



УДК 519.652

Оптимизация погрешности экспоненциально-тригонометрической интерполяционной формулы

Х. М. Шадиметов^{1,2}, А. К. Болтаев^{2,3}

¹ Ташкентский государственный транспортный университет,
Узбекистан, 100167, Ташкент, ул. Темирийулчилар, 1.

² Институт математики имени В.И. Романовского Академии наук Узбекистана,
Узбекистан, 100174, Ташкент, ул. Университетская, 9.

³ Международный университет Нордик,
Узбекистан, 100043, Ташкент, ул. Бунедкор, 8/2.

Аннотация

В инженерной геодезии облака точек, полученные с помощью методов площадных измерений, таких как наземное лазерное сканирование или фотограмметрия, должны быть аппроксимированы кривой или поверхностью, которую можно описать с помощью непрерывной математической функции, часто используя сплайны и оптимальные интерполяционные формулы.

Работа посвящена построению оптимальной интерполяционной формулы, точной на экспоненциально-тригонометрических функциях в гильбертовом пространстве. Оптимальная формула интерполяции получается минимизацией нормы функционала погрешности по коэффициентам. В статье доказаны существование и единственность оптимальной интерполяционной формулы, а также получены явные аналитические выражения для оптимальных коэффициентов интерполяционной формулы. С помощью построенной оптимальной интерполяционной формулы интерполированы конкретные функции и проведено сравнение с известными результатами других авторов.

Ключевые слова: интерполяционная формула, погрешность формулы, оптимальные коэффициенты, метод Соболева.

Получение: 15 мая 2024 г. / Исправление: 16 ноября 2024 г. /

Принятие: 19 ноября 2024 г. / Публикация онлайн: 26 декабря 2024 г.

Дифференциальные уравнения и математическая физика

Научная статья

© Коллектив авторов, 2024

© СамГТУ, 2024 (составление, дизайн, макет)

 Контент публикуется на условиях лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru) (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Образец для цитирования

Шадиметов Х. М., Болтаев А. К. Оптимизация погрешности экспоненциально-тригонометрической интерполяционной формулы // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2024. Т. 28, № 4. С. 665–681. EDN: CJETPO. DOI: [10.14498/vsgtu2094](https://doi.org/10.14498/vsgtu2094).

Сведения об авторах

Холмат Махкамбаевич Шадиметов  <https://orcid.org/0000-0002-4183-6184>

доктор физико-математических наук, профессор; заведующий кафедрой; каф. компьютерных наук и графики¹; главный научный сотрудник; лаб. вычислительной математики²; e-mail: kholmatshadimetov@mail.ru

Азиз Кузиевич Болтаев  <https://orcid.org/0000-0002-8329-4440>

кандидат физико-математических наук, доцент; старший научный сотрудник; лаб. вычислительной математики²; доцент; каф. экономики и управления бизнесом³; e-mail: aziz_boltayev@mail.ru

1. Введение. В различных областях науки, техники, технологий и компьютерного геометрического проектирования подгонка данных играет важную роль. Интерполяция и аппроксимация являются двумя наиболее распространенными методами подгонки. При интерполяции точки данных используются для построения интерполирующей кривой, проходящей через них. В отличие от этого аппроксимация строит кривую, которая не обязательно проходит через точки данных, но минимизирует отклонение от них. Если форма базовой функции данных сложная, оценить ее с помощью одного полинома затруднительно. В таких случаях предпочтительнее использовать кусочные функции, известные как сплайны. Благодаря простоте построения и способности аппроксимировать сложные формы сплайны являются одними из наиболее полезных инструментов для интерполяции и аппроксимации.

Сплайны играют ключевую роль в прикладной математике благодаря своей гибкости, позволяющей эффективно приближать даже негладкие функции, заданные как явно, так и неявно, например, через дифференциальные уравнения [1–5]. Для численного решения дифференциальных уравнений широко применяются разностные схемы [6]. Узлы и коэффициенты оптимальных интерполяционных формул имеют важное значение для построения оптимальных разностных формул в гильбертовых пространствах. Кроме того, для наилучшего приближения решений дифференциальных уравнений дробного порядка используются оптимальные интерполяционные формулы и их оценки. Решения таких уравнений ищутся в гильбертовых пространствах и находятся преимущественно численными методами, включая различные типы аппроксимации и интерполяции. Интерполяционные формулы для аппроксимации функций могут быть построены как классическими, так и вариационными методами (см. [7]).

1.1. Классические интерполяционные формулы. Общая задача интерполяции заключается в нахождении функции $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, которая для заданных $n+1$ точек данных $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$, где $x_0 < x_1 < \dots < x_n$, удовлетворяет условию интерполяции:

$$f(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Выбор подходящей функции f зависит от свойств данных, таких как их гладкость или периодичность, а также от вычислительных аспектов, включая затраты на определение коэффициентов и численную устойчивость получаемой системы уравнений. Наиболее часто используемыми функциями для интерполяции являются полиномы, тригонометрические, экспоненциальные, логарифмические и рациональные функции.

1.2. Вариационные методы для построения интерполяционных формул. В последние годы были разработаны новые методы аппроксимации, включая сплайны, которые доказали свою эффективность как в теоретических исследованиях, так и в практических приложениях. Теория сплайнов, основанная на вариационных методах, активно изучается и развивается [8–11]. Сплайны были впервые предложены И. Шенбергом в 1946 году для сглаживания табличных данных [12]. Ниже приведено определение полиномиальных сплайнов.

1.2.1. Полиномиальные сплайны. Обозначим через $L_2^{(m)} = L_2^{(m)}[a, b]$ гильбертово пространство классов вещественных функций, интегрируемых с

квадратом на $[a, b]$ и имеющих производные порядка m , $m \geq 1$. Функции в этом пространстве отличаются полиномом степени $(m-1)$, а норма функций определяется формулой [13]:

$$\|f\|_{L_2^{(m)}} = \left(\int_a^b (f^{(m)}(x))^2 dx \right)^{1/2}.$$

Обозначим через S пространство вещественных функций s , определенных на интервале $[a, b]$ и удовлетворяющих следующим условиям:

- (i) s — полином степени $2m-1$ на каждом интервале (x_i, x_{i+1}) , $i = \overline{1, N-1}$;
- (ii) s — полином степени $m-1$ на $[a, x_1]$ и $(x_N, b]$;
- (iii) $s^{(2m-2)}$ — непрерывная функция.

Такие сплайны имеют следующий общий вид (см., например, [14–16]):

$$s(x) = \sum_{i=1}^N d_i \frac{(x - x_i)_+^{2m-1}}{(2m-1)!} + \sum_{j=0}^{m-1} \alpha_j x^j,$$

где

$$x_+^\alpha = \begin{cases} x^\alpha, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

а коэффициенты d_i удовлетворяют условиям $\sum_{i=1}^N d_i x_i^k = 0$, $k = 0, 1, \dots, m-1$. Учитывая условия интерполяции, интерполяционный сплайн $s(x)$ определяется следующей системой уравнений:

$$s(x_{i'}) = \sum_{i=1}^N d_i \frac{(x_{i'} - x_i)_+^{2m-1}}{(2m-1)!} + \sum_{j=0}^{m-1} \alpha_j x_{i'}^j = y_{i'}, \quad i' = 1, \dots, N, \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^N d_i x_i^k = 0, \quad k = 0, 1, \dots, m-1. \quad (2)$$

В случае $m = 1$ решением этой системы является сплайн первой степени (прямая линия), а в случае $m = 2$ — кубический сплайн.

1.2.2. Задача минимальной нормы. Пусть даны N фиксированные различные точки отрезка $[a, b]$: $a < x_1 < x_2 < \dots < x_N < b$, где $N \geq m$, и N вещественных чисел y_i , $i = 1, \dots, N$. Требуется среди всех функций $f \in L_2^{(m)}$, удовлетворяющих условиям интерполяции $f(x_i) = y_i$, $i = 1, 2, \dots, N$, найти функцию, для которой функционал

$$\ell_m(f) = \int_a^b (f^{(m)}(x))^2 dx$$

принимает наименьшее значение. Эта задача заключается в аппроксимации данных полиномиальным сплайном степени $2m-1$ в пространстве $L_2^{(m)}$ для получения более гладкой кривой, проходящей через заданные точки.

Холладей в работе [17] решил эту задачу для $m = 2$ в 1957 году, доказав, что кубический сплайн Шенберга (см. [18]) является решением. Позже Де Бур

в своей работе [19] обобщил этот результат для произвольного m , показав, что решение представляет собой полиномиальный сплайн степени $2m - 1$ в $L_2^{(m)}$.

В работе [20] явное решение задачи минимальной нормы в пространстве $L_2^{(m)}$ было найдено с помощью дискретного аналога дифференциального оператора $2m$ -го порядка. Решения системы (1), (2) позволяют строить натуральные сплайны степени $2m - 1$ для любого натурального числа m .

В статьях [21–26] рассматривается задача минимальной нормы в различных гильбертовых пространствах.

Недавно в [27] авторы построили новую оптимальную интерполяционную формулу, используя дискретный аналог оператора $\frac{d^6}{dx^6} - 1$ в гильбертовом пространстве $W_2^{(3,0)}(0, 1)$.

2. Постановка задачи. Впервые оптимальные интерполяционные формулы изучил С. Л. Соболев (см. [28]). Рассмотрим одну из таких формул:

$$\varphi(x) \cong \sum_{\beta=0}^N C_{\beta}(x)\varphi(x_{\beta}), \quad (3)$$

где $C_{\beta}(x)$ и x_{β} , $x_{\beta} \in [0, 1]$ называются *коэффициентами* и *узлами* интерполяционной формулы (3), а φ является элементом класса $W_2^{(4,0)}(0, 1)$. Этот класс функций определяется следующим образом:

$$W_2^{(4,0)}(0, 1) = \{\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \mid \varphi^{(3)} \text{ абсолютно непрерывна и } \varphi^{(4)} \in L_2(0, 1)\}.$$

Класс функций $W_2^{(4,0)}(0, 1)$ со скалярным произведением

$$\langle \varphi, \psi \rangle_{W_2^{(4,0)}} = \int_0^1 (\varphi^{(4)}(x) + \varphi(x))(\psi^{(4)}(x) + \psi(x))dx \quad (4)$$

является гильбертовым пространством, если отождествлять функции, отличающиеся на решение уравнения

$$\varphi^{(4)}(x) + \varphi(x) = 0.$$

Следовательно, $W_2^{(4,0)}$ — гильбертово пространство, снабженное полунормой

$$\|\varphi\|_{W_2^{(4,0)}} = \left\{ \int_0^1 [\varphi^{(4)}(x) + \varphi(x)]^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}},$$

соответствующей скалярному произведению (4).

Погрешность интерполяционной формулы (3) определяется как разность между функцией и ее интерполяционной суммой. Значение этой погрешности в точке $z \in [0, 1]$ выражается следующим образом:

$$(\ell, \varphi) = \varphi(z) - \sum_{\beta=0}^N C_{\beta}(z)\varphi(x_{\beta}), \quad (5)$$

где

$$\ell(x, z) = \delta(x - z) - \sum_{\beta=0}^N C_{\beta}(z) \delta(x - x_{\beta}) \quad (6)$$

является функционалом погрешности интерполяционной формулы (3) и принадлежит сопряженному пространству $W_2^{(4,0)*}$. Здесь $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака. Для удобства далее будем обозначать $\ell(x, z)$ через $\ell(x)$.

Согласно неравенству Коши–Шварца, абсолютная величина погрешности (5) оценивается следующим образом:

$$|(\ell, \varphi)| \leq \|\varphi\|_{W_2^{(4,0)}} \cdot \|\ell\|_{W_2^{(4,0)*}},$$

где

$$\|\ell\|_{W_2^{(4,0)*}} = \sup_{\varphi, \|\varphi\| \neq 0} \frac{|(\ell, \varphi)|}{\|\varphi\|_{W_2^{(4,0)}}}.$$

Таким образом, для оценки погрешности интерполяционной формулы (3) по функциям из пространства $W_2^{(4,0)}$ требуется вычисление величины

$$\|\ell\|_{W_2^{(4,0)*}}^{\circ} = \inf_{C_{\beta}(z)} \|\ell\|_{W_2^{(4,0)*}}, \quad (7)$$

т.е. нахождение минимума (7) функционала погрешности $\ell(x)$ по коэффициентам $C_{\beta}(z)$ при фиксированных узлах x_{β} .

Эта задача состоит из двух частей: вычисление нормы функционала погрешности (6) в пространстве $W_2^{(4,0)*}$, а затем нахождение минимума нормы (7) по коэффициентам $C_{\beta}(z)$ для фиксированных узлов x_{β} .

Одной из основных целей данной работы является исследование задачи о построении оптимальных интерполяционных формул вида (3) в пространстве $W_2^{(4,0)}$ методом Соболева. Метод Соболева является одним из алгоритмов для построения оптимальных квадратурных и кубатурных формул в пространстве $L_2^m(\mathbb{R}^N)$ [13, 28]. В данной работе мы разрабатываем аналогичный метод для построения оптимальных интерполяционных формул вида (3) в пространстве $W_2^{(4,0)}$. В результате мы получаем оптимальную интерполяционную формулу, которая точна на экспоненциально-тригонометрических функциях.

3. Норма функционала погрешности. Для нахождения нормы функционала погрешности (6) интерполяционной формулы (3) мы будем использовать экстремальную функцию этого функционала.

Функция ψ_{ℓ} , для которой выполняется равенство

$$(\ell, \psi_{\ell}) = \|\ell\|_{W_2^{(4,0)*}} \cdot \|\psi_{\ell}\|_{W_2^{(4,0)}}, \quad (8)$$

называется экстремальной функцией функционала погрешности ℓ [13, 28].

Поскольку $W_2^{(4,0)}$ — гильбертово пространство, по теореме Рисса об общем виде линейного непрерывного функционала в гильбертовых пространствах

для функционала погрешности $\ell \in W_2^{(4,0)*}$ существует единственная функция $\psi_\ell \in W_2^{(4,0)}$ такая, что для любой функции $\varphi \in W_2^{(4,0)}$ выполняется равенство

$$(\ell, \varphi) = \langle \psi_\ell, \varphi \rangle, \quad (9)$$

причем $\|\ell\|_{W_2^{(4,0)*}} = \|\psi_\ell\|_{W_2^{(4,0)}}$. Здесь $\langle \psi_\ell, \varphi \rangle$ обозначает скалярное произведение функций ψ_ℓ и φ в пространстве $W_2^{(4,0)}$.

Отсюда видно, что решение ψ_ℓ уравнения (9) удовлетворяет уравнению (8) и является экстремальной функцией. Кроме того, из (9) следует, что функционал погрешности ℓ удовлетворяет следующим равенствам:

$$\left(\ell, e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x} \cos \frac{\sqrt{2}}{2}x\right) = 0, \quad \left(\ell, e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x} \sin \frac{\sqrt{2}}{2}x\right) = 0, \quad (10)$$

$$\left(\ell, e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}x} \cos \frac{\sqrt{2}}{2}x\right) = 0, \quad \left(\ell, e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}x} \sin \frac{\sqrt{2}}{2}x\right) = 0. \quad (11)$$

Равенства (10) и (11) означают, что наша интерполяционная формула точна для функций $e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x} \cos \frac{\sqrt{2}}{2}x$, $e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x} \sin \frac{\sqrt{2}}{2}x$, $e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}x} \cos \frac{\sqrt{2}}{2}x$, $e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}x} \sin \frac{\sqrt{2}}{2}x$.

Уравнение (9) решено в работе [29], и для экстремальной функции ψ_ℓ при $m = 4$ справедливо следующее выражение:

$$\psi_\ell(x) = (\ell * G_4)(x) + Y_4(x), \quad (12)$$

где

$$G_4(x) = \frac{\text{sign}(x)}{8} \left[\frac{3\sqrt{2}}{2} \left(\sin \frac{\sqrt{2}}{2}x \operatorname{ch} \frac{\sqrt{2}}{2}x - \cos \frac{\sqrt{2}}{2}x \operatorname{sh} \frac{\sqrt{2}}{2}x \right) - \right. \\ \left. - x \sin \frac{\sqrt{2}}{2}x \operatorname{sh} \frac{\sqrt{2}}{2}x \right], \quad (13)$$

и

$$Y_4(x) = d_1 e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x} \cos \frac{\sqrt{2}}{2}x + d_2 e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x} \sin \frac{\sqrt{2}}{2}x + d_3 e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}x} \cos \frac{\sqrt{2}}{2}x + \\ + d_4 e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}x} \sin \frac{\sqrt{2}}{2}x. \quad (14)$$

Символ $*$ обозначает операцию свертки, которая для функций f и g определяется следующим образом:

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)dy. \quad (15)$$

Теперь мы получили норму функционала погрешности ℓ . Поскольку пространство $W_2^{(4,0)}$ является гильбертовым, по теореме Рисса об общем виде линейного непрерывного функционала имеем

$$(\ell, \psi_\ell) = \|\ell\| \cdot \|\psi_\ell\| = \|\ell\|^2. \quad (16)$$

Отсюда, используя четную функцию $G_4(x)$ и выражения (12)–(14), а также учитывая (15) и (16), получаем

$$\|\ell\|^2 = \sum_{\beta=0}^N \sum_{\gamma=0}^N C_{\beta}(z) C_{\gamma}(z) G_4(x_{\beta} - x_{\gamma}) - 2 \sum_{\beta=0}^N C_{\beta}(z) G_4(z - x_{\beta}). \quad (17)$$

Таким образом, первая часть задачи о построении оптимальных интерполяционных формул в пространстве $W_2^{(4,0)}$ решена. Далее мы рассмотрим вторую часть задачи.

4. Система для оптимальных коэффициентов интерполяционных формул. Теперь переходим к минимизации квадрата нормы функционала погрешности (17). Известно, что функционал погрешности ℓ удовлетворяет условиям (10), (11). Квадрат нормы (17) функционала погрешности является функцией многих переменных коэффициентов $C_{\beta}(z)$, $\beta = \overline{0, N}$, интерполяционной формулы (3). Для нахождения точки условного минимума квадрата нормы функционала погрешности (5) при условиях (10), (11) применяем метод неопределенных множителей Лагранжа.

Рассмотрим следующую функцию:

$$\begin{aligned} \Psi(C_0(z), C_1(z), \dots, C_N(z), d_1, d_2, d_3, d_4) = & \|\ell\|^2 - \\ & - 2d_1 \left(e^{\frac{\sqrt{2}}{2}z} \cos \frac{\sqrt{2}}{2}z - \sum_{\beta=0}^N C_{\beta}(z) e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x_{\beta}} \cos \frac{\sqrt{2}}{2}x_{\beta} \right) - \\ & - 2d_2 \left(e^{\frac{\sqrt{2}}{2}z} \sin \frac{\sqrt{2}}{2}z - \sum_{\beta=0}^N C_{\beta}(z) e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x_{\beta}} \sin \frac{\sqrt{2}}{2}x_{\beta} \right) - \\ & - 2d_3 \left(e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}z} \cos \frac{\sqrt{2}}{2}z - \sum_{\beta=0}^N C_{\beta}(z) e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}x_{\beta}} \cos \frac{\sqrt{2}}{2}x_{\beta} \right) - \\ & - 2d_4 \left(e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}z} \sin \frac{\sqrt{2}}{2}z - \sum_{\beta=0}^N C_{\beta}(z) e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}x_{\beta}} \sin \frac{\sqrt{2}}{2}x_{\beta} \right). \end{aligned}$$

Приравнявая к нулю частные производные от Ψ по коэффициентам $C_{\beta}(z)$, $\beta = \overline{0, N}$ и $d_k(z)$, $k = \overline{1, 4}$, получаем систему линейных уравнений:

$$\begin{aligned} \sum_{\gamma=0}^N C_{\gamma}(z) G_4(x_{\beta} - x_{\gamma}) + d_3 e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}x_{\beta}} \cos \frac{\sqrt{2}}{2}x_{\beta} + d_4 e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}x_{\beta}} \sin \frac{\sqrt{2}}{2}x_{\beta} + \\ + d_1 e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x_{\beta}} \cos \frac{\sqrt{2}}{2}x_{\beta} + d_2 e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x_{\beta}} \sin \frac{\sqrt{2}}{2}x_{\beta} = G_4(z - x_{\beta}), \quad \beta = \overline{0, N}, \end{aligned} \quad (18)$$

$$\sum_{\gamma=0}^N C_{\gamma}(z) e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x_{\gamma}} \cos \frac{\sqrt{2}}{2}x_{\gamma} = e^{\frac{\sqrt{2}}{2}z} \cos \frac{\sqrt{2}}{2}z, \quad (19)$$

$$\sum_{\gamma=0}^N C_{\gamma}(z) e^{\frac{\sqrt{2}}{2} x_{\gamma}} \sin \frac{\sqrt{2}}{2} x_{\gamma} = e^{\frac{\sqrt{2}}{2} z} \sin \frac{\sqrt{2}}{2} z, \quad (20)$$

$$\sum_{\gamma=0}^N C_{\gamma}(z) e^{-\frac{\sqrt{2}}{2} x_{\gamma}} \cos \frac{\sqrt{2}}{2} x_{\gamma} = e^{-\frac{\sqrt{2}}{2} z} \cos \frac{\sqrt{2}}{2} z, \quad (21)$$

$$\sum_{\gamma=0}^N C_{\gamma}(z) e^{-\frac{\sqrt{2}}{2} x_{\gamma}} \sin \frac{\sqrt{2}}{2} x_{\gamma} = e^{-\frac{\sqrt{2}}{2} z} \sin \frac{\sqrt{2}}{2} z, \quad (22)$$

где $G_4(x)$ определяется равенством (13).

Система (18)–(22) имеет единственное решение, которое дает минимум $\|\ell\|^2$ при условиях (19)–(22). Доказательство единственности решения системы (18)–(22) аналогично доказательству единственности решения системы для оптимальных коэффициентов в пространстве $L_2^{(m)}$, полученных в работах Соболева [13, 28].

5. Основные результаты. Для решения системы (18)–(22) методом Соболева нам понадобится дискретный аналог $D_4(h\beta)$ дифференциального оператора $\frac{d^8}{dx^8} + 2\frac{d^4}{dx^4} + 1$, удовлетворяющего равенству

$$D_4(h\beta) * G_4(h\beta) = \delta_d(h\beta), \quad (23)$$

где $G_4(h\beta)$ — функция дискретного аргумента, соответствующая функции $G_4(x)$, определенной формулой (13), а $\delta_d(h\beta)$ — дискретная дельта-функция:

$$\delta_d(h\beta) = \begin{cases} 1, & \beta = 0, \\ 0, & \beta \neq 0. \end{cases}$$

В работе [29] при $m = 4$ построен дискретный аналог $D_4(h\beta)$, удовлетворяющий равенству (23), и доказаны некоторые его свойства.

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} B_1(z, h) = & F_1 G_4(z) + G_4(z - h) + a_1^- e^{-\frac{\sqrt{2}}{2} h} \cos \frac{\sqrt{2}}{2} h - a_2^- e^{-\frac{\sqrt{2}}{2} h} \sin \frac{\sqrt{2}}{2} h + \\ & + a_3^- e^{\frac{\sqrt{2}}{2} h} \cos \frac{\sqrt{2}}{2} h - a_4^- e^{\frac{\sqrt{2}}{2} h} \sin \frac{\sqrt{2}}{2} h - \frac{h}{8} \sin \frac{\sqrt{2}}{2} (z + h) \operatorname{sh} \frac{\sqrt{2}}{2} (z + h), \end{aligned}$$

$$B_2(z, h) = F_1 G_4(z - h\beta) + G_4(z - h(\beta - 1)) + G_4(z - h(\beta + 1)),$$

$$\begin{aligned} B_3(z, h) = & F_1 G_4(z - 1) + G_4(z - 1 + h) + a_1^+ e^{\frac{\sqrt{2}}{2} (1+h)} \cos \frac{\sqrt{2}}{2} (1 + h) + \\ & + a_2^+ e^{\frac{\sqrt{2}}{2} (1+h)} \sin \frac{\sqrt{2}}{2} (1 + h) + a_3^+ e^{-\frac{\sqrt{2}}{2} (1+h)} \cos \frac{\sqrt{2}}{2} (1 + h) + \\ & + a_4^+ e^{-\frac{\sqrt{2}}{2} (1+h)} \sin \frac{\sqrt{2}}{2} (1 + h), \end{aligned}$$

$$B_4(z, h) = e^{\frac{\sqrt{2}}{2} (z+h)} \frac{\sin \frac{\sqrt{2}}{2} (z + h) - 2\lambda_k e^{\frac{\sqrt{2}}{2} h} \sin \frac{\sqrt{2}}{2} z + \lambda_k^2 e^{\sqrt{2} h} \sin \frac{\sqrt{2}}{2} (z - h)}{[\lambda_k^2 e^{\sqrt{2} h} - 2\lambda_k e^{\frac{\sqrt{2}}{2} h} \cos \frac{\sqrt{2}}{2} h + 1]^2} -$$

$$- e^{\frac{\sqrt{2}}{2}(h-z)} \frac{e^{\sqrt{2}h} \sin \frac{\sqrt{2}}{2}(z+h) - 2\lambda_k e^{\frac{\sqrt{2}}{2}h} \sin \frac{\sqrt{2}}{2}z + \lambda_k^2 \sin \frac{\sqrt{2}}{2}(z-h)}{[\lambda_k^2 - 2\lambda_k e^{\frac{\sqrt{2}}{2}h} \cos \frac{\sqrt{2}}{2}h + e^{\sqrt{2}h}]^2},$$

где a_i^- и a_i^+ — неизвестные коэффициенты, а λ_k определены в работе [29] при $m = 4$.

Результат этого раздела следующий.

ТЕОРЕМА. *Оптимальные коэффициенты интерполяционной формулы (3) с равноотстоящими узлами в пространстве $W_2^{(4,0)}(0,1)$ имеют следующий вид:*

$$C_0(z) = \frac{8}{K} \left[B_1(z, h) + \sum_{k=1}^3 \frac{A_k}{\lambda_k} \sum_{\gamma=0}^N (\lambda_k^\gamma G_4(z - h\gamma) + M_k + \lambda_k^N N_k) \right],$$

$$C_\beta(z) = \frac{8}{K} \left[B_2(z, h) + \sum_{k=1}^3 \frac{A_k}{\lambda_k} \sum_{\gamma=0}^N (\lambda_k^{|\beta-\gamma|} G_4(z - h\gamma) + \lambda_k^\beta M_k + \lambda_k^{N-\beta} N_k) \right],$$

$$C_N(z) = \frac{8}{K} \left[B_3(z, h) + \sum_{k=1}^3 \frac{A_k}{\lambda_k} \sum_{\gamma=0}^N (\lambda_k^{N-\gamma} G_4(z - h\gamma) + \lambda_k^N M_k + N_k) \right],$$

где $\beta = \overline{1, N-1}$, а величины K , A_k и λ_k , определены в работе [29] при $m = 4$, h — малый параметр и

$$M_k = \frac{a_1^-(e^{\frac{\sqrt{2}}{2}h} \cos \frac{\sqrt{2}}{2}h - \lambda_k) - a_2^- e^{\frac{\sqrt{2}}{2}h} \sin \frac{\sqrt{2}}{2}h}{\lambda_k^2 - 2\lambda_k e^{\frac{\sqrt{2}}{2}h} \cos \frac{\sqrt{2}}{2}h + e^{\sqrt{2}h}} - \frac{h\lambda_k}{16} B_4(z, h) + \\ + \frac{a_3^-(e^{\frac{\sqrt{2}}{2}h} \cos \frac{\sqrt{2}}{2}h - e^{\sqrt{2}h} \lambda_k) - a_4^- e^{\frac{\sqrt{2}}{2}h} \sin \frac{\sqrt{2}}{2}h}{e^{\sqrt{2}h} \lambda_k^2 - 2\lambda_k e^{\frac{\sqrt{2}}{2}h} \cos \frac{\sqrt{2}}{2}h + 1}, \quad k = 1, 2, 3,$$

$$N_k = \frac{a_1^+(e^{\frac{\sqrt{2}}{2}(1+h)} \cos \frac{\sqrt{2}}{2}(1+h) - \lambda_k e^{\frac{\sqrt{2}}{2}(1+2h)} \cos \frac{\sqrt{2}}{2})}{e^{\sqrt{2}h} \lambda_k^2 - 2\lambda_k e^{\frac{\sqrt{2}}{2}h} \cos \frac{\sqrt{2}}{2}h + 1} + \\ + \frac{a_2^+(e^{\frac{\sqrt{2}}{2}(1+h)} \sin \frac{\sqrt{2}}{2}(1+h) - \lambda_k e^{\frac{\sqrt{2}}{2}(1+2h)} \sin \frac{\sqrt{2}}{2})}{e^{\sqrt{2}h} \lambda_k^2 - 2\lambda_k e^{\frac{\sqrt{2}}{2}h} \cos \frac{\sqrt{2}}{2}h + 1} + \\ + \frac{a_3^+(e^{\frac{\sqrt{2}}{2}(h-1)} \cos \frac{\sqrt{2}}{2}(1+h) - \lambda_k e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}} \cos \frac{\sqrt{2}}{2})}{\lambda_k^2 - 2\lambda_k e^{\frac{\sqrt{2}}{2}h} \cos \frac{\sqrt{2}}{2}h + e^{\sqrt{2}h}} + \\ + \frac{a_4^+(e^{\frac{\sqrt{2}}{2}(h-1)} \sin \frac{\sqrt{2}}{2}(1+h) - \lambda_k e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}} \sin \frac{\sqrt{2}}{2})}{\lambda_k^2 - 2\lambda_k e^{\frac{\sqrt{2}}{2}h} \cos \frac{\sqrt{2}}{2}h + e^{\sqrt{2}h}} - \frac{h\lambda_k}{16} B_4(z, h) + \\ + \frac{1}{16} \left[\frac{e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}(z-1-h)} \sin \frac{\sqrt{2}}{2}(z-1-h) - \lambda_k e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}(z-1-2h)} \sin \frac{\sqrt{2}}{2}(z-1)}{e^{\sqrt{2}h} \lambda_k^2 - 2\lambda_k e^{\frac{\sqrt{2}}{2}h} \cos \frac{\sqrt{2}}{2}h + 1} - \right.$$

$$- \frac{e^{\frac{\sqrt{2}}{2}(z-1+h)} \sin \frac{\sqrt{2}}{2}(z-1-h) - \lambda_k e^{\frac{\sqrt{2}}{2}(z-1)} \sin \frac{\sqrt{2}}{2}(z-1)}{\lambda_k^2 - 2\lambda_k e^{\frac{\sqrt{2}}{2}h} \cos \frac{\sqrt{2}}{2}h + e^{\sqrt{2}h}} \Big], \quad k = 1, 2, 3.$$

Доказательство. Для доказательства этой теоремы необходимо провести следующие вычисления. Введем функции

$$\vartheta(h\beta) = G_4(h\beta) * C_\beta(z)$$

и

$$u(h\beta) = \vartheta(h\beta) + Y_4(h\beta). \quad (24)$$

Тогда с учетом (23) для оптимальных коэффициентов $C_\beta(z)$ имеем

$$C_\beta(z) = D_4(h\beta) * u(h\beta). \quad (25)$$

Найдя функцию $u(h\beta)$, мы можем определить оптимальные коэффициенты $C_\beta(z)$ из равенства (25).

Для вычисления свертки (25) необходимо найти представление функции $u(h\beta)$ при всех целых значениях β . Из равенства (24) получаем, что $u(h\beta) = G_4(z - h\beta)$ для $h\beta \in [0, 1]$. Теперь найдем представление функции $u(h\beta)$ при $\beta < 0$ и $\beta > N$. Поскольку $C_\beta(z) = 0$ для $h\beta \notin [0, 1]$,

$$C_\beta(z) = D_4(h\beta) * u(h\beta) = 0, \quad h\beta \notin [0, 1]. \quad (26)$$

Теперь вычислим свертку $\vartheta(h\beta) = G_4(h\beta) * C_\beta(z)$ для $h\beta \notin [0, 1]$.

Предположим, что $\beta < 0$ и $\beta > N$. Тогда, учитывая равенства (10), (11) и (13), получаем

$$u(h\beta) = \begin{cases} a_1^- e^{\frac{\sqrt{2}}{2}h\beta} \cos \frac{\sqrt{2}}{2}h\beta + a_2^- e^{\frac{\sqrt{2}}{2}h\beta} \sin \frac{\sqrt{2}}{2}h\beta + \\ \quad + a_3^- e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}h\beta} \cos \frac{\sqrt{2}}{2}h\beta + a_4^- e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}h\beta} \sin \frac{\sqrt{2}}{2}h\beta + \\ \quad + \frac{h\beta}{8} \sin \frac{\sqrt{2}}{2}(z - h\beta) \operatorname{sh} \frac{\sqrt{2}}{2}(z - h\beta), & \beta < 0, \\ G_4(z - h\beta), & 0 \leq \beta \leq N, \\ a_1^+ e^{\frac{\sqrt{2}}{2}h\beta} \cos \frac{\sqrt{2}}{2}h\beta + a_2^+ e^{\frac{\sqrt{2}}{2}h\beta} \sin \frac{\sqrt{2}}{2}h\beta + \\ \quad + a_3^+ e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}h\beta} \cos \frac{\sqrt{2}}{2}h\beta + a_4^+ e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}h\beta} \sin \frac{\sqrt{2}}{2}h\beta - \\ \quad - \frac{h\beta}{8} \sin \frac{\sqrt{2}}{2}(z - h\beta) \operatorname{sh} \frac{\sqrt{2}}{2}(z - h\beta), & \beta > N, \end{cases} \quad (27)$$

где a_1^- , a_2^- , a_3^- , a_4^- , a_1^+ , a_2^+ , a_3^+ , a_4^+ — неизвестные коэффициенты.

Из (27) при $\beta = 0$ и $\beta = N$ получаем

$$a_1^- = G_4(z) - a_3^-, \quad (28)$$

$$a_1^+ = \frac{G_4(z-1) + \frac{h\beta}{8} \sin \frac{\sqrt{2}}{2}(z-1) \operatorname{sh} \frac{\sqrt{2}}{2}(z-1)}{e^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \cos \frac{\sqrt{2}}{2}} - \\ - a_2^+ \tan \frac{\sqrt{2}}{2} - a_3^+ e^{-\sqrt{2}} - a_4^+ e^{-\sqrt{2}} \tan \frac{\sqrt{2}}{2}. \quad (29)$$

Здесь у нас есть шесть неизвестных: $a_2^-, a_3^-, a_4^-, a_2^+, a_3^+$ и a_4^+ . Из уравнения (26) для $\beta = -1, -2, -3$ и $\beta = N+1, N+2, N+3$ с учетом (27) получаем систему из шести линейных уравнений для $a_2^-, a_3^-, a_4^-, a_2^+, a_3^+$ и a_4^+ . Поскольку интерполяционная задача имеет единственное решение, основная матрица этой системы невырождена.

Решая систему (26) при $\beta = -1, -2, -3$ и $\beta = N+1, N+2, N+3$, находим $a_2^-, a_3^-, a_4^-, a_2^+, a_3^+$ и a_4^+ . Затем, используя (28) и (29), находим a_1^- и a_1^+ . Из (25) для $\beta = 0, 1, \dots, N$ выводим

$$\begin{aligned} C_\beta(z) = & \sum_{\gamma=1}^{\infty} D_4(h\beta + h\gamma) \left[a_1^- e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}h\gamma} \cos \frac{\sqrt{2}}{2}h\gamma - a_2^- e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}h\gamma} \sin \frac{\sqrt{2}}{2}h\gamma + \right. \\ & + a_3^- e^{\frac{\sqrt{2}}{2}h\gamma} \cos \frac{\sqrt{2}}{2}h\gamma - a_4^- e^{\frac{\sqrt{2}}{2}h\gamma} \sin \frac{\sqrt{2}}{2}h\gamma - \\ & \left. - \frac{h\gamma}{8} \sin \frac{\sqrt{2}}{2}(z + h\gamma) \operatorname{sh} \frac{\sqrt{2}}{2}(z + h\gamma) \right] + \\ & + \sum_{\gamma=0}^N D_4(h\beta - h\gamma) G_4(z - h\gamma) + \\ & + \sum_{\gamma=1}^{\infty} D_4(h(N + \gamma - \beta)) \left[a_1^+ e^{\frac{\sqrt{2}}{2}(1+h\gamma)} \cos \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + h\gamma) + \right. \\ & + a_2^+ e^{\frac{\sqrt{2}}{2}(1+h\gamma)} \sin \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + h\gamma) + a_3^+ e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}(1+h\gamma)} \cos \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + h\gamma) + \\ & + a_4^+ e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}(1+h\gamma)} \sin \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + h\gamma) - \\ & \left. - \frac{1 + h\gamma}{8} \sin \frac{\sqrt{2}}{2}(z - 1 - h\gamma) \operatorname{sh} \frac{\sqrt{2}}{2}(z - 1 - h\gamma) \right], \quad \beta = 0, 1, \dots, N. \end{aligned}$$

Отсюда, используя дискретный оператор $D_4(h\beta)$, приведенный в работе [29] при $m = 4$, и учитывая M_k и N_k , $k = 1, 2, 3$, приходим к выражениям для коэффициентов $C_\beta(z)$, $\beta = 0, 1, \dots, N$, которые приведены в теореме. Теорема доказана. $\square$

6. Численные результаты. В этом разделе мы приведем численные примеры и результаты интерполяции следующих функций:

$$\varphi_1(z) = z^3 + z^2 + z, \quad \varphi_2(z) = \frac{1.25 + \cos 5.4z}{6(1 + (3z - 1)^2)},$$

взятых из работы [30], и сравним эти результаты с результатами работы [30] при $N = 5$.

Для заданных функций графики абсолютных погрешностей интерполяционной формулы (3) приведены на рис. 1. Аналогичные абсолютные погрешности аппроксимации из работы [30] представлены на рис. 2.

В случае $\varphi_1(z)$ погрешность оптимальной интерполяционной формулы (3) меньше, чем погрешность интерполяции из работы [30]. Однако для функции $\varphi_2(z)$ их абсолютные погрешности почти одинаковы.

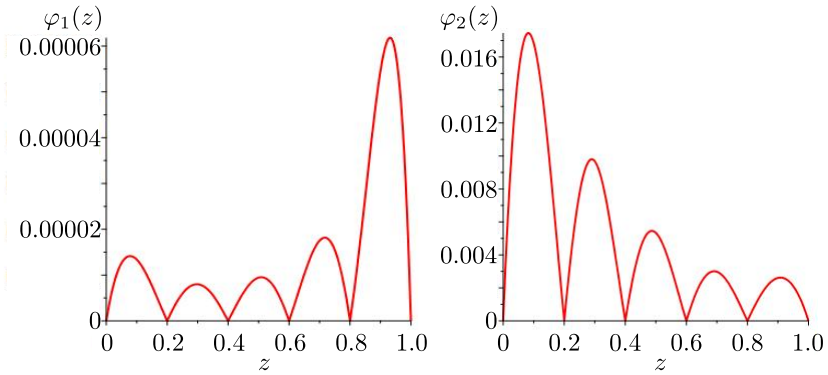


Рис. 1. Графики абсолютных погрешностей $\varphi_1(z)$ и $\varphi_2(z)$ при $N = 5$
[Figure 1. Graphs of absolute errors for $\varphi_1(z)$ and $\varphi_2(z)$ at $N = 5$]

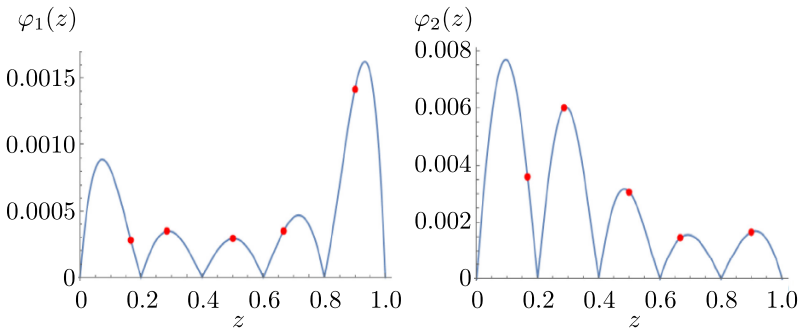


Рис. 2. Графики абсолютных погрешностей $\varphi_1(z)$ и $\varphi_2(z)$ при $N = 5$ [30]
[Figure 2. Graphs of absolute errors for $\varphi_1(z)$ and $\varphi_2(z)$ at $N = 5$ [30]]

7. Заключение. Статья посвящена построению оптимальной интерполяционной формулы, точной для экспоненциально-тригонометрических функций. Для построения оптимальной интерполяционной формулы использован метод Соболева, основанный на дискретном аналоге $D_4(h\beta)$ дифференциального оператора $\frac{d^8}{dx^8} + 2\frac{d^4}{dx^4} + 1$. Применяя дискретный аналог $D_4(h\beta)$, мы получили явные выражения для оптимальных коэффициентов (см. теорему), которые имеют важное значение в приложениях. В итоге численные результаты демонстрируют высокую надежность построенной оптимальной интерполяционной формулы.

Конкурирующие интересы. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Вклад авторов и ответственность. Все авторы внесли равный вклад в разработку концепции статьи и написание рукописи. Авторы несут полную ответственность за подготовку и предоставление окончательной версии рукописи для публикации. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Исследование выполнено без привлечения внешнего финансирования.

Благодарности. Авторы выражают искреннюю благодарность рецензентам за внимательное прочтение статьи, а также за ценные комментарии и предложения, которые способствовали улучшению работы.

Библиографический список

1. Ahlberg J. H., Nilson E. N., Walsh J. L. *The Theory of Splines and Their Applications* / Mathematics in Science and Engineering. vol. 38. New York: Academic Press, 1967. xi+284 pp. DOI: [https://doi.org/10.1016/s0076-5392\(08\)x6115-6](https://doi.org/10.1016/s0076-5392(08)x6115-6).
2. Стечкин С. Б., Субботин Ю. Н. *Сплайны в вычислительной математике*. М.: Наука, 1976. 248 с.
3. Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. Л. *Методы сплайн-функций*. М.: Наука, 1980. 352 с.
4. Nürnberger G. *Approximation by Spline Functions*. Berlin: Springer-Verlag, 1989. xi+243 pp.
5. Игнатов М. И., Певний А. Б. *Натуральные сплайны многих переменных*. Ленинград: Наука, 1991. 127 с.
6. Самарский А. А. *Введение в численные методы*. М.: Наука, 1987. 288 с.
7. Burden A. M., Faires J. D., Burden R. L. *Numerical Analysis*. Boston, MA: Cengage Learning, 2016. xvi+896 pp.
8. Duchon J. Splines minimizing rotation-invariant semi-norms in Sobolev spaces / *Constructive Theory of Functions of Several Variables* / Lecture Notes in Mathematics, 571, 1977. pp. 85–100. DOI: <https://doi.org/10.1007/BFb0086566>.
9. Bojanov B. D., Hakopian H. A., Sahakian A. A. *Spline Functions and Multivariate Interpolations* / Mathematics and its Applications. Dordrecht: Kluwer Academic Publ., 1993. ix+276 pp.
10. Bezhaev A. Yu., Vasilenko V. A. *Variational Theory of Splines*. Dordrecht: Kluwer Academic Publ., 2001. xvii+280 pp.
11. Cheney E. W., Kincaid D. *Numerical Mathematics and Computing*. USA: Brooks Cole, 2013. 700 pp.
12. Schoenberg I. J. *Cardinal Spline Interpolation* / CBMS-NSF Reg. Conf. Ser. Appl. Math. vol. 12. Philadelphia, Pa.: SIAM, 1973. vi+125 pp.
13. Соболев С. Л., Васкевич В. Л. *Кубатурные формулы*. Новосибирск: Ин-т мат-ки им. С.Л. Соболева СО РАН, 1996. 483 с.
14. Laurent P.-J. *Approximation et Optimisation* / Enseignement des Sciences. vol. 13. Paris: Hermann, 1972. xii+531 pp. (In French)
15. Arcangéli R., López de Silanes M. C., Torrens J. J. *Multidimensional Minimizing Splines. Theory and Applications*. Boston, MA: Kluwer Academic Publ., 2004. xvi+261 pp.
16. Schumaker L. L. *Spline Functions: Basic Theory* / Cambridge Mathematical Library. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2007. xv+582 pp.
17. Holladay J. C. A smoothest curve approximation // *Math. Tables Aids Comput.*, 1957. vol. 11. pp. 233–243. DOI: <https://doi.org/10.2307/2001941>.
18. Schoenberg I. J. On equidistant cubic spline interpolation // *Bull. Am. Math. Soc.*, 1971. vol. 77. pp. 1039–1043. DOI: <https://doi.org/10.1090/S0002-9904-1971-12853-7>.
19. de Boor C. Best approximation properties of spline functions of odd degree // *J. Math. Mech.*, 1963. vol. 12. pp. 747–749.
20. Cabada A., Hayotov A. R., Shadimetov Kh. M. Construction of D^m -splines in $L_2^{(m)}(0, 1)$ space by Sobolev method // *Appl. Math. Comput.*, 2014. vol. 244. pp. 524–551. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.amc.2014.07.033>.
21. Hayotov A. R., Milovanović G. V., Shadimetov Kh. M. Interpolation splines minimizing a semi-norm // *Calcolo*, 2014. vol. 51, no. 2. pp. 245–260. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10092-013-0080-x>.
22. Shadimetov Kh. M., Hayotov A. R., Nuraliev F. A. Optimal interpolation formulas with derivative in the space $L_2^{(m)}(0, 1)$ // *Filomat*, 2019. vol. 33, no. 17. pp. 5661–5675. DOI: <https://doi.org/10.2298/FIL1917661S>.
23. Shadimetov Kh. M., Boltaev A. K. An exponential-trigonometric spline minimizing a semi-norm in a Hilbert space // *Adv. Differ. Equ.*, 2020. vol. 2020, 352. DOI: <https://doi.org/10.1186/s13662-020-02805-8>.

24. Akhmedov D., Shadimetov Kh. Optimal quadrature formulas with derivative for Hadamard type singular integrals // *AIP Conf. Proc.*, 2021. vol. 2365, 020020. DOI: <https://doi.org/10.1063/5.0057124>.
25. Akhmedov D. Approximate solution of a class of singular integral equations of the first kind // *AIP Conf. Proc.*, 2024. vol. 3004, 060033. DOI: <https://doi.org/10.1063/5.0199828>.
26. Rasulov R., Mahkamova D. The norm of the error functional for the Euler–Maclaurin type quadrature formulas in the space $W_2^{(2k, 2k-1)}(0, 1)$ // *AIP Conf. Proc.*, 2024. vol. 3004, 060042. DOI: <https://doi.org/10.1063/5.0200255>.
27. Shadimetov Kh., Boltaev A. An exponential-trigonometric optimal interpolation formula // *Lobachevskii J. Math.*, 2023. vol. 44, no. 10. pp. 4379–4392. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1995080223100359>.
28. Соболев С. Л. О задаче интерполирования функций n переменных // *Докл. АН СССР*, 1961. Т. 137, № 4. С. 778–781.
29. Shadimetov Kh., Boltaev A., Parovik R. Optimization of the approximate integration formula using the discrete analogue of a high-order differential operator // *Mathematics*, 2023. vol. 11, no. 14, 3114. DOI: <https://doi.org/10.3390/math11143114>.
30. Ghalichi S. S. S., Amirfakhrian M., Allahviranloo T. An algorithm for choosing a good shape parameter for radial basis functions method with a case study in image processing // *Results Appl. Math.*, 2022. vol. 16, 100337. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.rinam.2022.100337>.

MSC: 65D05, 65D07, 65D15

Optimization of the error in exponential-trigonometric interpolation formula

Kh. M. Shadimetov^{1,2}, A. K. Boltaev^{2,3}

¹ Tashkent State Transport University,
1, Temiryulchilar st., Tashkent, 100167, Uzbekistan.

² V.I. Romanovskiy Institute of Mathematics
of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan,
9, University st., Tashkent, 100174, Uzbekistan.

³ International Nordic University,
8/2, Bunyodkor st., Tashkent, 100043, Uzbekistan.

Abstract

In engineering geodesy, point clouds obtained through area measurement methods, such as terrestrial laser scanning or photogrammetry, need to be approximated by a curve or surface that can be described by using a continuous mathematical function, often employing splines and optimal interpolation formulas.

This work is devoted to the construction of an optimal interpolation formula that is exact for exponential-trigonometric functions in a Hilbert space. The optimal interpolation formula is obtained by minimizing the norm of the error functional with respect to the coefficients. The article proves the existence and uniqueness of the optimal interpolation formula and provides explicit analytical expressions for the optimal coefficients of the interpolation formula. Using the constructed optimal interpolation formula, specific functions were interpolated, and a comparison was made with known results from other authors.

Keywords: interpolation formula, error of the formula, optimal coefficients, Sobolev method.

Received: 15th May, 2024 / Revised: 16th November, 2024 /

Accepted: 19th November, 2024 / First online: 26th December, 2024

Differential Equations and Mathematical Physics

Research Article

© Authors, 2024

© Samara State Technical University, 2024 (Compilation, Design, and Layout)

 The content is published under the terms of the [Creative Commons Attribution 4.0 International License](http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Shadimetov Kh. M., Boltaev A. K. Optimization of the error in exponential-trigonometric interpolation formula, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2024, vol. 28, no. 4, pp. 665–681. EDN: CJETP0. DOI: [10.14498/vsgtu2094](https://doi.org/10.14498/vsgtu2094) (In Russian).

Authors' Details:

Kholmat M. Shadimetov  <https://orcid.org/0000-0002-4183-6184>

Dr. Phys. & Math. Sci., Professor; Head of Department; Dept. of Computer Science and Graphics¹; Leading Research Scientist; Lab. of Computational Mathematics²;
e-mail: kholmatshadimetov@mail.ru

Aziz K. Boltaev  <https://orcid.org/0000-0002-8329-4440>

Cand. Phys. & Math. Sci., Associate Professor; Senior Research Scientist; Lab. of Computational Mathematics²; Associate Professor; Dept. of Economics and Business Management³;
e-mail: aziz-boltayev@mail.ru

Competing interests. The authors declare that they have no competing interests.

Authors' contributions and responsibility. All authors contributed equally to the conceptualization of the article and the writing of the manuscript. The authors take full responsibility for the preparation and submission of the final version of the manuscript for publication. The final version of the manuscript was approved by all authors.

Funding. The research was conducted without external funding.

Acknowledgments. The authors sincerely thank the reviewers for their careful reading of the article, as well as for their valuable comments and suggestions, which helped improve the work.

References

- Ahlberg J. H., Nilson E. N., Walsh J. L. *The Theory of Splines and Their Applications*, Mathematics in Science and Engineering, vol. 38. New York, Academic Press, 1967, xi+284 pp. DOI: [https://doi.org/10.1016/s0076-5392\(08\)x6115-6](https://doi.org/10.1016/s0076-5392(08)x6115-6).
- Stechkin S. B., Subbotin Yu. N. *Splainy v vychislitel'noi matematike* [Splines in Numerical Mathematics]. Moscow, Nauka, 1976, 248 pp. (In Russian)
- Zav'yalov Yu. S., Kvasov B. I., Miroshnichenko V. L. *Metody splain-funktsii* [Methods of Spline Functions]. Moscow, Nauka, 1980, 352 pp. (In Russian)
- Nürnberg G. *Approximation by Spline Functions*. Berlin, Springer-Verlag, 1989, xi+243 pp.
- Ignatev M. I., Pevniy A. B. *Natural'nye splainy mnogikh peremennykh* [Natural Splines of Many Variables]. Leningrad, Nauka, 1991, 127 pp. (In Russian)
- Samarsky A. A. *Vvedenie v chislennye metody* [An Introduction to Numerical Methods]. Moscow, Nauka, 1987, 288 pp. (In Russian)
- Burden A. M., Faires J. D., Burden R. L. *Numerical Analysis*. Boston, MA, Cengage Learning, 2016, xvi+896 pp.
- Duchon J. Splines minimizing rotation-invariant semi-norms in Sobolev spaces, In: *Constructive Theory of Functions of Several Variables*, Lecture Notes in Mathematics, 571, 1977, pp. 85-100. DOI: <https://doi.org/10.1007/BFb0086566>.
- Bojanov B. D., Hakopian H. A., Sahakian A. A. *Spline Functions and Multivariate Interpolations*, Mathematics and its Applications. Dordrecht, Kluwer Academic Publ., 1993, ix+276 pp.
- Bezhaev A. Yu., Vasilenko V. A. *Variational Theory of Splines*. Dordrecht, Kluwer Academic Publ., 2001, xvii+280 pp.
- Cheney E. W., Kincaid D. *Numerical Mathematics and Computing*. USA, Brooks Cole, 2013, 700 pp.
- Schoenberg I. J. *Cardinal Spline Interpolation*, CBMS-NSF Reg. Conf. Ser. Appl. Math. vol. 12. Philadelphia, Pa., SIAM, 1973, vi+125 pp.
- Sobolev S. L., Vaskevich V. L. *The Theory of Cubature Formulas*, Mathematics and Its Applications, vol. 415. Dordrecht, Kluwer Academic Publ., 1997, xxi+416 pp.
- Laurent P.-J. *Approximation et Optimisation*, Enseignement des Sciences, vol. 13. Paris, Hermann, 1972, xii+531 pp. (In French)
- Arcangéli R., López de Silanes M. C., Torrens J. J. *Multidimensional Minimizing Splines. Theory and Applications*. Boston, MA, Kluwer Academic Publ., 2004, xvi+261 pp.
- Schumaker L. L. *Spline Functions: Basic Theory*, Cambridge Mathematical Library. Cambridge, Cambridge Univ. Press, 2007, xv+582 pp.
- Holladay J. C. A smoothest curve approximation, *Math. Tables Aids Comput.*, 1957, vol. 11, pp. 233-243. DOI: <https://doi.org/10.2307/2001941>.
- Schoenberg I. J. On equidistant cubic spline interpolation, *Bull. Am. Math. Soc.*, 1971, vol. 77, pp. 1039-1043. DOI: <https://doi.org/10.1090/S0002-9904-1971-12853-7>.

19. de Boor C. Best approximation properties of spline functions of odd degree, *J. Math. Mech.*, 1963, vol. 12, pp. 747–749.
20. Cabada A., Hayotov A. R., Shadimetov Kh. M. Construction of D^m -splines in $L_2^{(m)}(0, 1)$ space by Sobolev method, *Appl. Math. Comput.*, 2014, vol. 244, pp. 524–551. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.amc.2014.07.033>.
21. Hayotov A. R., Milovanović G. V., Shadimetov Kh. M. Interpolation splines minimizing a semi-norm, *Calcolo*, 2014, vol. 51, no. 2, pp. 245–260. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10092-013-0080-x>.
22. Shadimetov Kh. M., Hayotov A. R., Nuraliev F. A. Optimal interpolation formulas with derivative in the space $L_2^{(m)}(0, 1)$, *Filomat*, 2019, vol. 33, no. 17, pp. 5661–5675. DOI: <https://doi.org/10.2298/FIL1917661S>.
23. Shadimetov Kh. M., Boltaev A. K. An exponential-trigonometric spline minimizing a semi-norm in a Hilbert space, *Adv. Differ. Equ.*, 2020, vol. 2020, 352. DOI: <https://doi.org/10.1186/s13662-020-02805-8>.
24. Akhmedov D., Shadimetov Kh. Optimal quadrature formulas with derivative for Hadamard type singular integrals, *AIP Conf. Proc.*, 2021, vol. 2365, 020020. DOI: <https://doi.org/10.1063/5.0057124>.
25. Akhmedov D. Approximate solution of a class of singular integral equations of the first kind, *AIP Conf. Proc.*, 2024, vol. 3004, 060033. DOI: <https://doi.org/10.1063/5.0199828>.
26. Rasulov R., Mahkamova D. The norm of the error functional for the Euler–Maclaurin type quadrature formulas in the space $W_2^{(2k, 2k-1)}(0, 1)$, *AIP Conf. Proc.*, 2024, vol. 3004, 060042. DOI: <https://doi.org/10.1063/5.0200255>.
27. Shadimetov Kh., Boltaev A. An exponential-trigonometric optimal interpolation formula, *Lobachevskii J. Math.*, 2023, vol. 44, no. 10, pp. 4379–4392. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1995080223100359>.
28. Sobolev S. L. On interpolation of functions of n variables, *Sov. Math., Dokl.*, 1961, vol. 2, no. 4, pp. 343–346.
29. Shadimetov Kh., Boltaev A., Parovik R. Optimization of the approximate integration formula using the discrete analogue of a high-order differential operator, *Mathematics*, 2023, vol. 11, no. 14, 3114. DOI: <https://doi.org/10.3390/math11143114>.
30. Ghalichi S. S. S., Amirfakhrian M., Allahviranloo T. An algorithm for choosing a good shape parameter for radial basis functions method with a case study in image processing, *Results Appl. Math.*, 2022, vol. 16, 100337. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.rinam.2022.100337>.