Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2021. Т. 25, № 2. С. 207–240
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1853

Дифференциальные уравнения и математическая физика

УДК 517.956

Метод Римана для уравнений с доминирующей частной производной (обзор)

© *А. Н. Миронов*[1,2], *Л. Б. Миронова*[1], *Ю. О. Яковлева*[2]

[1] Казанский (Приволжский) федеральный университет,
Елабужский институт (филиал),
Россия, 423600, Елабуга, ул. Казанская, 89.

[2] Самарский государственный технический университет,
Россия, 443100, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

Аннотация

Данная обзорная статья посвящена классу линейных уравнений с доминирующей частной производной вида $(D+M)u=f$, где Du — смешанная частная производная, а M — линейный дифференциальный оператор, содержащий производные функции u, получаемые из D отбрасыванием по крайней мере одного дифференцирования. Можно отметить структурное сходство таких уравнений с линейными обыкновенными дифференциальными уравнениями. Излагается метод Римана для линейных уравнений с доминирующей частной производной, являющийся естественным обобщением хорошо известного метода Римана для гиперболического уравнения второго порядка с двумя независимыми переменными.

В статье изложены основные положения теории, разработанной для уравнения с доминирующей частной производной общего вида, позволяющие заинтересованному читателю применить полученные результаты к интересующей его задаче.

Дается определение функции Римана как решения интегрального уравнения Вольтерры, приведено основное дифференциальное тождество, продемонстрирован процесс получения формулы решения задачи

Обзор

Образец для цитирования

Миронов А. Н., Миронова Л. Б., Яковлева Ю. О. Метод Римана для уравнений с доминирующей частной производной (обзор) // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2021. Т. 25, № 2. С. 207–240. https://doi.org/10.14498/vsgtu1853.

Сведения об авторах

Алексей Николаевич Миронов https://orcid.org/0000-0002-8818-286X
доктор физико-математических наук, доцент; профессор каф. математики и прикладной информатики[1]; профессор[2]; e-mail: miro73@mail.ru

Любовь Борисовна Миронова https://orcid.org/0000-0002-3299-2601
кандидат физико-математических наук, доцент; доцент каф. математики и прикладной информатики[1]; e-mail: lbmironova@yandex.ru

Юлия Олеговна Яковлева https://orcid.org/0000-0002-9839-3740
кандидат физико-математических наук, доцент; доцент каф. высшей математики[2]; e-mail: julia.yakovleva@mail.ru

Коши в терминах функции Римана путем интегрирования указанного тождества по соответствующей области в n-мерном пространстве. Приведен пример построения решения задачи Коши для одного уравнения третьего порядка.

Далее излагается метод Римана для достаточно широкого класса линейных систем уравнений гиперболического типа (в том числе с кратными характеристиками). Данный метод идейно весьма близок к методу Римана для линейных уравнений с доминирующей частной производной.

Обсуждаются вопросы приложений метода Римана к исследованию новых задач для уравнений с частными производными. В частности, с использованием метода Римана доказана корректность новых граничных задач для факторизованных гиперболических уравнений, исследованы вопросы разрешимости интегральных уравнений с частными интегралами, определенная модификация метода Римана позволяет развивать метод Римана–Адамара для задач Дарбу. Представление решений гиперболических систем в явном виде в терминах матрицы Римана позволяет исследовать новые граничные задачи, в частности, задачи с заданием нормальных производных искомых функций на характеристиках, задачи с условиями на всей границе области, задачи Дарбу.

Изложенный здесь метод Римана для линейных уравнений с доминирующей частной производной очевидным образом переносится на матричные уравнения. В связи с этим указаны некоторые случаи, когда для таких матричных уравнений построена в явном виде (в терминах гипергеометрических функций) матрица Римана.

В работе дается обзор литературы, кратко излагается история развития данного направления в России и за рубежом.

Ключевые слова: метод Римана, функция Римана, матрица Римана, задача Коши, задача Гурса, задача Дарбу, уравнение с доминирующей частной производной, гиперболическое уравнение, система уравнений гиперболического типа, уравнение Бианки, уравнение Векуа, уравнение Аллера, уравнение Баренблатта–Желтова–Кочиной, уравнение Буссинеска–Лява.

Получение: 15 марта 2021 г. / Исправление: 28 апреля 2021 г. / Принятие: 11 мая 2021 г. / Публикация онлайн: 18 мая 2021 г.

Введение

В данной статье речь идет о классах гиперболических уравнений и систем уравнений, для которых при участии авторов статьи были разработаны варианты метода Римана, позволяющие строить в явном виде в терминах функции (или матрицы) Римана решения задач Коши, Гурса и некоторых других задач. Первоначально метод Римана разрабатывался для уравнений вида

$$L(u) \equiv \frac{\partial^m u(x)}{\partial x_1^{m_1} \ldots \partial x_n^{m_n}} + \sum_{\substack{|\alpha| \leqslant m-1, \\ \alpha_s \leqslant m_s,\ s=\overline{1,n}}} a_\alpha(x) \frac{\partial^{|\alpha|} u(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} = f(x), \tag{1}$$

где $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — декартовы координаты точки x; $m = m_1 + \cdots + m_n$; $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$; m_s, α_s, $s = \overline{1,n}$, — целые неотрицательные числа; $m > 1$; $u(x)$ — искомая, а a_α, f — известные функции.

Признаком, отличающим уравнения вида (1) от других уравнений с частными производными, является наличие первого слагаемого в правой части (1), представляющего собой доминирующую производную: все остальные входящие в (1) производные получаются из нее отбрасыванием по крайней мере одного дифференцирования по какой-либо из независимых переменных. Заметим, что подобный признак всегда имеет место для обыкновенных дифференциальных уравнений. Поэтому можно рассматривать (1) как класс уравнений с частными производными, наиболее близкий к классу линейных обыкновенных дифференциальных уравнений.

При $m_s = 1$, $s = \overline{1, n}$, уравнение (1) обычно называют уравнением Бианки. Итальянский математик Л. Бианки (L. Bianci) одновременно с О. Никколетти (O. Niccoletti) еще в 1895 г. [1,2] рассматривал его как многомерное обобщение хорошо известного в математической физике уравнения

$$u_{xy} + au_x + bu_y + cu = f.$$

В связи с этим появление уравнений вида (1) представляет собой естественный шаг на пути теоретических обобщений.

К частным случаям уравнений (1) сводится задача интегрального представления преобразования одних линейных дифференциальных операторов в другие, они применяются в теории упругости, при изучении фильтрации жидкости в трещиноватых породах, влагопереноса в почве, передачи тепла в гетерогенных средах, моделировании различных биологических процессов и явлений, при изучении распространения волн в диспергирующих средах, а также в теории оптимальных процессов и обратных задачах (см. [3, с. 63, 109; 4; 5, с. 5–13; 6–9] и библиографический список в конце текста статьи [10]).

Можно особо отметить широко известные уравнения указанного класса: полученное И.Н. Векуа [11, с. 258] основное дифференциальное уравнение изгиба тонкой сферической оболочки

$$\Big(\frac{\partial^2}{\partial z \partial \zeta} + 2\Big)\Big(\frac{\partial^4}{\partial z^2 \partial \zeta^2} + 2\frac{\partial^2}{\partial z \partial \zeta} + \frac{\delta E h R^2}{D}\Big)u = \Phi(z, \zeta);$$

уравнение Аллера (уравнение Баренблатта—Желтова – Кочиной)

$$u_t = (au_x + bu_{xt})_x,$$

описывающее диффузию в трещиноватых средах [6; 7, пп. 1.5 и 9.6; 12–14]; уравнение Буссинеска—Лява

$$u_{ttxx} - u_{tt} + u_{xx} = 0,$$

описывающее волновые процессы в тонком упругом стержне с учетом эффектов инерции и в периодических слоистых средах [15,16]. К виду (1) относятся и поливибрационные уравнения Д. Манжерона (D. Mangeron) [17,18].

Уравнение Бианки третьего порядка встречается при редукции системы Дарбу для символов Кристоффеля, описывающей сопряженные криволинейные системы координат [19].

После Л. Бианки и О. Николетти различные вопросы, связанные с уравнениями вида (1) изучали H. Bateman, E. Lahaye, D. Mangeron, M. Oğustöreli,

D. Colton, S. Easwaran, V. Radochová, A. Corduneany, W. Rundell, M. Stecher [20–32], В. А. Водахова [33, 34], М. Х. Шхануков [35–37], О. М. Джохадзе [38, 39], В. И. Корзюк [40], И. Г. Мамедов [41–45] и другие.

М. К. Фаге [46] был предложен вариант метода Римана для уравнения Бианки произвольного порядка. В этой статье автор констатирует, что «Бианки и Николетти разработали лишь формальную часть теории, не вдаваясь в аналитические детали».

С начала 1990-х годов в Казани сформировалась группа (В. И. Жегалов, В. А. Севастьянов, Е. А. Уткина, А. Н. Миронов), ведущая систематические исследования в обсуждаемой области. В частности, в 1990 г. В. И. Жегаловым [47] было рассмотрено уравнение с переменными коэффициентами

$$u_{xyz} + au_{xy} + bu_{yz} + cu_{xz} + du_x + eu_y + fu_z + gu = 0. \tag{2}$$

Отправным пунктом рассуждений являлся результат И. Н. Векуа из [11], где было показано, что функция Римана для уравнения

$$L_1(u) \equiv u_{xy} + a(x,y)u_x + b(x,y)u_y + c(x,y)u = f(x,y)$$

удовлетворяет интегральному уравнению

$$v(x,y) - \int_\tau^y a(x,\eta)v(x,\eta)\,d\eta - \int_t^x b(\xi,y)v(\xi,y)\,d\xi + \\ + \int_t^x \int_\tau^y c(\xi,\eta)v(\xi,\eta)\,d\eta\,d\xi = 1$$

и имеет место тождество

$$\frac{\partial^2(uR)}{\partial x\partial y} - RL_1(u) \equiv \frac{\partial}{\partial x}\Big[u\Big(\frac{\partial R}{\partial y} - aR\Big)\Big] + \frac{\partial}{\partial y}\Big[u\Big(\frac{\partial R}{\partial x} - bR\Big)\Big],$$

отличающееся от тождества, использованного Б. Риманом. Данная модификация метода Римана допускала возможность его распространения на случай уравнения (2), что и было реализовано в [47].

Позднее в ряде работ В. И. Жегалова, В. А. Севастьянова и Е. А. Уткиной этот модифицированный метод был распространен на класс уравнений с доминирующей частной производной [8, 48–57], при этом для уравнений с кратным дифференцированием изучалась задача Гурса, а задача Коши исследовалась лишь для уравнения Бианки. Существенное значение имеет то, что функция Римана в этих работах определяется не как решение сопряженного уравнения, удовлетворяющее граничным условиям, число которых очень быстро увеличивается с ростом n, а как решение некоторого интегрального уравнения. Отметим еще, что при построении решений задач Коши В. А. Севастьянов использовал аппарат дифференциальных форм. Оба указанных изменения привели к существенному уменьшению сложности выкладок, и вывод окончательных формул решения стал более компактным. Это позволило получить более лаконичную и прозрачную схему решения задач Гурса и Коши, чем в работах предыдущих авторов. Кроме того, предложенный вариант оказался конструктивным в том смысле, что удалось выделить ряд новых случаев, когда решение может быть записано в явном виде [50, 51, 58, 59].

Далее естественно было перейти к построению теории уравнения (1) в общем случае, когда искомая функция содержит кратное дифференцирование по независимым переменным. Часто такие уравнения называются псевдопараболическими (первым такое название использовал Д. Колтон в 1972 г. [24]).

В 2005 г. Е. А. Уткиной было доказано тождество [60,61], необходимое для решения задачи Гурса в общем случае уравнения (1). Главным недостатком предложенного тождества было то, что его структура отличалась от тождества для уравнения Бианки. Полученная формула решения задачи Гурса позволила распространить теорию характеристических задач с нормальными производными в граничных условиях со случая уравнения Бианки на общее псевдопараболическое уравнение (1) [62].

А. Н. Мироновым для уравнения (1) было предложено тождество, имеющее структуру тождества для уравнения Бианки, что позволило применить метод Римана и к задаче Коши [63,64]. В работе [65] для уравнения (1) в терминах функции Римана построено решение задачи, из формулы решения которой формула решения задачи Гурса может быть получена как частный случай.

Одной из областей применения результатов, связанных с использованием метода Римана для уравнения (1), являются краевые задачи для факторизованных уравнений вида

$$\Big(\frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_n}\Big) Lu = 0,$$

где L — оператор уравнения (1). Для таких уравнений поставлены новые краевые задачи неклассического характера и получены условия их однозначной разрешимости [66, 67].

Применение метода Римана позволяет вести поиск новых возможностей решения уравнений вида (1) и граничных задач для них в явном виде. Выделено значительное число уравнений, допускающих эффективную разрешимость в терминах функции Римана [69–74]. Указанные результаты применяются и к решению в явном виде интегральных уравнений Вольтерра, в том числе с несколькими независимыми переменными [75, 76].

Наконец, был разработан векторно-матричный аналог метода Римана для некоторого класса гиперболических систем (который включает системы с кратными характеристиками). Поставлен ряд новых характеристических задач для подобных систем в пространствах $\mathbb{R}^n$ и исследован характер их разрешимости [77–81].

В последнее время на основе метода Римана развивается метод Римана—Адамара, позволяющий строить решения задач Дарбу для уравнений Бианки и систем уравнений гиперболического типа в терминах функции или матрицы Римана—Адамара [82–84].

Некоторое время, начиная с 1991 г., метод Римана для уравнений Бианки развивался в Самаре (см., например, [85, 86]). Обзор методов построения функции Римана для уравнения Бианки при $n = 2$ содержится в работе [87].

В данной работе мы останавливаемся на описании наиболее общих результатов для уравнения (1), которые позволяют применять метод Римана в разнообразных частных случаях, возникающих при изучении краевых задач для рассмотренных здесь классов гиперболических уравнений и систем.

1. Построение решения задачи Коши методом Римана

Здесь изложен процесс построения решения задачи Коши в терминах функции Римана, то есть дается решение поставленной М. К. Фаге задачи [46]: *построить в терминах функции Римана решение задачи Коши для уравнения с доминирующей частной производной в общем случае.*

Изложенные ниже результаты с полными доказательствами опубликованы в [64].

Рассмотрим уравнение (1), записанное в следующей форме

$$L(u) \equiv \sum_{\substack{0\leqslant q_i\leqslant m_i,\\ i=\overline{1,n}}} a_{q_1q_2\dots q_n}(x_1,x_2,\dots,x_n)u_{x_1^{q_1}x_2^{q_2}\dots x_n^{q_n}} = f(x_1,x_2,\dots,x_n), \qquad (3)$$

где $a_{q_1q_2\dots q_n}$, f — заданные функции; $a_{m_1m_2\dots m_n} \equiv 1$; u — искомая функция; порядок уравнения (3) равен $m = m_1+m_2+\dots+m_n$.

1.1. Основное тождество. Считаем, что коэффициенты (3) удовлетворяют включениям $a_{q_1q_2\dots q_n} \in C^{(q_1,q_2,\dots,q_n)}$, $f \in C$ в замыкании рассматриваемой области G (областью всюду будем называть открытое связное множество). Класс $C^{(q_1,q_2,\dots,q_n)}(\overline{G})$ означает существование и непрерывность всех производных $\partial^{l_1+l_2+\dots+l_n}/\partial x_1^{l_1}\partial x_2^{l_2}\dots\partial x_n^{l_n}$, $l_i=\overline{0,q_i}$, $i=\overline{1,n}$, на множестве $\overline{G}$.

Введем для (3) функцию Римана $R = R(x_1,x_2,\dots,x_n)$ как решение интегрального уравнения

$$R(x_1,x_2,\dots,x_n) + \sum_{k=1}^{n}\sum_{Q_{k,n}}\int_{\xi_{q_1}}^{x_{q_1}}\int_{\xi_{q_2}}^{x_{q_2}}\cdots\int_{\xi_{q_k}}^{x_{q_k}} F_{q_1q_2\dots q_k}(x_1,x_2,\dots,\\ x_n,\alpha_{q_1},\alpha_{q_2},\dots,\alpha_{q_k})R(x_1,x_2,\dots,x_{q_1-1},\alpha_{q_1},x_{q_1+1},\dots,\\ x_{q_k-1},\alpha_{q_k},x_{q_k+1},\dots,x_n)\,d\alpha_{q_k}\dots d\alpha_{q_2}d\alpha_{q_1} = 1, \qquad (4)$$

где вторая сумма берется по множеству всех упорядоченных наборов индексов $Q_{k,n} = \{(q_1,q_2,\dots,q_k) \mid 1\leqslant q_1<q_2<\dots<q_k\leqslant n\}$;

$$F_{q_1q_2\dots q_k}(x_1,x_2,\dots,x_n,\alpha_{q_1},\alpha_{q_2},\dots,\alpha_{q_k}) = \\ = \sum_{p_{q_1}=0}^{m_{q_1}-1}\sum_{p_{q_2}=0}^{m_{q_2}-1}\cdots\sum_{p_{q_k}=0}^{m_{q_k}-1}(-1)^{\sum\limits_{i=1}^{k}(m_{q_i}-p_{q_i})}a_{p_1p_2\dots p_n}(x_1,x_2,\dots,\\ x_{q_1-1},\alpha_{q_1},x_{q_1+1},\dots,x_{q_k-1},\alpha_{q_k},x_{q_k+1},\dots,x_n)\prod_{j=1}^{k}\frac{(x_{q_j}-\alpha_{q_j})^{m_{q_j}-p_j-1}}{(m_{q_j}-p_j-1)!},$$

причем если $i\neq q_j$, то $p_i=0$. Здесь x_i, $\alpha_i\in[\xi_i,\eta_i]$, $i=\overline{1,n}$.

Пусть $\Omega = [\xi_1,\eta_1]\times[\xi_2,\eta_2]\times\dots\times[\xi_n,\eta_n]\subset\overline{G}$. Решение (4) существует и единственно в классе $C(\Omega)$. Как обычно (например [88, с. 63]), считаем R функцией как переменных $(x_1,x_2,\dots,x_n)$, так и параметров $(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n)$:

$$R = R(x_1,x_2,\dots,x_n;\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n).$$

Из (4) следует, что $R(x_1,\dots,x_n;x_1,\dots,x_n)\equiv 1$.

Рассмотрим конструкции

$$A_{l_1 l_2 \ldots l_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n; \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) =$$
$$= \sum_{s_1=0}^{l_1} \sum_{s_2=0}^{l_2} \cdots \sum_{s_n=0}^{l_n} (-1)^{\sum_{i=1}^n s_i} (Ra_{m_1-s_1, m_2-s_2, \ldots, m_n-s_n})_{x_1^{l_1-s_1} x_2^{l_2-s_2} \ldots x_n^{l_n-s_n}}, \quad (5)$$

$$0 \leqslant l_i \leqslant m_i, \quad i = \overline{1, n}.$$

Всего имеется $(m_1+1)(m_2+1)\cdots(m_n+1)$ конструкций вида (5) (как и коэффициентов уравнения (3)), причем $A_{m_1 m_2 \ldots m_n} = 0$ есть сопряженное к (3) уравнение $L^*(R) = 0$, а $A_{00\ldots 0} \equiv R$.

Из уравнения (4) вытекают тождества

$$A_{l_1 l_2 \ldots l_n}(x_1, x_2, \ldots, x_{q_1-1}, \xi_{q_1}, x_{q_1+1}, \ldots,$$
$$x_{q_k-1}, \xi_{q_k}, x_{q_k+1}, \ldots, x_n; \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \equiv 0 \quad (6)$$

при $l_{q_1} \leqslant m_{q_1} - 1, \ldots, l_{q_k} \leqslant m_{q_k} - 1$, $l_r = m_r$, $r \neq q_i$, $i = \overline{1, k}$. Покажем это.

Дифференцируем (4) l_1 раз по x_1, l_2 раз по x_2, …, l_n раз по x_n, после чего полагаем $x_{q_1} = \xi_{q_1}$, $x_{q_2} = \xi_{q_2}, \ldots, x_{q_k} = \xi_{q_k}$, где $l_{q_1} \leqslant m_{q_1} - 1$, $l_{q_2} \leqslant m_{q_2} - 1, \ldots, l_{q_k} \leqslant m_{q_k} - 1$, а $l_r = m_r$ при $r \neq q_i$, $i = \overline{1, k}$. Тогда

$$R_{x_1^{l_1} x_2^{l_2} \ldots x_n^{l_n}} + \sum_{p_1=m_1-l_1}^{m_1-1} \sum_{p_2=m_2-l_2}^{m_2-1} \cdots \sum_{p_n=m_n-l_n}^{m_n-1} (-1)^{\sum_{i=1}^n m_i - p_i} \times$$
$$\times (Ra_{p_1 p_2 \ldots p_n})_{x_1^{l_1+p_1-m_1} x_2^{l_2+p_2-m_2} \ldots x_n^{l_n+p_n-m_n}} = 0. \quad (7)$$

Ясно, что (7) есть равенство

$$A_{l_1 l_2 \ldots l_n}(x_1, x_2, \ldots, x_{q_1-1}, \xi_{q_1}, x_{q_1+1}, \ldots,$$
$$x_{q_k-1}, \xi_{q_k}, x_{q_k+1}, \ldots, x_n; \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = 0.$$

Чтобы в этом убедиться, достаточно положить $s_1 = m_1 - p_1$, $s_2 = m_2 - p_2, \ldots$, $s_n = m_n - p_n$.

Центральную роль в дальнейшем играет тождество

$$RL(u) \equiv \sum_{\substack{p_i \leqslant m_i, \\ \sum p_i < \sum m_i, \\ 0 \leqslant l_i \leqslant 1, \\ i = \overline{1,n}}} (-1)^{\sum_{i=1}^n p_i} (A_{p_1 p_2 \ldots p_n} u_{x_1^{m_1-l_1-p_1} x_2^{m_2-l_2-p_2} \ldots x_n^{m_n-l_n-p_n}})_{x_1^{l_1} x_2^{l_2} \ldots x_n^{l_n}}, \quad (8)$$

где p_i, m_i, l_i — целые неотрицательные числа, справедливые для любой функции класса $C^{(m_1, \ldots, m_n)}$. В сумме (8) каждое слагаемое встречается лишь один раз и определяется конструкцией $A_{p_1 p_2 \ldots p_n}$ (точнее, набором $(p_1, p_2, \ldots p_n)$). Формула (8) строится по следующему правилу. Берется набор $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$, затем определяется набор $(l_1, l_2, \ldots, l_n)$ так, чтобы $p_1 + l_1 \leqslant m_1$, $p_2 + l_2 \leqslant m_2, \ldots, p_n + l_n \leqslant m_n$, при этом берутся наибольшие значения $l_1, l_2, \ldots, l_n$

(т. е. $l_i = 1$, если $p_i < m_i$; $l_i = 0$, если $p_i = m_i$). Эти наборы $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$, $(l_1, l_2, \ldots, l_n)$ однозначно определяют слагаемое из (8).

Тождество (8) доказано в [64] методом математической индукции.

1.2. Построение решения задачи Коши. В пространстве $\mathbb{R}^n$ рассмотрим поверхность S класса C^{m-1}, заданную уравнениями

$$\begin{cases} x_1 = x_1(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n-1}), \\ x_2 = x_2(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n-1}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = x_n(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n-1}), \end{cases} \quad \operatorname{rank} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial \mu_1} & \cdots & \dfrac{\partial x_n}{\partial \mu_1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial \mu_{n-1}} & \cdots & \dfrac{\partial x_n}{\partial \mu_{n-1}} \end{pmatrix} = n-1, \tag{9}$$

$(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n-1}) \in H$, где H — область пространства $\mathbb{R}^{n-1}$. Считаем, что S в каждой своей точке имеет касательную плоскость, не параллельную ни одной из координатных осей.

Выберем точку $P(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ так, чтобы плоскости $x_1 = x_1^0$, $x_2 = x_2^0, \ldots$, $x_n = x_n^0$ вырезали из поверхности S ограниченный участок S^0. Обозначим через D^0 конечную область пространства $\mathbb{R}^n$, ограниченную плоскостями $x_1 = x_1^0$, $x_2 = x_2^0$, $\ldots$, $x_n = x_n^0$ и поверхностью S^0. Считаем ориентацию области D^0 положительной.

Регулярным в области D_0 решением уравнения (3) назовем решение, непрерывное в D_0 вместе со всеми входящими в это уравнение производными.

Задача Коши. *Найти регулярное в области D^0 решение уравнения (3), удовлетворяющее условиям*

$$\left.\frac{\partial^k u}{\partial l^k}\right|_{S^0} = \psi_k, \quad k = \overline{0, m-1}, \tag{10}$$

$\psi_k \in C^{m-k}(\overline{S^0})$, *а $\vec{l}$ — заданное на S некасательное к этой поверхности поле направлений.*

Пусть поле направлений $\vec{l}$ задано вектором

$$\vec{l}\big(l_1(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n-1}), \ldots, l_n(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n-1})\big), \quad |\vec{l}| \equiv 1.$$

Введем систему координат, связанную с поверхностью S:

$$x_i = x_i(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n-1}) + l_i(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n-1})\mu_n, \quad i = \overline{1, n}, \quad \mu_n \in \mathbb{R}.$$

Поле направлений $\vec{l}$ некасательно к S, следовательно, существует обратное преобразование координат $\mu_i = \mu_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ класса C^{m-1} в окрестности поверхности S [89, с. 495].

Отметим, что значения u и ее производных на S определяются по данным (10), поскольку частные производные решения u на поверхности S по x_1, $\ldots$, x_n находятся дифференцированием $u = U(\mu_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \mu_n(x_1, \ldots, x_n))$ как сложной функции. Нетрудно заметить, что в силу условий гладкости, налагаемых на поверхность S и данные смешанной задачи, все частные производные на S^0 до порядка $(m-1)$ включительно, входящие в уравнение (3), будут непрерывными функциями.

Решение задачи Коши существует и единственно, так как заменой

$$v = u_{x_1^{m_1} x_2^{m_2} \ldots x_n^{m_n}}$$

задача Коши сводится к интегральному уравнению с частными интегралами относительно функции v, решение которого существует и единственно в классе непрерывных функций. Покажем это. Поверхность S может быть задана уравнениями $x_i = \sigma_i(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$. Введем интегральные операторы

$$I_j\varphi(x_1, \ldots, x_n) = \int_{\sigma_j}^{x_j} \varphi(x_1, \ldots, x_{j-1}, \alpha_j, x_{j+1}, x_n)\, d\alpha_j.$$

Тогда

$$u_{x_1^{m_1-k_1} x_2^{m_2-k_2} \ldots x_n^{m_n-k_n}} = g(x_1, \ldots, x_n) + I_1^{k_1} I_2^{k_2} \ldots I_n^{k_n} v(x_1, \ldots, x_n), \tag{11}$$

где функция $g(x_1, \ldots, x_n)$, очевидно, определяется по известным значениям частных производных функции u на поверхности S. Учтем, что

$$I_j^{k_j} v(x_1, \ldots, x_n) = \int_{x_j^1}^{x_j} \frac{(x_j - \alpha_j)^{k_j - 1}}{(k_j - 1)!} v(x_1, \ldots, x_{j-1}, \alpha_j, x_{j+1}, x_n)\, d\alpha_j.$$

Подставляя (11) в (3), получим интегральное уравнение относительно функции v:

$$\begin{aligned} v(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \sum_{k=1}^{n} \sum_{Q_{k,n}} \int_{\sigma_{q_1}}^{x_{q_1}} \int_{\sigma_{q_2}}^{x_{q_2}} \cdots \int_{\sigma_{q_k}}^{x_{q_k}} \Phi_{q_1 q_2 \ldots q_k}(x_1, x_2, \ldots, \\ x_n, \alpha_{q_1}, \alpha_{q_2}, \ldots, \alpha_{q_k}) v(x_1, x_2, \ldots, x_{q_1 - 1}, \alpha_{q_1}, x_{q_1 + 1}, \ldots, \\ x_{q_k - 1}, \alpha_{q_k}, x_{q_k + 1}, \ldots, x_n) d\alpha_{q_k} \ldots d\alpha_{q_2} d\alpha_{q_1} = f_1(x_1, \ldots, x_n), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Phi_{q_1 q_2 \ldots q_k}(x_1, x_2, \ldots, x_n, \alpha_{q_1}, \alpha_{q_2}, \ldots, \alpha_{q_k}) = \\ &\quad = \sum_{p_{q_1}=0}^{m_{q_1}-1} \sum_{p_{q_2}=0}^{m_{q_2}-1} \cdots \sum_{p_{q_k}=0}^{m_{q_k}-1} a_{p_1 p_2 \ldots p_n}(x_1, \ldots, x_n) \prod_{j=1}^{k} \frac{(x_{q_j} - \alpha_{q_j})^{m_{q_j} - p_{q_j} - 1}}{(m_{q_j} - p_{q_j} - 1)!}, \end{aligned}$$

причем если $i \neq q_j$, то $p_i = m_i$. Очевидно, f_1 — известная непрерывная функция. Это уравнение Вольтерра с непрерывными ядрами и свободным членом (как и приведенное выше уравнение (4)). Его решение существует и единственно в классе непрерывных функций.

По известной функции v однозначно восстанавливаем функцию u в области D_0, используя известные значения u и ее производных на S^0. Ясно, что найденная таким образом функция u является регулярным решением уравнения (3).

Проведем через точку $M(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \in D^0$ плоскости $x_1 = \xi_1$, $x_2 = \xi_2, \ldots$, $x_n = \xi_n$. Получим область $D \subset D^0$, граница которой образована указанными плоскостями и частью поверхности S^0, которую обозначим через S^1. Ясно, что для решения задачи Коши достаточно найти значение решения уравнения (3) в точке M. Это достигается путем интегрирования тождества (8) по области D с использованием общей формулы Стокса:

$$\int_D \Big(\sum_{i=1}^{k} \frac{\partial A_i}{\partial x_i}\Big) dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_k =$$
$$= \int_{\partial D} \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} A_i dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \ldots \wedge dx_k, \quad (12)$$

где ∂D — граница области D.

Введем следующие обозначения:

$$Q = \{1, 2, \ldots, n\},$$

$$Q_n^{l,l+k} = \big\{(q_1, q_2, \ldots, q_n) \mid \{q_j \mid 1 \leqslant j \leqslant n\} = \{1, 2, \ldots, n\},$$
$$q_1 < \cdots < q_l, q_{l+1} < \cdots < q_{l+k},\, q_{l+k+1} < \cdots < q_n\big\},$$

$$B_{q_1} = \sum_{\substack{0 \leqslant l_{q_i} \leqslant 1, \\ i=\overline{2,n},\, l_{q_1}=1, \\ p_r \leqslant m_r,\, r=\overline{1,n}}} \frac{(-1)^{\sum_{i=1}^n p_i}}{\sum_{i=1}^n l_{q_i}} \times$$
$$\times \Big(A_{p_1 \ldots p_n} u_{x_{q_1}^{m_{q_1}-p_{q_1}-1} x_{q_2}^{m_{q_2}-p_{q_2}-l_{q_2}} \ldots x_{q_n}^{m_{q_n}-p_{q_n}-l_{q_n}}}\Big)_{x_{q_2}^{l_{q_2}} \ldots x_{q_n}^{l_{q_n}}},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ,$$

$$B_{q_1 \ldots q_k} = \sum_{\substack{0 \leqslant l_{q_i} \leqslant 1, \\ i=\overline{k+1,n}, \\ l_{q_j}=1,\, j=\overline{1,k}, \\ p_r \leqslant m_r,\, r=\overline{1,n}}} \frac{(-1)^{\sum_{i=1}^n p_i}}{\prod_{j=1}^k \sum_{i=j}^n l_{q_i}} \times$$
$$\times \Big(A_{p_1 \ldots p_n} u_{x_{q_1}^{m_{q_1}-p_{q_1}-1} \ldots x_{q_k}^{m_{q_k}-p_{q_k}-1} x_{q_{k+1}}^{m_{q_{k+1}}-p_{q_{k+1}}-l_{q_{k+1}}} \ldots x_{q_n}^{m_{q_n}-p_{q_n}-l_{q_n}}}\Big)_{x_{q_{k+1}}^{l_{q_{k+1}}} \ldots x_{q_n}^{l_{q_n}}}.$$

Конструкции $B_{q_1 \ldots q_k}$, получающиеся перестановкой индексов, совпадают.

Рассмотрим совокупность ориентированных многообразий, обозначаемых символами S^1, D и ∂D с индексами, являющимися комбинациями из 1, 2, ..., $n-1$ различных цифр 1, 2, ..., n (каждая из которых соответствует номеру переменной). При этом S^1- и D-многообразия с индексами являются пересечениями соответственно S^1 и D с соответствующими плоскостями, а ∂D-многообразия с индексами — краями соответствующих D-многообразий. Например S^1_{12} — множество точек поверхности S^1, лежащих в плоскостях $x_1 = \xi_1$

и $x_2 = \xi_2$. Ясно, что геометрически S^1-многообразия содержатся в ∂D-многообразиях с теми же индексами, а D-многообразия — в ∂D-многообразиях с теми же индексами без последнего. Например, S^1_2 — часть ∂D_2, D_{312} — часть ∂D_{31}. Ориентации ∂D-многообразий считаем согласованными с ориентациями соответствующих D-многообразий. В результате будут определены все введенные ориентированные многообразия. Два из рассмотренных как D, так и S^1-многообразия геометрически совпадают, если их индексы образованы одним и тем же неупорядоченным набором переменных. При этом если индексы одного из них получаются четной перестановкой индексов другого, то ориентации этих многообразий совпадают, а в случае нечетной перестановки ориентации противоположны.

Запишем правую часть тождества (8) в дивергентной форме:

$$RL(u) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial B_i}{\partial x_i}. \tag{13}$$

Пусть u — регулярное решение уравнения (3). Тогда, интегрируя (13) по области D и применяя общую формулу Стокса (12) при $k = n$, получим

$$\int_D Rf\,dx_1 dx_2 \dots dx_n = \int_{\partial D} \sum_{Q_n^{1,1}} (-1)^{q_1-1} B_{q_1} dx_{q_2} \wedge \dots \wedge dx_{q_n}.$$

Заменим интеграл по множеству ∂D суммой интегралов по его составляющим:

$$\int_{\partial D} \sum_{Q_n^{1,1}} (-1)^{q_1-1} B_{q_1} dx_{q_2} \wedge \dots \wedge dx_{q_n} = \sum_{Q_n^{1,1}} (-1)^{q_1-1} \int_{D_{q_1}} B_{q_1} dx_{q_2} \wedge \dots \wedge dx_{q_n} +$$
$$+ \sum_{Q_n^{1,1}} (-1)^{q_1-1} \int_{S^1} B_{q_1} dx_{q_2} \wedge \dots \wedge dx_{q_n}. \tag{14}$$

Учтем, что входящие в B_{q_1} слагаемые, соответствующие $l_{q_2} = l_{q_3} = \ldots = l_{q_n} = 0$, тождественно равны нулю на D_{q_1} в силу (6). Поэтому B_{q_1} на D_{q_1} можно снова записать в дивергентном виде:

$$B_{q_1} = \sum_{i \in Q \setminus \{q_1\}} \frac{\partial B_{q_1 i}}{\partial x_i}. \tag{15}$$

Подставив (15) в первую сумму правой части (14), применяем формулу Стокса:

$$I_1 = \sum_{Q_n^{1,1}} (-1)^{q_1-1} \int_{D_{q_1}} B_{q_1} dx_{q_2} \wedge \dots \wedge dx_{q_n} =$$
$$= 2! \sum_{Q_n^{2,1}} \sigma(q_1, \dots, q_n) \int_{D_{q_1 q_2}} B_{q_1 q_2} dx_{q_3} \wedge \dots \wedge dx_{q_n} +$$

$$+\sum_{Q_n^{1,2}}\sigma(q_1,\dots,q_n)\int_{S_{q_1}^1}B_{q_1q_2}dx_{q_3}\wedge\dots\wedge dx_{q_n},\quad(16)$$

где $\sigma(q_1,\dots,q_n)$ — знак перестановки $\binom{1\dots n}{q_1\dots q_n}$. При получении (16) мы перешли от интеграла по множеству D_{q_1} к интегралу по его границе ∂D_{q_1}, разбив затем множество ∂D_{q_1} на его составляющие. При этом учтено, что D_{ij} и D_{ji} совпадают как множества, но имеют противоположные ориентации. То есть в процессе вычислений появляются одинаковые интегралы (их количество равно 2) по одной области с точностью до ориентации. Нетрудно заметить, что с учетом знаков эти члены оказываются равными, поэтому мы оставляем интеграл с коэффициентом 2! по D-многообразию с упорядоченным набором индексов. Знак перед ним можно записать в виде $\sigma(q_1,\dots,q_n)$.

Далее мы будем продолжать этот процесс, то есть заменять интегралы по областям $\partial D_{q_1\dots q_p}$ суммами интегралов по их составляющим, а затем представлять подынтегральные выражения интегралов по областям $D_{q_1\dots q_pq_{p+1}}$ в дивергентном виде (что возможно в силу тождеств (6)). При этом, как уже было указано выше, будут появляться одинаковые интегралы. Например, при фиксированном множестве $\{q_i\mid 1\leqslant i\leqslant k\}$ будет $k!$ интегралов от одного выражения по областям $D_{h_1\dots h_k}$, где $(h_1,\dots,h_k)$ — всевозможные перестановки $(q_1,\dots,q_k)$. С учетом знаков все эти $k!$ интегралов равны между собой.

Итак, слагаемые в $B_{q_1q_2}$ при $l_{q_3}=l_{q_4}=\dots=l_{q_n}=0$ тождественно равны нулю на $D_{q_1q_2}$ в силу (6), поэтому $B_{q_1q_2}$ на $D_{q_1q_2}$ можно записать в дивергентном виде:

$$B_{q_1q_2}=\sum_{i\in Q\setminus\{q_1,q_2\}}\frac{\partial B_{q_1q_2i}}{\partial x_i}.$$

Тогда

$$I_2=2!\sum_{Q_n^{2,1}}\sigma(q_1,\dots,q_n)\int_{D_{q_1q_2}}B_{q_1q_2}dx_{q_3}\wedge\dots\wedge dx_{q_n}=$$

$$=3!\sum_{Q_n^{3,1}}\sigma(q_1,\dots,q_n)\int_{D_{q_1q_2q_3}}B_{q_1q_2q_3}dx_{q_4}\wedge\dots\wedge dx_{q_n}+$$

$$+2!\sum_{Q_n^{2,2}}\sigma(q_1,\dots,q_n)\int_{S_{q_1q_2}^1}B_{q_1q_2q_3}dx_{q_4}\wedge\dots\wedge dx_{q_n}.$$

Дальнейший ход преобразований ясен из предыдущего. Для завершения процесса получения окончательной формулы надо определиться, каким будет последний шаг. Нетрудно видеть, что последним шагом будут одномерные интегралы. Очевидно, имеем

$$I_{n-2}=(n-1)!\sum_{Q_n^{n-1,1}}\sigma(q_1,\dots,q_n)\int_{D_{q_1\dots q_{n-1}}}B_{q_1\dots q_{n-1}}dx_{q_n}+$$

$$+(n-2)!\sum_{Q_n^{n-2,2}}\sigma(q_1,\dots,q_n)\int_{S_{q_1\dots q_{n-2}}^1}B_{q_1\dots q_{n-1}}dx_{q_n},$$

$$I_{n-1}=(n-1)!\sum_{Q_n^{n-1,1}}\sigma(q_1,\ldots,q_n)\int_{D_{q_1\ldots q_{n-1}}}\frac{\partial B_{q_1\ldots q_n}}{\partial x_{q_n}}dx_{q_n}=$$

$$=(n-1)!nB_{1\ldots n}(M)-(n-1)!\sum_{Q_n^{n-1,1}}B_{1\ldots n}(S^1_{q_1q_2\ldots q_{n-1}})=$$

$$=\sum_{\substack{p_i<m_i,\\ i=\overline{1,n}}}(-1)^{\sum_{i=1}^n p_i}(A_{p_1p_2\ldots p_n}u_{x_1^{m_1-p_1-1}x_2^{m_2-p_2-1}\ldots x_n^{m_n-p_n-1}})(M)-$$

$$-\frac{1}{n}\sum_{Q_n^{n-1,1}}\sum_{\substack{p_i<m_i,\\ i=\overline{1,n}}}(-1)^{\sum_{i=1}^n p_i}(A_{p_1p_2\ldots p_n}u_{x_1^{m_1-p_1-1}\ldots x_n^{m_n-p_n-1}})(S^1_{q_1q_2\ldots q_{n-1}})=$$

$$=u_{x_1^{m_1-1}x_2^{m_2-1}\ldots x_n^{m_n-1}}(M)-$$

$$-\frac{1}{n}\sum_{Q_n^{n-1,1}}\sum_{\substack{p_i<m_i,\\ i=\overline{1,n}}}(-1)^{\sum_{i=1}^n p_i}(A_{p_1p_2\ldots p_n}u_{x_1^{m_1-p_1-1}\ldots x_n^{m_n-p_n-1}})(S^1_{q_1q_2\ldots q_{n-1}}).$$

Здесь снова учтены тождества (6) при $x_1=\xi_1,\ \ldots,\ x_n=\xi_n$.

Окончательно получаем

$$u_{x_1^{m_1-1}x_2^{m_2-1}\ldots x_n^{m_n-1}}(M)=$$
$$=\frac{1}{n}\sum_{Q_n^{n-1,1}}\sum_{\substack{p_i<m_i,\\ i=\overline{1,n}}}(-1)^{\sum_{i=1}^n p_i}(A_{p_1p_2\ldots p_n}u_{x_1^{m_1-p_1-1}\ldots x_n^{m_n-p_n-1}})(S^1_{q_1q_2\ldots q_{n-1}})-$$
$$-\sum_{k=0}^{n-2}\sum_{Q_n^{k,2}}\sigma(q_1,q_2,\ldots,q_n)k!\int_{S^1_{q_1q_2\ldots q_k}}B_{q_1q_2\ldots q_kq_{k+1}}dx_{q_{k+2}}\wedge\cdots\wedge dx_{q_n}+$$
$$+\int_D Rf\,dx_1dx_2\ldots dx_n. \quad (17)$$

Формулу (17) можно переписать в виде

$$u_{x_1^{m_1-1}x_2^{m_2-1}\ldots x_n^{m_n-1}}(M)=\Phi(M), \quad (18)$$

где правая часть (17) $\Phi(M)$ содержит значения u и ее производных на S. Эти значения могут быть определены по данным Коши (10). Действительно, частные производные решения u на поверхности S по $x_1,\ \ldots,\ x_n$ находятся дифференцированием $u=U(\mu_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,\mu_n(x_1,\ldots,x_n))$ как сложной функции.

Из приведенных рассуждений следует

Теорема 1.1. *Решение задачи Коши для уравнения* (3) *с граничными условиями* (10) *существует, единственно и его можно вычислить, используя формулу* (18).

Отметим, что в работе [65] на основе изложенных выше результатов для уравнения (1) рассмотрена задача, названная смешанной, из построенного решения которой как частный случай получается решение задачи Гурса.

1.3. Задача на плоскости. В качестве примера рассмотрим один частный случай, когда число независимых переменных равно двум. Предложенную выше схему построения решения задачи Коши применим к уравнению

$$L(u) \equiv u_{xxy} + a_{20}u_{xx} + a_{11}u_{xy} + a_{10}u_x + a_{01}u_y + a_{00}u = f. \tag{19}$$

Считаем, что выполняются включения $a_{ij} \in C^{(i,j)}$, $f \in C$.

Частным случаем (19) является уже упомянутое выше уравнение Аллера

$$u_t = (au_x + bu_{xt})_x.$$

Рассмотрим треугольную область D плоскости (ξ, η), ограниченную характеристиками $\xi = x_0$, $\eta = y_0$, $x_0 > 0$, $y_0 > 0$, и отрезком кривой Σ: $\eta = \sigma(\xi)$, $\sigma'(\xi) < 0$, класса C^2.

Сформулируем задачу Коши: найти в D регулярное решение (19), удовлетворяющее условиям

$$u\big|_\Sigma = u_0(\xi), \quad \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_\Sigma = u_1(\xi), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial n^2}\Big|_\Sigma = u_2(\xi). \tag{20}$$

Здесь $\vec{n}$ — единичный вектор внешней нормали:

$$\vec{n} = (\sigma'/\Delta, -1/\Delta), \quad \Delta = \sqrt{1 + \sigma'^2(x)};$$

$$u_0 \in C^2[0, x_0], \quad u_1 \in C^1[0, x_0], \quad u_2 \in C[0, x_0].$$

Тождество (8) принимает вид

$$RL(u) \equiv (Ru_x)_{xy} - (A_{10}u)_{xy} - (A_{01}u_x)_x + (A_{11}u)_x + (A_{20}u)_y, \tag{21}$$

где

$$A_{10} = R_x - a_{11}R, \quad A_{01} = R_y - a_{20}R,$$
$$A_{11} = R_{xy} - (a_{20}R)_x - (a_{11}R)_y + a_{10}R,$$
$$A_{20} = R_{xx} - (a_{11}R)_x + a_{01}R.$$

Здесь R зависит от (x, y, ξ, η), а коэффициенты уравнения — от (x, y); $u(x, y)$ — любая функция из $C^{(2,1)}$.

Функция Римана является решением уравнения

$$v(x,y) - \int_\eta^y a_{20}(x,\beta)v(x,\beta)\,d\beta - \int_\xi^x \big[a_{11}(\alpha,y) - (x-\alpha)a_{01}(\alpha,y)\big]v(\alpha,y)\,d\alpha +$$
$$+ \int_\xi^x \int_\eta^y \big[a_{10}(\alpha,\beta) - (x-\alpha)a_{00}(\alpha,\beta)\big]v(\alpha,\beta)\,d\beta d\alpha = 1. \tag{22}$$

Из (22) следует, что

$$\begin{gathered} A_{10}(x,y,x,y) \equiv A_{01}(x,y,x,\eta) \equiv A_{11}(x,y,x,\eta) \equiv A_{20}(x,y,\xi,y) \equiv 0, \\ R(x,y,x,y) \equiv 1. \end{gathered} \tag{23}$$

Запишем (21) в дивергентной форме:

$$RL(u) \equiv \frac{\partial B_1}{\partial x} + \frac{\partial B_2}{\partial y},$$

где

$$B_1 = \frac{1}{2}(Ru_x)_y - \frac{1}{2}(A_{10}u)_y - A_{01}u_x + A_{11}u,$$

$$B_2 = \frac{1}{2}(Ru_x)_x - \frac{1}{2}(A_{10}u)_x + A_{20}u.$$

Рассмотрим точку (x, y) из D. Пусть $y_1 = \sigma(x)$, $y = \sigma(x_1)$; D_{xy} и Σ_{xy} — части области D и кривой Σ соответственно, лежащие между характеристиками $\xi = x$, $\eta = y$. Поменяв в (21) ролями переменные ξ с x, η с y, проинтегрируем (21) по (ξ, η) по области D_{xy}. Использовав формулу Грина, получим

$$\iint\limits_{D_{xy}} Rf dxdy = \int_{x_1}^{x} B_2\Big|_{\eta=y} d\xi + \int_{y_1}^{y} B_1\Big|_{\xi=x} d\eta + \int_{\Sigma_{xy}} B_1 d\eta - B_2 d\xi.$$

Учитывая тождества (23), после очевидных преобразований получим частный случай формулы (17):

$$u_\xi(x, y) = \frac{1}{2}Ru_x(x_1, y, x, y) + \frac{1}{2}Ru_x(x, y_1, x, y) - \frac{1}{2}A_{10}u(x_1, y, x, y) - \\ - \frac{1}{2}A_{10}u(x, y_1, x, y) - \int_{\Sigma_{xy}} B_1 d\eta - B_2 d\xi + \iint\limits_{D_{xy}} Rf d\xi d\eta. \quad (24)$$

Формула (24) содержит заданные на Σ значения u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}. В данном случае явный вид уравнений, из которых по данным Коши могут быть найдены эти значения, не является слишком громоздким. Запишем эти уравнения. Из (20) получаем

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial x} + \sigma' \frac{\partial u}{\partial y} = u_0', \quad \frac{\sigma'}{\Delta}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{\Delta}\frac{\partial u}{\partial y} = u_1, \\
&\sigma'' \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\sigma' \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \sigma'^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u_0'', \\
&\frac{\sigma''\Delta - \sigma'\Delta'}{\Delta^2}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\Delta'}{\Delta^2}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\sigma'}{\Delta}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\sigma'^2 - 1}{\Delta}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\sigma'}{\Delta}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u_1', \\
&\frac{\sigma'^2}{\Delta^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{2\sigma'}{\Delta^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{1}{\Delta^2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u_2,
\end{aligned}$$

где все значения берутся на кривой S^0. Определитель этой системы

$$\frac{1}{\Delta^4}\begin{vmatrix}
1 & \sigma' & 0 & 0 & 0 \\
\sigma' & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \sigma'' & 1 & 2\sigma' & \sigma'^2 \\
\dfrac{\sigma''\Delta - \sigma'\Delta'}{\Delta} & \dfrac{\Delta'}{\Delta} & \sigma' & \sigma'^2 - 1 & -\sigma' \\
0 & 0 & \sigma'^2 & -2\sigma' & 1
\end{vmatrix} = \frac{(1+\sigma'^2)^4}{\Delta^4} = (1+\sigma'^2)^2 > 0,$$

следовательно, по условиям (20) определяются все требуемые для (24) функции.

1.4. Исследование матричных уравнений. Изложенная выше схема рассуждений с очевидными изменениями может быть распространена на случай матричного уравнения (то есть системы) подобно тому, как это сделано в [88, с. 62–66] для гиперболического уравнения с двумя независимыми переменными.

А. А. Андреевым и Ю. О. Яковлевой была рассмотрена система линейных уравнений гиперболического типа третьего порядка частного вида с кратными характеристиками [90]. Ими использовалось то обстоятельство, что с помощью интерполяционного многочлена Лагранжа—Сильвестра можно определить значение аналитической функции на множестве постоянных квадратных матриц. Если ограничиться множеством матриц, являющихся значениями некоторых аналитических функций от одной матрицы, то определение легко обобщается на случай аналитических функций многих комплексных переменных, что позволяет, в свою очередь, доопределять целый ряд специальных функций на матричные значения входящих в них параметров.

На плоскости двух независимых переменных $(x,\ y)$ рассмотрим две системы уравнений гиперболического типа

$$U_{xxy} + \Omega_1 U = 0, \tag{25}$$

$$U_{xxyy} + \Omega_2 U = 0, \tag{26}$$

где $U(x,y)$ — искомая m-мерная вектор-функция; Ω_1, Ω_2 — постоянные действительные матрицы размера $(m \times m)$.

Матрица Римана для уравнения (25) имеет вид [90]

$$V(x_0,y_0;x,y) = (x-x_0)\,{}_0F_2\Big(1;\frac{3}{2};\frac{(x-x_0)^2(y-y_0)}{4}\Omega_1\Big),$$

где ${}_0F_2(a,b,A)$ — гипергеометрическая функция матричного аргумента [91]. Матрица Римана для (26) также строится в терминах обобщенной гипергеометрической функции матричного аргумента и имеет вид [92]

$$V(x_0,y_0;x,y) = (x-x_0)(y-y_0)\,{}_0F_3\Big(1,\frac{3}{2},\frac{3}{2};\frac{(x-x_0)^2(y-y_0)^2}{16}\Omega_2\Big).$$

Опираясь на полученные результаты для уравнений (25), (26), в явном виде были построены решения задач Гурса и Коши.

2. Метод Римана для одного класса гиперболических систем

Здесь излагается метод Римана для системы

$$u_{lx_j} = \sum_{i=1}^{m} a_{li}(x_1,\ldots,x_n)u_i + f_l(x_1,\ldots,x_n), \quad 1 \leqslant l \leqslant m = \sum_{i=1}^{n} k_i, \tag{27}$$

если $1 \leqslant l \leqslant k_1$, то $j=1$; если $k_1+1 \leqslant l \leqslant k_1+k_2$, то $j=2$; если $k_1+k_2+1 \leqslant l \leqslant k_1+k_2+k_3$, то $j=3$; $\ldots$; если $\sum_{i=1}^{n-1} k_i + 1 \leqslant l \leqslant \sum_{i=1}^{n} k_i$, то $j=n$. Изложенные ниже результаты с полными доказательствами опубликованы в [77].

Ранее ряд авторов исследовал систему уравнений первого порядка

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(x_1, \dots, x_n) u_k + f_i(x_1, \dots, x_n), \quad i = 1, \dots, n, \tag{28}$$

которая представляет интерес, в частности, с точки зрения применения получаемых результатов к изучению важных в теоретическом и практическом отношении дифференциальных уравнений смешанного типа.

Аналогичная система высокого порядка имеет, очевидно, вид

$$\frac{\partial^{k_s} v_s}{\partial x_s^{k_s}} = f_s\Big(x_1, \dots, x_n, v_1, \dots, \frac{\partial^{k_1-1} v_1}{\partial x_s^{k_1-1}}, \dots, v_n, \dots, \frac{\partial^{k_n-1} v_n}{\partial x_s^{k_n-1}}\Big), \tag{29}$$
$$s = 1, \dots, n,$$

где f_s — линейные относительно аргументов $v_1, \dots, \frac{\partial^{k_n-1} v_n}{\partial x_s^{k_n-1}}$ функции. Путем введения новых искомых функций можно представить (29) как частный случай системы (27).

Метод Римана для систем дифференциальных уравнений с двумя независимыми переменными был разработан Э. Хольмгреном [93]. В работе Б. Н. Бурмистрова [94] результаты Хольмгрена развивались с целью решения задачи Коши, возникшей в связи с исследованием граничной задачи для системы уравнений смешанного типа на плоскости.

Вместе с тем многие авторы исследовали системы дифференциальных уравнений с частными производными, не прибегая к схеме, предложенной Э. Хольмгреном. Так, в работах Т. В. Чекмарева [95,96] решение задачи Гурса для (28) с условиями

$$u_i|_{x_i = x_i^0} = \varphi_i(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n), \quad i = 1, \dots, n,$$

строится методом последовательных приближений. Отметим также работу [97], в которой были найдены интегральные представления решений задач Коши и Гурса для (28) при $n = 2$, позволяющие установить их структурные свойства, а также работы Р. К. Романовского, Е. В. Воробьевой, Ю. А. Медведева, в которых исследованы начально-краевые задачи и задачи оптимального управления для гиперболических систем (с использованием определенных В. К. Романовским матриц Римана), устойчивость и экспоненциальная дихотомия решений [98–101].

Таким образом, система (27) может рассматриваться как обобщение ряда частных случаев, изучавшихся в различных аспектах.

2.1. Существование и единственность решений задач Гурса и Коши. Рассмотрим систему уравнений, вообще говоря, с кратными характеристиками (27). Далее всюду предполагается, что все a_{li}, f_l непрерывны в замыкании рассматриваемой области. Будем называть регулярным в области D решение (27), непрерывное в D, вместе со всеми входящими в систему производными:

$$u_l \in C(D), \quad u_{lx_j} \in C(D), \quad l = \overline{1,m}, \quad \sum_{i=1}^{j-1} k_i + 1 \leqslant l \leqslant \sum_{i=1}^{j} k_i.$$

Пусть $G = \{x_i^0 < x_i < x_i^1,\ i = \overline{1,n}\}$. Обозначим через X_j грани G при $x_j = x_j^0$.

Задача Гурса. *Найти регулярное в области G решение системы* (27), *удовлетворяющее условиям*

$$u_l\big|_{\overline{X}_j} = \varphi_l(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n), \quad l = \overline{1, m}, \tag{30}$$

$\varphi_l \in C(\overline{X}_j)$, *где связь между l и j дается формулой* (27).

Решение задачи Гурса существует и единственно. Действительно, сведем (27) с условиями (30) к системе интегральных уравнений

$$u_l = \varphi_l + \int_{x_j^0}^{x_j} \left(\sum_{i=1}^{m} a_{li} u_i + f_l \right) d\alpha_j, \quad l = \overline{1, m}. \tag{31}$$

Решение системы (31) существует и единственно в $C(\overline{G})$ (это можно доказать методом последовательных приближений). Очевидно, система (31) равносильна задаче Гурса (27), (30).

Перейдем к постановке задачи Коши. В ориентированном системой координат $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ пространстве $\mathbb{R}^n$ рассмотрим поверхность S класса C^1, заданную уравнениями (9). Считаем, что S в каждой своей точке имеет касательную плоскость, не параллельную ни одной из координатных осей. Через точку $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ проведем плоскости $x_1 = x_1^0$, $x_2 = x_2^0$, …, $x_n = x_n^0$. Обозначим S^0 участок поверхности S, вырезанный этими плоскостями, D_0 — конечную область пространства $\mathbb{R}^n$, ограниченную плоскостями $x_1 = x_1^0$, $x_2 = x_2^0, \dots$, $x_n = x_n^0$ и поверхностью S^0, ∂D_0 — край D_0. Считаем ориентацию области D_0 положительной.

Задача Коши. *Найти регулярное в D_0 решение системы* (27), *удовлетворяющее на поверхности S условиям*

$$u_l\big|_{\overline{S^0}} = u_{l0}, \quad l = \overline{1, m}, \quad u_{l0} \in C(\overline{S^0}). \tag{32}$$

Отметим, что поверхность S допускает различные формы записи через переменные x_1, …, x_n: $x_1 = \sigma_1(x_2, \dots, x_n)$, $x_2 = \sigma_2(x_1, x_3, \dots, x_n)$, …, $x_n = \sigma_n(x_1, \dots, x_{n-1})$. Поэтому мы можем считать, что функции u_{l0} зависят от любого набора $(n-1)$ переменных из числа x_1, …, x_n.

Существование и единственность решения задачи Коши доказывается так же, как и в случае задачи Гурса. Для определенности будем считать, что в области D_0 выполняются неравенства

$$x_1 > \sigma_1(x_2, \dots, x_n), \quad x_2 > \sigma_2(x_1, x_3, \dots, x_n), \quad \dots, \quad x_n > \sigma_n(x_1, \dots, x_{n-1}).$$

Тогда система (27) с условиями (32) сводится к системе интегральных уравнений

$$u_l = u_{l0} + \int_{\sigma_j}^{x_j} \left(\sum_{i=1}^{m} a_{li} u_i + f_l \right) d\alpha_j, \quad l = \overline{1, m}, \tag{33}$$

где связь между l и j снова дается формулой (27).

Как уже было изложено выше, решение (33) существует и единственно в $C(\overline{D}_0)$. Система (33) равносильна задаче Коши (27), (32).

2.2. Построение решений задач в терминах матрицы Римана. Перепишем (27) в векторно-матричной форме:

$$L(\mathbf{U}) = \mathbf{F}, \quad L(\mathbf{U}) \equiv \sum_{i=1}^{n} \mathbf{A}_i \mathbf{U}_{x_i} - \mathbf{B}\mathbf{U}, \quad \mathbf{U} = \mathrm{colon}(u_1, \ldots, u_m).$$

Здесь $\mathbf{A}_i$ — постоянные диагональные матрицы, $\mathbf{A}_i = \mathrm{diag}(\alpha_1^i, \alpha_2^i, \ldots, \alpha_n^i)$, причем $\alpha_s^1 = 1$ при $1 \leqslant s \leqslant k_1$, $\alpha_s^2 = 1$ при $k_1 + 1 \leqslant s \leqslant k_1 + k_2$, …, $\alpha_s^n = 1$ при $\sum_{i=1}^{n-1} k_i + 1 \leqslant s \leqslant \sum_{i=1}^{n} k_i$, остальные диагональные элементы матриц $\mathbf{A}_i$ равны нулю; $\mathbf{B} = (a_{li})$, a_{li} — коэффициенты системы (27), $l = \overline{1, m}$, $i = \overline{1, m}$; $\mathbf{F} = \mathrm{colon}(f_1, f_2, \ldots, f_m)$.

Введем матрицу Римана

$$\mathbf{R} = \mathrm{colon}(\mathbf{R}_1, \ldots, \mathbf{R}_m),$$

где $\mathbf{R}_i(x_1, \ldots, x_n, \xi_1, \ldots, \xi_n) = (r_{i1}, \ldots, r_{im})$, $i = \overline{1, m}$, являются решениями систем

$$r_{ij}(x_1, \ldots, x_n) = \delta_{ij} - \int_{\xi_p}^{x_p} \Bigg(\sum_{q=1}^{m} a_{qj}(x_1, \ldots, x_{p-1}, \eta_p, x_{p+1}, \ldots, x_n) \times \\ \times r_{iq}(x_1, \ldots, x_{p-1}, \eta_p, x_{p+1}, \ldots, x_n) \Bigg) d\eta_p, \quad (34)$$

$$\sum_{q=1}^{p-1} k_q + 1 \leqslant j \leqslant \sum_{q=1}^{p} k_q, \quad p = \overline{1, n},$$

где δ_{ij} — символ Кронекера, a_{qj} — коэффициенты системы (27). Решения систем (34) при каждом i существуют и единственны в классе непрерывных функций. Дифференцируя (34), получаем, что по первым n аргументам $(x_1, \ldots, x_n)$ матрица $\mathbf{R}$ удовлетворяет сопряженной к (27) системе

$$L^*(\mathbf{V}) = 0, \quad L^*(\mathbf{V}) \equiv -\sum_{i=1}^{n} (\mathbf{V}\mathbf{A}_i)_{x_i} - \mathbf{V}\mathbf{B}.$$

Для любого вектора $\mathbf{U} \in C^1$ справедливо тождество

$$\mathbf{R}L(\mathbf{U}) = \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{R}\mathbf{A}_i\mathbf{U})_{x_i}. \quad (35)$$

Действительно,

$$\sum_{i=1}^{n} (\mathbf{R}\mathbf{A}_i\mathbf{U})_{x_i} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{R}\mathbf{A}_i\mathbf{U}_{x_i} + \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{R}\mathbf{A}_i)_{x_i}\mathbf{U} = \\ = \mathbf{R}L(\mathbf{U}) + \mathbf{R}\mathbf{B}\mathbf{U} + \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{R}\mathbf{A}_i)_{x_i}\mathbf{U} = \\ = \mathbf{R}L(\mathbf{U}) - L^*(\mathbf{R})\mathbf{U} = \mathbf{R}L(\mathbf{U}).$$

Далее используется общая формула Стокса

$$\int_H \left(\sum_{i=1}^{k} \frac{\partial F_i}{\partial x_i}\right) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k =$$
$$= \int_{\partial H} \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} F_i dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \cdots \wedge dx_k.$$

Перейдем теперь к выводу формул решения задач.

2.2.1. Задача Гурса. Пусть $M(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \in G$. Считая в тождестве (35) матрицу $\mathbf{U}$ решением системы (27), проинтегрируем (35) по области $G_1 = \{x_i^0 < x_i < \xi_i,\ i = \overline{1,n}\}$:

$$\int_{G_1} \mathbf{RF} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n = \int_{G_1} \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{RA}_i \mathbf{U})_{x_i} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n.$$

По общей формуле Стокса

$$\int_{G_1} \mathbf{RF} dx_1 \ldots dx_n =$$
$$= \int_{\partial G_1} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \mathbf{RA}_i \mathbf{U} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \cdots \wedge dx_n. \quad (36)$$

Найдем значение $u_k(M)$. Пусть в (27) входит производная функции u_k по переменной x_s. Ясно, что номера s и k связаны соотношением

$$\sum_{i=1}^{s-1} k_i + 1 \leqslant k \leqslant \sum_{i=1}^{s} k_i.$$

Запишем k-тую строку (36):

$$\int_{G_1} \left(\sum_{i=1}^{m} r_{ki} f_i\right) dx_1 \ldots dx_n =$$
$$= \int_{\partial G_1} \left(\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \sum_{j=\sum_{q=1}^{i-1} k_q + 1}^{\sum_{q=1}^{i} k_q} r_{kj} u_j\right) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \cdots \wedge dx_n. \quad (37)$$

Так как ∂G_1 — граница параллелепипеда, формула (37) принимает вид

$$\int_{G_1} \left(\sum_{i=1}^{m} r_{ki} f_i\right) dx_1 \cdots dx_n =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \int_{x_1^0}^{\xi_1} \cdots \int_{x_{i-1}^0}^{\xi_{i-1}} \int_{x_{i+1}^0}^{\xi_{i+1}} \cdots \int_{x_n^0}^{\xi_n} \left(\sum_{j=\sum_{q=1}^{i-1} k_q + 1}^{\sum_{q=1}^{i} k_q} r_{kj} u_j \right)\Bigg|_{x_i^0}^{\xi_i} dx_n \cdots dx_{i+1} dx_{i-1} \cdots dx_1. \quad (38)$$

Из системы (34) следует, что входящие в правую часть (38) функции r_{kj} удовлетворяют соотношениям

$$r_{kj}(x_1, \ldots, x_{i-1}, \xi_i, x_{i+1}, \ldots, x_n; \xi_1, \ldots, \xi_n) \equiv \begin{cases} 1, \ j = k, \\ 0, \ j \neq k, \end{cases} \tag{39}$$

где

$$\sum_{q=1}^{i-1} k_q + 1 \leqslant j \leqslant \sum_{q=1}^{i} k_q.$$

Левая часть (38) и функции $u_j(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i^0, x_{i+1}, \ldots, x_n)$, $\sum_{q=1}^{i-1} k_q + 1 \leqslant j \leqslant$ $\leqslant \sum_{q=1}^{i} k_q$, $j = \overline{1, n}$, известны (если считать известной матрицу $\mathbf{R}$). Поэтому (38) можно переписать в виде

$$\int_{x_1^0}^{\xi_1} \cdots \int_{x_{s-1}^0}^{\xi_{s-1}} \int_{x_{s+1}^0}^{\xi_{s+1}} \cdots \int_{x_n^0}^{\xi_n} u_k(x_1, \ldots, x_{s-1}, \xi_s, x_{s+1}, \ldots, x_n)\, dx_n \cdots$$
$$\cdots dx_{s+1} dx_{s-1} \cdots dx_1 = \Phi_k(\xi_1, \ldots, \xi_n)$$

с известной $\Phi_k(\xi_1, \ldots, \xi_n)$. Отсюда решение задачи Гурса получается в виде

$$u_k(\xi_1, \ldots, \xi_n) = \frac{\partial^{n-1} \Phi_k(\xi_1, \ldots, \xi_n)}{\partial \xi_1 \cdots \partial \xi_{s-1} \partial \xi_{s+1} \cdots \partial \xi_n}. \tag{40}$$

Из предыдущих рассуждений следует

Теорема 2.1. *Решение задачи Гурса* (27), (30) *существует, единственно и дается формулой* (40).

2.2.2. Задача Коши. Через точку $M(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \in D_0$ проведем плоскости $x_1 = \xi_1$, $x_2 = \xi_2$, $\ldots$, $x_n = \xi_n$. Обозначим D_1 часть D_0, ограниченную плоскостями $x_1 = \xi_1$, $x_2 = \xi_2$, $\ldots$, $x_n = \xi_n$; D_{1i} — пересечение D_1 с плоскостью $x_i = \xi_i$. Тогда $\partial D_1 = S_1^0 \cup (\cup_{i=1}^n D_{1i})$, где S_1^0 является частью S^0. Снова считая в тождестве (35) $\mathbf{U}$ решением системы (27), проинтегрируем (35) по области D_1. Согласно общей формуле Стокса, получаем

$$\int_{D_1} \mathbf{RF}\, dx_1 \cdots dx_n =$$
$$= \int_{\partial D_1} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \mathbf{RA}_i \mathbf{U}\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \cdots \wedge dx_n. \tag{41}$$

Построчная запись (41) дает

$$\int_{D_1} \left(\sum_{i=1}^{m} r_{ki} f_i \right) dx_1 \cdots dx_n =$$
$$= \sum_{l=1}^{n} \int_{D_{1l}} \left(\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \sum_{j=\sum_{q=1}^{i-1} k_q + 1}^{\sum_{q=1}^{i} k_q} r_{kj} u_j \right) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \cdots \wedge dx_n +$$

$$+\int_{S_1^0}\left(\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}\sum_{j=\sum_{q=1}^{i-1}k_q+1}^{\sum_{q=1}^{i}k_q} r_{kj}u_j\right)dx_1\wedge\dots\wedge dx_{i-1}\wedge dx_{i+1}\wedge\dots\wedge dx_n.$$

Очевидно,

$$\int_{D_{1l}}\left(\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}\sum_{j=\sum_{q=1}^{i-1}k_q+1}^{\sum_{q=1}^{i}k_q} r_{kj}u_j\right)dx_1\wedge\dots\wedge dx_{i-1}\wedge dx_{i+1}\wedge\dots\wedge dx_n =$$

$$=\int_{D_{1l}}(-1)^{l-1}\left(\sum_{j=\sum_{q=1}^{l-1}k_q+1}^{\sum_{q=1}^{l}k_q} r_{kj}u_j\right)dx_1\wedge\dots\wedge dx_{l-1}\wedge dx_{l+1}\wedge\dots\wedge dx_n.$$

Отсюда

$$\int_{D_1}\left(\sum_{i=1}^{m} r_{ki}f_i\right)dx_1\cdots dx_n =$$

$$=\sum_{l=1}^{n}\int_{D_{1l}}(-1)^{l-1}\left(\sum_{j=\sum_{q=1}^{l-1}k_q+1}^{\sum_{q=1}^{l}k_q} r_{kj}u_j\right)dx_1\wedge\dots\wedge dx_{l-1}\wedge dx_{l+1}\wedge\dots\wedge dx_n +$$

$$+\int_{S_1^0}\left(\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}\sum_{j=\sum_{q=1}^{i-1}k_q+1}^{\sum_{q=1}^{i}k_q} r_{kj}u_j\right)dx_1\wedge\dots\wedge dx_{i-1}\wedge dx_{i+1}\wedge\dots\wedge dx_n. \quad (42)$$

В силу (39) формулу (42) можно записать в виде

$$\int_{D_{1s}} u_k dx_1\cdots dx_{s-1}dx_{s+1}\cdots dx_n = \Psi_k(\xi_1,\dots,\xi_n), \quad (43)$$

где Ψ_k выражается через элементы $\mathbf{R}$ и данные Коши. Преобразуя интеграл по $(n-1)$-мерному многообразию D_{1s} в повторный и дифференцируя (43) по ξ_1, …, ξ_{s-1}, ξ_{s+1}, …, ξ_n, получим искомое решение задачи Коши $u_k(\xi_1,\dots,\xi_n)$.

Таким образом, справедлива

Теорема 2.2. *Решение задачи Коши* (27), (32) *существует, единственно и определяется по формуле* (43).

Конкурирующие интересы. Заявляем, что в отношении авторства и публикации этой статьи конфликта интересов не имеем.

Авторский вклад и ответственность. Введение написано совместно А.Н. Мироновым и Л.Б. Мироновой. Раздел 1 написан совместно А.Н. Мироновым и Ю.О. Яковлевой. Раздел 2 написан Л.Б. Мироновой. Идея написания обзора принадлежит А.Н. Миронову. Обсуждение содержания и структуры обзора проводилось совместно всеми авторами. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Исследование выполнялось без финансирования.

Библиографический список

1. Bianchi L. Sulla estensione del metodo di Riemann alle equazioni lineari alle derivate parziali d'ordine superiore // *Rom. Acc. L. Rend. (5)*, 1895. vol. 4, no. 1. pp. 89–99, 133–142 (In Italian).
2. Niccoletti O. Sull'estensione del metodo di Riemann alle equazioni lineari a derivate parziali d'ordine superiore // *Rom. Acc. L. Rend. (5)*, 1895. vol. 4, no. 1. pp. 330–337 (In Italian).
3. Бондаренко Б. А. *Базисные системы полиномиальных и квазиполиномиальных решений уравнений в частных производных.* Ташкент: Фан, 1987. 146 с.
4. Фаге М. К. Операторно-аналитические функции одной независимой переменной // *Тр. Моск. матем. об-ва*, 1958. Т. 7. С. 227–268.
5. Фаге М. К., Нагнибида Н. И. *Проблема эквивалентности обыкновенных линейных дифференциальных операторов.* Новосибирск: Наука, 1987. 260 с.
6. Нахушев А. М. *Уравнения математической биологии.* М.: Высш. шк., 1995. 301 с.
7. Нахушев А. М. *Задачи со смещением для уравнений в частных производных.* М.: Наука, 2006. 287 с.
8. Жегалов В. И., Миронов А. Н. *Дифференциальные уравнения со старшими частными производными.* Казань: Казанск. матем. общ-во, 2001. 226 с.
9. Жегалов В. И., Миронов А. Н., Уткина Е. А. *Уравнения с доминирующей частной производной.* Казань: Казанск. ун-т, 2001. 385 с.
10. Джохадзе О. М. Об инвариантах Лапласа для некоторых классов линейных дифференциальных уравнений в частных производных // *Диффер. уравн.*, 2004. Т. 40, № 1. С. 58–68.
11. Векуа И. Н. *Новые методы решения эллиптических уравнений.* М., Л.: Гостехиздат, 1948. 296 с.
12. Баренблатт Г. И., Желтов Ю. П., Кочина И. Н. Об основных представлениях теории фильтрации в трещиноватых средах // *ПММ*, 1960. Т. 24, № 5. С. 58–73.
13. Баренблатт Г. И., Желтов Ю. П. Об основных уравнениях фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах // *Докл. АН СССР*, 1960. Т. 132, № 3. С. 545–548.
14. Hallaire M. Le potentiel efficace de l'eau dans le sol en régime de dessèchement / *L'Eau et la Production Végétale.* vol. 9. Paris: INRA, 1964. pp. 27–62.
15. Солдатов А. П., Шхануков М. Х. Краевые задачи с общим нелокальным условием А. А. Самарского для псевдопараболических уравнений высокого порядка // *Докл. АН СССР*, 1987. Т. 297, № 3. С. 547–552.
16. Сердюкова С. И. Экзотическая асимптотика для линейного гиперболического уравнения // *Докл. РАН*, 2003. Т. 389, № 3. С. 305–309.
17. Mangeron D. New methods for determining solution of mathematical models governing polyvibrating phenomena. I. // *Bul. Inst. Politeh. Iaşi, N. Ser.*, 1968. vol. 14(18), no. 1–2. pp. 433–436.
18. Mangeron D., Oğuztöreli M. N. Darboux problem for a polyvibrating equation: Solution as an F-equation // *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 1970. vol. 67, no. 3. pp. 1488–1492. https://doi.org/10.1073/pnas.67.3.1488.
19. Кулаев Р. Ч., Шабат А. Б. Система Дарбу и разделение переменных в задаче Гурса для уравнения третьего порядка в $\mathbb{R}^3$ // *Изв. вузов. Математика*, 2020. № 4. С. 43–53. https://doi.org/10.26907/0021-3446-2020-4-43-53.
20. Bateman H. Logarithmic solutions of Bianchi's equation // *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 1933. vol. 19. pp. 852–854.
21. Corduneanu A. About the equation $u_{xyz} + cu = g$ // *Bul. Inst. Politeh. Iaşi, Secţ. I*, 1974. vol. 20(24), no. 1–2. pp. 103–109.

22. Florian H., Püngel J., Wallner H. Darstellungen von Riemannfunction for $\dfrac{\partial^n w}{\partial z_1 \partial z_2 \ldots \partial z_n} + c(z_1, \ldots, z_n)w = 0$ // *Ber. Math.-Stat. Sekt. Forschungszent. Graz*, 1983. vol. 204. 29 pp. (In German)
23. Lahaye E. La méthode de Riemann appliquee à la résolution d'une categorie d'équations linéaires du troisieme ordre // *Acad. Roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Ser.*, 1946. vol. 31. pp. 479–494 (In French).
24. Colton D. Pseudoparabolic equations in one space variable // *J. Differ. Equ.*, 1972. vol. 12, no. 3. pp. 559–565. https://doi.org/10.1016/0022-0396(72)90025-3.
25. Easwaran S. On the positive definiteness of polyvibrating operators of Mangeron // *Acad. roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Ser.*, 1973. vol. 59, no. 7. pp. 563–569.
26. Easwaran S. Mangeron's polyvibrating operators and their eigenvalues // *Acad. roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Ser.*, 1973. vol. 59, no. 10. pp. 1011–1015.
27. Oğuztöreli M. N. Boundary value problems for Mangeron's equations. I // *Bul. Inst. Politeh. Iaşi, Secţ. I*, 1973. vol. 19(23), no. 3–4. pp. 81–85.
28. Radochová V. Die Lösing der partiellen Differentialgleihung $u_{xxtt} = A(t,x)u_{xx} + B(t,x)u_{tt}$ mit gewissen Nebenbedinungen // *Časopis pro pěstování matematiky*, 1973. vol. 98, no. 4. pp. 389–397 (In German). http://eudml.org/doc/21186.
29. Rundell W., Stecher M. Remarks concerning the support of solutions of pseudoparabolic equation // *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1977. vol. 63, no. 1. pp. 77–81. https://doi.org/10.2307/2041069.
30. Rundell W. The construction of solutions to pseudoparabolic equations in noncilindrical domains // *J. Differ. Equ.*, 1978. vol. 27, no. 3. pp. 394–404. https://doi.org/10.1016/0022-0396(78)90059-1.
31. Rundell W. The Stefan problem for a pseudo-heat equation // *Indiana Univ. Math. J.*, 1978. vol. 27, no. 5. pp. 739–750. https://www.jstor.org/stable/24892297.
32. Rundell W. The uniqueness class for the Cauchy problem for pseudoparabolic equations // *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1979. vol. 76, no. 2. pp. 253–257. https://doi.org/10.2307/2042998.
33. Водахова В. А. Краевая задача с нелокальным условием А. М. Нахушева для одного псевдопараболического уравнения // *Диффер. уравн.*, 1982. Т. 18, № 2. С. 280–285.
34. Водахова В. А. Об одной краевой задаче для уравнения третьего порядка с нелокальным условием А. М. Нахушева // *Диффер. уравн.*, 1983. Т. 19, № 1. С. 163–166.
35. Шхануков М. Х. О некоторых краевых задачах для уравнения третьего порядка, возникающих при моделировании фильтрации жидкости в пористых средах // *Диффер. уравн.*, 1982. Т. 18, № 4. С. 689–699.
36. Шхануков М. Х. Об одном методе решения краевых задач для уравнений третьего порядка // *ДАН СССР*, 1982. Т. 265, № 6. С. 1327–1330.
37. Шхануков М. Х. О некоторых краевых задачах для уравнений третьего порядка и экстремальных свойствах их решений // *ДАН СССР*, 1982. Т. 267, № 3. С. 567–570.
38. Джохадзе О. М. Задача типа Дарбу для уравнения третьего порядка с доминирующими младшими членами // *Диффер. уравн.*, 1996. Т. 32, № 4. С. 523–535.
39. Джохадзе О. М. Влияние младших членов на корректность постановки характеристических задач для гиперболических уравнений третьего порядка // *Матем. заметки*, 2003. Т. 74, № 4. С. 517–528. https://doi.org/10.4213/mzm282.
40. Корзюк В. И. Граничная задача для уравнения Манжерона третьего порядка // *Диффер. уравн.*, 1997. Т. 33, № 12. С. 1683–1690.
41. И. Г. Мамедов Фундаментальное решение задачи Коши, связанной с псевдопараболическим уравнением четвертого порядка // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 2009. Т. 49, № 1. С. 99–110.
42. И. Г. Мамедов Об одной задаче Гурса в пространстве Соболева // *Изв. вузов. Математика*, 2011. № 2. С. 54–64.

43. И. Г. Мамедов Неклассический аналог задачи Гурса для одного трехмерного уравнения со старшей производной // *Матем. заметки*, 2014. Т. 96, № 2. С. 251–260. https://doi.org/10.4213/mzm8569.
44. Bandaliyev R. A., Guliyev V. S., Mamedov I. G., Rustamov Y. I. Optimal control problem for Bianchi equation in variable exponent Sobolev spaces // *J. Optim. Theory Appl.*, 2019. vol. 180, no. 1. pp. 303–320. https://doi.org/10.1007/s10957-018-1290-9.
45. Мамедов И. Г., Марданов М. Д., Меликов Т. К., Бандалиев Р. А. О корректной разрешимости задачи Неймана для обобщенного уравнения Манжерона с негладкими коэффициентами // *Диффер. уравн.*, 2019. Т. 55, № 10. С. 1405–1415.
46. Фаге М. К. Задача Коши для уравнения Бианки // *Матем. сб.*, 1958. Т. 45(87), № 3. С. 281–322.
47. Жегалов В. И. Трехмерный аналог задачи Гурса / *Неклассические задачи и уравнения смешанного типа*. Новосибирск, 1990. С. 94–98.
48. Жегалов В. И., Севастьянов В. А. Задача Гурса в четырехмерном пространстве // *Диффер. уравн.*, 1996. Т. 32, № 10. С. 1429–1430.
49. Жегалов В. И., Севастьянов В. А. *Задача Гурса в n-мерном пространстве*: Сибирский матем. журн. Деп. в ВИНИТИ 08.07.97 № 2290–В97. Новосибирск, 1997. 4 с.
50. Жегалов В. И. О трехмерной функции Римана // *Сибирский матем. журн.*, 1997. Т. 38, № 5. С. 1074–1079.
51. Жегалов В. И., Котухов М. П. Об интегральных уравнениях для функции Римана // *Изв. вузов. Математика*, 1998. № 1. С. 26–30.
52. Жегалов В. И., Уткина Е. А. Об одном псевдопараболическом уравнении третьего порядка // *Изв. вузов. Математика*, 1999. № 10. С. 73–76.
53. Жегалов В. И., Уткина Е. А. Задача Гурса для одного трехмерного уравнения со старшей производной // *Изв. вузов. Математика*, 2001. № 11. С. 77–81.
54. Жегалов В. И., Уткина Е. А. Об одном уравнении в частных производных четвертого порядка с тремя независимыми переменными // *Диффер. уравн.*, 2002. Т. 38, № 1. С. 93–97.
55. Севастьянов В. А. Метод Римана для трехмерного гиперболического уравнения третьего порядка // *Изв. вузов. Математика*, 1997. № 5. С. 69–73.
56. Севастьянов В. А. Об одном случае задачи Коши // *Диффер. уравн.*, 1998. Т. 34, № 12. С. 1706–1707.
57. Уткина Е. А. *Об одном уравнении в частных производных четвертого порядка*: Дифференц. уравн. Деп. в ВИНИТИ 28.06.99 № 2059–В99. Минск, 1999. 13 с.
58. Миронов А. Н. О построении функции Римана для одного уравнения в n-мерном пространстве // *Изв. вузов. Математика*, 1999. № 7. С. 78–80.
59. Миронов А. Н. О построении функции Римана для одного уравнения четвертого порядка // *Диффер. уравн.*, 2001. Т. 37, № 12. С. 1698–1701.
60. Уткина Е. А. Об одном дифференциальном уравнении со старшей частной производной в трехмерном пространстве // *Диффер. уравн.*, 2005. Т. 41, № 5. С. 697–701.
61. Уткина Е. А. К общему случаю задачи Гурса // *Изв. вузов. Математика*, 2005. № 8. С. 57–62.
62. Уткина Е. А. Повышение порядка нормальных производных в граничных условиях задачи Гурса // *Изв. вузов. Математика*, 2007. № 3. С. 79–83.
63. Миронов А. Н. О методе Римана для уравнений со старшей частной производной в $\mathbb{R}^n$ / *Труды Математического центра имени Н. И. Лобачевского*. Т. 19. Казань: Казанское матем. общ-во, 2003. С. 154–155.
64. Миронов А. Н. Метод Римана для уравнений со старшей частной производной в $\mathbb{R}^n$ // *Сибирский матем. журн.*, 2006. Т. 47, № 3. С. 584–594.
65. Миронов А. Н. К методу Римана решения одной смешанной задачи // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2007. № 2(15). С. 27–32. https://doi.org/10.14498/vsgtu526.

66. Жегалов В. И., Миронов А. Н. К пространственным граничным задачам для гиперболических уравнений // *Диффер. уравн.*, 2010. Т. 46, № 3. С. 364–371.
67. Миронов А. Н. Применение метода Римана к факторизованному уравнению в n-мерном пространстве // *Изв. вузов. Математика*, 2012. № 1. С. 54–60.
68. Миронова Л. Б. Задача для факторизованного уравнения с псевдопараболическим дифференциальным оператором // *Изв. вузов. Математика*, 2020. № 8. С. 44–49. https://doi.org/10.26907/0021-3446-2020-8-44-49.
69. Миронов А. Н. О построении функций Римана для двух уравнений со старшими частными производными // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2008. № 2(17). С. 49–59. https://doi.org/10.14498/vsgtu444.
70. Миронов А. Н. О функции Римана для одного уравнения в n-мерном пространстве // *Изв. вузов. Математика*, 2010. № 3. С. 23–27.
71. Миронов А. Н. О построении функции Римана для одного уравнения со старшей частной производной пятого порядка // *Диффер. уравн.*, 2010. Т. 46, № 2. С. 266–272. 13044911.
72. Жегалов В. И. К случаям разрешимости гиперболических уравнений в терминах специальных функций / *Неклассические уравнения математической физики.* Новосибирск, 2002. С. 73–79.
73. Жегалов В. И. О случаях разрешимости гиперболических уравнений в квадратурах // *Изв. вузов. Математика*, 2004. № 7. С. 47–52.
74. Кощеева О. А. О построении функции Римана для уравнения Бианки в n-мерном пространстве // *Изв. вузов. Математика*, 2008. № 9. С. 40–46.
75. Жегалов В. И. Решение уравнений Вольтерры с частными интегралами с помощью дифференциальных уравнений // *Диффер. уравн.*, 2008. Т. 44, № 7. С. 874–882.
76. Жегалов В. И., Сарварова И. М. Об одном подходе к решению интегральных уравнений Вольтерра с вырожденными ядрами // *Изв. вузов. Математика*, 2011. № 7. С. 28–36.
77. Миронова Л. Б. О методе Римана в $\mathbb{R}^n$ для одной системы с кратными характеристиками // *Изв. вузов. Математика*, 2006. № 1. С. 34–39.
78. Миронова Л. Б. О характеристических задачах для одной системы с двукратными старшими частными производными // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2006. № 43. С. 31–37. https://doi.org/10.14498/vsgtu450.
79. Жегалов В. И., Миронова Л. Б. Об одной системе уравнений с двукратными старшими частными производными // *Изв. вузов. Математика*, 2007. № 3. С. 12–21.
80. Созонтова Е. А. О характеристических задачах с нормальными производными для системы гиперболического типа // *Изв. вузов. Математика*, 2013. № 10. С. 43–54.
81. Миронова Л. Б. Применение метода Римана к одной системе в трехмерном пространстве // *Изв. вузов. Математика*, 2019. № 6. С. 48–57. https://doi.org/10.26907/0021-3446-2019-6-48-57.
82. Миронов А. Н. Задача Дарбу для уравнения Бианки третьего порядка // *Матем. заметки*, 2017. Т. 102, № 1. С. 64–71. https://doi.org/10.4213/mzm11395.
83. Миронов А. Н. Задача Дарбу для уравнения Бианки четвертого порядка // *Диффер. уравн.*, 2021. Т. 57, № 3. С. 349–363. https://doi.org/10.31857/S0374064121030067.
84. Mironova L. B. Boundary-value problems with data on characteristics for hyperbolic systems of equations // *Lobachevskii J. Math.*, 2020. vol. 41, no. 3. pp. 400–406. https://doi.org/10.1134/S1995080220030130.
85. Волкодавов В. Ф., Николаев Н. Я., Быстрова О. К., Захаров В. Н. *Функция Римана для некоторых дифференциальных уравнений в n-мерном евклидовом пространстве и их применения.* Самара: Самар. ун-т, 1995. 76 с.
86. Волкодавов В. Ф., Захаров В. Н. *Функция Римана для одного класса дифференциальных уравнений в трехмерном евклидовом пространстве и ее применения.* Самара: СамГПУ, 1996. 51 с.

87. Андреев А. А. *Построение элементарных решений и решение задачи Коши для уравнений и систем уравнений гиперболического типа*: Дисс. ... канд. ф.-м. н., специальность 01.01.02. Куйбышев, 1981. 100 с.
88. Бицадзе А. В. *Некоторые классы уравнений в частных производных.* М.: Наука, 1981. 448 с.
89. Зорич В. А. *Математический анализ.* Ч. 1. М.: Наука, 1981. 544 с.
90. Андреев А. А., Яковлева Ю. О. Задача Гурса для одной системы гиперболических дифференциальных уравнений третьего порядка с двумя независимыми переменными // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2011. № 3(24). С. 35–41. https://doi.org/10.14498/vsgtu996.
91. Бейтмен Г., Эрдейи А. *Высшие трансцендентные функции.* Т. 1: Гипергеометрическая функция. Функция Лежандра. М.: Наука, 1973. 296 с.
92. Яковлева Ю. О., Тарасенко А. В. Решение задачи Коши для системы уравнений гиперболического типа четвертого порядка методом Римана // *Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия*, 2019. Т. 25, № 3. С. 33–38. https://doi.org/10.18287/2541-7525-2019-25-3-33-38.
93. Holmgren E. Sur les systèmes linéaires aux dérivées partielles du premier ordre // *Arkiv för mat., astr. och fys.*, 1910. vol. 6, no. 2. pp. 1–10 (In French).
94. Бурмистров Б. Н. Решение задачи Коши методом Римана для системы уравнений первого порядка с вырождением на границе / Тр. сем. по краев. задачам, Т. 8. Казань: Казанск. ун-т, 1971. С. 41–54.
95. Чекмарев Т. В. Формулы решения задачи Гурса для одной линейной системы уравнений с частными производными // *Диффер. уравн.*, 1982. Т. 18, № 9. С. 1614–1622.
96. Чекмарев Т. В. *Системы уравнений смешанного типа.* Нижний Новгород: Нижегородский гос. техн. ун-т, 1995. 199 с.
97. Бицадзе А. В. О структурных свойствах решений гиперболических систем уравнений в частных производных первого порядка // *Матем. моделирование*, 1994. Т. 6, № 6. С. 22–31.
98. Романовский Р. К. О матрицах Римана первого и второго рода // *Матем. сб.*, 1985. Т. 127(169), № 4(8). С. 494–501.
99. Романовский Р. К. Экспоненциально расщепляемые гиперболические системы с двумя независимыми переменными // *Матем. сб.*, 1987. Т. 133(175), № 3(7). С. 341–355.
100. Воробьева Е. В., Романовский Р. К. Метод характеристик для гиперолических краевых задач на плоскости // *Сиб. матем. журн.*, 2000. Т. 41, № 3. С. 531–540.
101. Романовский Р. К., Медведев Ю. А. Оптимальное двустороннее граничное управление теплопереносом в стержне. Гиперболическая модель // *Изв. вузов. Математика*, 2016. № 6. С. 54–60.

Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2021, vol. 25, no. 2, pp. 207–240
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1853

MSC: 35L25, 35L40

The Riemann method for equations with a dominant partial derivative (A Review)

© ***A. N. Mironov***[1,2]**,** ***L. B. Mironova***[1]**,** ***Yu. O. Yakovleva***[2]

[1] Kazan Federal (Volga Region) Federal University,
Yelabuga Institute,
89, Kazanskaya str., Yelabuga, 423600, Russian Federation.
[2] Samara State Technical University,
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russian Federation.

Abstract

This review article is devoted to a class of linear equations with a dominant (leading) partial derivative of the form $(D + M)u = f$, where Du is a mixed partial derivative, and M is a linear differential operator containing the derivatives of the function u obtained from D by discarding at least one differentiation. We can point out the structural similarity of such linear equations with linear ordinary differential equations. We present the Riemann method for linear equations with a dominant partial derivative, which is a natural generalization of the well-known Riemann method for a second-order hyperbolic equation with two independent variables.

The article deals with the main provisions of the theory developed for the equation with the dominant partial derivative of the general form, allowing the interested reader to apply the obtained results to the task that interests him. The definition of the Riemann function as a solution of the Volterra integral equation is given. The main differential identity is discussed, and the process of obtaining a formula for solving the Cauchy problem in terms of the Riemann function by integrating the specified identity over the corresponding domain in n-dimensional space is demonstrated. An example of constructing a solution to the Cauchy problem for the third-order equation is given.

The Riemann method is described below for a fairly wide class of linear systems of hyperbolic equations (including those with multiple character-

Review Article

Please cite this article in press as:
Mironov A. N., Mironova L. B., Yakovleva Yu. O. The Riemann method for equations with a dominant partial derivative (A Review), *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2021, vol. 25, no. 2, pp. 207–240. https://doi.org/10.14498/vsgtu1853 (In Russian).

Authors' Details:

Alexei N. Mironov https://orcid.org/0000-0002-8818-286X
Dr. Phys. & Math. Sci.; Professor; Dept. of Mathematics and Applied Computer Science[1]; Dept. of Higher Mathematics[2]; e-mail: miro73@mail.ru

Lyubov B. Mironova https://orcid.org/0000-0002-3299-2601
Cand. Phys. & Math. Sci.; Associate Professor; Dept. of Mathematics and Applied Computer Science[1]; e-mail: lbmironova@yandex.ru

Yulia O. Yakovleva https://orcid.org/0000-0002-9839-3740
Cand. Phys. & Math. Sci.; Associate Professor; Dept. of Higher Mathematics[2]; e-mail: julia.yakovleva@mail.ru

istics). This method is ideologically very close to the Riemann method for linear equations with a dominant partial derivative.

Applications of the Riemann method to the study of new problems for partial differential equations are discussed. In particular, using the Riemann method, the correctness of new boundary value problems for factorized hyperbolic equations is proved, the solvability of integral equations with partial integrals is investigated, and a certain modification of the Riemann method allows us to develop the Riemann–Hadamard method for Darboux problems. The explicit representation of solutions of hyperbolic systems in terms of the Riemann matrix allows us to study new boundary value problems, in particular, problems with the assignment of normal derivatives of the desired functions on the characteristics, problems with conditions on the entire boundary of the domain, and Darboux problems.

The Riemann method described here for linear equations with a dominant partial derivative is obviously transferred to matrix equations. In this regard, some cases are indicated when the Riemann matrix is constructed explicitly (in terms of hypergeometric functions) for such matrix equations.

The paper provides a review of the literature, briefly describes the history of the development of this direction in Russia and in foreign countries.

Keywords: Riemann method, Riemann function, Riemann matrix, Cauchy problem, Goursat problem, Darboux problem, partial differential equation with dominant derivative, hyperbolic equation, hyperbolic system, Bianchi equation, Vekua equation, Hallaire equation, Barenblatt–Zheltov–Kochina equation, Boussinesq–Love equation.

Received: 15th March, 2021 / Revised: 28th April, 2021 /
Accepted: 11th May, 2021 / First online: 18th May, 2021

Competing interests. We declare that we have no conflicts of interest in the authorship or publication of this paper.

Author's Responsibilities. The introduction was written jointly by A.N. Mironov and L.B. Mironova. The 1st section was written jointly by A.N. Mironov and Yu.O. Yakovleva. The 2nd section was written by L.B. Mironova. The idea of writing this review belongs to A.N. Mironov. The discussion of the content and structure of the review article was carried out jointly by all authors. The authors are absolutely responsible for submitting the final manuscript in print. Each author has approved the final version of manuscript.

Funding. This research received no specific grant from any funding agency in the public, commercial, or not-for-profit sectors.

References

1. Bianchi L. Sulla estensione del metodo di Riemann alle equazioni lineari alle derivate parziali d'ordine superiore, *Rom. Acc. L. Rend. (5)*, 1895, vol. 4, no. 1, pp. 89–99, 133–142 (In Italian).
2. Niccoletti O. Sull'estensione del metodo di Riemann alle equazioni lineari a derivate parziali d'ordine superiore, *Rom. Acc. L. Rend. (5)*, 1895, vol. 4, no. 1, pp. 330–337 (In Italian).
3. Bondarenko B. A. *Bazisnye sistemy polinomial'nykh i kvazipolinomial'nykh reshenii uravnenii v chastnykh proizvodnykh* [Basic Systems of Polynomial and Quasi-Polynomial Solutions of Partial Differential Equations]. Tashkent, Fan, 1987, 146 pp. (In Russian)
4. Fage M. K. Operator-analytic functions of one independent variable, *Tr. Mosk. Mat. Obs.*, 1958, vol. 7, pp. 227–268 (In Russian).

5. Fage M. K., Nagnibida N. I. *Problema ekvivalentnosti obyknovennykh lineinykh differentsial'nykh operatorov* [The Equivalence Problem of Ordinary Linear Differential Operators]. Novosibirsk, Nauka, 1987, 260 pp. (In Russian)
6. Nakhushev A. M. *Uravneniia matematicheskoi biologii* [Equations of Mathematical Biology]. Moscow, Vyssh. Shk., 1995, 301 pp. (In Russian)
7. Nakhushev A. M. *Zadachi so smeshcheniem dlia uravnenii v chastnykh proizvodnykh* [Problems with Shifts for Partial Differential Equations]. Moscow, Nauka, 2006, 287 pp. (In Russian)
8. Zhegalov V. I., Mironov A. N. *Differentsial'nye uravneniia so starshimi chastnymi proizvodnymi* [Differential Equations with Higher Partial Derivatives]. Kazan, Kazan Math. Society, 2001, 226 pp. (In Russian)
9. Zhegalov V. I., Mironov A. N., Utkina E. A. *Uravneniia s dominiruiushchei chastnoi proizvodnoi* [Equations with Leading Partial Derivative]. Kazan, Kazan Univ., 2014, 385 pp. (In Russian)
10. Dzhokhadze O. M. Laplace invariants for some classes of linear partial differential equations, *Differ. Equ.*, 2004, vol. 40, no. 1, pp. 63–74. https://doi.org/10.1023/B:DIEQ.0000028714.62481.2d.
11. Vekua I. N. *New methods for Solving Elliptic Equations*, North-Holland Series in Applied Mathematics and Mechanics, vol. 1. New York, John Wiley & Sons, Inc., 1967, xii+358 pp.
12. Barenblatt G. I., Zheltov Yu. P., Konina I. N. On the basic concepts of filtration theory in fractured media, *Prikl. Mat. Mekh.*, 1960, vol. 24, no. 5, pp. 58–73 (In Russian).
13. Barenblatt G. I., Zheltov Yu. P. Fundamental equations of filtration of homogeneous liquids in fissured rocks, *Sov. Phys., Dokl.*, 1960, vol. 5, pp. 522–525.
14. Hallaire M. Le potentiel efficace de l'eau dans le sol en régime de dessèchement, In: *L'Eau et la Production Végétale*, vol. 9. Paris, INRA, 1964, pp. 27–62.
15. Soldatov A. P., Shkhanukov M. Kh. Boundary-value-problems with a Samarsky, A. A. general nonlocal condition for higher-order pseudoparabolic equations, *Dokl. Math.*, 1988, vol. 36, no. 3, pp. 507–511.
16. Serdyukova S. I. Exotic asymptotics for a linear hyperbolic equation, *Dokl. Math.*, 2003, vol. 67, no. 2, pp. 203–207.
17. Mangeron D. New methods for determining solution of mathematical models governing polyvibrating phenomena. I., *Bul. Inst. Politeh. Iaşi, N. Ser.*, 1968, vol. 14(18), no. 1–2, pp. 433–436.
18. Mangeron D., Oğuztöreli M. N. Darboux problem for a polyvibrating equation: Solution as an F-equation, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 1970, vol. 67, no. 3, pp. 1488–1492. https://doi.org/10.1073/pnas.67.3.1488.
19. Kulaev R. C., Shabat A. B. Darboux system and separation of variables in the Goursat problem for a third order equation in $\mathbb{R}^3$, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2020, vol. 64, no. 4, pp. 35–43. https://doi.org/10.3103/S1066369X20040040.
20. Bateman H. Logarithmic solutions of Bianchi's equation, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 1933, vol. 19, pp. 852–854.
21. Corduneanu A. About the equation $u_{xyz} + cu = g$, *Bul. Inst. Politeh. Iaşi, Secţ. I*, 1974, vol. 20(24), no. 1–2, pp. 103–109.
22. Florian H., Püngel J., Wallner H. Darstellungen von Riemannfunction for $\dfrac{\partial^n w}{\partial z_1 \partial z_2 \ldots \partial z_n} + c(z_1, \ldots, z_n)w = 0$, *Ber. Math.-Stat. Sekt. Forschungszent. Graz*, 1983, vol. 204, 29 pp. (In German)
23. Lahaye E. La méthode de Riemann appliquee à la résolution d'une categorie d'équations linéaires du troisieme ordre, *Acad. Roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Ser.*, 1946, vol. 31, pp. 479–494 (In French).
24. Colton D. Pseudoparabolic equations in one space variable, *J. Differ. Equ.*, 1972, vol. 12, no. 3, pp. 559–565. https://doi.org/10.1016/0022-0396(72)90025-3.

25. Easwaran S. On the positive definiteness of polyvibrating operators of Mangeron, *Acad. roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Ser.*, 1973, vol. 59, no. 7, pp. 563–569.
26. Easwaran S. Mangeron's polyvibrating operators and their eigenvalues, *Acad. roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Ser.*, 1973, vol. 59, no. 10, pp. 1011–1015.
27. Oğuztöreli M. N. Boundary value problems for Mangeron's equations. I, *Bul. Inst. Politeh. Iaşi, Secţ. I*, 1973, vol. 19(23), no. 3–4, pp. 81–85.
28. Radochová V. Die Lösing der partiellen Differentialgleihung $u_{xxtt} = A(t,x)u_{xx} + B(t,x)u_{tt}$ mit gewissen Nebenbedinungen, *Časopis pro pěstování matematiky*, 1973, vol. 98, no. 4, pp. 389–397 (In German). http://eudml.org/doc/21186.
29. Rundell W., Stecher M. Remarks concerning the support of solutions of pseudoparabolic equation, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1977, vol. 63, no. 1, pp. 77–81. https://doi.org/10.2307/2041069.
30. Rundell W. The construction of solutions to pseudoparabolic equations in noncilindrical domains, *J. Differ. Equ.*, 1978, vol. 27, no. 3, pp. 394–404. https://doi.org/10.1016/0022-0396(78)90059-1.
31. Rundell W. The Stefan problem for a pseudo-heat equation, *Indiana Univ. Math. J.*, 1978, vol. 27, no. 5, pp. 739–750. https://www.jstor.org/stable/24892297.
32. Rundell W. The uniqueness class for the Cauchy problem for pseudoparabolic equations, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1979, vol. 76, no. 2, pp. 253–257. https://doi.org/10.2307/2042998.
33. Vogahova V. A. A boundary value problem with A. M. Nakhushev's nonlocal condition for a pseudoparabolic equation of moisture transfer, *Differ. Uravn.*, 1982, vol. 18, no. 2, pp. 280–285 (In Russian).
34. Vogahova V. A. A boundary value problem for a third-order equation with the nonlocal condition of A. M. Nakhushev, *Differ. Uravn.*, 1983, vol. 19, no. 1, pp. 163–166 (In Russian).
35. Shkhanukov M. Kh. Some boundary value problems for a third-order equation that arise in the modeling of the filtration of a fluid in porous media, *Differ. Uravn.*, 1982, vol. 18, no. 4, pp. 689–699 (In Russian).
36. Shkhanukov M. Kh. On a method of solving boundary value problems for third order equations, *Sov. Math., Dokl.*, 1982, vol. 26, no. 6, pp. 272–275.
37. Shkhanukov M. Kh. On some boundary value problems for a third-order equation and extremal properties of its solutions, *Sov. Math., Dokl.*, 1982, vol. 26, no. 3, pp. 675–678.
38. Dzhokhadze O. M. A Darboux-type problem for a third-order equation with dominating lowest terms, *Differ. Equ.*, 1996, vol. 32, no. 4, pp. 524–537.
39. Dzhokhadze O. M. Influence of lower terms on the well-posedness of characteristics problems for third-order hyperbolic equations, *Math. Notes*, 2003, vol. 74, no. 4, pp. 491–501. https://doi.org/10.1023/A:1026139709809.
40. Korzyuk V. I. A boundary value problem for a third-order Mangeron equation, *Differ. Equ.*, 1997, vol. 33, no. 12, pp. 1686–1694.
41. Mamedov I. G. A fundamental solution to the Cauchy problem for a fourth-order pseudoparabolic equation, *Comput. Math. Math. Phys.*, 2009, vol. 49, no. 1, pp. 93–104. https://doi.org/10.1134/S0965542509010072.
42. Mamedov I. G. One Goursat problem in a Sobolev space, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2011, vol. 55, no. 2, pp. 46–55. https://doi.org/10.3103/S1066369X1102006X.
43. Mamedov I. G. Nonclassical analog of the Goursat problem for a three-dimensional equation with highest derivative, *Math. Notes*, 2014, vol. 96, no. 2, pp. 239–247. https://doi.org/10.1134/S0001434614070256.
44. Bandaliyev R. A., Guliyev V. S., Mamedov I. G., Rustamov Y. I. Optimal control problem for Bianchi equation in variable exponent Sobolev spaces, *J. Optim. Theory Appl.*, 2019, vol. 180, no. 1, pp. 303–320. https://doi.org/10.1007/s10957-018-1290-9.
45. Mamedov I. G., Mardanov M. D., Melikov T. K., Bandaliev R. A. Well-posed solvability of the Neumann problem for a generalized mangeron equation with nonsmooth coefficients, *Differ. Equ.*, 2019, vol. 55, no. 10, pp. 1362–1372. https://doi.org/10.1134/S0012266119100112.

46. Fage M. K. The Cauchy problem for Bianchi's equation, *Mat. Sb. (N.S.)*, 1958, vol. 45(87), no. 3, pp. 281–322 (In Russian).
47. Zhegalov V. I. A three-dimensional analog of the Goursat problem, In: *Neklassicheskie zadachi i uravneniia smeshannogo tipa* [Nonclassical Equations and Equations of Mixed Type]. Novosibirsk, 1990, C. 94–98 (In Russian).
48. Zhegalov V. I., Sevast'yanov V. A. The Goursat problem in four-dimensional space, *Differ. Equ.*, 1996, vol. 32, no. 10, pp. 1427–1428.
49. Zhegalov V. I., Sevast'yanov V. A. *The Goursat problem in n-dimensional space*, Siberian Math. J., Deposited at VINITI, 08 Jule 1997, no 2290–B97. Novosibirsk, 1997, 4 pp. (In Russian)
50. Zhegalov V. I. On the three-dimensional Riemann function, *Siberian Math. J.*, 1997, vol. 38, no. 5, pp. 929–934. https://doi.org/10.1007/BF02673035.
51. Zhegalov V. I., Kotukhov M. P. On integral equations for the Riemann function, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 1998, vol. 42, no. 1, pp. 24–28.
52. Zhegalov V. I., Utkina E. A. Pseudoparabolic equation of the third order, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 1999, vol. 43, no. 10, pp. 70–73.
53. Zhegalov V. I., Utkina E. A. The Goursat problem for a three-dimensional equation with a higher derivative, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2001, vol. 45, no. 11, pp. 74–78.
54. Zhegalov V. I., Utkina E. A. On a fourth-order partial differential equation with three independent variables, *Differ. Equ.*, 2002, vol. 38, no. 1, pp. 99–103. https://doi.org/10.1023/A:1014811811530.
55. Sevast'yanov V. A. The Riemann method for a three-dimensional hyperbolic equation of third order, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 1997, vol. 41, no. 5, pp. 66–70.
56. Sevast'yanov V. A. On a certain case of the Cauchy problem, *Differ. Equ.*, 1998, vol. 34, no. 12, pp. 1716–1717.
57. Utkina E. A., Differ. Equ., Deposited at VINITI, 28 June 1999, no 2059–B99. Minsk, 1999, 13 pp. (In Russian)
58. Mironov A. N. On construction of the Riemann function for certain equation in n-dimensional space, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 1999, vol. 43, no. 7, pp. 75–77.
59. Mironov A. N. The construction of the Riemann function for a fourth-order equation, *Differ. Equ.*, 2001, vol. 37, no. 12, pp. 1787–1791. https://doi.org/10.1023/A:1014435727536.
60. Utkina E. A. On a differential equation with a higher-order partial derivative in three-dimensional space, *Differ. Equ.*, 2005, vol. 41, no. 5, pp. 733–738. https://doi.org/10.1007/s10625-005-0208-0.
61. Utkina E. A. On the general case of the Goursat problem, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2005, vol. 49, no. 8, pp. 53–58.
62. Utkina E. A. Increase of order of normal derivatives in the Goursat boundary value problem, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2007, vol. 51, no. 4, pp. 76–81. https://doi.org/10.3103/S1066369X07040093.
63. Mironov A. N. On the Riemann method for equations with leading partial derivative in $\mathbb{R}^n$, In: *Trudy Matematicheskogo Tsentra Lobachevskogo*, vol. 19. Kazan, Kazan Math. Society, 2003, pp. 154–155 (In Russian).
64. Mironov A. N. The Riemann method for equations with leading partial derivative in $\mathbb{R}^n$, *Siberian Math. J.*, 2006, vol. 47, no. 3, pp. 481–490. https://doi.org/10.1007/s11202-006-0060-3.
65. A. N. Mironov On Riemann method for solving a mixed problem, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2007, no. 2(15), pp. 27–32 (In Russian). https://doi.org/10.14498/vsgtu526.
66. Zhegalov V. I., Mironov A. N. A remark on spatial boundary value problems for hyperbolic equations, *Differ. Equ.*, 2010, vol. 46, no. 3, pp. 367–374. https://doi.org/10.1134/S0012266110030067.

67. Mironov A. N. Application of the riemann method to a factorized equation in an n-dimensional space, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2012, vol. 56, no. 1, pp. 48–54. https://doi.org/10.3103/S1066369X12010070.
68. Mironova L. B. A problem for a factorized equation with a pseudoparabolic differential operator, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2020, vol. 64, no. 8, pp. 37–41. https://doi.org/10.3103/S1066369X20080058.
69. Mironov A. N. Riemann function formulation for two equations with leading partial derivatives, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2008, no. 2(17), pp. 49–59 (In Russian). https://doi.org/10.14498/vsgtu444.
70. Mironov A. N. The Riemann function for one equation in an n-dimensional space, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2010, vol. 54, no. 3, pp. 19–23. https://doi.org/10.3103/S1066369X10030047.
71. Mironov A. N. On the construction of the Riemann function for an equation with leading fifth partial derivative, *Differ. Equ.*, 2010, vol. 46, no. 2, pp. 270–276. 15330223. https://doi.org/10.1134/S0012266110020114.
72. Zhegalov V. I. On solvability of hyperbolic equations in terms of special functions, In: *Neklassicheskie uravneniia matematicheskoi fiziki* [Nonclassical Equations of Mathematical Physics]. Novosibirsk, 2002, pp. 73–79 (In Russian).
73. Zhegalov V. I. The solvability of hyperbolic equations in quadratures, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2004, vol. 48, no. 7, pp. 44–49.
74. Koshcheeva O. A. Construction of the Riemann function for the Bianchi equation in an n-dimensional space, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2008, vol. 52, no. 9, pp. 35–40. https://doi.org/10.3103/S1066369X08090053.
75. Zhegalov V. I. Solution of Volterra partial integral equations with the use of differential equations, *Differ. Equ.*, 2008, vol. 44, no. 7, pp. 900–908. https://doi.org/10.1134/S0012266108070021.
76. Zhegalov V. I., Sarvarova I. M. One approach to the solution of volterra integral equations with degenerate kernels, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2011, vol. 55, no. 7, pp. 23–29. https://doi.org/10.3103/S1066369X11070048.
77. Mironova L. B. The Riemann method in $\mathbb{R}^n$ for a system with multiple characteristics, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2006, vol. 50, no. 1, pp. 32–37.
78. Mironova L. B. On characteristic problem for a system with double higher partial derivatives, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2006, no. 43, pp. 31–37 (In Russian). https://doi.org/10.14498/vsgtu450.
79. Zhegalov V. I., Mironova L. B. One system of equations with double major partial derivatives, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2007, vol. 51, no. 3, pp. 9–18. https://doi.org/10.3103/S1066369X07030024.
80. Sozontova E. A. Characteristic problems with normal derivatives for hyperbolic systems, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2013, vol. 57, no. 10, pp. 37–47. https://doi.org/10.3103/S1066369X13100046.
81. Mironova L. B. Application of Riemann method to one system in three-dimensional space, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2019, vol. 63, no. 6, pp. 42–50. https://doi.org/10.3103/S1066369X19060057.
82. Mironov A. N. Darboux problem for the third-order Bianchi equation, *Math. Notes*, 2017, vol. 102, no. 1, pp. 53–59. https://doi.org/10.1134/S0001434617070069.
83. Mironov A. N. Darboux problem for the fourth-order Bianchi equation, *Differ. Equ.*, 2021, vol. 57, no. 3, pp. 328–341. https://doi.org/10.1134/S001226612103006X.
84. Mironova L. B. Boundary-value problems with data on characteristics for hyperbolic systems of equations, *Lobachevskii J. Math.*, 2020, vol. 41, no. 3, pp. 400–406. https://doi.org/10.1134/S1995080220030130.

85. Volkodavov V. F., Nikolaev N. Ya., Bystrova O. K., Zakharov V. N. *Funktsiia Rimana dlia nekotorykh differentsial'nykh uravnenii v n-mernom evklidovom prostranstve i ikh primeneniia* [The Riemann Function for Some Differential Equations in n-Dimensional Euclidean Space and their Applications]. Samara, Samara Univ., 1995, 76 c. (In Russian)
86. Volkodavov V. F., Zakharov V. N. *Funktsiia Rimana dlia odnogo klassa differentsial'nykh uravnenii v trekhmernom evklidovom prostranstve i ee primeneniia* [The Riemann Function for a Class of Differential Equations in Three-Dimensional Euclidean Space and its Applications]. Samara, Samara State Pedagogical Univ., 1996, 51 c. (In Russian)
87. Andreev A. A. *Construction of elementary solutions and solution of Cauchy problem for equations and hyperbolic systems of equations*, Ph.D. Thesis (Phys. & Math.) in the specialty 01.01.02 – Differential Equations. Kuibyshev, 1981, 100 pp. (In Russian)
88. Bitsadze A. V. *Some Classes of Partial Differential Equations*, Advanced Studies in Contemporary Mathematics, vol. 4. New York, Gordon & Breach Science Publ., 1988, xi+504 pp.
89. Zorich V. A. *Matematicheskii analiz* [Mathematical Analysis]. Part I. Moscow, Nauka, 1981, 544 pp. (In Russian)
90. Andreev A. A., Yakovleva J. O. The Goursat problem for one hyperbolic system of the third order differential equations with two independent variables, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2011, no. 3(24), pp. 35–41 (In Russian). https://doi.org/10.14498/vsgtu996.
91. Erdélyi A., Magnus W., Oberhettinger F. Tricomi F. G. *Higher Transcendental Functions*, vol. I, Bateman Manuscript Project. New York, McGraw-Hill Book Co., 1953, xxvi+302 pp.
92. Yakovleva Ju. O., Tarasenko A. V. The solution of Cauchy problem for the hyperbolic differential equations of the fourth order by the Riman method, *Vestnik Samarskogo Universiteta. Estestvennonauchnaya Seriya* [Vestnik of Samara University. Natural Science Series], 2019, vol. 25, no. 3, pp. 33–38 (In Russian). https://doi.org/10.18287/2541-7525-2019-25-3-33-38.
93. Holmgren E. Sur les systèmes linéaires aux dérivées partielles du premier ordre, *Arkiv för mat., astr. och fys.*, 1910, vol. 6, no. 2, pp. 1–10 (In French).
94. Burmistrov B. N. Solution of the Cauchy problem by the Riemann method for a system of first order equations with a degeneracy on the boundary, Tr. Semin. Kraev. Zadacham, 8. Kazan, Kazan Univ., 1971, pp. 41–54.
95. Chekmarev T. V. Formulas for solution of the Goursat problem for a linear system of partial differential equations, *Differ. Uravn.*, 1982, vol. 18, no. 9, pp. 1614–1622 (In Russian).
96. Chekmarev T. V. *Sistemy uravnenii smeshannogo tipa* [Systems of Mixed-Type Equations]. Nizhny Novgorod, Nizhny Novgorod State Techn. Univ., 1995, 199 pp. (In Russian)
97. Bitsadze A. V. On structural properties of solutions of hyperbolic systems of partial differential equations of the first order, *Matem. Mod.*, 1994, vol. 6, no. 6, pp. 22–31 (In Russian).
98. Romanovskii R. K. On Riemann matrices of the first and second kind, *Math. USSR-Sb.*, 1986, vol. 55, no. 2, pp. 485–492. https://doi.org/10.1070/SM1986v055n02ABEH003016.
99. Romanovskii R. K. Exponentially splittable hyperbolic systems with two independent variables, *Math. USSR-Sb.*, 1988, vol. 61, no. 2, pp. 335–349. https://doi.org/10.1070/SM1988v061n02ABEH003211.
100. Vorob'eva E. V., Romanovskii R. K. The method of characteristics for hyperbolic boundary value problems on the plane, *Siberian Math. J.*, 2000, vol. 41, no. 3, pp. 433–441. https://doi.org/10.1007/BF02674100.
101. Romanovskii R. K., Medvedev Y. A. Optimal two-sided boundary control of heat transmission in a rod. Hyperbolic model., *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2016, vol. 60, no. 6, pp. 45–51. https://doi.org/10.3103/S1066369X16060062.