



УДК 517.956.4

Приближение решения уравнения переноса-диффузии в пространстве Гёльдера

А. Немдили¹, Ф. Кориши², Х. Фуджита Яшима¹

- ¹ Высшая нормальная школа Константина им. А. Джебара,
Алжир, 25000, Константин, Айн-эль-Бей Али Менджели, Университетский городок.
² Высшая нормальная школа Кубы,
Алжир, 16050, Алжир, Старая Куба, В.Р. 92.

Аннотация

Рассматриваются приближенные решения для уравнения переноса-диффузии и их предельная функция, изучается принадлежность предельной функции к пространству Гёльдера, соответствующему регулярности данных. Цель исследования состоит в том, чтобы построить такое приближение решения уравнения переноса-диффузии, чтобы его основное свойство не зависело от величины коэффициента диффузии.

Точнее, рассматривается уравнение переноса-диффузии с постоянным коэффициентом диффузии в целом пространстве $\mathbb{R}^d$ со свободным членом, который может зависеть от искомой функции. Приближенные решения на каждом шаге дискретизации по времени строятся с использованием ядра теплопроводности и локально линейаризованного перемещения, соответствующего переносу. Приближенные решения оцениваются в предположении, что заданные функции и их производные по $x \in \mathbb{R}^d$ до порядка m включительно ($m \geq 2$) равномерно ограничены на $[0, \tau] \times \mathbb{R}^d$ для каждого $\tau > 0$ и их производные порядка m непрерывны по Гёльдеру с показателем α , $2/3 < \alpha \leq 1$. Оценки не зависят от величины коэффициента диффузии. На основании этих оценок доказываются равномерная сходимость приближенных решений и их производных по x до порядка m включительно на $[0, \tau] \times \mathbb{R}^d$, сходимость их производных порядка m в пространстве Гёльдера $C^{0+\alpha'}(\mathbb{R}^d)$, $0 < \alpha' < \alpha$,

Дифференциальные уравнения и математическая физика
Научная статья

© Коллектив авторов, 2024

© СамГТУ, 2024 (составление, дизайн, макет)

 Контент публикуется на условиях лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru) (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Образец для цитирования

Немдили А., Кориши Ф., Фуджита Яшима Х. Приближение решения уравнения переноса-диффузии в пространстве Гёльдера // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2024. Т. 28, № 3. С. 426–444. EDN: QYPUUB. DOI: 10.14498/vsgtu2097.

Сведения об авторах

Амина Немдили  <https://orcid.org/0009-0007-5898-3360>

ассистент; преподаватель, член лаборатории; лаб. прикладной математики и дидактики;
e-mail: nemdili.amina@gmail.com

Фархух Кориши  <https://orcid.org/0009-0006-6442-3506>

доцент; член лаборатории; лаб. теории неподвижной точки и ее приложения;
e-mail: korichi_korichi@yahoo.com

Хисао Фуджита Яшима   <https://orcid.org/0000-0001-9937-8406>

профессор; член лаборатории; лаб. прикладной математики и дидактики;
e-mail: hisaofujitayashima@yahoo.com

для каждого $t \geq 0$ и непрерывность по Гёльдеру с показателем α производных по x порядка m предельной функции, которая удовлетворяет уравнению. То есть показано, что при использовании пространства Гёльдера получается та же дифференцируемость предельной функции, как и дифференцируемость данных, а в предыдущих работах для получения дифференцируемости порядка m предельной функции предполагалась дифференцируемость порядка $m + 1$ данных.

Ключевые слова: уравнение переноса-диффузии, приближенные решения, пространство Гёльдера.

Получение: 1 июня 2024 г. / Исправление: 3 октября 2024 г. /

Принятие: 21 октября 2024 г. / Публикация онлайн: 11 ноября 2024 г.

Введение. Хорошо известно, что при изучении уравнений параболического типа, в том числе уравнения переноса-диффузии

$$\partial_t u(t, x) + v(t, x) \cdot \nabla u(t, x) = \kappa \Delta u(t, x) + f(t, x, u(t, x)),$$

часто используются методы, основанные на свойствах эллиптического оператора, которые дают удобные оценки в пространстве Соболева или в пространстве Гёльдера. С использованием этих оценок изучается разрешимость таких уравнений (см., например, работы [1–4] и многие другие). Отметим, что метод, основанный на полугруппе операторов (см., например, [5]), также использует оценки, полученные с помощью эллиптического оператора, но эти оценки становятся менее полезными в случае, когда коэффициент диффузии стремится к нулю.

С другой стороны, обратное уравнение Колмогорова, являющееся стохастическим представлением решения параболического уравнения (см., например, [6, гл. VIII]), дает возможность охарактеризовать поведение решения относительно коэффициента диффузии, стремящегося к нулю, выражая результаты понятиями теории вероятностей (см. [7] и процитированную там литературу).

В последние годы опубликовано несколько работ, посвященных построению такого приближения для уравнения переноса-диффузии, в которых показано, что поведение такого приближения не зависит от величины коэффициента диффузии, и поэтому оно может использоваться даже в случае, когда коэффициент диффузии стремится к нулю. Действительно, в [8, 9] на каждом шаге дискретизации по времени предложены приближенные решения для уравнения переноса-диффузии, построенные с помощью ядра теплопроводности и локально линеаризованного перемещения, соответствующего переносу, доказана их равномерная сходимость к решению уравнения переноса-диффузии. С помощью этих приближенных решений в [10, 11] доказана сходимость решения уравнения переноса-диффузии к решению уравнения переноса. Аналогичные приближенные решения также построены в полупространстве $\mathbb{R}_+^d$ с однородным условием Дирихле (см. [12, 13]) и с однородным условием Неймана (см. [14]).

В настоящей работе определяются приближенные решения для уравнения переноса-диффузии аналогично [8, 9], при этом предполагается, что производные по x порядка m ($m \geq 2$) заданных функций $v(t, x)$, $f(t, x, u)$ и $u_0(x)$

(смысл этих функций будет ясен из приведенной ниже постановки задачи Коши) непрерывны по Гёльдеру с показателем α , $2/3 < \alpha \leq 1$. В этих предположениях доказывается принадлежность предельной функции, удовлетворяющей уравнению, к пространству Гёльдера $C^{m+\alpha}(\mathbb{R}^d)$ в каждый момент времени. Другими словами, использование непрерывности по Гёльдеру в настоящей работе улучшает отношение регулярности предельной функции с регулярностью данных. Действительно, в предыдущих работах получались ограниченные производные по x второго порядка предельной функции в предположении, что заданные функции $v(t, x)$, $f(t, x, u)$ и $u_0(x)$ обладают ограниченными производными по x третьего порядка. Следует также отметить, что оценки приближенных решений, полученные в настоящей работе, не зависят от коэффициента κ , что дает возможность использовать их в дальнейших исследованиях поведения решения в случае, когда коэффициент κ стремится к нулю. Для этого будет полезна идея работ [10, 11].

1. Определение приближенных решений и основной результат. Определим приближенные решения задачи Коши

$$\partial_t u(t, x) + v(t, x) \cdot \nabla u(t, x) = \kappa \Delta u(t, x) + f(t, x, u(t, x)), \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad (1)$$

$$u(0, x) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad (2)$$

и докажем их сходимость. Здесь и далее

$$v \cdot \nabla = \sum_{j=1}^d v_j \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad \Delta = \sum_{j=1}^d \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}.$$

Для определения приближенных решений $u^{[n]}(t, x)$, $n = 1, 2, \dots$, для каждого n введем дискретизацию по времени t :

$$0 = t_0^{[n]} < t_1^{[n]} < \dots < t_{k-1}^{[n]} < t_k^{[n]} < \dots, \quad t_k^{[n]} - t_{k-1}^{[n]} = \delta_n = 2^{-n}$$

и рассмотрим ядро теплопроводности для $t = \delta_n$:

$$\Theta_n(x) = \frac{1}{(4\pi\delta_n\kappa)^{d/2}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4\delta_n\kappa}\right), \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

где κ — положительная постоянная. Для каждого n определим приближенное решение $u^{[n]}(t, x)$ соотношениями

$$u^{[n]}(t_0^{[n]}, x) = u_0(x), \quad (3)$$

$$\begin{aligned} u^{[n]}(t_k^{[n]}, x) = & \int_{\mathbb{R}^d} \Theta_n(y) u^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x - \delta_n v(t_k^{[n]}, x) - y) dy + \\ & + \delta_n f(t_{k-1}^{[n]}, x, u^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x)), \quad k = 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (4)$$

$$u^{[n]}(t, x) = \frac{t_k^{[n]} - t}{\delta_n} u^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x) + \frac{t - t_{k-1}^{[n]}}{\delta_n} u^{[n]}(t_k^{[n]}, x) \quad \text{при } t_{k-1}^{[n]} \leq t \leq t_k^{[n]}. \quad (5)$$

В этой статье используются следующие обозначения (для неотрицательных целых ν_j и m и для $0 < \alpha \leq 1$):

$$D_x^\nu = \frac{\partial^{|\nu|}}{\partial x_1^{\nu_1} \dots \partial x_d^{\nu_d}}, \quad \nu = (\nu_1, \dots, \nu_d), \quad |\nu| = \sum_{j=1}^d \nu_j,$$

$$D_{x,u}^\nu = \frac{\partial^{|\nu|}}{\partial x_1^{\nu_1} \dots \partial x_d^{\nu_d} \partial u^{\nu_{d+1}}}, \quad \nu = (\nu_1, \dots, \nu_d, \nu_{d+1}), \quad |\nu| = \sum_{j=1}^{d+1} \nu_j,$$

$$\|\varphi\|_{C^{m+\alpha}(\mathbb{R}^d)} = \|\varphi\|_{C^m(\mathbb{R}^d)} + \sum_{|\nu|=m} [D_x^\nu \varphi]_{\alpha, \mathbb{R}^d},$$

$$\|\varphi\|_{C^m(\mathbb{R}^d)} = \sum_{|\nu| \leq m} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |D_x^\nu \varphi(x)|,$$

$$[D_x^\nu \varphi]_{\alpha, \mathbb{R}^d} = \sup_{x, y \in \mathbb{R}^d, x \neq y} \frac{|D_x^\nu \varphi(x) - D_x^\nu \varphi(y)|}{|x - y|^\alpha}.$$

Там, где это не вызывает недоразумения, будем писать $\|\cdot\|_{C^{m+\alpha}}$ вместо $\|\cdot\|_{C^{m+\alpha}(\mathbb{R}^d)}$ и т.д.

Основным результатом настоящей работы является

ТЕОРЕМА 1. Пусть $m \in \mathbb{Z}$, $m \geq 2$, $2/3 < \alpha \leq 1$, $0 < \alpha_1 \leq 1$, $0 < \alpha_2 \leq 1$. Предположим, что для каждого $\tau > 0$ справедливы соотношения

$$\sup_{0 \leq t \leq \tau} \|v(t, \cdot)\|_{C^{m+\alpha}(\mathbb{R}^d)} < \infty, \quad (6)$$

$$\sup_{0 \leq t \leq \tau} \|\partial_t v(t, \cdot)\|_{C^{m-1}(\mathbb{R}^d)} < \infty, \quad (7)$$

$$\sup_{0 \leq t < t' \leq \tau, x \in \mathbb{R}^d} \frac{|D_x^\nu v(t, x) - D_x^\nu v(t', x)|}{|t - t'|^{\alpha_1}} < \infty, \quad |\nu| = m, \quad (8)$$

$$\sup_{0 \leq t \leq \tau, u \in \mathbb{R}} \frac{\|f(t, \cdot, u)\|_{C^{m+\alpha}(\mathbb{R}^d)}}{1 + |u|} < \infty, \quad (9)$$

$$\sup_{0 \leq t \leq \tau, x \in \mathbb{R}^d, u \in \mathbb{R}} |\partial_t D_{x,u}^\nu f(t, x, u)| < \infty, \quad |\nu| \leq m - 1, \quad (10)$$

$$\sup_{0 \leq t < t' \leq \tau, x \in \mathbb{R}^d, u \in \mathbb{R}} \frac{|D_{x,u}^\nu f(t, x, u) - D_{x,u}^\nu f(t', x, u)|}{|t - t'|^{\alpha_2}} < \infty, \quad |\nu| = m, \quad (11)$$

$$\sup_{0 \leq t \leq \tau, x \in \mathbb{R}, u, u' \in \mathbb{R}, u \neq u'} \frac{|D_{x,u}^\nu f(t, x, u) - D_{x,u}^\nu f(t, x, u')|}{|u - u'|} < \infty, \quad |\nu| = m, \quad (12)$$

$$\|u_0\|_{C^{m+\alpha}(\mathbb{R}^d)} < \infty. \quad (13)$$

Тогда функции $u^{[n]}(t, x)$, определенные соотношениями (3)–(5), и их производные $D_x^\nu u^{[n]}(t, x)$, $|\nu| \leq m$, сходятся при $n \rightarrow \infty$ равномерно на $[0, \tau] \times \mathbb{R}^d$ для любого $\tau > 0$ к одной функции $u(t, x)$ и ее производным $D_x^\nu u(t, x)$ и их производные порядка m сходятся в норме $C^{0+\alpha'}(\mathbb{R}^d)$ ($0 < \alpha' < \alpha$) для каждого $t \geq 0$, причем

(I) существует функция $\bar{\Phi}_{m+\alpha}(t)$, определенная условиями (6), (9) и (13) для v , f , u и u_0 , такая, что функция $u(t, x)$ удовлетворяет неравенству

$$\sup_{0 \leq t' \leq t} \|u(t', \cdot)\|_{C^{m+\alpha}(\mathbb{R}^d)} \leq \bar{\Phi}_{m+\alpha}(t) \quad \forall t \geq 0, \quad (14)$$

(II) функция $u(t, x)$ удовлетворяет начальному условию (2) поточечно и уравнению (1) в том смысле, что для любого $x \in \mathbb{R}^d$ имеет место равенство

$$\begin{aligned} & - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t) u(t, x) dt = \\ & = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) (-v(t, x) \cdot \nabla u(t, x) + \kappa \Delta u(t, x) + f(t, x, u(t, x))) dt \end{aligned} \quad (15)$$

для любой обладающей непрерывной производной функции φ такой, что ее носитель ограничен и расположен внутри $\mathbb{R}_+$.

2. Оценки приближенных решений и их производных. Далее будем использовать обозначение

$$\tau_+ = \tau + \delta_1,$$

где $\tau > 0$. Прежде всего установим оценку $|u^{[n]}(t, x)|$.

ЛЕММА 1. Пусть $u^{[n]}(t, x)$ — функции, определенные соотношениями (3)–(5). Пусть выполнены предположения теоремы 1. Тогда существует возрастающая непрерывная на $\mathbb{R}_+$ и независимая от n функция $\Phi_0(t)$ такая, что

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^d} |u^{[n]}(t, x)| \leq \Phi_0(t) \quad \forall t \geq 0. \quad (16)$$

Доказательство. Пусть $\tau > 0$. Положим

$$C_f = C_f(\tau) = \sup_{(t, x, u) \in [0, \tau_+] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}} \frac{|f(t, x, u)|}{1 + |u|}.$$

Так как

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\mathbb{R}^d} \Theta_n(y) u^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x - \delta_n v(t_k^{[n]}, x) - y) dy \right| \leq \sup_{\xi \in \mathbb{R}^d} |u^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, \xi)|, \\ & |f(t_{k-1}^{[n]}, x, u^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x))| \leq C_f \left(1 + \sup_{\xi \in \mathbb{R}^d} |u^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, \xi)| \right), \end{aligned}$$

из (3), (4) следует, что для $A_k^{[0, n]} = \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |u^{[n]}(t_k^{[n]}, x)|$ имеем

$$A_k^{[0, n]} \leq (1 + \delta_n C_f) A_{k-1}^{[0, n]} + \delta_n C_f.$$

Применяя последнее неравенство k раз, для $0 \leq t_k^{[n]} \leq \tau_+$ имеем

$$A_k^{[0,n]} \leq (1 + \delta_n C_f)^k A_0^{[0,n]} + \delta_n C_f \sum_{j=1}^k (1 + \delta_n C_f)^{k-j}.$$

Из этого соотношения и (5) вытекает, что существует возрастающая непрерывная и независимая от n функция $\Phi_0(t)$, удовлетворяющая неравенству (16). Лемма 1 доказана. $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ. В силу (16) выражение $|u^{[n]}(t, x)|$ ограничено в каждом отрезке времени $[0, \tau]$, поэтому далее норму $\|f(t, \cdot, u)\|_{C^{m+\alpha}(\mathbb{R}^d)}$ можно считать ограниченной в каждом отрезке $[0, \tau]$.

ЛЕММА 2. Пусть $u^{[n]}(t, x)$ — функции, определенные соотношениями (3)–(5). Пусть выполнены предположения теоремы 1. Тогда существует возрастающая непрерывная на $\mathbb{R}_+$ и независимая от n функция $\Phi_m(t)$ такая, что

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^d, |\nu| \leq m} |D_x^\nu u^{[n]}(t, x)| \leq \Phi_m(t) \quad \forall t \geq 0. \quad (17)$$

Доказательство. В силу (16) выражение $|u^{[n]}(t, x)|$ ограничено в каждом отрезке времени $[0, \tau]$, поэтому норму $\|f(t, \cdot, u)\|_{C^{m+\alpha}}$ можно считать ограниченной в каждом отрезке $[0, \tau]$. Таким образом, лемма 2 доказывается аналогично [8, 9]. $\square$

3. Оценка приближенных решений в пространстве Гёльдера.

ЛЕММА 3. Пусть $u^{[n]}(t, x)$ — функции, определенные соотношениями (3)–(5). Пусть выполнены предположения теоремы 1. Тогда существует возрастающая непрерывная на $\mathbb{R}_+$ и независимая от n функция $\Phi_{\alpha, m}(t)$, определенная условиями (6), (9) и (13) для v , f и u_0 такая, что

$$\sum_{|\nu|=m} [D_x^\nu u^{[n]}(t, \cdot)]_{\alpha, \mathbb{R}^d} \leq \Phi_{\alpha, m}(t) \quad \forall t \geq 0. \quad (18)$$

Доказательство. Рассмотрим дифференциальный оператор D_x^ν , в котором $|\nu| = m$. В силу условия (13) и определения (3) имеем

$$[D_x^\nu u^{[n]}(t_0^{[n]}, \cdot)]_\alpha = [D_x^\nu u_0(\cdot)]_\alpha < \infty. \quad (19)$$

Пусть $x^{(a)} \in \mathbb{R}^d$, $x^{(b)} \in \mathbb{R}^d$, $x^{(a)} \neq x^{(b)}$. Из (4) следует, что

$$(D_x^\nu u^{[n]}(t_k^{[n]}, \cdot))(x^{(a)}) - (D_x^\nu u^{[n]}(t_k^{[n]}, \cdot))(x^{(b)}) = D_{(1)} + D_{(2)}, \quad (20)$$

где

$$\begin{aligned} D_{(1)} = \int_{\mathbb{R}^d} \Theta_n(y) & \left(D_x^\nu u^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x^{(a)} - \delta_n v(t_k^{[n]}, x^{(a)}) - y) - \right. \\ & \left. - D_x^\nu u^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x^{(b)} - \delta_n v(t_k^{[n]}, x^{(b)}) - y) \right) dy, \end{aligned}$$

$$D_{(2)} = \delta_n \left(D_x^\nu f(t_{k-1}^{[n]}, x^{(a)}, u^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x^{(a)})) - D_x^\nu f(t_{k-1}^{[n]}, x^{(b)}, u^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x^{(b)})) \right).$$

Поскольку для $\varphi \in C^{m+\alpha}(\mathbb{R}^d)$ и $|\nu'| < m$ имеет место неравенство

$$\begin{aligned} \frac{|D_x^{\nu'} \varphi(\cdot)(x^{(a)}) - D_x^{\nu'} \varphi(\cdot)(x^{(b)})|}{|x^{(a)} - x^{(b)}|^\alpha} &\leq \\ &\leq \left(\sum_{|\nu''|=|\nu'|+1} \sup_{\xi \in \mathbb{R}^d} |D_x^{\nu''} \varphi(\cdot)(\xi)| \right)^\alpha \left(2 \sup_{\xi \in \mathbb{R}^d} |D_x^{\nu'} \varphi(\cdot)(\xi)| \right)^{1-\alpha} < \infty, \end{aligned}$$

используя правило дифференцирования сложной функции и предполагая, что $u^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, \cdot) \in C^{m+\alpha}(\mathbb{R}^d)$, с учетом условия (6) и леммы 2 получаем

$$\begin{aligned} |D_{(1)}| &\leq [D_x^\nu u^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, \cdot)]_\alpha |x^{(a)} - x^{(b)}|^\alpha + \\ &+ \delta_n C \left(\sum_{|\nu'|=m} [D_x^{\nu'} u^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, \cdot)]_\alpha + \sum_{|\nu'|=m} [D_x^{\nu'} v(t_k^{[n]}, \cdot)]_\alpha \right) |x^{(a)} - x^{(b)}|^\alpha + \\ &+ \delta_n C |x^{(a)} - x^{(b)}|^\alpha, \quad (21) \end{aligned}$$

где C — независимая от n и k постоянная. Аналогичным образом с учетом условий (9) и (12) имеем

$$\begin{aligned} |D_{(2)}| &\leq \delta_n C' \left(\sum_{|\nu'|=m} [D_x^{\nu'} u^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, \cdot)]_\alpha + \sum_{|\nu'|=m} [D_x^{\nu'} f(t_k^{[n]}, \cdot, u)]_\alpha \right) |x^{(a)} - x^{(b)}|^\alpha + \\ &+ \delta_n C |x^{(a)} - x^{(b)}|^\alpha. \quad (22) \end{aligned}$$

Из (20)–(22) следует, что существует независимая от n и k постоянная C' такая, что

$$\sum_{|\nu|=m} [D_x^\nu u^{[n]}(t_k^{[n]}, \cdot)]_\alpha \leq (1 + \delta_n C') \sum_{|\nu|=m} [D_x^\nu u^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, \cdot)]_\alpha + \delta_n C'.$$

Значит,

$$\sum_{|\nu|=m} [D_x^\nu u^{[n]}(t_k^{[n]}, \cdot)]_\alpha \leq (1 + \delta_n C')^k \sum_{|\nu|=m} [D_x^\nu u^{[n]}(t_0^{[n]}, \cdot)]_\alpha + \delta_n C' \sum_{j=1}^k (1 + \delta_n C')^{k-j}$$

при $0 \leq t_k^{[n]} \leq \tau$.

Из последнего неравенства, равенства (19) и определения (5) следует, что существует возрастающая непрерывная и независимая от n функция $\Phi_{\alpha,m}(t)$, удовлетворяющая неравенству (18) в отрезке $[0, \tau]$. Так как $\tau > 0$ произвольная величина, функцию $\Phi_{\alpha,m}(t)$ можно продолжить на все $t \geq 0$, что завершает доказательство леммы 3. $\square$

4. Сходимость приближенных решений.

ЛЕММА 4. Пусть $u^{[n]}(t, x)$ — функции, определенные соотношениями (3)–(5). Пусть выполнены предположения теоремы 1. Тогда для каждого $\tau > 0$ функции $u^{[n]}(t, x)$ и их производные по $x \in \mathbb{R}^d$ до порядка m включительно сходятся при $n \rightarrow \infty$ равномерно на $[0, \tau] \times \mathbb{R}^d$, а их производные порядка m сходятся в норме $C^{0+\alpha'}(\mathbb{R}^d)$ ($0 < \alpha' < \alpha$) для каждого $t \geq 0$. Кроме того, существует функция $\bar{\Phi}_{m+\alpha}(t)$, определенная условиями (6), (9) и (13) для v, f , и u_0 , такая, что предельная функция $u(t, x)$ последовательности $\{u^{[n]}(t, x)\}_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяет неравенству (14).

Доказательство. Лемма будет доказана в три шага.

ШАГ 1. Функции $u^{[n]}(t, x)$ и их производные по $x \in \mathbb{R}^d$ до порядка $m - 1$ включительно сходятся равномерно на $[0, \tau] \times \mathbb{R}^d$ для любого $\tau > 0$.

Действительно, равномерная сходимость $u^{[n]}(t, x)$ и их производных первого и второго порядков на $[0, \tau] \times \mathbb{R}^d$ для каждого $\tau > 0$ доказывается так же, как в [8, 9]. Аналогичным образом с использованием оценки (17) равномерная сходимость может быть доказана и для их производных порядка от 2 до $m - 1$.

ШАГ 2. Докажем, что производные функций $u^{[n]}(t, x)$ по $x \in \mathbb{R}^d$ порядка m сходятся равномерно на $[0, \tau] \times \mathbb{R}^d$ для любого $\tau > 0$.

Напомним, что $t_{2k+2}^{[n+1]} = t_{k+1}^{[n]}$, и рассмотрим разность $D_x^{\nu} u^{[n+1]}(t_{2k+2}^{[n+1]}, x) - D_x^{\nu} u^{[n]}(t_{k+1}^{[n]}, x)$. Для упрощения записи введем следующие обозначения:

$$w_{\nu', k}^{[m', n]}(x) = D_x^{\nu'} u^{[n]}(t_k^{[n]}, x), \quad m' = |\nu'|, \quad \nu' = (\nu'_1, \dots, \nu'_d),$$

$$\xi_{k'}^{n'}(x, y) = x - \delta_{n'} v(t_{k'}^{[n']}, x) - y.$$

Из (4) следует, что $u^{[n+1]}(t_{2k+2}^{[n+1]}, x)$ может быть выражено в виде

$$u^{[n+1]}(t_{2k+2}^{[n+1]}, x) = \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \Theta_{n+1}(y_1) \Theta_{n+1}(y_2) u^{[n+1]}(t_{2k}^{[n+1]}, \xi^*(y_1, y_2)) dy_1 dy_2 +$$

$$+ \delta_{n+1} \int_{\mathbb{R}^d} \Theta_{n+1}(y_1) f\left(t_{2k}^{[n+1]}, \xi_{2k+2}^{n+1}(x, y_1), u^{[n+1]}(t_{2k}^{[n+1]}, \xi_{2k+2}^{n+1}(x, y_1))\right) dy_1 +$$

$$+ \delta_{n+1} f(t_{2k+1}^{[n+1]}, x, U), \quad k = 1, 2, \dots, \quad (23)$$

где

$$\xi^*(y_1, y_2) = \xi_{2k+2}^{n+1}(x, y_1) - \delta_{n+1} v(t_{2k+1}^{[n+1]}, \xi_{2k+2}^{n+1}(x, y_1)) - y_2,$$

$$U = \int_{\mathbb{R}^d} \Theta_{n+1}(y) u^{[n+1]}(t_{2k}^{[n+1]}, \xi_{2k+1}^{n+1}(x, y)) dy + \delta_{n+1} f(t_{2k}^{[n+1]}, x, u^{[n+1]}(t_{2k}^{[n+1]}, x)).$$

С другой стороны, так как $\Theta_n(y) = \int_{\mathbb{R}^d} \Theta_{n+1}(y - y_1) \Theta_{n+1}(y_1) dy_1$, для произвольной регулярной функции $\varphi(\cdot)$ имеем

$$\int_{\mathbb{R}^d} \Theta_n(y) \varphi(x - y) dy = \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \Theta_{n+1}(y_2) \Theta_{n+1}(y_1) \varphi(x - y_1 - y_2) dy_1 dy_2.$$

Поэтому из (4) также получим

$$u^{[n]}(t_{k+1}^{[n]}, x) = \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \Theta_{n+1}(y_1) \Theta_{n+1}(y_2) u^{[n]}(t_k^{[n]}, \xi_{k+1}^n(x, y_1 + y_2)) dy_1 dy_2 + \\ + \delta_n f(t_k^{[n]}, x, u^{[n]}(t_k^{[n]}, x)), \quad k = 1, 2, \dots \quad (24)$$

Из (23) и (24) следует, что

$$D_x^\nu u^{[n+1]}(t_{2k+2}^{[n+1]}, x) - D_x^\nu u^{[n]}(t_{k+1}^{[n]}, x) = \\ = \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \Theta_{n+1}(y_1) \Theta_{n+1}(y_2) (D_x^\nu(U_1) + D_x^\nu(U_2)) dy_1 dy_2 + \\ + \delta_{n+1} \int_{\mathbb{R}^d} \Theta_{n+1}(y_1) D_x^\nu(F_1) dy_1 + \delta_{n+1} D_x^\nu(F_2), \quad (25)$$

где

$$U_1 = u^{[n+1]}(t_{2k}^{[n+1]}, \xi_{k+1}^n(x, y_1 + y_2)) - u^{[n]}(t_k^{[n]}, \xi_{k+1}^n(x, y_1 + y_2)), \\ U_2 = u^{[n+1]}(t_{2k}^{[n+1]}, \xi^*(y_1, y_2)) - u^{[n+1]}(t_{2k}^{[n+1]}, \xi_{k+1}^n(x, y_1 + y_2)), \\ F_1 = f(t_{2k}^{[n+1]}, \xi_{2k+2}^{n+1}(x, y_1), u^{[n+1]}(t_{2k}^{[n+1]}, \xi_{2k+2}^{n+1}(x, y_1))) - f(t_k^{[n]}, x, u^{[n]}(t_k^{[n]}, x)), \\ F_2 = f(t_{2k+1}^{[n+1]}, x, U) - f(t_k^{[n]}, x, u^{[n]}(t_k^{[n]}, x)).$$

В силу условия (6) имеем оценку

$$|D_x^\nu U_1| \leq |w_{\nu, 2k}^{[m, n+1]}(\xi_{k+1}^n(x, y_1 + y_2)) - w_{\nu, k}^{[m, n]}(\xi_{k+1}^n(x, y_1 + y_2))| + \\ + C_1 \delta_{n+1} \sum_{|\nu'|=m} |w_{\nu', 2k}^{[m, n+1]}(\xi_{k+1}^n(x, y_1 + y_2)) - w_{\nu', k}^{[m, n]}(\xi_{k+1}^n(x, y_1 + y_2))| + \\ + C_1 \delta_{n+1} \sum_{|\nu'|=m', 0 < m' < m} |w_{\nu', 2k}^{[m', n+1]}(\xi_{k+1}^n(x, y_1 + y_2)) - w_{\nu', k}^{[m', n]}(\xi_{k+1}^n(x, y_1 + y_2))|,$$

где C_1 — независимая от n и k постоянная.

С другой стороны, с учетом леммы 2 и условий (6) и (7) имеем

$$|D_x^\nu U_2| \leq |w_{\nu, 2k}^{[m, n+1]}(\xi^*(y_1, y_2)) - w_{\nu, 2k}^{[m, n+1]}(\xi_{k+1}^n(x, y_1 + y_2))| + \\ + C_2 \delta_{n+1} \sum_{|\nu'|=m} |w_{\nu', 2k}^{[m, n+1]}(\xi^*(y_1, y_2)) - w_{\nu', 2k}^{[m, n+1]}(\xi_{k+1}^n(x, y_1 + y_2))| + \\ + C_2 \delta_{n+1} |D_x^\nu v(t_{2k+1}^{[n+1]}, \xi_{2k+2}^{n+1}(x, y_1)) - D_x^\nu v(t_{k+1}^{[n]}, x)| + C_2 \delta_{n+1}^2 + C_2 \delta_{n+1} |y_1|,$$

где C_2 — независимая от n и k постоянная.

Заметим, что в силу леммы 3 имеем оценки

$$|w_{\nu, 2k}^{[m, n+1]}(\xi^*(y_1, y_2)) - w_{\nu, 2k}^{[m, n+1]}(\xi_{k+1}^n(x, y_1 + y_2))| \leq$$

$$\begin{aligned} &\leq [D_x^\nu u^{[n+1]}(t_{2k}^{[n+1]}, \cdot)]_\alpha |\xi^*(y_1, y_2) - \xi_{k+1}^n(x, y_1 + y_2)|^\alpha \leq \\ &\leq [D_x^\nu u^{[n+1]}(t_{2k}^{[n+1]}, \cdot)]_\alpha \delta_{n+1}^\alpha (\delta_{n+1} \sup |\partial_t v| + \sup |\nabla v| (\sup |v| \delta_{n+1} + |y_1|))^\alpha \end{aligned}$$

(здесь и далее запишем просто $\sup$ вместо $\sup_{0 \leq t \leq \tau, x \in \mathbb{R}^d}$). Кроме этого, из условий (6) и (8) следует, что

$$\begin{aligned} &|D_x^\nu v(t_{2k+1}^{[n+1]}, \xi_{2k+2}^{n+1}(x, y_1)) - D_x^\nu v(t_{k+1}^{[n]}, x)| \leq \\ &\leq |D_x^\nu v(t_{2k+1}^{[n+1]}, x) - D_x^\nu v(t_{k+1}^{[n]}, x)| + |D_x^\nu v(t_{2k+1}^{[n+1]}, \xi_{2k+2}^{n+1}(x, y_1)) - D_x^\nu v(t_{2k+1}^{[n+1]}, x)| \leq \\ &\leq C_3 \delta_{n+1}^{\alpha_1} + [D_x^\nu v(t_{2k+1}^{[n+1]}, \cdot)]_\alpha (\delta_{n+1} \sup |v| + |y_1|)^\alpha, \end{aligned}$$

где C_3 — независимая от n и k постоянная.

Следовательно, учитывая соотношение

$$\int_{\mathbb{R}^d} \Theta_{n+1} |y|^\alpha dy = C_\alpha \delta_{n+1}^{\alpha/2} \quad (26)$$

с независимой от n постоянной C_α , определенной числом α , делаем вывод, что существует независимая от n постоянная C такая, что

$$\begin{aligned} &\sup_{x \in \mathbb{R}^d} \left| \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \Theta_{n+1}(y_1) \Theta_{n+1}(y_2) (D_x^\nu(U_1) + D_x^\nu(U_2)) dy_1 dy_2 \right| \leq \\ &\leq \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |w_{\nu, 2k}^{[m, n+1]}(x) - w_{\nu, k}^{[m, n]}(x)| + C \delta_{n+1} \sum_{|\nu'|=m} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |w_{\nu', 2k}^{[m, n+1]}(x) - w_{\nu', k}^{[m, n]}(x)| + \\ &+ C \delta_{n+1} \sum_{|\nu'|=m', 0 < m' < m} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |w_{\nu', 2k}^{[m', n+1]}(x) - w_{\nu', k}^{[m', n]}(x)| + C \delta_{n+1}^{\min(1+\alpha_1, 3\alpha/2)}. \quad (27) \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь второе слагаемое правой части (25). В силу леммы 2 и условий (6) и (9) имеем

$$\begin{aligned} |D_x^\nu F_1| &\leq |w_{\nu, 2k}^{[m, n+1]}(x) - w_{\nu, k}^{[m, n]}(x)| + C'_1 |w_{\nu, 2k}^{[m, n+1]}(\xi_{2k+2}^{n+1}(x, y_1)) - w_{\nu, 2k}^{[m, n+1]}(x)| + \\ &+ C'_1 \sum_{|\nu'|=m', 0 < m' < m} |w_{\nu', 2k}^{[m', n+1]}(x) - w_{\nu', k}^{[m', n]}(x)| + C'_1 |u^{[n+1]}(t_{2k}^{[n+1]}, x) - u^{[n]}(t_k^{[n]}, x)| + \\ &+ C'_1 \sum_{|\nu'|=m} |f_{\nu'}^{[**]} - f_{\nu'}^{[*]}| + C'_1 \delta_{n+1} + C'_1 |y_1|, \quad (28) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} f_{\nu'}^{[**]} &= D_{x, u}^{\nu'} f(t_{2k}^{[n+1]}, \xi_{2k+2}^{n+1}(x, y_1), u^{[n+1]}(t_{2k}^{[n+1]}, \xi_{2k+2}^{n+1}(x, y_1))), \\ f_{\nu'}^{[*]} &= D_{x, u}^{\nu'} f(t_k^{[n]}, x, u^{[n]}(t_k^{[n]}, x)), \end{aligned}$$

а C'_1 — независимая от n и k постоянная. В силу леммы 3 имеем

$$|w_{\nu, 2k}^{[m, n+1]}(\xi_{2k+2}^{n+1}(x, y_1)) - w_{\nu, 2k}^{[m, n+1]}(x)| \leq$$

$$\leq [D_x^\nu u^{[n+1]}(t_{2k}^{[n+1]}, \cdot)]_\alpha (\sup |v| \delta_{n+1} + |y_1|)^\alpha. \quad (29)$$

Кроме этого, в силу условий (9) и (12) имеем

$$\begin{aligned} & \left| D_{x,u}^{\nu'} f \left(t_{2k}^{[n+1]}, \xi_{2k+2}^{n+1}(x, y_1), u^{[n+1]}(t_{2k}^{[n+1]}, \xi_{2k+2}^{n+1}(x, y_1)) \right) - \right. \\ & \quad \left. - D_{x,u}^{\nu'} f(t_k^{[n]}, x, u^{[n]}(t_k^{[n]}, x)) \right| \leq \\ & \leq C'_2 \left[(\sup |v| \delta_{n+1} + |y_1|)^\alpha + \sup |\nabla u^{n+1}| (\sup |v| \delta_{n+1} + |y_1|) + \right. \\ & \quad \left. + \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |u^{[n+1]}(t_{2k}^{[n+1]}, x) - u^{[n]}(t_k^{[n]}, x)| \right], \quad (30) \end{aligned}$$

где C'_2 — независимая от n и k постоянная. Из (26), (28), (29) и (30) вытекает, что существует независимая от n и k постоянная C' такая, что

$$\begin{aligned} & \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \left| \int_{\mathbb{R}^d} \Theta_{n+1}(y_1) D_x^\nu(F_1) dy_1 \right| \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |w_{\nu, 2k}^{[m, n+1]}(x) - w_{\nu, k}^{[m, n]}(x)| + \\ & \quad + C' \sum_{|\nu'|=m', 0 < m' < m} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |w_{\nu', 2k}^{[m', n+1]}(x) - w_{\nu', k}^{[m', n]}(x)| + \\ & \quad + C' \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |u^{[n+1]}(t_{2k}^{[n+1]}, x) - u^{[n]}(t_k^{[n]}, x)| + C' \delta_{n+1}^{\alpha/2}. \quad (31) \end{aligned}$$

Что касается последнего слагаемого правой части (25), то с учетом условия (10) получаем

$$\begin{aligned} & |D_x^\nu F_2| \leq |w_{\nu, 2k}^{[m, n+1]}(x) - w_{\nu, k}^{[m, n]}(x)| + \\ & \quad + \int_{\mathbb{R}^d} \Theta_{n+1}(y) |w_{\nu, 2k}^{[m, n+1]}(\xi_{2k+1}^{n+1}(x, y)) - w_{\nu, 2k}^{[m, n+1]}(x)| dy + \\ & \quad + C''_1 \sum_{|\nu'|=m', 0 < m' < m} |w_{\nu', 2k}^{[m', n+1]}(x) - w_{\nu', k}^{[m', n]}(x)| + C''_1 |u^{[n+1]}(t_{2k}^{[n+1]}, x) - u^{[n]}(t_k^{[n]}, x)| + \\ & \quad + C''_1 \sum_{|\nu'|=m} |D_{x,u}^{\nu'} f(t_{2k+1}^{[n+1]}, x, U) - D_{x,u}^{\nu'} f(t_k^{[n]}, x, u^{[n]}(t_k^{[n]}, x))| + C''_1 \sqrt{\delta_{n+1}}, \quad (32) \end{aligned}$$

где C''_1 — независимая от n и k постоянная. В силу леммы 3 имеем

$$\begin{aligned} & |w_{\nu, 2k}^{[m, n+1]}(\xi_{2k+1}^{n+1}(x, y)) - w_{\nu, 2k}^{[m, n+1]}(x)| \leq \\ & \leq [D_x^\nu u^{[n+1]}(t_{2k}^{[n+1]}, \cdot)]_\alpha (\sup |v| \delta_{n+1} + |y|)^\alpha. \quad (33) \end{aligned}$$

Кроме этого, в силу условий (11) и (12) имеем

$$\begin{aligned} & |D_{x,u}^{\nu'} f(t_{2k+1}^{[n+1]}, x, U) - D_{x,u}^{\nu'} f(t_k^{[n]}, x, u^{[n]}(t_k^{[n]}, x))| \leq \\ & \leq C''_2 (\delta_{n+1}^{\alpha_2} + |u^{[n+1]}(t_{2k}^{[n+1]}, x) - u^{[n]}(t_k^{[n]}, x)| + \sqrt{\delta_{n+1}}), \quad (34) \end{aligned}$$

где C_2'' — независимая от n и k постоянная. Из (26), (32), (33) и (34) вытекает, что существует независимая от n и k постоянная C''' такая, что

$$\begin{aligned} |D_x^\nu F_2| &\leq \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |w_{\nu, 2k}^{[m, n+1]}(x) - w_{\nu, k}^{[m, n]}(x)| + \\ &+ C''' \sum_{|\nu'|=m', 0 \leq m' < m'} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |w_{\nu', 2k}^{[m', n+1]}(x) - w_{\nu', k}^{[m', n]}(x)| + \\ &+ C'' |u^{[n+1]}(t_{2k}^{[n+1]}, x) - u^{[n]}(t_k^{[n]}, x)| + C'' \delta_{n+1}^{\min(\alpha/2, \alpha_2)}. \end{aligned} \quad (35)$$

Из неравенств (27), (31) и (35) получаем

$$\begin{aligned} \sum_{0 \leq |\nu| \leq m} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |D_x^\nu u^{[n+1]}(t_{2k+2}^{[n+1]}, x) - D_x^\nu u^{[n]}(t_{k+1}^{[n]}, x)| &\leq \\ &\leq (1 + \tilde{C} \delta_{n+1}) \sum_{0 \leq |\nu| \leq m} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |w_{\nu, 2k}^{[m, n+1]}(x) - w_{\nu, k}^{[m, n]}(x)| + \tilde{C} \delta_{n+1}^{1+\beta}, \end{aligned}$$

где $\beta = \min(3\alpha/2 - 1, \alpha_1, \alpha_2)$ и $\tilde{C} = C + C' + C'''$. Таким образом, если положим

$$Y_{k+1}^{[m, n]} = \sum_{0 \leq |\nu| \leq m} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |D_x^\nu u^{[n+1]}(t_{2k+2}^{[n+1]}, x) - D_x^\nu u^{[n]}(t_{k+1}^{[n]}, x)|,$$

то имеет место неравенство

$$Y_{k+1}^{[m, n]} \leq (1 + \delta_{n+1} \tilde{C}) Y_k^{[m, n]} + \tilde{C} \delta_{n+1}^{1+\beta},$$

откуда с учетом соотношения $Y_0^{[m, n]} = 0$

$$Y_k^{[m, n]} \leq \tilde{C} \delta_{n+1}^{1+\beta} \sum_{j=0}^k (1 + \delta_{n+1} \tilde{C})^{k-j} \leq \delta_{n+1}^\beta e^{t_{k+1}^n \tilde{C}}.$$

Следовательно, напоминая определение $Y_k^{[m, n]}$ и соотношение (5), получим

$$\sum_{0 \leq |\nu| \leq m} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |D_x^\nu u^{[n+1]}(t, x) - D_x^\nu u^{[n]}(t, x)| \leq \delta_{n+1}^\beta e^{t_{k+1}^n \tilde{C}}. \quad (36)$$

Так как $\beta > 0$, имеем

$$\sum_{n=0}^{\infty} \delta_{n+1}^\beta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n\beta}} < \infty.$$

Значит, из (36) вытекает равномерная сходимость $D_x^\nu u^{[n]}(t, x)$ при $n \rightarrow \infty$.

Шаг 3. Докажем, что существует функция $\bar{\Phi}_{m+\alpha}(t)$, определенная условиями (6), (9) и (13) для v , f , и u_0 такая, что предельная функция $u(t, x)$ удовлетворяет неравенству (14), а для каждого $t \geq 0$ $D_x^\nu u^{[n]}(t, x)$ ($|\nu| = m$) сходится к $D_x^\nu u(t, x)$ в норме $C^{0+\alpha'}(\mathbb{R}^d)$ при $0 < \alpha' < \alpha$.

Действительно, из шагов 1 и 2 следует, что величина $\sup_{0 \leq t' \leq t} \|u(t', \cdot)\|_{C^m}$ ограничена функцией, определенной условиями (6), (9) и (13) для v , f и u_0 . Помня об этом, рассмотрим для $|\nu| = m$ неравенство

$$\begin{aligned} \frac{|D_x^\nu u(t, x) - D_x^\nu u(t, y)|}{|x - y|^\alpha} &\leq \frac{|D_x^\nu u^{[n]}(t, x) - D_x^\nu u^{[n]}(t, y)|}{|x - y|^\alpha} + \\ &+ \frac{|D_x^\nu u(t, x) - D_x^\nu u^{[n]}(t, x)|}{|x - y|^\alpha} + \frac{|D_x^\nu u(t, y) - D_x^\nu u^{[n]}(t, y)|}{|x - y|^\alpha}. \end{aligned}$$

Из шага 2 следует, что для каждого $\varepsilon > 0$ можно найти $\bar{n}_\varepsilon$ такое, что

$$|D_x^\nu u(t, x) - D_x^\nu u^{[n]}(t, x)| \leq \varepsilon \quad \text{при } n \geq \bar{n}_\varepsilon.$$

Следовательно, в силу (18) имеем

$$\frac{|D_x^\nu u(t, x) - D_x^\nu u(t, y)|}{|x - y|^\alpha} \leq \Phi_{\alpha, m}(t) + 1,$$

откуда получим (14) с $\bar{\Phi}_{m+\alpha}(t) = \Phi_{\alpha, m}(t) + \Phi_m(t) + 1$. Сходимость $D_x^\nu u^{[n]}(t, x)$ ($|\nu| = m$) к $D_x^\nu u(t, x)$ для каждого $t \geq 0$ в $C^{0+\alpha'}(\mathbb{R}^d)$ при $0 < \alpha' < \alpha$ следует из (14), (18), равномерной сходимости $D_x^\nu u^{[n]}(t, x)$ к $D_x^\nu u(t, x)$ и неравенства

$$\begin{aligned} \sup \frac{|D_x^\nu u^{[n]}(t, x^{(a)}) - D_x^\nu u(t, x^{(a)}) - (D_x^\nu u^{[n]}(t, x^{(b)}) - D_x^\nu u(t, x^{(b)}))|}{|x^{(a)} - x^{(b)}|^{\alpha'}} &\leq \\ &\leq \left(\sup \frac{|D_x^\nu u^{[n]}(t, x^{(a)}) - D_x^\nu u(t, x^{(a)}) - (D_x^\nu u^{[n]}(t, x^{(b)}) - D_x^\nu u(t, x^{(b)}))|}{|x^{(a)} - x^{(b)}|^{\alpha'}} \right)^{\alpha'/\alpha} \times \\ &\times \left(\sup |D_x^\nu u^{[n]}(t, x^{(a)}) - D_x^\nu u(t, x^{(a)}) - (D_x^\nu u^{[n]}(t, x^{(b)}) - D_x^\nu u(t, x^{(b)}))| \right)^{(\alpha-\alpha')/\alpha}, \end{aligned}$$

где $\sup = \sup_{x^{(a)}, x^{(b)} \in \mathbb{R}^d, x^{(a)} \neq x^{(b)}}$. Лемма 4 доказана. $\square$

5. Переход к пределу. Перед тем как доказать, что предельная функция $u(t, x)$ удовлетворяет уравнению переноса-диффузии (1), напомним сначала связь между приближенными решениями $u^{[n]}(t, x)$ и уравнением (1).

ЛЕММА 5. Пусть $\tau > 0$, а $u^{[n]}(t, x)$ — функция, определенная соотношениями (3), (4). Пусть выполнены предположения теоремы 1. Тогда при $t_1^{[n]} \leq t_k^{[n]} \leq \tau_+$ имеем

$$\begin{aligned} \frac{u^{[n]}(t_k^{[n]}, x) - u^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x)}{\delta_n} &= -v(t_k^{[n]}, x) \cdot \nabla u^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x) + \\ &+ \kappa \Delta u^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x) + f(t_{k-1}^{[n]}, x, u^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x)) + R, \end{aligned} \quad (37)$$

$$|R| \leq \delta_n^{\alpha/2} C_0, \quad (38)$$

где C_0 — независимая от n постоянная, определенная предположениями.

Доказательство. Согласно формуле Тейлора получаем

$$\begin{aligned}
 u^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x - \delta_n v(t_k^{[n]}, x) - y) = \\
 = u^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x) - \delta_n v(t_k^{[n]}, x) \cdot \nabla u^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x) - y \cdot \nabla u^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x) + \\
 + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d y_i y_j \frac{\partial^2 u^{[n]}}{\partial x_i \partial x_j}(t_{k-1}^{[n]}, x) + \\
 + \int_0^1 (1-s) \sum_{i,j=1}^d y_i y_j \left[\frac{\partial^2 u^{[n]}}{\partial x_i \partial x_j}(t_{k-1}^{[n]}, x - \delta_n v(t_k^{[n]}, x)s - ys) - \right. \\
 \left. - \frac{\partial^2 u^{[n]}}{\partial x_i \partial x_j}(t_{k-1}^{[n]}, x) \right] ds + \\
 + \int_0^1 (1-s) \sum_{i,j=1}^d [\delta_n^2 v_i(x) v_j(t, x) + 2\delta_n v_i(t, x) y_j] \times \\
 \times \frac{\partial^2 u^{[n]}}{\partial x_i \partial x_j}(t_{k-1}^{[n]}, x - \delta_n v(t_k^{[n]}, x)s - ys) ds. \quad (39)
 \end{aligned}$$

Так как

$$\int_{\mathbb{R}^d} \Theta_n(y) y_j dy = 0, \quad \int_{\mathbb{R}^d} \Theta_n(y) y_i y_j dy = 0 \quad \text{для } i \neq j, \quad \int_{\mathbb{R}^d} \Theta_n(y) y_i^2 dy = 2\delta_n \kappa,$$

имеем

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{R}^d} \Theta_n(y) y \cdot \nabla u^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x) dy = 0, \\
 \int_{\mathbb{R}^d} \Theta_n(y) \left[\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d y_i y_j \frac{\partial^2 u^{[n]}}{\partial x_i \partial x_j}(t_{k-1}^{[n]}, x) \right] dy = \delta_n \kappa \Delta u^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x).
 \end{aligned}$$

С другой стороны, так как $m \geq 2$, в силу леммы 3 производные второго порядка функции $u^{[n]}$ по x непрерывны по Гёльдеру с показателем α , так что

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{\partial^2 u^{[n]}}{\partial x_i \partial x_j}(t_{k-1}^{[n]}, x - \delta_n v(t_k^{[n]}, x)s - ys) - \frac{\partial^2 u^{[n]}}{\partial x_i \partial x_j}(t_{k-1}^{[n]}, x) \right| \leq \\
 \leq \left[\frac{\partial^2 u^{[n]}}{\partial x_i \partial x_j}(t_k^{[n]}, \cdot) \right]_{\alpha} (\sup |v| \delta_n + |y|)^{\alpha} s^{\alpha}.
 \end{aligned}$$

Следовательно, с учетом (26) имеем

$$\begin{aligned}
 \left| \int_{\mathbb{R}^d} \Theta_n(y) \left(\int_0^1 (1-s) \sum_{i,j=1}^d y_i y_j \left[\frac{\partial^2 u^{[n]}}{\partial x_i \partial x_j}(t_{k-1}^{[n]}, x - \delta_n v(t_k^{[n]}, x)s - ys) - \right. \right. \right. \\
 \left. \left. \left. - \frac{\partial^2 u^{[n]}}{\partial x_i \partial x_j}(t_{k-1}^{[n]}, x) \right] ds \right) dy \right| \leq C_1 \delta_n^{1+\alpha/2},
 \end{aligned}$$

где C_1 — независимая от n постоянная. Кроме этого, так как производные второго порядка функции $u^{[n]}$ по x равномерно ограничены (см. лемму 2), интеграл последнего слагаемого (39), умноженного на $\Theta_n(y)$, ограничен величиной $C_2\delta_n^{3/2}$ с независимой от n постоянной C_2 .

Принимая во внимание (4), из полученных выше соотношений получаем

$$u^{[n]}(t_k^{[n]}, x) - u^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x) = -\delta_n v(t_{k-1}^{[n]}, x) \cdot \nabla u^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x) + \\ + \delta_n \kappa \Delta u^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x) + \delta_n f(t_{k-1}^{[n]}, x, u^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x)) + \delta_n R$$

с $|R| \leq \delta_n^{\alpha/2} C_0$. Разделив обе части этого равенства на δ_n , получим (37). Лемма 5 доказана. $\square$

Перейдем теперь к доказательству теоремы 1.

Доказательство. Введем в рассмотрение функцию

$$h^{[n]}(t) = t_{k-1}^{[n]} \quad \text{при} \quad t_{k-1}^{[n]} \leq t < t_k^{[n]}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Тогда из соотношений (37), (38) и определения (5) получим

$$\frac{\partial u^{[n]}}{\partial t}(t, x) = -v(h^{[n]}(t + \delta_n), x) \cdot \nabla u^{[n]}(h^{[n]}(t), x) + \kappa \Delta u^{[n]}(h^{[n]}(t), x) + \\ + f(h^{[n]}(t), x, u^{[n]}(h^{[n]}(t), x)) + R \quad \text{при} \quad t \neq t_k^{[n]}.$$

Продолжим обе части этого равенства на $t \leq 0$ их значениями на $0 < t < t_1^{[n]}$. Тогда их свертка по t со стандартной регуляризующей функцией $\varrho_\varepsilon(t)$ дает

$$\varrho_\varepsilon * \partial_t u^{[n]}(\cdot, x)(t) = \\ = \varrho_\varepsilon * \left(-v(h^{[n]}(\cdot + \delta_n), x) \cdot \nabla u^{[n]}(h^{[n]}(\cdot), x) + \kappa \Delta u^{[n]}(h^{[n]}(\cdot), x) + \right. \\ \left. + f(h^{[n]}(\cdot), x, u^{[n]}(h^{[n]}(\cdot), x)) + R \right)(t), \quad (40)$$

где $*_t$ обозначает свертку по t .

Учитывая равномерную сходимость производных первого и второго порядка по x приближенных решений (см. лемму 5), нетрудно видеть, что правая часть равенства (40) сходится равномерно к функции

$$\varrho_\varepsilon * \left(-v(\cdot, x) \cdot \nabla u(\cdot, x) + \kappa \Delta u(\cdot, x) + f(\cdot, x, u(\cdot, x)) \right)(t)$$

на $[0, \tau] \times \mathbb{R}^d$ при $n \rightarrow \infty$.

Пусть $\varphi(t)$ — обладающая непрерывной производной функции такая, что ее носитель ограничен и расположен внутри $\mathbb{R}_+$. Тогда из равенства

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) \left(\varrho_\varepsilon * \frac{\partial u^{[n]}}{\partial t}(\cdot, x) \right)(t) dt = - \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} * \varrho_\varepsilon \right)(t) u^{[n]}(t, x) dt$$

и равномерной сходимости приближенных решений $u^{[n]}(t, x)$ к функции u на $[0, \tau] \times \mathbb{R}^d$ следует, что

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) \left(\varrho_\varepsilon *_t \frac{\partial u^{[n]}}{\partial t}(\cdot, x) \right) (t) dt = - \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} *_t \varrho_\varepsilon \right) (t) u(t, x) dt.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} & - \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} *_t \varrho_\varepsilon \right) (t) u(t, x) dt = \\ & = \int_{-\infty}^{+\infty} (\varphi *_t \varrho_\varepsilon)(t) \left(-v(t, x) \cdot \nabla u(t, x) + \kappa \Delta u(t, x) + f(t, x, u(t, x)) \right) dt. \end{aligned}$$

Отсюда получается равенство (15) при $\varepsilon \rightarrow 0$. Теорема 1 доказана. $\square$

Выводы. В этой работе рассмотрены приближенные решения для уравнения переноса-диффузии, построенные путем применения ядра теплопроводности на каждом шаге дискретизации по времени, и кроме их сходимости к решению уравнения переноса-диффузии доказана принадлежность предельной функции к пространству Гёльдера. Оценки этих приближенных решений и их предельной функции имеют независимое от коэффициента диффузии поведение, что дает возможность использовать их в дальнейшем исследовании поведения решения в случае, когда коэффициент диффузии стремится к нулю. Также благодаря использованию непрерывности по Гёльдеру показано, что предельная функция приближенных решений может иметь такую же дифференцируемость по x , как и заданная функция переноса $v(t, x)$, что является первым шагом в направлении изучения квазилинейных уравнений.

Конкурирующие интересы. Мы заявляем об отсутствии явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

Авторский вклад и ответственность. Вклад авторов равноценен. Мы несем полную ответственность за предоставление окончательной версии рукописи в печать. Окончательной версии рукописи нами одобрена.

Финансирование. Исследование выполнялось без финансирования.

Библиографический список

1. Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уралцева Н. Н. *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа*. М.: Наука, 1967. 738 с. EDN: VLRBIL.
2. Krylov N. V. *Lectures on Elliptic and Parabolic Equations in Hölder Spaces* / Graduate Studies in Mathematics. vol. 12. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1996. xii+164 pp.
3. Lieberman G. M. *Second Order Parabolic Differential Equations*. Singapore: World Scientific, 1996. xi+439 pp.
4. Evans L. C. *Partial Differential Equations* / Graduate Studies in Mathematics. vol. 19. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2010. xxi+749 pp.
5. Pazy A. *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations* / Applied Mathematical Sciences. vol. 44. New York: Springer-Verlag, 1983. viii+279 pp. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-1-4612-5561-1>.
6. Гихман И. И., Скороход А. В. *Введение в теорию случайных процессов*. М.: Наука, 1977. 567 с.

7. Freidlin M. I., Wentzell A. D. *Random Perturbations of Dynamical Systems* / Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften. vol.260. Berlin: Springer, 2012. xxviii+458 pp. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-642-25847-3>.
8. Taleb L., Selvaduray S., Fujita Yashima H. Approximation par une moyenne locale de la solution de l'équation de transport-diffusion // *Afr. Math. Ann.*, 2020. vol. 8. pp. 71–90 (In French).
9. Smaali H., Fujita Yashima H. Une généralisation de l'approximation par une moyenne locale de la solution de l'équation de transport-diffusion // *Afr. Math. Ann.*, 2021. vol. 9. pp. 89–108 (In French).
10. Ait Mahiout L., Fujita Yashima H. Convergence de la solution d'une équation de transport-diffusion vers la solution d'une équation de transport // *Afr. Math. Ann.*, 2023. vol. 10. pp. 105–124 (In French).
11. Фуджита Яшима Х., Айт Махиут Л. Сходимость решения системы уравнений переноса-диффузии к решению системы уравнений переноса // *Вестн. Бурят. гос. ун-та. Мат., информ.*, 2023. № 1. С. 22–36. EDN: **NDMPRK**. DOI: <https://doi.org/10.18101/2304-5728-2023-1-22-36>.
12. Аюаюуда М., Аяди А., Фуджита Яшима Х. Сходимость приближенных решений ядром теплопроводности для уравнения переноса-диффузии в полуплоскости // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2022. Т. 26, № 2. С. 222–258. EDN: **JNGCBE**. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1881>.
13. Gherdaoui R., Taleb L., Selvaduray S. Convergence of the heat kernel approximated solutions of the transport-diffusion equation in the half-space // *J. Math. Anal. Appl.*, 2023. vol. 527, no. 2, 127507. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2023.127507>.
14. Гердауй Р., Селвадурай С., Фуджита Яшима Х. Сходимость приближенных решений для уравнения переноса-диффузии в полупространстве с условием Неймана // *Изв. Иркутск. гос. ун-та. Сер. мат.*, 2024. Т. 48. С. 64–79. EDN: **NPBQLS**. DOI: <https://doi.org/10.26516/1997-7670.2024.48.64>.

MSC: 35K58, 35K15

Approximation of the solution of transport-diffusion equation in Hölder space

*A. Nemdili¹, F. Korichi², H. Fujita Yashima¹*¹ École Normale Supérieure El Katiba Assia Djebar Constantine, Ville Universitaire, Ain El Bey Ali Mendjeli, Constantine, 25000, Algeria.² École Normale Supérieure de Kouba, B.P. 92, Vieux Kouba, Alger, 16050, Algeria.

Abstract

In this paper, approximate solutions for the transport-diffusion equation in $\mathbb{R}^d$ and their limit function are considered and it is proved that the limit function belongs to the Hölder space corresponding to the regularity of given functions and satisfies the equation. More precisely, we construct these approximate solutions by using the heat kernel and the translation corresponding to the transport on each step of time discretization. Under the assumption of the boundedness of given functions and their partial derivatives with respect to the space variables up to the m -th order ($m \geq 2$) and of the α -Hölder continuity of their m -th derivatives ($2/3 < \alpha \leq 1$; if $\alpha = 1$, it means the Lipschitz condition), we first establish suitable estimates of the approximate solutions and then, using these estimates, we prove their convergence to a function which satisfies the equation and the α -Hölder continuity of the m -th derivatives with respect to the space variables of the limit function. Note that these estimates do not depend on the coefficient of diffusion, so they can be used even in the case where the coefficient of diffusion tends to 0.

Keywords: transport-diffusion equation, approximate solutions, Hölder space.Received: 1st June, 2024 / Revised: 3rd October, 2024 /Accepted: 21st October, 2024 / First online: 11th November, 2024

Differential Equations and Mathematical Physics

Research Article

© Authors, 2024

© Samara State Technical University, 2024 (Compilation, Design, and Layout)

 The content is published under the terms of the [Creative Commons Attribution 4.0 International License](http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Nemdili A., Korichi F., Fujita Yashima H. Approximation of the solution of transport-diffusion equation in Hölder space, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2024, vol. 28, no. 3, pp. 426–444. EDN: QYPUUB. DOI: [10.14498/vsgtu2097](https://doi.org/10.14498/vsgtu2097) (In Russian).

Authors' Details:

Amina Nemdili  <https://orcid.org/0009-0007-5898-3360>Assistant; Teacher, Member of Laboratory; Lab. of Applied Mathematics and Didactics; e-mail: nemdili.amina@gmail.com*Farhouh Korichi*  <https://orcid.org/0009-0006-6442-3506>Associate Professor; Member of Laboratory; Lab. of Theory of Fixed-Point and Applications; e-mail: korichi_korichi@yahoo.com*Hisao Fujita Yashima*  <https://orcid.org/0000-0001-9937-8406>Professor; Member of Laboratory; Lab. of Applied Mathematics and Didactics; e-mail: hisaofujitayashima@yahoo.com

Competing interests. We declare that we have no apparent or potential conflicts of interest related to the publication of this article.

Author's Responsibilities. The contribution of the authors is equivalent. We take full responsibility for submit the final manuscript to print. We approved the final version of the manuscript.

Funding. This research received no specific grant from any funding agency in the public, commercial, or not-for-profit sectors.

References

1. Ladyzhenskaya O. A., Solonnikov V. A., Ural'tseva N. N. *Linear and Quasi-Linear Equations of Parabolic Type*, Translations of Mathematical Monographs, vol. 23. Providence, RI, Amer. Math. Soc., 1968, xi+648 pp.
2. Krylov N. V. *Lectures on Elliptic and Parabolic Equations in Hölder Spaces*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 12. Providence, RI, Amer. Math. Soc., 1996, xii+164 pp.
3. Lieberman G. M. *Second Order Parabolic Differential Equations*. Singapore, World Scientific, 1996, xi+439 pp.
4. Evans L. C. *Partial Differential Equations*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 19. Providence, RI, Amer. Math. Soc., 2010, xxi+749 pp.
5. Pazy A. *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, Applied Mathematical Sciences, vol. 44. New York, Springer-Verlag, 1983, viii+279 pp. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-1-4612-5561-1>.
6. Guikhman I., Skorokhod A. *Introduction À La Théorie Des Processus Aléatoires* [Introduction to the Theory of Random Processes]. Moscow, Mir, 1980, 557 pp. (In French)
7. Freidlin M. I., Wentzell A. D. *Random Perturbations of Dynamical Systems*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, vol. 260. Berlin, Springer, 2012, xxviii+458 pp. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-642-25847-3>.
8. Taleb L., Selvaduray S., Fujita Yashima H. Approximation par une moyenne locale de la solution de l'équation de transport-diffusion, *Afr. Math. Ann.*, 2020, vol. 8, pp. 71–90 (In French).
9. Smaali H., Fujita Yashima H. Une généralisation de l'approximation par une moyenne locale de la solution de l'équation de transport-diffusion, *Afr. Math. Ann.*, 2021, vol. 9, pp. 89–108 (In French).
10. Ait Mahiout L., Fujita Yashima H. Convergence de la solution d'une équation de transport-diffusion vers la solution d'une équation de transport, *Afr. Math. Ann.*, 2023, vol. 10, pp. 105–124 (In French).
11. Fujita Yashima H., Ait Mahiout L. Convergence of solution of transport-diffusion system to that of transport system, *Vestn. Buryat. gos. univ. Mat., inform.* [Bull. Buryat State Univ. Math., Inform.], 2023, no. 1, pp. 22–36 (In Russian). EDN: NDMPRK. DOI: <https://doi.org/10.18101/2304-5728-2023-1-22-36>.
12. Aouaouda M., Ayadi A., Fujita Yashima H. Convergence of approximate solutions by heat kernel for transport-diffusion equation in a half-plane, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2022, vol. 26, no. 2, pp. 222–258 (In Russian). EDN: JNGCBE. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1881>.
13. Gherdaoui R., Taleb L., Selvaduray S. Convergence of the heat kernel approximated solutions of the transport-diffusion equation in the half-space, *J. Math. Anal. Appl.*, 2023, vol. 527, no. 2, 127507. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2023.127507>.
14. Gherdaoui R., Selvaduray S., Fujita Yashima H. Convergence of approximate solutions for the transport-diffusion equation in the half-space with Neumann condition, *Izv. Irkutsk. Gos. Univ. Ser. Mat.* [Bull. Irkutsk State Univ. Ser. Math.], 2024, vol. 48, pp. 64–79 (In Russian). EDN: NPBQLS. DOI: <https://doi.org/10.26516/1997-7670.2024.48.64>.