Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2024. Т. 28, № 4. С. 799–808
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu2092
EDN: UZAIUX

УДК 517.956.3

Матрица Римана для некоторых систем уравнений гиперболического типа высокого порядка

Ю. О. Яковлева

Самарский государственный технический университет,
Россия, 443100, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

Аннотация

Решение некоторых краевых задач для систем дифференциальных уравнений гиперболического типа может быть построено в явном виде в терминах матрицы Римана. В связи с этим актуален вопрос о построении матрицы Римана в явном виде для систем гиперболических уравнений высокого порядка.

Рассматривается система дифференциальных уравнений гиперболического типа третьего порядка от трех независимых переменных. Для указанной системы построена матрица Римана как решение специальной задачи Гурса. Кроме того, матрица Римана удовлетворяет интегральному уравнению Вольтерра. Матрица Римана выражена в явном виде через гипергеометрическую функцию матричного аргумента. Аналогично рассматривается система дифференциальных уравнений гиперболического типа четвертого порядка от четырех независимых переменных. Данные результаты обобщены для системы дифференциальных уравнений гиперболического типа порядка n, не содержащей производные порядка меньше n.

Ключевые слова: система дифференциальных уравнений гиперболического типа порядка n, матрица Римана, задача Гурса, гипергеометрическая функция матричного аргумента.

Получение: 13 мая 2024 г. / Исправление: 29 октября 2024 г. / Принятие: 1 ноября 2024 г. / Публикация онлайн: 25 декабря 2024 г.

Дифференциальные уравнения и математическая физика
Краткое сообщение

Образец для цитирования
Яковлева Ю. О. Матрица Римана для некоторых систем уравнений гиперболического типа высокого порядка // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2024. Т. 28, № 4. С. 799–808. EDN: UZAIUX. DOI: 10.14498/vsgtu2092.

Сведения об авторе
Юлия Олеговна Яковлева https://orcid.org/0000-0002-9839-3740
кандидат физико-математических наук, доцент; доцент; каф. высшей математики;
e-mail: julia.yakovleva@mail.ru

Введение. Известно, что краевые задачи для дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений в частных производных с некратными характеристиками могут быть решены методом Римана [1, гл. 1, п. 4°]. Метод Римана предполагает существование вспомогательной функции, так называемой функции Римана, обладающей известными свойствами [2–4]. Функция Римана играет фундаментальную роль в теории линейных уравнений гиперболического типа, и с ее помощью удается, как правило, записать решение задач Коши и Гурса в явном виде [5–8].

Решение краевых задач для ряда систем гиперболического типа также можно получить в явном виде с помощью матрицы Римана [9, 10]. Поэтому особый интерес представляют исследования, посвященные построению в явном виде матрицы Римана для некоторых видов систем дифференциальных уравнений. При построении матрицы Римана важно, что с помощью интерполяционного многочлена Лагранжа—Сильвестра [11, гл. 5, § 1] можно определить значение аналитической функции на множестве постоянных квадратных матриц. Если ограничиться множеством матриц, являющихся значениями некоторых аналитических функций от одной матрицы, то определение легко обобщается на случай аналитических функций многих комплексных переменных, что позволяет, в свою очередь, доопределять целый ряд специальных функций на матричные значения входящих в них параметров.

1. Построение матрицы Римана для системы дифференциальных уравнений гиперболического типа третьего и четвертого порядка. В пространстве $\mathbb{R}^3$ рассмотрим систему дифференциальных уравнений в частных производных, не содержащую производные порядка меньше третьего,

$$MU \equiv U_{x_1x_2x_3} + \Omega U = 0, \tag{1}$$

где $U(x_1, x_2, x_3)$ — искомая m-мерная вектор-функция, Ω — постоянная действительная $(m{\times}m)$-матрица.

Оператор $M^*V \equiv -V_{x_1x_2x_3} + V\Omega$, где $V(x_1, x_2, x_3, \xi_1, \xi_2, \xi_3)$ — квадратная матрица порядка m, является сопряженным оператором по Лагранжу для $MU \equiv U_{x_1x_2x_3} + \Omega U$.

Матрицей Римана $V = V(x_1, x_2, x_3, \xi_1, \xi_2, \xi_3)$ для системы уравнений (1) называется решение задачи

$$\begin{gathered}
M^*V = 0,\\
V(\xi_1, x_2, x_3, \xi_1, \xi_2, \xi_3) = E,\\
V(x_1, \xi_2, x_3, \xi_1, \xi_2, \xi_3) = E,\\
V(x_1, x_2, \xi_3, \xi_1, \xi_2, \xi_3) = E,
\end{gathered}$$

где (ξ_1, ξ_2, ξ_3) — произвольная точка пространства $\mathbb{R}^3$, E — единичная матрица порядка m.

Очевидно, что матрица Римана удовлетворяет интегральному уравнению Вольтерра [6], [7, с. 26]

$$V(x_1, x_2, x_3, \xi_1, \xi_2, \xi_3) - \int_{\xi_1}^{x_1}\int_{\xi_2}^{x_2}\int_{\xi_3}^{x_3} V(\alpha, \beta, \gamma)\Omega\, d\alpha d\beta d\gamma = E. \tag{2}$$

При этом следует отметить, что два определения матрицы Римана — посредством интегрального уравнения и как решение задачи Гурса для сопряженного уравнения эквивалентны.

Введем новые переменные $t = x_1 - \xi_1$, $s = x_2 - \xi_2$, $p = x_3 - \xi_3$. Тогда матрица Римана $V(t, s, p)$ удовлетворяет уравнению

$$V_{tsp} - V\Omega = 0 \tag{3}$$

и условиям

$$V(t, 0, 0) = E, \quad V(0, s, 0) = E, \quad V(0, 0, p) = E. \tag{4}$$

Решение задачи (3), (4) будем искать в следующем виде:

$$V = W(\sigma),$$

где $\sigma = tsp$.

Матричное уравнение $M^*V = 0$ при этом преобразуется к виду

$$\sigma^2 W'''(\sigma) + 3\sigma W'' + W' - W\Omega = 0 \tag{5}$$

при $W(0) = E$.

Пусть $\delta \equiv \sigma \dfrac{d}{d\sigma}$, тогда $\sigma^2 \dfrac{d^2}{d\sigma^2} \equiv \delta^2 - \delta$, откуда

$$\sigma^3 \frac{d^3}{d\sigma^3} \equiv \delta^3 - 3\delta^2 + 2\delta. \tag{6}$$

Подставляя (6) в (5), получим матричное уравнение

$$\delta^3 W = \sigma W\Omega. \tag{7}$$

Ищем решение матричного уравнения в виде $W(\sigma) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} A_k \sigma^k$, где A_k — постоянные квадратные матрицы порядка m.

Так как

$$k^3 A_k = A_{k-1}, \quad A_0 = E,$$

используя символ Похгаммера, получим следующую формулу:

$$A_k = \frac{1}{(1)_k (1)_k k!} \Omega^k.$$

Следовательно,

$$W(\sigma) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(1)_k (1)_k k!} \sigma^k \Omega^k.$$

Пользуясь определением обобщенной гипергеометрической функции [13, гл. 4], получим, что матрица Римана для системы уравнений (1) имеет вид

$$V(x_1, x_2, x_3, \xi_1, \xi_2, \xi_3) = {}_0F_2\big(1; 1; (x_1 - \xi_1)(x_2 - \xi_2)(x_3 - \xi_3)\Omega\big), \tag{8}$$

где ${}_0F_2\big(1;1;(x_1-\xi_1)(x_2-\xi_2)(x_3-\xi_3)\Omega\big)$ — обобщенная гипергеометрическая функция матричного аргумента.

Для системы дифференциальных уравнений гиперболического типа четвертого порядка матрица Римана, выраженная через обобщенную гипергеометрическую функцию, имеет аналогичный вид.

Действительно, для системы дифференциальных уравнений в частных производных, не содержащей производные порядка меньше четвертого,

$$MU \equiv U_{x_1x_2x_3x_4} + \Omega U = 0, \tag{9}$$

где $U(x_1,x_2,x_3,x_4)$ — искомая m-мерная вектор-функция, x_1, x_2, x_3, $x_4 \in \mathbb{R}$, Ω — постоянная действительная $(m{\times}m)$-матрица, матрица Римана может быть найдена как решение специальной задачи Гурса:

$$\begin{gathered}
M^*V = 0,\\
V(\xi_1,x_2,x_3,x_4,\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4) = E,\\
V(x_1,\xi_2,x_3,x_4,\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4) = E,\\
V(x_1,x_2,\xi_3,x_4,\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4) = E,\\
V(x_1,x_2,x_3,\xi_4,\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4) = E,
\end{gathered}$$

где x_1, x_2, x_3, $x_4 \in \mathbb{R}$, E — единичная матрица порядка m.

Также матрица Римана для системы (9) удовлетворяет следующему интегральному уравнению:

$$V(x_1,x_2,x_3,x_4;\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4) + \int_{\xi_1}^{x_1}\int_{\xi_2}^{x_2}\int_{\xi_3}^{x_3}\int_{\xi_4}^{x_4} V(\alpha,\beta,\gamma,\sigma)\Omega\, d\alpha\, d\beta\, d\gamma\, d\sigma = E.$$

Выполняя преобразования и построения, аналогичные тем, что были сделаны для системы третьего порядка (1), легко получить матрицу Римана для системы дифференциальных уравнений в частных производных, не содержащей производные порядка меньше четвертого (9), в следующем виде:

$$\begin{aligned}
&V(x_1,x_2,x_3,x_4;\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4) =\\
&\qquad\qquad = {}_0F_3\big(1;1;1;-(x_1-\xi_1)(x_2-\xi_2)(x_3-\xi_3)(x_4-\xi_4)\Omega\big),
\end{aligned}$$

где ${}_0F_3\big(1;1;1;-(x_1-\xi_1)(x_2-\xi_2)(x_3-\xi_3)(x_4-\xi_4)\Omega\big)$ — обобщенная гипергеометрическая функция.

В работах [9, 10] функция Римана определяется как решение специальной задачи Гурса и доказаны ее существование и единственность. Опираясь на представление матрицы Римана как решения интегрального уравнения Вольтерра, можно утверждать, что матрица Римана существует и единственна в классе непрерывных матриц.

2. Задача Гурса для системы дифференциальных уравнений гиперболического типа третьего порядка. Для системы уравнений

$$MU \equiv U_{x_1x_2x_3} + \Omega U = 0$$

рассмотрим задачу Гурса.

Задача Гурса. *В односвязной области* $\Delta = \{(x_1, x_2, x_3) : 0 < x_1 < 1, 0 < x_2 < 1, 0 < x_3 < 1\}$ *независимых переменных* (x_1, x_2, x_3) *найти регулярное решение* $U(x_1, x_2, x_3)$ *системы уравнений* (1), *удовлетворяющее условиям*

$$\begin{aligned} U(0, x_2, x_3) &= \Lambda_1(x_2, x_3), \quad 0 \leqslant x_2 \leqslant 1,\ 0 \leqslant x_3 \leqslant 1, \\ U(x_1, 0, x_3) &= \Lambda_2(x_1, x_3), \quad 0 \leqslant x_1 \leqslant 1,\ 0 \leqslant x_3 \leqslant 1, \\ U(x_1, x_2, 0) &= \Lambda_3(x_1, x_2), \quad 0 \leqslant x_1 \leqslant 1,\ 0 \leqslant x_2 \leqslant 1, \end{aligned} \tag{10}$$

где $\Lambda_1(x_2, x_3)$, $\Lambda_2(x_1, x_3)$, $\Lambda_3(x_1, x_2)$ — *заданные вектор-функции.*

Матрица Римана $V = V(x_1, x_2, x_3, \xi_1, \xi_2, \xi_3)$ удовлетворяет интегральному уравнению Вольтерра (2). Будем писать $V = R(x_1, x_2, x_3, \xi_1, \xi_2, \xi_3)$ [7, с. 27], тогда справедливо тождество

$$\begin{aligned} (RU)_{x_1x_2x_3} = RMU + (R_{x_3}U)_{x_1x_2} + (R_{x_1}U)_{x_2x_3} + (R_{x_2}U)_{x_1x_3} - \\ - (R_{x_2x_3}U)_{x_1} - (R_{x_1x_3}U)_{x_2} - (R_{x_1x_2}U)_{x_3}. \end{aligned}$$

При этом

$$R_{x_3}|_{x_1=\xi_1, x_2=\xi_2} = 0, \quad R_{x_1x_2}|_{x_3=\xi_3} = 0, \quad R_{x_2x_3}|_{x_1=\xi_1} = 0, \quad R_{x_1x_3}|_{x_2=\xi_2} = 0,$$

где $R = R(x_1, x_2, x_3, \xi_1, \xi_2, \xi_3)$.

Формула решения задачи Гурса (10) принимает вид [7, с. 28]

$$\begin{aligned} U(x_1, x_2, x_3) &= R(x_1, x_2, 0)\Lambda_3(x_1, x_2) + R(x_1, 0, x_3)\Lambda_2(x_1, x_3) + \\ &+ R(0, x_2, x_3)\Lambda_3(x_2, x_3) - R(x_1, 0, 0)\Lambda_3(x_1, 0) - R(0, x_2, 0)\Lambda_3(0, x_2) - \\ &- R(0, 0, x_3)\Lambda_2(0, x_3) + R(0, 0, 0)\Lambda_1(0, 0) + \\ &+ \int_0^{x_1} \big(R_{x_1}(\alpha, 0, 0)\Lambda_3(\alpha, 0) - R_{x_1}(\alpha, x_2, 0)\Lambda_3(\alpha, x_2) - R_{x_1}(\alpha, 0, x_3)\Lambda_2(\alpha, x_3)\big)d\alpha + \\ &+ \int_0^{x_2} \big(R_{x_2}(0, \beta, 0)\Lambda_3(0, \beta) - R_{x_2}(x_1, \beta, 0)\Lambda_3(x_1, \beta) - R_{x_2}(0, \beta, x_3)\Lambda_1(\beta, x_3)\big)d\beta + \\ &+ \int_0^{x_3} \big(R_{x_3}(0, 0, \gamma)\Lambda_2(0, \gamma) - R_{x_3}(x_1, 0, \gamma)\Lambda_2(x_1, \gamma) - R_{x_3}(0, x_2, \gamma)\Lambda_1(x_2, \gamma)\big)d\gamma. \end{aligned}$$

Поскольку матрица Римана для системы (1) получена в явном виде (8), регулярное решение задачи Гурса (10) также записывается в явном виде через гипергеометрическую функцию матричного аргумента.

3. Матрица Римана для системы дифференциальных уравнений гиперболического типа порядка n. Построим матрицу Римана для системы дифференциальных уравнений в частных производных, не содержащей производные порядка меньше n,

$$MU \equiv U_{x_1x_2x_3\cdots x_n} + \Omega U = 0, \tag{11}$$

где $U(x_1, x_2, x_3, \ldots x_n)$ — искомая m-мерная вектор-функция, x_1, x_2, x_3, …, $x_n \in \mathbb{R}$, Ω — постоянная действительная $(m\times m)$-матрица.

Для системы (11) сопряженным по Лагранжу оператором является оператор

$$M^*V \equiv (-1)^n V_{x_1x_2x_3\cdots x_n} + V\Omega,$$

где $V(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n; \xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n)$ — квадратная матрица порядка m.

Матрица Римана для системы (11) удовлетворяет следующей задаче:

$$\begin{gathered} M^*V = 0, \\ V(\xi_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n)|_{x_1=\xi_1} = E, \\ V(x_1, \xi_2, x_3, \ldots, x_n, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n)|_{x_2=\xi_2} = E, \\ V(x_1, x_2, \xi_3, \ldots, x_n, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n)|_{x_3=\xi_3} = E, \\ \ldots, \\ V(x_1, x_2, x_3, \ldots, \xi_n, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n)|_{x_n=\xi_n} = E, \end{gathered}$$

где $x_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3, \ldots n$, E — единичная матрица порядка m.

Ясно, что матрица Римана удовлетворяет интегральному уравнению Вольтерра:

$$\begin{gathered} V(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n) + \\ + (-1)^n \int_{\xi_1}^{x_1} \int_{\xi_2}^{x_2} \int_{\xi_3}^{x_3} \cdots \int_{\xi_n}^{x_n} V(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n) \Omega d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3 \cdots d\alpha_n = E. \end{gathered}$$

Следовательно, матрица Римана существует и единственна в классе непрерывных матриц.

Пусть $t_1 = x_1 - \xi_1$, $t_2 = x_2 - \xi_2$, $\ldots$, $t_n = x_4 - \xi_n$, тогда матрицей Римана $V(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ является решение матричного уравнения

$$(-1)^n V_{t_1, t_2, \ldots, t_n} + V\Omega = 0, \tag{12}$$

удовлетворяющее условиям

$$V(t_1, 0, \ldots, 0) = E, \quad V(0, t_2, \ldots, 0) = E, \quad \ldots, \quad V(0, 0, \ldots, t_n) = E. \tag{13}$$

Тогда решение задачи (12), (13) можно найти в виде

$$V = W(\sigma),$$

где $\sigma = t_1 t_2 \cdots t_n$.

Аналогично предыдущему пункту получим

$$k^n A_k = (-1)^{n-1} A_{k-1}, \quad A_0 = E.$$

Справедливы формулы

$$A_k = \frac{(-1)^k}{(1)_k^{n-1} k!} \Omega^k,$$

если n — четное число, и

$$A_k = \frac{1}{(1)_k^{n-1} k!} \Omega^k,$$

если n — нечетное число.

В итоге получаем, что

$$W(\sigma) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(1)_k^{n-1} k!} \sigma^k \Omega^k,$$

если n — четное число, и

$$W(\sigma) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(1)_k^{n-1} k!} \sigma^k \Omega^k,$$

если n — нечетное число.

Таким образом, матрица Римана для системы уравнений (11) имеет вид

$$V(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n) = \\ = {}_0F_{n-1}\big(1; 1; 1; \dots; 1; (-1)^{n-1}(x_1 - \xi_1)(x_2 - \xi_2)(x_3 - \xi_3) \cdots (x_n - \xi_n)\Omega\big),$$

где ${}_0F_{n-1}\big(1; 1; 1; \dots; 1; (-1)^{n-1}(x_1 - \xi_1)(x_2 - \xi_2)(x_3 - \xi_3) \cdots (x_n - \xi_n)\Omega\big)$ — обобщенная гипергеометрическая функция матричного аргумента.

Существование матрицы Римана для системы дифференциальных уравнений гиперболического типа порядка n (11) доказано конструктивным путем. Единственность матрицы Римана как функции матричного аргумента следует из единственности функции Римана, определенной как решение специальной задачи Гурса [2, 9]. И, опираясь на представление матрицы Римана как решения интегрального уравнения Вольтерра, можно утверждать, что матрица Римана существует и единственна в классе непрерывных матриц.

Заключение. Таким образом, в данной работе для систем гиперболических уравнений высокого порядка построены матрицы Римана как функции матричного аргумента в терминах обобщенных гипергеометрических функций. Матрицы Римана построены как решение специальной задачи Гурса. Особый интерес представляет тот факт, что матрицы получены в явном виде, что позволяет с их помощью найти решение краевых задач для систем дифференциальных уравнений гиперболического типа высокого порядка также в явном виде. В качестве примера приведена задача Гурса для системы гиперболических уравнений третьего порядка, регулярное решение которой получено в явном виде.

Конкурирующие интересы. Конкурирующих интересов не имею.

Авторская ответственность. Я несу полную ответственность за предоставление окончательной версии рукописи в печать. Окончательная версия рукописи мною одобрена.

Финансирование. Исследование выполнялось без финансирования.

Благодарность. Автор благодарен рецензентам за тщательное прочтение статьи и ценные предложения и комментарии.

Библиографический список

1. Бицадзе А. В. *Некоторые классы уравнений в частных производных.* М.: Наука, 1981. 448 с.
2. Солдатов А. П., Шхануков М. Х. Краевые задачи с общим нелокальным условием А. А. Самарского для псевдопараболических уравнений высокого порядка // *Докл. АН СССР*, 1987. Т. 297, № 3. С. 547–552. EDN: QYOJCM.
3. Зикиров О. С. Локальные и нелокальные краевые задачи для гиперболических уравнений третьего порядка // *Соврем. мат. прилож.*, 2011. Т. 68. С. 101–120.
4. Zeitsch P. J. On the Riemann function // *Mathematics*, 2018. vol. 6, no. 12, 316. DOI: https://doi.org/10.3390/math6120316.

5. Жегалов В. И., Миронов А. Н. О задачах Коши для двух уравнений в частных производных // *Изв. вузов. Матем.*, 2002. №5. С. 23–30. EDN: HQUCVD.
6. Миронов А. Н., Миронова Л. Б., Яковлева Ю. О. Метод Римана для уравнений с доминирующей частной производной (обзор) // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2021. Т. 25, №2. С. 207–240. EDN: FPSRYB. DOI: https://doi.org/10.14498/vsgtu1853.
7. Жегалов В. И., Миронов А. Н. *Дифференциальные уравнения со старшими частными производными*. Казань: Казанск. матем. общ-во, 2001. 226 с. EDN: XPWCQP.
8. Scott E. J. The Riemann function for a class of equations of the form $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \nu(x)\mu(y)v = 0$ // *Ganita*, 1975. vol. 26, no. 1. pp. 19–28.
9. Андреев А. А., Яковлева Ю. О. Задача типа Гурса для гиперболического уравнения и для одной системы гиперболических уравнений третьего порядка // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2019. Т. 23, №1. С. 186–194. EDN: JKPBDE. DOI: https://doi.org/10.14498/vsgtu1666.
10. Яковлева Ю. О., Тарасенко А. В. Решение задачи Коши для системы уравнений гиперболического типа четвертого порядка методом Римана // *Вестн. Самар. ун-та. Естественнон. сер.*, 2019. Т. 25, №3. С. 33–38. EDN: EANDKS. DOI: https://doi.org/10.18287/2541-7525-2019-25-3-33-38.
11. Гантмахер Ф. Р. *Теория матриц*. М.: Наука, 1988. 549 с.
12. Volterra V. *Theory of Functionals and of Integral and Integro-Differential Equations*. New York: Dover Publ., 1959. 226 pp.
13. Бейтмен Г., Эрдейи А. *Высшие трансцендентные функции*. Т. 1: Гипергеомегрическая функция. Функции Лежандра. М.: Наука, 1973. 296 с.

Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2024, vol. 28, no. 4, pp. 799–808
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu2092

MSC: 35K70, 35K35

The Riemann matrix for some systems of the differential hyperbolic-type equations of the high order

J. O. Yakovleva

Samara State Technical University,
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russian Federation.

Abstract

Solutions to some boundary value problems for systems of hyperbolic partial differential equations can be constructed explicitly in terms of the Riemann matrix. In this regard, the question of explicitly constructing the Riemann matrix for high-order hyperbolic systems of equations is relevant.

We consider a system of third-order hyperbolic partial differential equations with three independent variables. For the specified system, the Riemann matrix is constructed as a solution to a special Goursat problem. Furthermore, the Riemann matrix satisfies a Volterra integral equation. The Riemann matrix is expressed explicitly in terms of a hypergeometric function of a matrix argument. Similarly, a system of fourth-order hyperbolic partial differential equations with four independent variables is considered. These results are generalized for a system of hyperbolic partial differential equations of order n that does not contain derivatives of order less than n.

Keywords: system of n-th order hyperbolic PDEs, Riemann matrix, Goursat problem, hypergeometrical function of matrix argument.

Received: 13th May, 2024 / Revised: 29th October, 2024 /
Accepted: 1st November, 2024 / First online: 25th December, 2024

Competing interests. I declare that I have no competing interests.

Authors' contributions and responsibilities. I bear full responsibility for submitting the final version of the manuscript for publication. I have approved the final version of the manuscript.

Funding. This research was conducted without any funding.

Differential Equations and Mathematical Physics
Short Communication

Please cite this article in press as:
Yakovleva J. O. The Riemann matrix for some systems of the differential hyperbolic-type equations of the high order, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2024, vol. 28, no. 4, pp. 799–808. EDN: UZAIUX. DOI: 10.14498/vsgtu2092 (In Russian).

Author's Details:
Julia O. Yakovleva https://orcid.org/0000-0002-9839-3740
Cand. Phys. & Math. Sci., Associate Professor; Associate Professor; Dept. of Higher Mathematics; e-mail: julia.yakovleva@mail.ru

Acknowledgments. The author is grateful to the reviewers for their thorough reading of the article and for their valuable suggestions and comments.

References

1. Bitsadze A. V. *Some Classes of Partial Differential Equations*, Advanced Studies in Contemporary Mathematics, vol. 4. New York, Gordon & Breach Science Publ., 1988, xi+504 pp.
2. Soldatov A. P., Shkhanukov M. Kh. Boundary value problems with Samarskiy general nonlocal condition for higher-order pseudoparabolic equations, *Soviet Math. Dokl.*, 1988, vol. 36, no. 3, pp. 507–511.
3. Zikirov O. S. Local and nonlocal boundary-value problems for third-order hyperbolic equations, *J. Math. Sci.*, 2011, vol. 175, no. 1, pp. 104–123. EDN: RVKAZX. DOI: https://doi.org/10.1007/s10958-011-0337-3.
4. Zeitsch P. J. On the Riemann function, *Mathematics*, 2018, vol. 6, no. 12, 316. DOI: https://doi.org/10.3390/math6120316.
5. Zhegalov V. I., Mironov A. N. Cauchy problems for two partial differential equations, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2002, vol. 46, no. 5, pp. 21–28.
6. Mironov A. N., Mironova L. B., Yakovleva J. O. The Riemann method for equations with a dominant partial derivative (A Review), *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2021, vol. 25, no. 2, pp. 207–240 (In Russian). EDN: FPSRYB. DOI: https://doi.org/10.14498/vsgtu1853.
7. Zhegalov V. I., Mironov A. N. *Differentsial'nye uravneniia so starshimi chastnymi proizvodnymi* [Differential Equations with Higher Partial Derivatives]. Kazan, Kazan Math. Society, 2001, 226 pp. (In Russian). EDN: XPWCQP.
8. Scott E. J. The Riemann function for a class of equations of the form $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \nu(x)\mu(y)v = 0$, *Ganita*, 1975, vol. 26, no. 1, pp. 19–28.
9. Andreev A. A., Yakovleva J. O. The Goursat-type problem for a hyperbolic equation and system of third order hyperbolic equations, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2019, vol. 23, no. 1, pp. 186–194 (In Russian). EDN: JKPBDE. DOI: https://doi.org/10.14498/vsgtu1666.
10. Yakovleva J. O., Tarasenko A. V. The solution of Cauchy problem for thehyperbolic differential equations of the fourth order by the Riman method, *Vestn. Samar. Univ. Estestvennon. Ser.* [Vestnik of Samara University. Natural Science Series], vol. 25, no. 3, pp. 33–38 (In Russian). EDN: EANDKS. DOI: https://doi.org/10.18287/2541-7525-2019-25-3-33-38.
11. Gantmakher F. R. *Teoriia matrits* [Theory of Matrices]. Moscow, Nauka, 1988, 549 pp. (In Russian)
12. Volterra V. *Theory of Functionals and of Integral and Integro-Differential Equations*. New York, Dover Publ., 1959, 226 pp.
13. Erdélyi A., Magnus W., Oberhettinger F., Tricomi F. G. *Higher transcendental functions*, vol. I, ed. H. Bateman. New York – Toronto – London, McGraw-Hill Book Co, 1953, 302 pp.