cov}[\eta_0, \eta_1] + \mu_{22}^2\sigma_\eta^2 = \sigma_\varepsilon^2$. Из второго — $\text{cov}[\varepsilon_0, \varepsilon_1] = \text{cov}[\mu_{11}\eta_0, \mu_{21}\eta_0 + \mu_{22}\eta_1] = \mu_{11}\mu_{21}\sigma_\eta^2 + \mu_{11}\mu_{22}\text{cov}[\eta_0, \eta_1] = 0$. Отсюда имеем

$$\begin{aligned}\mu_{21} &= -\frac{\text{cov}[\eta_0, \eta_1]}{\sigma_\eta^2}\mu_{22} = -\frac{\lambda_1}{1 - \lambda_2}\mu_{22}, \\ \frac{\lambda_1^2}{(1 - \lambda_2)^2}\mu_{22}^2\sigma_\eta^2 - \frac{2\lambda_1}{1 - \lambda_2}\mu_{22}^2\frac{\lambda_1}{1 - \lambda_2}\sigma_\eta^2 + \mu_{22}^2\sigma_\eta^2 &= \sigma_\varepsilon^2, \\ \left[1 - \frac{\lambda_1^2}{(1 - \lambda_2)^2}\right]\mu_{22}^2 &= \frac{\sigma_\varepsilon^2}{\sigma_\eta^2} = \frac{(1 + \lambda_2)[(1 - \lambda_2)^2 - \lambda_1^2]}{1 - \lambda_2},\end{aligned}$$

$$\mu_{22} = \sqrt{1 - \lambda_2^2}, \quad \mu_{21} = -\frac{\lambda_1}{1 - \lambda_2} \mu_{22} = -\lambda_1 \frac{\sqrt{1 + \lambda_2}}{\sqrt{1 - \lambda_2}}. \quad (17)$$

Тогда из соотношений

$$\begin{cases} \mu_{11}\eta_0 = \varepsilon_0; & y_0 - u(x_{10}, x_{20}, x_{30}) = \eta_0, & k = 0; \\ \mu_{21}\eta_0 + \mu_{22}\eta_1 = \varepsilon_1; & y_1 - u(x_{11}, x_{21}, x_{31}) = \eta_1, & k = 1; \\ \eta_k - \lambda_1\eta_{k-1} - \lambda_2\eta_{k-2} = \varepsilon_k; & \eta_k = y_k - u(x_{1k}, x_{2k}, x_{3k}); \\ \eta_{k-1} = y_{k-1} - u(x_{1,k-1}, x_{2,k-1}, x_{3,k-1}); \\ \eta_{k-2} = y_{k-2} - u(x_{1,k-2}, x_{2,k-2}, x_{3,k-2}), & k = 2, 3, \dots, N-1, \end{cases}$$

получаем систему уравнений, описывающую временной ряд наблюдений:

$$\begin{cases} y_0 = y_0 - \mu_{11}[y_0 - u(x_{10}, x_{20}, x_{30})] + \varepsilon_0; \\ y_1 = y_1 - \mu_{21}[y_0 - u(x_{10}, x_{20}, x_{30})] - \mu_{22}[y_1 - u(x_{11}, x_{21}, x_{31})] + \varepsilon_1; \\ y_k = u(x_{1k}, x_{2k}, x_{3k}) + \lambda_1[y_{k-1} - u(x_{1,k-1}, x_{2,k-1}, x_{3,k-1})] + \\ + \lambda_2[y_{k-2} - u(x_{1,k-2}, x_{2,k-2}, x_{3,k-2})] + \varepsilon_k, \quad k = 2, 3, \dots, N-1, \end{cases} \quad (18)$$

в которой зависимости $\mu_{11}(\lambda_1, \lambda_2)$, $\mu_{21}(\lambda_1, \lambda_2)$ и $\mu_{22}(\lambda_2)$ определяются формулами (16) и (17).

При линейной $u(x_1, x_2, x_3) = \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3$ и мультипликативно-степенной $u(x_1, x_2, x_3) = Ax_1^\alpha x_2^\beta x_3^\gamma$ производственных функциях системы уравнений (13) и (18) принимают следующий вид (модели 7–9):

$$\begin{cases} y_0 = y_0 - \sqrt{1 - \lambda_1^2}(y_0 - \lambda_2 x_{10} - \lambda_3 x_{20} - \lambda_4 x_{30}) + \varepsilon_0; \\ y_k = \lambda_2 x_{1k} + \lambda_3 x_{2k} + \lambda_4 x_{3k} + \\ + \lambda_1(y_{k-1} - \lambda_2 x_{1,k-1} - \lambda_3 x_{2,k-1} - \lambda_4 x_{3,k-1}) + \varepsilon_k, \\ k = 1, 2, 3, \dots, N-1, \end{cases} \quad (19)$$

$$\begin{cases} y_0 = y_0 - \sqrt{1 - \lambda_1^2}(y_0 - \lambda_2 x_{10}^{\lambda_3} x_{20}^{\lambda_4} x_{30}^{\lambda_5}) + \varepsilon_0; \\ y_k = \lambda_2 x_{1k}^{\lambda_3} x_{2k}^{\lambda_4} x_{3k}^{\lambda_5} + \lambda_1(y_{k-1} - \lambda_2 x_{1,k-1}^{\lambda_3} x_{2,k-1}^{\lambda_4} x_{3,k-1}^{\lambda_5}) + \varepsilon_k, \\ k = 1, 2, 3, \dots, N-1, \end{cases} \quad (20)$$

$$\begin{cases} y_0 = y_0 - \mu_{11}(y_0 - \lambda_3 x_{10} - \lambda_4 x_{20} - \lambda_5 x_{30}) + \varepsilon_0; \\ y_1 = y_1 - \mu_{21}(y_0 - \lambda_3 x_{10} - \lambda_4 x_{20} - \lambda_5 x_{30}) - \\ - \mu_{22}(y_1 - \lambda_3 x_{11} - \lambda_4 x_{21} - \lambda_5 x_{31}) + \varepsilon_1; \\ y_k = \lambda_3 x_{1k} + \lambda_4 x_{2k} + \lambda_5 x_{3k} + \\ + \lambda_1(y_{k-1} - \lambda_3 x_{1,k-1} - \lambda_4 x_{2,k-1} - \lambda_5 x_{3,k-1}) + \\ + \lambda_2(y_{k-2} - \lambda_3 x_{1,k-2} - \lambda_4 x_{2,k-2} - \lambda_5 x_{3,k-2}) + \varepsilon_k, \\ k = 2, 3, 4, \dots, N-1, \end{cases} \quad (21)$$

$$\begin{cases} y_0 = y_0 - \mu_{11}(y_0 - \lambda_3 x_{10}^{\lambda_4} x_{20}^{\lambda_5} x_{30}^{\lambda_6}) + \varepsilon_0; \\ y_1 = y_1 - \mu_{21}(y_0 - \lambda_3 x_{10}^{\lambda_4} x_{20}^{\lambda_5} x_{30}^{\lambda_6}) - \\ - \mu_{22}(y_1 - \lambda_3 x_{11}^{\lambda_4} x_{21}^{\lambda_5} x_{31}^{\lambda_6}) + \varepsilon_1; \\ y_k = \lambda_3 x_{1k}^{\lambda_4} x_{2k}^{\lambda_5} x_{3k}^{\lambda_6} + \lambda_1(y_{k-1} - \lambda_3 x_{1,k-1}^{\lambda_4} x_{2,k-1}^{\lambda_5} x_{3,k-1}^{\lambda_6}) + \\ + \lambda_2(y_{k-2} - \lambda_3 x_{1,k-2}^{\lambda_4} x_{2,k-2}^{\lambda_5} x_{3,k-2}^{\lambda_6}) + \varepsilon_k, \\ k = 2, 3, 4, \dots, N-1, \end{cases} \quad (22)$$

где зависимости $\mu_{11}(\lambda_1, \lambda_2)$, $\mu_{21}(\lambda_1, \lambda_2)$ и $\mu_{22}(\lambda_2)$ также определяются формулами (16) и (17).

Ковариационно-стационарные модели временных рядов в форме разностных уравнений (19)–(22) образуют третью группу математических моделей, описывающих процессы энергопроизводства при системном анализе эффективности функционирования региональной энергосистемы.

Модели (7), (9) и (10) — линейные, а модели (8), (11), (19)–(22) — нелинейные относительно параметров, подлежащих оценке на основе результатов наблюдений в форме статистических данных, публикуемых в ежегодной отчетности региональных министерств и энергетических компаний. Отметим также, что во всех представленных выше моделях (7)–(11), (19)–(22) предполагается, что случайные возмущения ε_k , $k = 0, 1, 2, \dots, N - 1$, в результатах наблюдений имеют нулевое математическое ожидание и не коррелируют друг с другом:

$$M[\varepsilon_k] = 0, \quad M[\varepsilon_k \varepsilon_{k \pm s}] = \begin{cases} \sigma_\varepsilon^2, & s = 0; \\ 0, & s \neq 0. \end{cases}$$

Поэтому в качестве критерия среднеквадратичного оценивания параметров моделей используется минимизация суммы квадратов остатков (3). Проверка обоснованности выбора такого критерия строится на основе анализа остатков, выявления в них корреляции и статистики Дарбина—Уотсона [13, 21].

Применение методов регрессионного анализа позволяет находить, а для нелинейных моделей уточнять оценки коэффициентов математической модели по формуле (6). При этом элементы вектора z и элементы $f_{k,j}$ вектора-строки f_k матрицы F описываются следующими соотношениями.

1. Для трехфакторной линейной регрессионной модели (7), построенной на основе линейной производственной функции:

$$\begin{cases} z_k = y_{k-1}; \\ f_k = (x_{1,k-1}, x_{2,k-1}, x_{3,k-1}), \quad k = 1, 2, 3, \dots, N. \end{cases}$$

2. Для трехфакторной линейной регрессионной модели (8), построенной на основе мультипликативно-степенной производственной функции:

$$\begin{cases} u_k^{(i)} = \lambda_1^{(i)} x_{1k}^{\lambda_2^{(i)}} x_{2k}^{\lambda_3^{(i)}} x_{3k}^{\lambda_4^{(i)}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N - 1; \\ z_k^{(i)} = y_{k-1} + u_{k-1}^{(i)} (\lambda_2^{(i)} \ln x_{1,k-1} + \lambda_3^{(i)} \ln x_{2,k-1} + \lambda_4^{(i)} \ln x_{3,k-1}); \\ f_k^{(i)} = u_{k-1}^{(i)} ((\lambda_1^{(i)})^{-1}, \ln x_{1,k-1}, \ln x_{2,k-1}, \ln x_{3,k-1}), \quad k = 1, 2, 3, \dots, N. \end{cases}$$

3. Для линейной ковариационно-стационарной модели (9) в форме разностного уравнения с полиномиальным трендом второго порядка:

$$\begin{cases} z_k = y_{k+1}; \\ f_k = (y_k, y_{k-1}, 1, t_{k+1}, t_{k+1}^2), \quad k = 1, 2, 3, \dots, N - 2. \end{cases}$$

4. Для ковариационно-стационарной модели (10) в форме разностного уравнения с полиномиальным трендом нулевого порядка и линейной функ-

цией входных воздействий (факторов):

$$\begin{cases} z_k = y_k; \\ f_k = (y_{k-1}, 1, x_{1k}, x_{2k}, x_{3k}), \quad k = 1, 2, 3, \dots, N-1. \end{cases}$$

5. Для ковариационно-стационарной модели (11) в форме разностного уравнения с нелинейным трендом в форме мультипликативно-степенной трехфакторной функции:

$$\begin{cases} u_k^{(i)} = \lambda_3^{(i)} x_{1k}^{(i)} x_{2k}^{(i)} x_{3k}^{(i)}, & k = 2, 3, 4, \dots, N-1; \\ z_k^{(i)} = y_{k+1} + u_{k+1}^{(i)} (\lambda_4^{(i)} \ln x_{1,k+1} + \lambda_5^{(i)} \ln x_{2,k+1} + \lambda_6^{(i)} \ln x_{3,k+1}); \\ f_k^{(i)} = (y_k, y_{k-1}, u_{k+1}^{(i)} / \lambda_3^{(i)}, u_{k+1}^{(i)} \ln x_{1,k+1}, u_{k+1}^{(i)} \ln x_{2,k+1}, u_{k+1}^{(i)} \ln x_{3,k+1}), \\ & k = 1, 2, 3, \dots, N-2. \end{cases}$$

6. Для ковариационно-стационарной модели (19), построенной на основе линейной регрессионной модели со случайным возмущением, описываемым авторегрессией первого порядка:

$$\begin{cases} u_k^{(i)} = \lambda_2^{(i)} x_{1k} + \lambda_3^{(i)} x_{2k} + \lambda_4^{(i)} x_{3k}, & k = 0, 1, 2, \dots, N-2; \\ z_k^{(i)} = y_k - \lambda_1^{(i)} u_{k-1}^{(i)}; \\ f_k^{(i)} = (y_{k-1} - u_{k-1}^{(i)}, x_{1k} - \lambda_1^{(i)} x_{1,k-1}, x_{2k} - \lambda_1^{(i)} x_{2,k-1}, x_{3k} - \lambda_1^{(i)} x_{3,k-1}), \\ & k = 1, 2, 3, \dots, N-1. \end{cases}$$

7. Для ковариационно-стационарной модели (20), построенной на основе нелинейной регрессионной модели со случайным возмущением, описываемым авторегрессией первого порядка:

$$\begin{cases} u_k^{(i)} = \lambda_2^{(i)} x_{1k}^{(i)} x_{2k}^{(i)} x_{3k}^{(i)}, & k = 0, 1, 2, \dots, N-1; \\ z_k^{(i)} = y_k + u_k^{(i)} (\lambda_3^{(i)} \ln x_{1k} + \lambda_4^{(i)} \ln x_{2k} + \lambda_5^{(i)} \ln x_{3k}) - \\ & - \lambda_1^{(i)} u_{k-1}^{(i)} (1 + \lambda_3^{(i)} \ln x_{1,k-1} + \lambda_4^{(i)} \ln x_{2,k-1} + \lambda_5^{(i)} \ln x_{3,k-1}); \\ f_k^{(i)} = (y_{k-1} - u_{k-1}^{(i)}, (u_k^{(i)} - \lambda_1^{(i)} u_{k-1}^{(i)}) / \lambda_2^{(i)}, \\ & u_k^{(i)} \ln x_{1k} - \lambda_1^{(i)} u_{k-1}^{(i)} \ln x_{1,k-1}, u_k^{(i)} \ln x_{2k} - \lambda_1^{(i)} u_{k-1}^{(i)} \ln x_{2,k-1}, \\ & u_k^{(i)} \ln x_{3k} - \lambda_1^{(i)} u_{k-1}^{(i)} \ln x_{3,k-1}), \\ & k = 1, 2, 3, \dots, N-1. \end{cases}$$

8. Для ковариационно-стационарной модели (21), построенной на основе линейной регрессионной модели со случайным возмущением, описываемым авторегрессией второго порядка:

$$\begin{cases} u_k^{(i)} = \lambda_3^{(i)} x_{1k} + \lambda_4^{(i)} x_{2k} + \lambda_5^{(i)} x_{3k}, & k = 0, 1, 2, \dots, N-2; \\ z_k^{(i)} = y_{k+1} - \lambda_1^{(i)} u_k^{(i)} - \lambda_2^{(i)} u_{k-1}^{(i)}; \\ f_k^{(i)} = (y_k - u_k^{(i)}, y_{k-1} - u_{k-1}^{(i)}, x_{1,k+1} - \lambda_1^{(i)} x_{1,k} - \lambda_2^{(i)} x_{1,k-1}, \\ & x_{2,k+1} - \lambda_1^{(i)} x_{2,k} - \lambda_2^{(i)} x_{2,k-1}, x_{3,k+1} - \lambda_1^{(i)} x_{3,k} - \lambda_2^{(i)} x_{3,k-1}), \\ & k = 1, 2, 3, \dots, N-2. \end{cases}$$

9. Для ковариационно-стационарной модели (22), построенной на основе нелинейной регрессионной модели со случайным возмущением, описываемым авторегрессией второго порядка:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_k^{(i)} = \lambda_3^{(i)} x_{1k}^{(i)} x_{2k}^{(i)} x_{3k}^{(i)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1; \\ z_k^{(i)} = y_{k+1} + u_{k+1}^{(i)} (\lambda_4^{(i)} \ln x_{1,k+1} + \lambda_5^{(i)} \ln x_{2,k+1} + \lambda_6^{(i)} \ln x_{3,k+1}) - \\ \quad - \lambda_1^{(i)} u_k^{(i)} (1 + \lambda_4^{(i)} \ln x_{1,k} + \lambda_5^{(i)} \ln x_{2,k} + \lambda_6^{(i)} \ln x_{3,k}) - \\ \quad - \lambda_2^{(i)} u_{k-1}^{(i)} (1 + \lambda_4^{(i)} \ln x_{1,k-1} + \lambda_5^{(i)} \ln x_{2,k-1} + \lambda_6^{(i)} \ln x_{3,k-1}); \\ f_k^{(i)} = (y_k - u_k^{(i)}, y_{k-1} - u_{k-1}^{(i)}, (u_{k+1}^{(i)} - \lambda_1^{(i)} u_k^{(i)} - \lambda_2^{(i)} u_{k-1}^{(i)}) / \lambda_3^{(i)}, \\ \quad u_{k+1}^{(i)} \ln x_{1,k+1} - \lambda_1^{(i)} u_k^{(i)} \ln x_{1,k} - \lambda_2^{(i)} u_{k-1}^{(i)} \ln x_{1,k-1}, \\ \quad u_{k+1}^{(i)} \ln x_{2,k+1} - \lambda_1^{(i)} u_k^{(i)} \ln x_{2,k} - \lambda_2^{(i)} u_{k-1}^{(i)} \ln x_{2,k-1}, \\ \quad u_{k+1}^{(i)} \ln x_{3,k+1} - \lambda_1^{(i)} u_k^{(i)} \ln x_{3,k} - \lambda_2^{(i)} u_{k-1}^{(i)} \ln x_{3,k-1}), \\ \quad k = 1, 2, 3, \dots, N-2. \end{array} \right.$$

4. Результаты математического моделирования динамики выпуска продукции энергосистемы на основе результатов наблюдений. На основе статистических данных, публикуемых в ежегодной отчетности региональных министерств и энергетических компаний за период времени с 1990 по 2021 годы, с учетом представленных выше соотношений по алгоритму, описанному формулой (6), построены девять математических моделей динамики выпуска продукции энергосистемы. Результаты расчета параметров математических моделей представлены в табл. 1.

В последних четырех столбцах табл. 1 приведены следующие значения: $Q_{res} = \|y - \hat{y}\|^2$ — сумма квадратов отклонений результатов расчета $\hat{y}_k$ по модели от результатов наблюдений; $s = (\|y - \hat{y}\| / \|y\|) \cdot 100\%$ — оценка относительного отклонения модели от эксперимента; $cond$ — число обусловленности матрицы нормальной системы уравнений $F^{(i)\top} F^{(i)}$, характеризующее устойчивость вычисления среднеквадратичных оценок параметров модели; $DW = 2(1 - r)$ — статистика Дарбина—Уотсона, на основе которой можно сделать вывод о наличии автокорреляции первого порядка в случайном возмущении ε_k , где r — выборочный коэффициент корреляции.

Статистический анализ полученных результатов, приведенных в табл. 1, позволяет сделать следующие выводы.

Во-первых, построенные модели 4–9 (см. формулы (10), (11), (19)–(22)) с достаточно высокой степенью адекватности аппроксимируют результаты наблюдений. Причем графики функций, описывающих динамику выпуска продукции энергопроизводств, построенные на основе моделей 4 и 5 (сплошная линия на рис. 1) и моделей 6–9 (штриховая линия на рис. 1), практически совпадают. Точки на рис. 1 отображают статистические данные выпуска продукции энергопроизводств в относительных единицах.

Во-вторых, с учетом плохой обусловленности матрицы нормальной системы уравнений $F^{(i)\top} F^{(i)}$ при вычислении среднеквадратичных оценок параметров математической модели (9) в форме разностного уравнения с полиномиальным трендом второго порядка можно сделать вывод о наличии мультиколлинеарности, отрицательные последствия которой проявляются в виде неустойчивости как оценок, так и самой процедуры оценивания, а также

Таблица 1
Результаты расчета параметров математических моделей
[Results of the calculation of mathematical model parameters]

Model		Model coefficients						Q_{res}	$s, \%$	cond	DW
nos.	Eq.	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6				
1	(7)	-0.038	-0.048	1.103				0.022	4.2	214	0.8
2	(8)	1.008	-0.167	-0.058	1.035			0.017	3.7	71	1.0
3	(9)	0.921	-0.199	108.2	-0.1064	$2.6 \cdot 10^{-5}$		0.032	5.5	$1.5 \cdot 10^7$	2.2
4	(10)	0.276	0.070	-0.047	-0.053	0.750		0.011	3.2	4535	1.6
5	(11)	0.314	-0.038	0.730	-0.158	-0.099	1.071	0.011	3.3	2469	1.6
6	(19)	0.785	-0.009	0.009	0.953			0.013	3.4	170	1.9
7	(20)	0.684	0.965	-0.128	0.016	0.945		0.012	3.3	77	1.9
8	(21)	0.885	-0.123	0.0099	0.017	0.894		0.013	3.5	769	2.1
9	(22)	0.818	-0.108	0.900	-0.063	0.037	0.853	0.012	3.4	203	2.1

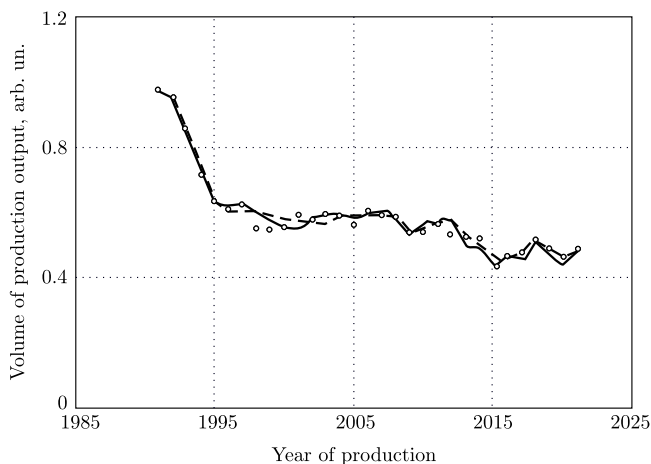


Рис. 1. Графики функций, описывающих динамику выпуска продукции энергопроизводств: точки — статистические данные выпуска продукции; сплошная линия — данные на основе моделей 4 и 5 (формулы (10) и (11)); штриховая линия — данные на основе моделей 6–9 (формулы (19)–(22))

[Figure. 1. Plots of functions describing the dynamics of production output in energy industries: points — statistical data on production output; solid line — data based on models 4 and 5 (Eqs. (10) and (11)); dashed line — data based on models 6–9 (Eqs. (19)–(22))]

в резком увеличении дисперсии оценок параметров и уменьшении точности предсказания по модели [12, 14]. Вследствие этого данная модель не может быть рекомендована к практическому применению при описании динамики выпуска продукции региональной энергосистемы и достоверного прогноза на ее основе.

В-третьих, из анализа остатков $e = y_k - \hat{y}_k$, $k = 0, 1, 2, \dots, 31$, и оценки DW следует, что практически во всех моделях временного ряда наблюдений (из первой и второй групп по описанной выше систематизации) имеет место автокорреляция между элементами случайной величины ε_k . В связи с этим среднеквадратичное оценивание параметров модели на основе классического метода наименьших квадратов (МНК): $\|e\|^2 = \|y - \hat{y}\|^2 \rightarrow \min$ приводит не только к неэффективности этих оценок, но и к существенному занижению оценок дисперсий результатов расчета, в силу чего оценки дисперсии σ_ε^2 оказываются смещенными и создается неверное впечатление о точности прогноза по модели [12, 14].

В-четвертых, статистический анализ построенных моделей (19)–(22) из третьей группы показал нецелесообразность использования при описании временного ряда случайных возмущений в результатах наблюдений модели авторегрессии второго порядка $\eta_k = \lambda_1 \eta_{k-1} + \lambda_2 \eta_{k-2} + \varepsilon_k$, а вполне достаточно ограничиться авторегрессией первого порядка $\eta_k = \lambda_1 \eta_{k-1} + \varepsilon_k$. То есть отдается предпочтение моделям (19) и (20).

Окончательный выбор математической модели, наиболее эффективно аппроксимирующей результаты наблюдений в форме статистических данных, публикуемых в ежегодной отчетности региональных министерств и энергетических компаний, может быть сделан на основе анализа погрешности прогноза по соответствующей модели на один или несколько лет вперед.

5. Сравнительный анализ разработанных математических моделей на основе оценки погрешности прогноза. Сравнительный анализ исследуемых моделей был выполнен на основе данных, собранных за 20 лет ($N = 20$). Прогнозы были рассчитаны на сроки $p = 1, 2, 3, 4$ и 5 лет, начиная с 2010 года и до 2022 – p года. Усредненные результаты погрешностей прогнозирования представлены в табл. 2. Анализ ошибок прогнозов при использовании моделей 1–9 позволяет сделать выбор в пользу модели 7, описываемой формулой (20).

Результаты сравнения точности прогноза на основе известной [1–3] мультипликативно-степенной модели (модель 2, формула (8)) и модели временного ряда в форме разностного уравнения (модель 7, формула (20)) представлены на рис. 2. Видно, что погрешность прогноза δ , сделанного на основе модели 7, существенно меньше (в среднем на 27%) погрешности прогноза, сделанного на основе модели 2. Также видно, что из-за некорректности применения классического метода наименьших квадратов при оценке параметров модели 2 вследствие смещения оценки дисперсии случайного возмущения в результатах наблюдения величина оценки относительной предельной погрешности прогноза Δ (доверительный интервал) оказывается завышенной.

При выборе формы трехфакторной функциональной зависимости (1), описывающей динамику выпуска продукции региональной энергосистемы, предполагалось, что факторные эластичности для наблюдаемого процесса есть величины постоянные, равные параметрам модели α , β и γ . Однако это предположение ни в одной из работ [1–8] не было обосновано.

Для устранения этого недостатка и обоснования независимости от времени факторных эластичностей построенной модели

$$y_k = \lambda_2 x_{1k}^{\lambda_3} x_{2k}^{\lambda_4} x_{3k}^{\lambda_5} + \lambda_1 (y_{k-1} - \lambda_2 x_{1,k-1}^{\lambda_3} x_{2,k-1}^{\lambda_4} x_{3,k-1}^{\lambda_5}) + \varepsilon_k$$

рассмотрим аппроксимацию зависимостей $\alpha(t)$, $\beta(t)$ и $\gamma(t)$ многочленами нулевой степени α_0 , β_0 и γ_0 и проверим гипотезу об адекватности таких моделей результатам расчетов, представленных во втором, четвертом и шестом столбцах табл. 3 соответственно.

Обозначим в общем виде факторную эластичность через $p \in \{\alpha, \beta, \gamma\}$ и рассмотрим регрессионную модель в виде многочлена нулевой степени

$$p_k = c_0 + \eta_k, \quad k = \overline{1, n_p}, \quad (23)$$

Таблица 2

Погрешности прогноза выпуска продукции энергопроизводств, сделанного на основе исследуемых математических моделей (в процентах) [Forecast errors in the production output of energy industries based on the studied mathematical models (in percent)]

Number of years for which the forecast has been made	Model numbers								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	7.6	4.9	6.8	4.4	4.5	4.9	3.7	5.8	5.4
2	9.1	7.3	9.8	7.2	7.0	7.4	5.5	7.9	7.9
3	10.3	9.6	11.6	10.1	9.1	9.5	7.2	10.6	9.8
4	9.9	11.0	15.5	12.7	11.4	11.1	9.2	11.3	11.0
5	9.0	12.1	15.2	15.1	13.4	12.1	11.2	12.1	12.5

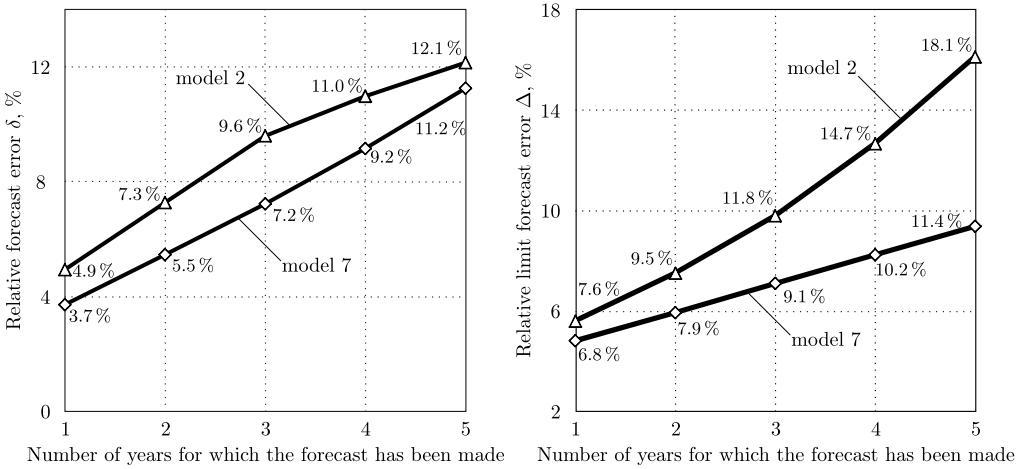


Рис. 2. Относительная ошибка прогноза δ (%) и относительная предельная ошибка прогноза Δ (%) объемов производства в отраслях энергетики, рассчитанных по моделям 2 и 7
[Figure. 2. Relative forecast error δ (%) and relative limit forecast error Δ (%) of production output in energy industries calculated by models 2 and 7]

Таблица 3

Результаты расчетов коэффициентов эластичности и оценки точности этих расчетов
[Results of the calculations of elasticity coefficients and evaluation of the accuracy of these calculations]

Observation period	α	$s[\alpha]$	β	$s[\beta]$	γ	$s[\gamma]$
1991–2011	0.093	0.198	0.061	0.110	0.881	0.258
1992–2012	0.159	0.181	0.105	0.110	0.658	0.298
1993–2013	0.155	0.181	0.102	0.110	0.681	0.258
1994–2014	0.210	0.176	0.142	0.113	0.562	0.238
1995–2015	0.188	0.136	0.118	0.095	0.548	0.225
1996–2016	0.226	0.109	0.106	0.073	0.457	0.207
1997–2017	0.103	0.136	0.107	0.075	0.499	0.189
1998–2018	–0.072	0.085	0.110	0.085	0.650	0.166
1999–2019	–0.116	0.059	0.122	0.065	0.700	0.143
2000–2020	–0.109	0.066	0.121	0.060	0.688	0.124
2001–2021	–0.167	0.064	0.195	0.077	0.673	0.120

где $n_p = 11$ — число точек, по которым строится данная модель, то есть по которым находится оценка $\hat{c}_0$ аппроксимации временной зависимости факторной эластичности p многочленом нулевой степени.

В третьем, пятом и последнем столбцах табл. 3 приведены оценки $s[p_k] = s[\eta_k]$ среднеквадратичного отклонения результатов расчета p_k , $k = \overline{1, n_p}$. Так как очевидно, что эти результаты не являются равноточными, при оценке единственного параметра c_0 модели (23) можно воспользоваться взвешенным методом наименьших квадратов [12–15]. В качестве весов ω_k примем величины $\omega_k = s_k^2 = (s[p_k])^2$.

С учетом соотношения $\eta_k = \sqrt{\omega_k} \cdot \varepsilon_k$, где ε_k — случайная величина, удовлетворяющая условиям теоремы Гаусса–Маркова [14], регрессию (23) пре-

образуем к виду

$$\frac{p_k}{s_k} = \frac{1}{s_k} c_0 + \varepsilon_k, \quad k = \overline{1, np}. \quad (24)$$

Заметим, что при этом из соотношения $s^2[\eta_k] = \omega_k s_\varepsilon^2 = s_k^2$, где $s^2[\eta_k]$ и s_ε^2 — оценки дисперсии случайных величин η_k и ε_k , следует, что $s_\varepsilon^2 = s^2[\eta_k]/s_k^2 = 1$, то есть при выбранных весах $\omega_k = s_k^2$ происходит нормирование оценки дисперсии случайного возмущения в регрессии (24).

Отсюда на основе минимизации $\|\varepsilon\|^2 \rightarrow \min$ получаем оценку

$$\hat{c}_0 = \sum_{k=1}^{n_p} p_k s_k^{-2} / \sum_{k=1}^{n_p} s_k^{-2}. \quad (25)$$

Оценку s_{res}^2 дисперсии σ_ε^2 для модели (24) можно найти по формуле

$$s_{res}^2 = \frac{1}{n_p - 1} \sum_{k=1}^{n_p} s_k^{-2} (p_k - \hat{c}_0)^2. \quad (26)$$

Во втором, третьем и четвертом столбцах табл. 4 приведены результаты расчетов оценок $\hat{c}_0$, $\sum_{k=1}^{n_p} s_k^{-2}$ и s_{res}^2 по описанным выше формулам (25) и (26) для факторных эластичностей α , β и γ соответственно.

Таблица 4

Анализ зависимости факторных эластичностей от времени [Analysis of the dependence of factor elasticities on time]

Factor elasticities, p	$\hat{c}_0 \in \{\hat{\alpha}_0, \hat{\beta}_0, \hat{\gamma}_0\}$	$\sum_{k=1}^{n_p} s_k^{-2}$	s_{res}^2	$s[c_0]$	t
α	-0.046	1215.0	2.15	0.029	1.61
β	0.120	1623.0	0.14	0.025	4.85
γ	0.645	349.6	0.29	0.053	12.06

Проверку гипотезы об адекватности модели (24), то есть о корректности аппроксимации результатов расчета p_k , $k = \overline{1, n_p}$, описывающих временную зависимость факторной эластичности, константой $\hat{c}_0$, можно выполнить на основе распределения Фишера $F = s_{res}^2/s_\varepsilon^2$ [12]. При нормированной оценке дисперсии $s_\varepsilon^2 = 1$ имеем $F = s_{res}^2$ (четвертый столбец табл. 4). Сравнивая эти значения с $F_{cr} = F(0.05, 10, 18) = 2.48$, имеем $F < F_{cr}$ для каждого параметра α , β и γ . Отсюда можно сделать вывод о правомерности выбора математической модели, описывающей динамику выпуска продукции региональной энергосистемы, в форме нелинейной трехфакторной степенной зависимости (1), факторные эластичности которой не меняются за период времени с 1990 по 2021 год.

Среднеквадратичное отклонение оценок $\hat{c}_0$, вычисленных по формуле (25) с учетом известных $s^2[p_k] = s_k^2$, можно найти на основе соотношений

$$s^2[\hat{c}_0] = \frac{\sum_{k=1}^{n_p} (s_k^{-2})^2 s^2[p_k]}{(\sum_{k=1}^{n_p} s_k^{-2})^2} = \frac{\sum_{k=1}^{n_p} s_k^{-2}}{(\sum_{k=1}^{n_p} s_k^{-2})^2} = \frac{1}{\sum_{k=1}^{n_p} s_k^{-2}}.$$

Отсюда имеем, что

$$s[\hat{c}_0] = \left(\sum_{k=1}^{n_p} s_k^{-2} \right)^{-1/2}. \quad (27)$$

Среднеквадратичные оценки $s[\hat{\alpha}_0]$, $s[\hat{\beta}_0]$ и $s[\hat{\gamma}_0]$, найденные по формуле (27), представлены в пятом столбце табл. 4. На их основе можно выдвинуть гипотезу о значимости параметра $\hat{c}_0$ [12]. Для проверки этой гипотезы вычисляется статистика $t = |\hat{c}_0|/s[\hat{c}_0]$, значения которой для различных факторных эластичностей приведены в последнем столбце табл. 4. Сравнивая эти значения с критическим значением из таблицы распределения Стьюдента $t_{cr} = t(0.05, 10) = 2.23$, можно сделать вывод о незначимости параметра α в нелинейной трехфакторной степенной зависимости (1). Это может служить поводом для упрощения модели (1), исключив из нее фактор $K(t)$, описывающий капитальные ресурсы. Однако из-за корреляции оценок параметров проверка значимости может оказаться не слишком точной, а упрощение модели — ненадежным. Как следствие, оценки прогноза получаются смещенными, и лучше оставить в модели незначимые параметры, чем отбросить значимые [12].

Таким образом, с учетом результатов проведенных численно-аналитических исследований и сравнительного анализа различных моделей функционирования региональной энергосистемы к практическому применению при решении задач оптимизации и планирования деятельности региональных энергопроизводств на основе системного анализа эффективности региональной энергетики можно рекомендовать ковариационно-стационарную модель временного ряда в форме разностного уравнения с мультипликативно-степенным трендом

$$y_k = \lambda_2 x_{1k}^{\lambda_3} x_{2k}^{\lambda_4} x_{3k}^{\lambda_5} + \lambda_1 (y_{k-1} - \lambda_2 x_{1,k-1}^{\lambda_3} x_{2,k-1}^{\lambda_4} x_{3,k-1}^{\lambda_5}) + \varepsilon_k, \quad k = 1, 2, 3, \dots, N-1.$$

Применение такой модели позволяет обеспечить высокую точность оценок ее параметров: факторных эластичностей, а также достоверность прогнозов выпуска продукции энергопроизводств на достаточно длительный промежуток времени.

Заключение. Проведен анализ математического описания функционирования региональной энергосистемы и численных методов параметрической идентификации трехфакторной мультипликативно-степенной модели в виде производственной функции.

С учетом выявленных недостатков предложены и систематизированы ковариационно-стационарные модели в форме разностных уравнений с детерминированными трендами в виде линейных и нелинейных трехфакторных зависимостей, учитывающие стохастический характер временного ряда результатов наблюдений.

На основе статистического анализа результатов параметрической идентификации, в том числе анализа остатков, сделаны выводы об устойчивости используемых алгоритмов численных методов, а также о целесообразности применения моделей временных рядов при описании случайного возмущения в регрессионных моделях.

По результатам сравнительного анализа на основе оценок погрешности прогноза из рассматриваемой совокупности моделей выбрана наиболее эффективная математическая модель с минимальной ошибкой прогноза выпуска продукции энергосистемы на период времени от одного года до пяти лет.

Конкурирующие интересы. Конкурирующих интересов не имеется.

Авторский вклад и ответственность. Все авторы принимали участие в разработке концепции статьи и в написании рукописи. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Исследование выполнялось без финансирования.

Библиографический список

1. Гаврилова А. А., Цапенко М. В. Синтез математических моделей региональной энергосистемы как многомерных производственных функций // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Техн. науки*, 2002. № 14. С. 126–192.
2. Колмыков Д. С., Гаврилова А. А. Модельный анализ эффективности функционирования региональных энергопроизводств / *Труды Третьей Всероссийской научной конференции* (29–31 мая 2006 г.). Часть 2: Моделирование и оптимизация динамических систем и систем с распределенными параметрами / Матем. моделирование и краев. задачи. Самара: СамГТУ, 2006. С. 93–96.
3. Дилигенский Н. В., Гаврилова А. А., Салов А. Г., Гаврилов В. К. Модельный анализ эффективности совместного производства тепловой и электрической энергии региональной энергосистемой // *Изв. высш. учебн. завед. Северо-Кавказск. регион. Техн. науки*, 2008. № 5. С. 37–40. EDN: JUPXNJ.
4. Салов А. Г., Гаврилова А. А. Системный анализ и моделирование деятельности энергетических генерирующих предприятий с целью оценки эффективности их функционирования в условиях становления рыночных отношений // *Вестн. Саратов. гос. техн. ун-та*, 2008. Т. 1, № 1. С. 86–91. EDN: JUJLHL.
5. Салов А. Г., Гаврилова А. А., Иванова Д. В. Исследование экономических характеристик регионального промышленного комплекса методами статистического и модельного анализа // *Научное обозрение*, 2015. № 15. С. 327–332. EDN: UXSICN.
6. Салов А. Г., Гаврилова А. А., Князев П. А., Круглов В. А. Имитационное моделирование деятельности генерирующего комплекса на основе трехфакторной производственной функции // *Градостроительство и архитектура*, 2016. № 3. С. 140–145. EDN: WWJDJ. DOI: <https://doi.org/10.17673/Vestnik.2016.03.23>.
7. Ivanova D. V., Salov A. G., Gavrilova A. A. Control algorithms development for manufacturing and economic systems activity // *J. Phys.: Conf. Ser.*, 2018. vol. 1111, 012073. EDN: VZIFDX. DOI: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1111/1/012073>.
8. Гаврилова А. А., Салов А. Г. *Системная методология анализа и моделирования энергоэффективности генерирующих компаний*. Самара: Научно-технический центр, 2021. 277 с. EDN: ZZZXNK.
9. Абрамов А. П., Бессонов В. А., Никифоров Л. Т., Свириденко К. С. *Исследование динамики макроэкономических показателей методом производственных функций*. М.: ВЦ АН СССР, 1987. 62 с.
10. Замков О. О., Толстомятенко А. В., Черемных Ю. Н. *Математические методы в экономике*. М.: МГУ, 1997. 368 с.
11. Зотеев В. Е., Башкинова Е. В., Староквашева П. В. Математическое моделирование функционирования энергетической системы Самарской области / *Перспективные информационные технологии (ПИТ 2020): Труды Международной научно-технической конференции*. Самара: Сам. научн. центр РАН, 2020. С. 361–365. EDN: KVSXGT.
12. Вучков И., Бояджиева Л., Солаков О. *Прикладной линейный регрессионный анализ*. М.: Финансы и статистика, 1987. 238 с.

13. Draper N. R., Smith H. *Applied Regression Analysis* / Wiley Series in Probability and Statistics. New York: John Wiley and Sons, 1998. xvii+706 pp. DOI: <https://doi.org/10.1002/9781118625590>.
14. Демиденко Е. З. *Линейная и нелинейная регрессии*. М.: Финансы и статистика, 1981. 302 с.
15. Seber G. A. F., Lee A. J. *Linear Regression Analysis* / Wiley Series in Probability and Statistics. Hoboken, NJ: Wiley, 2003. xvi+557 pp.
16. Box G. E. P., Jenkins G. M.; Reinsel G. C., Ljung G. M. *Time Series Analysis. Forecasting and Control* / Wiley Series in Probability and Statistics. Hoboken, NJ: John Wiley and Sons, 2016. 712 pp.
17. Anderson T. W. *The Statistical Analysis of Time Series* / Wiley Classics Library. Chichester: John Wiley and Sons, 1994. xiv+704 pp.
18. Kendall M. G., Stuart A. *The Advanced Theory of Statistics*. vol. 3: Design and Analysis, and Time-Series. London: Charles Griffin, 1976. x+585 pp.
19. Otnes R. K., Enochson L. *Applied Time Series Analysis*. vol. 1: Basic Techniques. New York: John Wiley and Sons, 1978. xiv+449 pp.
20. Kashyap R. L., Ramachandra Rao A. *Dynamic Stochastic Models from Empirical Data* / Mathematics in Science and Engineering. vol. 122. New York: Academic Press, 1976. xvi+334 pp. DOI: [https://doi.org/10.1016/s0076-5392\(08\)x6016-3](https://doi.org/10.1016/s0076-5392(08)x6016-3).
21. Durbin J., Watson G. S Testing for serial correlation in least squares regression: I // *Biometrika*, 1950. vol. 37, no. 3/4. pp. 409–428. DOI: <https://doi.org/10.2307/2332391>.
22. Грановский В. А., Сирая Т. Н. *Методы обработки экспериментальных данных при измерениях*. Л.: Энергоатомиздат, 1990. 288 с.
23. Зотеев В. Е. Численный метод нелинейного оценивания на основе разностных уравнений // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2018. Т. 22, № 4. С. 669–701. EDN: YSDYZN. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1643>.

MSC: 91B84, 91B82

Development and comparative analysis of mathematical models for the functioning of the regional power system of the Samara region

V. E. Zoteev, L. A. Sagitova, A. A. Gavrilova

Samara State Technical University,

244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russian Federation.

Abstract

Systematic research into the operations of the regional power system aimed at improving the efficiency of energy complex management, taking into account the contribution of utilized resources, is fundamentally impossible without the enhancement of mathematical models and methods for their identification based on statistical data.

This article presents the results of an analysis of a well-known mathematical description of the functioning of the regional power system, highlighting significant shortcomings that negatively impact both the reliability of assessments of key performance indicators of the energy complex and the accuracy of forecasts made based on the constructed model.

The study examines and systematizes various three-factor regression models and covariance-stationary time series models based on linear and nonlinear regression into three main groups. Algorithms for numerical methods of least squares estimation of the parameters of these models based on observational results are described.

Results of mathematical modeling of the dynamics of energy system output based on statistical data published in the annual reports of regional ministries and energy companies are provided. A statistical analysis of the

Mathematical Modeling, Numerical Methods and Software Complexes Research Article

© Authors, 2024

© Samara State Technical University, 2024 (Compilation, Design, and Layout)

 The content is published under the terms of the [Creative Commons Attribution 4.0 International License](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Zoteev V. E., Sagitova L. A., Gavrilova A. A. Development and comparative analysis of mathematical models for the functioning of the regional power system of the Samara region, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2024, vol. 28, no. 3, pp. 586–608. EDN: IWFHMA. DOI: [10.14498/vsgtu2091](https://doi.org/10.14498/vsgtu2091) (In Russian).

Author's Details:

Vladimir E. Zoteev  <https://orcid.org/0000-0001-7114-4894>

Dr. Techn. Sci., Professor; Professor; Dept. of Applied Mathematics and Computer Science; e-mail: zoteev.ve@samgtu.ru

Lyajsan A. Sagitova  <https://orcid.org/0000-0002-0833-983X>

Senior Lecturer; Dept. of Heat and Gas Supply and Ventilation; e-mail: 10410@mail.ru

Anna A. Gavrilova  <https://orcid.org/0000-0002-0833-983X>

Cand. Techn. Sci., Associate Professor; Associate Professor; Dept. of Control and System Analysis of Thermal Power and Sociotechnical Complexes; e-mail: a.a.gavrilova@mail.ru

obtained results is conducted. A comparative analysis of the developed mathematical models based on forecast error assessment allowed for the selection of the most effective mathematical model with minimal forecasting error from the considered set of models over a time period ranging from one to five years.

Keywords: regional energy system, multiplicative power-law production function, factor elasticity, covariance-stationary time series models, autoregressive models, statistical analysis.

Received: 10th March, 2024 / Revised: 16th September, 2024 /

Accepted: 27th September, 2024 / First online: 5th November, 2024

Competing interests. We have no competing interests.

Author contributions and responsibility. All authors participated in the development of the article's concept and in writing the manuscript. The authors bear full responsibility for submitting the final manuscript for publication. The final version of the manuscript was approved by all authors.

Funding. The research was conducted without funding.

References

1. Gavrilova A. A., Capenko M. V. Synthesis of mathematical models of the regional energy system as multidimensional production functions, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Techn. Nauki*, 2002, no. 14, pp. 126–192 (In Russian).
2. Kolmykov D. S., Gavrilova A. A. Model analysis of the operating efficiency of regional energy production, In: *Proceedings of the Third All-Russian Scientific Conference* (29–31 May 2006). Part 2, Matem. Mod. Kraev. Zadachi. Samara, Samara State Technical Univ., 2006, pp. 93–96 (In Russian).
3. Diligensky N. V., Gavrilova A. A., Salov A. G., Gavrilov V. K. Modeling performance analysis of combined generation of heat and power energy of regional power system, *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Severo-Kavkazsk. Region. Tekhn. Nauki*, 2008, no. 5, pp. 37–40 (In Russian). EDN: JUPXNJ.
4. Salov A. G., Gavrilova A. A. System analysis and modeling of the activities of energy generating enterprises in order to assess the efficiency of their functioning in the context of the formation of market relations, *Vestn. Saratov. Gos. Tekhn. Univ.*, 2008, vol. 1, no. 1, pp. 86–91 (In Russian). EDN: JUIJHL.
5. Salov A. G., Gavrilova A. A., Ivanova D. V. Study of the economic characteristics of the regional industrial complex using statistical and modeling analysis methods, *Nauchnoe Obozrenie*, 2015, no. 15, pp. 327–332 (In Russian). EDN: UXSICN.
6. Salov A. G., Gavrilova A. A., Knyazev P. A., Kruglov V. A. Simulation model of region energy system on the base of three-factor production function, *Urban Construction and Architecture*, 2016, no. 3, pp. 140–145 (In Russian). EDN: WW0DDJ. DOI: <https://doi.org/10.17673/Vestnik.2016.03.23>.
7. Ivanova D. V., Salov A. G., Gavrilova A. A. Control algorithms development for manufacturing and economic systems activity, *J. Phys.: Conf. Ser.*, 2018, vol. 1111, 012073. EDN: VZIFDX. DOI: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1111/1/012073>.
8. Gavrilova A. A., Salov A. G. *Sistemnaia metodologiya analiza i modelirovaniia energoefektivnosti generiruiushchikh kompanii* [System Methodology for Analysis and Modeling of Energy Efficiency of Generating Companies]. Samara, Nauchno-tehnicheskii Tsentr, 2021, 277 pp. (In Russian). EDN: ZZZXNK.
9. Abramov A. P., Bessonov V. A., Nikiforov L. T., Sviridenko K. S. *Issledovanie dinamiki makroekonomicheskikh pokazatelei metodom proizvodstvennykh funktsii* [Study of the Dy-

- namics of Macroeconomic Indicators by the Production Functions Method]. Moscow, Computing Center of the USSR Academy of Sciences, 1987, 62 pp. (In Russian)
10. Zamkov O. O., Tolstopiatenko A. V., Cheremnykh Yu. N. *Matematicheskie metody v ekonomike* Mathematical Methods in Economics. Moscow, Moscow State Univ., 1997, 368 pp. (In Russian)
11. Zoteev V. E., Bashkinova E. V., Starokvasheva P. V. Mathematical modeling of the functioning of the energy system of the Samara region, In: *Perspektivnye informatsionnye tekhnologii (PIT 2020)*, Proceedings of the International Scientific and Technical Conference. Samara, Samar. Nauchn. Tsentr RAN, 2020, pp. 361–365 (In Russian). EDN: [KVSGXT](#).
12. Vuchkov I., Boyadjieva L., Solakov O. *Prikladnoi lineinyi regressionnyi analiz* [Applied Linear Regression Analysis]. Moscow, Finansy i Statistika, 1987, 238 pp. (In Russian)
13. Draper N. R., Smith H. *Applied Regression Analysis*, Wiley Series in Probability and Statistics. New York, John Wiley and Sons, 1998, xvii+706 pp. DOI: <https://doi.org/10.1002/9781118625590>.
14. Demidenko E. Z. *Lineinai i nelineinai regressii* [Linear and Nonlinear Regression]. Moscow, Finansy i Statistika, 1981, 302 pp. (In Russian)
15. Seber G. A. F., Lee A. J. *Linear Regression Analysis*, Wiley Series in Probability and Statistics. Hoboken, NJ, Wiley, 2003, xvi+557 pp.
16. Box G. E. P., Jenkins G. M.; Reinsel G. C., Ljung G. M. *Time Series Analysis. Forecasting and Control*, Wiley Series in Probability and Statistics. Hoboken, NJ, John Wiley and Sons, 2016, 712 pp.
17. Anderson T. W. *The Statistical Analysis of Time Series*, Wiley Classics Library. Chichester, John Wiley and Sons, 1994, xiv+704 pp.
18. Kendall M. G., Stuart A. *The Advanced Theory of Statistics*, vol. 3, Design and Analysis, and Time-Series. London, Charles Griffin, 1976, x+585 pp.
19. Otnes R. K., Enochson L. *Applied Time Series Analysis*, vol. 1, Basic Techniques. New York, John Wiley and Sons, 1978, xiv+449 pp.
20. Kashyap R. L., Ramachandra Rao A. *Dynamic Stochastic Models from Empirical Data*, Mathematics in Science and Engineering, vol. 122. New York, Academic Press, 1976, xvi+334 pp. DOI: [https://doi.org/10.1016/s0076-5392\(08\)x6016-3](https://doi.org/10.1016/s0076-5392(08)x6016-3).
21. Durbin J., Watson G. S. Testing for serial correlation in least squares regression: I, *Biometrika*, 1950, vol. 37, no. 3/4, pp. 409–428. DOI: <https://doi.org/10.2307/2332391>.
22. Granovsky V. A., Siraya T. N. *Metody obrabotki eksperimental'nykh dannykh pri izmereniiakh* [Methods of Processing Experimental Data in Measurements]. Leningrad, Energoatomizdat, 1990, 288 pp. (In Russian)
23. Zoteev V. E. A numerical method of nonlinear estimation based on difference equations, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2018, vol. 22, no. 4, pp. 669–701 (In Russian). EDN: [YSDYZN](#). DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1643>.