



УДК 539.311

Равновесие жестко закрепленной на внешней поверхности полой трансверсально-изотропной толстостенной сферы, находящейся под действием равномерного внутреннего давления и гравитационных сил

© А. А. Фукалов¹, А. В. Зайцев¹,
Ю. В. Соколкин¹, Ю. В. Баяндин²

¹ Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Россия, 614990, Пермь, Комсомольский пр-т, 29.

² Институт механики сплошных сред УрО РАН, Россия, 614013, Пермь, ул. Академика Королева, 1.

Аннотация

С использованием разложения компонент вектора перемещений по окружной и радиальной координатам в ряды по полиномам Лежандра и обобщенных степенных рядов получено точное аналитическое решение задачи о равновесии жестко закрепленного на внешней поверхности толстостенного трансверсально-изотропного центрально-симметричного полого тела, которое находится под действием равномерного внутреннего давления и гравитационных сил.

В качестве примера использования полученного аналитического решения проанализировано влияние массовых сил на характер распределения независимых инвариантов тензора напряжений в поперечном сечении тяжелой железобетонной сферы, внутренняя поверхность которой свободна от внутреннего давления. На основе многокритериального подхода, описывающего различные механизмы исчерпания несущей способности (от растяжения или сжатия в радиальном и окружном направлениях и межслойного сдвига), определены области тяжелой железобетонной сферы, в которых может быть инициировано разрушение.

Проведено качественное и количественное сравнение полей напряжений в точках поперечных сечений толстостенных тяжелых сфер с результатами численного решения той же задачи в осесимметричной и трехмерной постановках в конечноэлементных пакетах ANSYS 13.0

Научная статья

 Контент публикуется на условиях лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru) (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Образец для цитирования

Фукалов А. А., Зайцев А. В., Соколкин Ю. В., Баяндин Ю. В. Равновесие жестко закрепленной на внешней поверхности полой трансверсально-изотропной толстостенной сферы, находящейся под действием равномерного внутреннего давления и гравитационных сил // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2021. Т. 25, № 2. С. 303–319. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1829>.

Сведения об авторах

Антон Александрович Фукалов  <https://orcid.org/0000-0003-3009-7379>

старший преподаватель; каф. механики композиционных материалов и конструкций; e-mail: mr_aa@mail.ru

Алексей Вячеславович Зайцев  <https://orcid.org/0000-0003-0578-7917>

кандидат физико-математических наук, доцент; доцент каф. механики композиционных материалов и конструкций; e-mail: a-zaitsev@mail.ru

и ABAQUS 6.11. Оба пакета продемонстрировали минимальное отклонение численно определенных значений инвариантов напряжений от аналитического решения в осесимметричной постановке и различие с сопоставимой погрешностью — в трехмерной. В последнем случае представление численных результатов для напряжений и деформаций в компонентной форме привело к неожиданному эффекту — появлению существенных ошибок по сравнению с точным аналитическим решением. Для исключения обнаруженных при определении напряженно-деформированного состояния ошибок, которые обусловлены только особенностями определения сферической системы координат в конечноэлементных пакетах ANSYS 13.0 и ABAQUS 6.11, необходимо использовать представление полученных результатов в инвариантном виде.

Ключевые слова: толстостенная трансверсально-изотропная тяжелая сфера, равновесие, гравитационные силы, точное аналитическое решение, механизмы начала разрушения, верификация конечноэлементных решений, ANSYS 13.0, ABAQUS 6.11.

Получение: 5 октября 2020 г. / Исправление: 19 апреля 2021 г. /
Принятие: 11 мая 2021 г. / Публикация онлайн: 11 июня 2021 г.

1. Введение. В различных отраслях промышленности, строительстве, геологии, на предприятиях аэрокосмического и нефтегазохимического комплексов находят применение разнообразные элементы конструкций и сооружений в виде массивных толстостенных центрально-симметричных тел, изготавливаемых из анизотропных материалов, весом которых нельзя пренебречь. Наиболее распространенными видами нагрузки этих объектов являются квазистатическое или слабо изменяющееся во времени равномерное и/или неравномерное внутреннее и/или внешнее давление и собственный вес.

Получение новых аналитических решений задач о равновесии анизотропных сферических тел важно и актуально для разработки инженерных методов уточненного прочностного анализа. Конструкции и сооружения создаются, как правило, одновременно с материалом, из которого они изготовлены. Получение аналитических решений позволит разработать методики экспериментальной идентификации материальных постоянных и функций анизотропных материалов с целью расширения базы определяющих соотношений.

Большую популярность при решении научных и инженерных задач, возникающих при определении напряженно-деформированного состояния, оптимальном проектировании и оценке прочности элементов конструкций ответственного назначения, получили численные методы. Это обусловлено стремительным развитием, доступностью и широкими возможностями современной вычислительной техники. При проведении вычислительных экспериментов по исследованию напряженно-деформированного состояния элементов

Юрий Викторович Соколкин  <https://orcid.org/0000-0003-3255-1360>

доктор физико-математических наук, профессор; профессор каф. механики композиционных материалов и конструкций

Юрий Витальевич Баяндин  <https://orcid.org/0000-0002-1824-1940>

кандидат физико-математических наук; старший научный сотрудник лаб. физических основ прочности; e-mail: buv@icmm.ru

конструкций возникает вопрос о корректности полученных результатов: для успешного применения численных методов требуется провести оценку правильности составленного алгоритма, обоснование выбора способа дискретизации на основе сравнения численных расчетов с точными аналитическими решениями тестовых задач для тел простейшей геометрии. Наиболее остро (из-за ограниченного количества задач, имеющих аналитические решения) эта проблема возникает при необходимости учета в вычислительных экспериментах анизотропии деформационных и прочностных свойств материалов.

2. Аналитическое решение. Рассмотрим равновесие упругого толстостенного центрально-симметричного тела, жестко закрепленного на внешней поверхности радиуса ρ_2 и находящегося в равновесии под действием гравитационных сил и равномерно распределенного давления p , заданного на внутренней поверхности радиуса ρ_1 . Будем предполагать, что материал, из которого изготовлено тело, линейно упругий однородный с постоянным по всему объему удельным весом γ , сферически трансверсально-изотропный относительно любого радиус-вектора, проведенного из центра симметрии в данную точку.

В геометрический центр тела поместим начало сферической ортогональной системы координат ρ , θ и φ . В силу осевой симметрии задачи радиальные u_ρ и меридиональные u_θ перемещения, радиальные ($\sigma_{\rho\rho}$ и $\varepsilon_{\rho\rho}$), окружные ($\sigma_{\varphi\varphi}$ и $\varepsilon_{\varphi\varphi}$) и меридиональные ($\sigma_{\theta\theta}$ и $\varepsilon_{\theta\theta}$) нормальные напряжения и деформации, касательные напряжения $\tau_{\rho\theta}$ и сдвиговые деформации $\gamma_{\rho\theta}$ не зависят от окружной координаты φ . Это позволяет записать геометрические соотношения Коши и уравнения равновесия следующим образом:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\rho\rho} &= \frac{\partial u_\rho}{\partial \rho}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_\rho}{\rho}, \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{u_\theta}{\rho} \operatorname{ctg} \theta + \frac{u_\rho}{\rho}, \\ \gamma_{\rho\theta} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_\rho}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial \rho} - \frac{u_\theta}{\rho}; \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{\rho\rho}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{\rho\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{\rho} (2\sigma_{\rho\rho} - \sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{\theta\theta} + \tau_{\rho\theta} \operatorname{ctg} \theta) + F_\rho &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{\rho\theta}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{\rho} [(\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi}) \operatorname{ctg} \theta + 3\tau_{\rho\theta}] + F_\theta &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь $F_\rho = -\gamma \cos \theta$ и $F_\theta = \gamma \sin \theta$ — компоненты вектора массовых сил.

Будем называть центрально-симметричное тело тяжелым в случае, если величины F_ρ и F_θ имеют один порядок с остальными слагаемыми уравнений (2) и, как следствие, при описании механического поведения возникает необходимость учета массовых сил.

Определяющие соотношения

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho\rho} &= A_{11}\varepsilon_{\rho\rho} + A_{12}(\varepsilon_{\varphi\varphi} + \varepsilon_{\theta\theta}), & \sigma_{\varphi\varphi} &= A_{12}\varepsilon_{\rho\rho} + A_{22}\varepsilon_{\varphi\varphi} + A_{23}\varepsilon_{\theta\theta}, \\ \sigma_{\theta\theta} &= A_{12}\varepsilon_{\rho\rho} + A_{23}\varepsilon_{\varphi\varphi} + A_{22}\varepsilon_{\theta\theta}, & \tau_{\rho\theta} &= A_{44}\gamma_{\rho\theta} \end{aligned} \quad (3)$$

для сферически трансверсально-изотропного тела содержат постоянные

$$A_{11} = \frac{\tilde{E}}{m}(1 - \nu), \quad A_{12} = \frac{E\tilde{\nu}}{m}, \quad A_{23} = \frac{E}{(1 + \nu)m} \left(\nu + \nu_1^2 \frac{E}{\tilde{E}} \right),$$

$$A_{22} = \frac{E}{(1+\nu)m} \left(1 - \tilde{\nu}^2 \frac{E}{\tilde{E}}\right), \quad A_{44} = \tilde{G}, \quad m = 1 - \nu - 2\tilde{\nu}^2 \frac{E}{\tilde{E}}.$$

Здесь $\tilde{E}$ и E — модули Юнга вдоль радиальной координаты и в направлении касательной; $\tilde{G}$ — модуль сдвига для диаметральной плоскости; $\tilde{\nu}$ и ν — коэффициенты Пуассона, характеризующие поперечную деформацию в направлениях θ и φ при растяжении вдоль радиальной координаты ρ и в направлении φ и θ при растяжении в направлениях θ и φ соответственно.

Граничные условия для находящегося в равновесии под действием гравитационных сил и равномерно распределенного давления, заданного на внутренней поверхности рассматриваемого толстостенного центрально-симметричного тела с жестко закрепленной внешней поверхностью имеют вид

$$u_\rho|_{\rho=\rho_2} = 0, \quad u_\theta|_{\rho=\rho_2} = 0, \quad \tau_{\rho\theta}|_{\rho=\rho_1} = 0, \quad \sigma_{\rho\rho}|_{\rho=\rho_1} = -p. \quad (4)$$

Последовательная подстановка геометрических соотношений Коши (1) в определяющие соотношения (3), а затем полученного результата — в уравнения равновесия (2) позволяет записать систему неоднородных дифференциальных уравнений Ламе в частных производных:

$$\begin{aligned} A_{11} \frac{\partial^2 u_\rho}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \left[2A_{11} \frac{\partial u_\rho}{\partial \rho} + (A_{12} + A_{44}) \left(\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \rho \partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial \rho} \operatorname{ctg} \theta \right) \right] + \\ + \frac{1}{\rho^2} \left[A_{44} \left(\frac{\partial^2 u_\rho}{\partial \theta^2} + \frac{\partial u_\rho}{\partial \theta} \operatorname{ctg} \theta \right) + (A_{12} - A_{22} - A_{23} - A_{44}) \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_\theta \operatorname{ctg} \theta \right) + \right. \\ \left. + 2(A_{12} - A_{22} - A_{23})u_\rho \right] = \gamma \cos \theta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{44} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \left[2A_{44} \frac{\partial u_\theta}{\partial \rho} + (A_{12} + A_{44}) \frac{\partial^2 u_\rho}{\partial \rho \partial \theta} \right] + \\ + \frac{1}{\rho^2} \left[A_{22} \left(\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \operatorname{ctg} \theta \right) + (A_{22} + A_{23} + 2A_{44}) \frac{\partial u_\rho}{\partial \theta} - \right. \\ \left. - (A_{23} + 2A_{44} + A_{22} \operatorname{ctg}^2 \theta) u_\theta \right] = -\gamma \sin \theta. \end{aligned}$$

Следуя [1, 2], представим радиальную u_ρ и меридиональную u_θ компоненты вектора перемещений в виде бесконечных рядов по полиномам Лежандра:

$$u_\rho = \sum_{n=0}^{\infty} u_{\rho n}(\rho) P_n(\cos \theta), \quad u_\theta = - \sum_{n=0}^{\infty} u_{\theta n}(\rho) \frac{dP_n(\cos \theta)}{d\theta}.$$

В результате этого вместо одной системы неоднородных дифференциальных уравнений Ламе в частных производных получим последовательность из n систем обыкновенных дифференциальных уравнений ($n = 0, 1, 2, \dots$) для каждого члена разложения $u_{\rho n}$ и $u_{\theta n}$ [3–9]:

$$\begin{aligned} a_{1n} u_{\rho n}'' + a_{2n} \frac{1}{\rho} u_{\rho n}' + a_{3n} \frac{1}{\rho^2} u_{\rho n} + a_{4n} \frac{1}{\rho} u_{\theta n}' + a_{5n} \frac{1}{\rho^2} u_{\theta n} &= A_n, \\ b_{1n} u_{\theta n}'' + b_{2n} \frac{1}{\rho} u_{\theta n}' + b_{3n} \frac{1}{\rho^2} u_{\theta n} + b_{4n} \frac{1}{\rho} u_{\rho n}' + b_{5n} \frac{1}{\rho^2} u_{\rho n} &= B_n. \end{aligned} \quad (5)$$

Коэффициенты, входящие в (5), записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} a_{1n} &= A_{11}, & a_{2n} &= 2A_{11}, & a_{3n} &= 2(A_{12} - A_{22} - A_{23}) - nA_{44}(n+1), \\ a_{4n} &= n(A_{12} + A_{44})(n+1), & a_{5n} &= n(A_{12} - A_{22} - A_{23} - A_{44})(n+1); \\ b_{1n} &= A_{44}, & b_{2n} &= 2A_{44}, & b_{3n} &= -A_{23} - 2A_{44} - A_{22}(n^2 + n - 1), \\ b_{4n} &= -A_{12} - A_{44}, & b_{5n} &= -A_{22} - A_{23} - 2A_{44}; \\ A_n &= \begin{cases} \gamma, & n = 1, \\ 0, & n = 0, n > 1; \end{cases} & B_n &= \begin{cases} -\gamma, & n = 1, \\ 0, & n = 0, n > 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Каждая из систем обыкновенных дифференциальных уравнений (5), записанная для своего $n = 0, 1, 2, \dots$, будет рассматриваться в виде самостоятельной задачи со своими граничными условиями, полученными из разложения (4) в бесконечные ряды по полиномам Лежандра, и будет отражать вклад различных составляющих нагрузки. Все системы (за исключением $n = 1$) являются однородными.

Так, например, равномерно распределенное давление учитывается при решении краевой задачи, записанной для $n = 0$. При этом из двух уравнений равновесия (2) остается только первое, из четырех геометрических соотношений Коши (1) остаются первые три, которые в силу $u_\theta \equiv 0$ еще и значительно упрощаются. Решение краевой задачи для $n = 0$ известно

$$u_\rho = C_1^{(0)} \rho^{-1/2-k} + C_2^{(0)} \rho^{-1/2+k}, \quad u_\theta \equiv 0$$

и является классическим [10]. Здесь

$$k = \sqrt{1/4 + 2(A_{22} + A_{23} - A_{12})/A_{11}}$$

является показателем анизотропии для сферически трансверсально-изотропного тела, на которое действует центрально-симметричная нагрузка [11].

При решении краевой задачи для $n = 1$ учитывается вклад массовых сил. Поэтому ненулевыми являются радиальное u_ρ и меридиональное u_θ перемещения. Решение неоднородной системы обыкновенных дифференциальных уравнений для $n = 1$ представляет суперпозицию любого частного решения рассматриваемой и общего решения (записанного в виде многочлена) соответствующей однородной системы [3, 5–7]. Характеристические числа определяются из решения характеристического уравнения четвертого порядка [3].

При решении краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений при $n > 1$ может быть учтена неравномерно распределенная поверхностная нагрузка. Поскольку в рассматриваемом частном случае неравномерно распределенное давление отсутствует, разложения в ряды по полиномам Лежандра граничных условий (4) будут иметь только нулевые слагаемые. Как следствие, при $n > 1$ однородные системы обыкновенных дифференциальных уравнений имеют тривиальные решения $u_\rho = u_\theta \equiv 0$ [3].

На основе вышеизложенного общее решение краевой задачи (1)–(3) может быть записано следующим образом [3, 6]:

$$\begin{aligned} u_\rho &= C_1^{(0)} \rho^{-1/2-k} + C_2^{(0)} \rho^{-1/2+k} + \\ &+ (x_1 C_1^{(1)} + x_2 C_2^{(1)} \rho^{-1} + x_3 C_3^{(1)} \rho^{-1/2+t} + x_4 C_4^{(1)} \rho^{-1/2-t} + H_\rho \rho^2) \cos \theta, \quad (6) \\ u_\theta &= (C_1^{(1)} + C_2^{(1)} \rho^{-1} + C_3^{(1)} \rho^{-1/2+t} + C_4^{(1)} \rho^{-1/2-t} + H_\theta \rho^2) \sin \theta. \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} x_1 &= -1, \quad x_2 = \frac{A_{22} + A_{23} + 2A_{44}}{A_{12} - A_{22} - A_{23} - A_{44}}, \\ x_3 &= \frac{A_{44}[A_{12} - 2(A_{22} + A_{23}) - 3A_{44} + 2(A_{12} + A_{44})t]}{2(A_{12} + A_{44})^2 - A_{11}(A_{22} + A_{23} + 2A_{44})}, \\ x_4 &= \frac{A_{44}[A_{12} - 2(A_{22} + A_{23}) - 3A_{44} - 2(A_{12} + A_{44})t]}{2(A_{12} + A_{44})^2 - A_{11}(A_{22} + A_{23} + 2A_{44})}, \\ H &= 2\{A_{11}(A_{22} + A_{23} - 4A_{44}) + 2[A_{44}(A_{22} + A_{23} - 3A_{12}) - A_{12}^2]\}, \\ H_\rho &= \frac{\gamma}{H}[A_{22} + A_{23} - 2(A_{12} + A_{44})], \quad H_\theta = \frac{\gamma}{H}[2(A_{11} - A_{44}) - A_{22} - A_{23}]. \end{aligned}$$

Обратим внимание на то, что входящие в равенства (6) слагаемые $H_\rho \rho^2$ и $H_\theta \rho^2$ являются частными решениями рассматриваемой неоднородной системы, а положительный параметр

$$t = \sqrt{\frac{9}{4} + 2\frac{A_{22} + A_{23} - A_{12}}{A_{11}} + \frac{A_{22} + A_{23}}{A_{44}} - 2\frac{A_{12}(A_{12} + 2A_{44})}{A_{11}A_{44}}}$$

является показателем анизотропии для центрально-симметричного трансверсально-изотропного тела, находящегося под действием вертикальной осесимметричной нагрузки. В отличие от k , введенного С. Г. Лехницким [11], показатель t зависит от модуля сдвига материала.

При подстановке выражений (6) в граничные условия (4) могут быть определены постоянные интегрирования:

$$\begin{aligned} KC_1^{(0)} &= 2p\rho_1^{3/2+k}\rho_2^{2k}, \quad KC_2^{(0)} = -2p\rho_1^{3/2+k}, \\ K &= [A_{11}(2k - 1) + 4A_{12}]\rho_1^{2k} + [A_{11}(2k + 1) - 4A_{12}]\rho_2^{2k}, \\ KC_2^{(1)} &= \rho_1\sqrt{\rho_2}\left(-H_\rho\left\{4A_{12}\rho_2[(1+x_4)(2t-1)\rho_1^{5/2+2t} + \right.\right. \\ &\quad + (1+x_3)(2t+1)\rho_1^{5/2}\rho_2^{2t} + (x_4-x_3-2\{2+x_4+x_3\})\rho_1^t\rho_2^{5/2+t}] + \\ &\quad + A_{11}[2(1+x_3)(6+5x_4+2t\{2+x_4\})\rho_1^{5/2}\rho_2^{1+2t} - \\ &\quad \left.- 2(1+x_4)(6+5x_3-2t\{2+x_3\})\rho_1^{5/2+2t}\rho_2 - Y_5\rho_1^t\rho_2^{7/2+t}\right\} + \\ &\quad + H_\theta\left\{4A_{12}[(1+x_4)(5+4x_3-2t)\rho_1^{5/2+2t}\rho_2 - \right. \\ &\quad \left.- (1+x_3)(5+4x_4+2t)\rho_1^{5/2}\rho_2^{1+2t} + (x_3-x_4+2\{2+x_4+x_3\})\rho_1^t\rho_2^{7/2+t}] + \right. \\ &\quad \left. + A_{11}\rho_2[2x_3(1+x_4)(2t-1)\rho_1^{5/2+2t} + \right. \\ &\quad \left. + 2x_4(1+x_3)(2t+1)\rho_1^{5/2}\rho_2^{2t} + Y_5\rho_1^t\rho_2^{5/2+t}]\right\}\Big), \\ KC_3^{(1)} &= -2\sqrt{\rho_1}\sqrt{\rho_2}\left(H_\rho\left\{A_{11}[2(4+3x_2)(1+x_4)\rho_1^{5/2+t}\rho_2 + \right.\right. \\ &\quad + Y_1\rho_2^{7/2+t} - (6+5x_4+2t\{2+x_4\})(1+x_2)\rho_1^3\rho_2^{1/2+t}] + \\ &\quad \left. + A_{12}[2(1+x_4)\rho_1^{5/2+t}\rho_2 + Y_3\rho_2^{7/2+t} - (1+x_2)(2t+1)\rho_1^3\rho_2^{1/2+t}]\right\} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + H_\theta \left\{ 2A_{12} [2(3 + 2x_2)(1 + x_4)\rho_1^{5/2+t}\rho_2 - \right. \\
 & \quad \left. - (1 + x_2)(5 + 4x_4 + 2t)\rho_1^3\rho_2^{1/2+t} + Y_3\rho_2^{7/2+t}] - \right. \\
 & \quad \left. - A_{11} [x_2(2\{1 + x_4\}\rho_1^{5/2+t}\rho_2 + (3 + x_4 + 2t\{1 - x_4\})\rho_2^{7/2+t} - \right. \\
 & \quad \left. - x_4\{2t + 1\}\rho_1^3\rho_2^{1/2+t}) - x_4(2t + 1)(\rho_1^3 + 2\rho_2^3)\rho_2^{1/2+t}] \right\},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 K_C C_4^{(1)} = & 2\rho_1^t\rho_2^t \left(H_\theta \left\{ 2A_{12} [2(3 + 2x_2)(1 + x_3)\rho_1^3\rho_2^{1/2+t} - \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - (5 + 4x_3 - 2t)(1 + x_2)\rho_1^{7/2+t} - Y_4\rho_1^{1/2+t}\rho_2^3] - \right. \right. \\
 & \quad \left. - A_{11} [2x_2(1 + x_3)\rho_1^3\rho_2^{1/2+t} + (1 + x_2)(2t - 1)x_3\rho_1^{7/2+t} + Y_2\rho_1^{1/2+t}\rho_2^3] \right\} + \\
 & + H_\rho \left\{ 2A_{12} [2(1 + x_3)\rho_1^3\rho_2^{1/2+t} + (1 + x_2)(2t - 1)\rho_1^{7/2+t} - Y_4\rho_1^{1/2+t}\rho_2^3] + \right. \\
 & \quad \left. + A_{11} [2(4 + 3x_2)(1 + x_3)\rho_1^3\rho_2^{1/2+t} - \right. \\
 & \quad \left. - (1 + x_2)(6 + 5x_3 - 2t\{2 + x_3\})\rho_1^{7/2+t} - Y_2\rho_1^{1/2+t}\rho_2^3] \right\},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 K_C = & A_{11} \left\{ 2[Y_1(1 + x_3)\rho_2^{2t} + Y_2(1 + x_4)\rho_1^{2t}]\sqrt{\rho_1}\sqrt{\rho_2} - Y_5[1 + x_2]\rho_1^{1+t}\rho_2^t \right\} + \\
 & + 4A_{12} \left\{ [Y_3(1 + x_3)\rho_2^{2t} + Y_4(1 + x_4)\rho_1^{2t}]\sqrt{\rho_1}\sqrt{\rho_2} - \right. \\
 & \quad \left. - [1 + x_2][(1 + x_4)(2t - 1) + (1 + x_3)(2t + 1)]\rho_1^{1+t}\rho_2^t \right\},
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 Y_1 &= 2x_4[2t + 1] - x_2[3 + x_4 + 2t(1 - x_4)], \\
 Y_3 &= (1 + x_2)(2t + 1) - 2(1 + x_4), \\
 Y_2 &= 2x_3[2t - 1] + x_2[3 + x_3 + 2t(x_3 - 1)], \\
 Y_4 &= (1 + x_2)(2t - 1) + 2(1 + x_3), \\
 Y_5 &= x_4(3 - 4t[t - 1]) + x_3(4t[1 + t + 2x_4] - 3).
 \end{aligned}$$

Константа $C_1^{(1)}$ не приводится из-за громоздкости ее представления.

Подстановка уравнений (6) в геометрические соотношения (1) позволяет в явном виде записать выражения для компонент тензора деформаций, а подстановка последних в (3) — выражения для компонент тензора напряжения [6]:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{\rho\rho} = & \frac{1}{2}\rho^{-3/2-k} \left\{ C_{10} [4A_{12} - A_{11}(1 + 2k)] + C_{20} [4A_{12} - A_{11}(1 - 2k)]\rho^{2k} \right\} + \\
 & + \left\{ 2A_{12} [(1 + x_2)C_{21}\rho^{-2} + (1 + x_3)C_{31}\rho^{-3/2+t} + (1 + x_4)C_{41}\rho^{-3/2-t} + \right. \\
 & \quad \left. + (H_\rho + H_\theta)\rho] - \frac{1}{2}A_{11} [2x_2C_{21}\rho^{-2} + (1 - 2t)x_3C_{31}\rho^{-3/2+t} + \right. \\
 & \quad \left. + (1 + 2t)x_4C_{41}\rho^{-3/2-t} - 4H_\rho\rho] \right\} \cos \theta,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{\theta\theta} = & \frac{1}{2}\rho^{-3/2-k}\{C_{10}[2(A_{22} + A_{23}) - A_{12}(1 + 2k)] + \\ & + C_{20}[2(A_{22} + A_{23}) - A_{12}(1 - 2k)]\rho^{2k}\} + \\ & + \left\{(A_{22} + A_{23})[(1 + x_2)C_{21}\rho^{-2} + (1 + x_3)C_{31}\rho^{-3/2+t} + \right. \\ & + (1 + x_4)C_{41}\rho^{-3/2+t} + (H_\rho + H_\theta)\rho] - \\ & - \frac{1}{2}A_{12}[2x_2C_{21}\rho^{-2} + (1 - 2t)x_3C_{31}\rho^{-3/2+t} + \\ & + (1 + 2t)x_4C_{41}\rho^{-3/2-t} - 4H_\rho\rho]\left.\right\}\cos\theta, \quad (7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_{\rho\theta} = & -A_{44}\left[(2 + x_2)C_{21}\rho^{-2} + (3/2 + x_3 - t)C_{31}\rho^{-3/2+t} + \right. \\ & + \left.\left(\frac{3}{2} + x_4 + t\right)C_{41}\rho^{-3/2-t} + (H_\rho - H_\theta)\rho\right]\sin\theta. \end{aligned}$$

3. Сравнение полученного нового аналитического и численных конечноэлементных решений. В качестве примера использования точного аналитического решения (6) и (7) может быть проанализирован вклад массовых сил в напряженное состояние железобетонной сферы (рассматривается в качестве модели монолитной крепи сферической горной выработки), а также проведена оценка ее начальной прочности по совокупности критериев.

В работе [12] были введены независимые величины для тензоров деформаций

$$\begin{aligned} J_\varepsilon^I &= \varepsilon_{\varphi\varphi} + \varepsilon_{\theta\theta}, & J_\varepsilon^{II} &= \varepsilon_{\rho\rho}, \\ J_\varepsilon^{III} &= \sqrt{(\varepsilon_{\varphi\varphi} - \varepsilon_{\theta\theta})^2 + 4\gamma_{\varphi\theta}^2}, & J_\varepsilon^{IV} &= \sqrt{\gamma_{\varphi\rho}^2 + \gamma_{\theta\rho}^2} \end{aligned}$$

и напряжений

$$\begin{aligned} J_\sigma^I &= 0.5(\sigma_{\varphi\varphi} + \sigma_{\theta\theta}), & J_\sigma^{II} &= \sigma_{\rho\rho}, \\ J_\sigma^{III} &= \sqrt{(\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{\theta\theta})^2 + 4\tau_{\varphi\theta}^2}, & J_\sigma^{IV} &= \sqrt{\tau_{\varphi\rho}^2 + \tau_{\theta\rho}^2}, \end{aligned} \quad (8)$$

инвариантные относительно ортогональных преобразований, допустимых над трансверсально-изотропным однородным телом. Эти независимые инварианты были использованы для разработки моделей механики повреждаемых трансверсально-изотропных сред [13], описывающих следующие механизмы разрушения:

- от растяжения или сжатия в окружном (J_σ^I или J_ε^I) и радиальном (J_σ^{II} или J_ε^{II}) направлениях;
- от сдвигов по сферическим поверхностям изотропии (J_σ^{III} или J_ε^{III}) и межслойных сдвигов (J_σ^{IV} или J_ε^{IV}).

На рис. 1 представлены распределения ненулевых инвариантов тензоров напряжений (8) в точках тяжелой железобетонной сферы вдоль меридиональной θ и безразмерной радиальной координаты $\tilde{\rho} = (\rho - \rho_1)/(\rho_2 - \rho_1)$, построенные на основе полученного точного аналитического решения (6) и (7). Будем предполагать, что внутреннее давление отсутствует ($p = 0$ МПа), а гео-

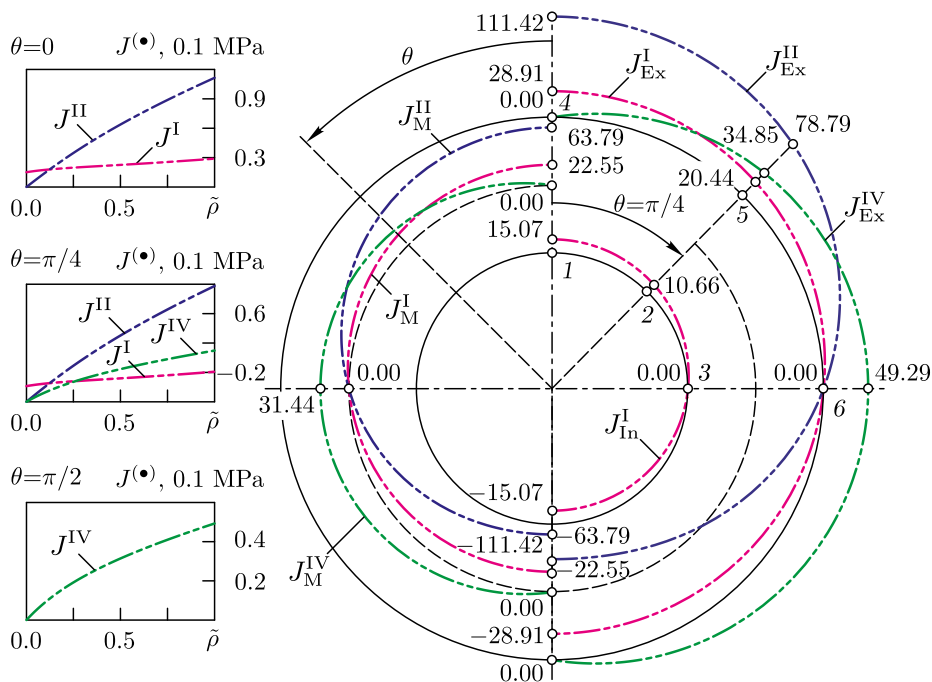


Рис. 1. Распределение независимых инвариантов тензора напряжений (МПа) на свободной от нагрузок внутренней ($J_{In}^{\bullet}$), закрепленной внешней ($J_{Ex}^{\bullet}$) и срединной ($J_M^{\bullet}$) поверхностях железобетонной сферы

[Figure 1. The distribution of the independent invariants of the stress tensor (MPa) on the load-free internal ($J_{In}^{\bullet}$), fixed external ($J_{Ex}^{\bullet}$), and medial ($J_M^{\bullet}$) surfaces]

метрические размеры и свойства материала центрально-симметричного тела принимают следующие значения: $\rho_1 = 3.0$ м и $\rho_2 = 6.0$ м; $\gamma = 40.0$ кН/м³, $E = 40.0$ ГПа, $\tilde{E} = 25.0$ ГПа, $\tilde{G} = 11.0$ ГПа, $\nu = 0.075$ и $\tilde{\nu} = 0.15$.

Как видим, в отличие от «классического» решения задачи Ламе для анизотропных сфер [10, 11] компоненты тензора напряжений и их инварианты в рассматриваемом случае являются ненулевыми даже при отсутствии внутреннего давления. Это объясняется тем, что полученное новое аналитическое решение (6) и (7) учитывает вклад массовых сил.

На внутренней свободной поверхности (рис. 1) ненулевым является только первый инвариант J_{σ}^I , который в верхней части тяжелой железобетонной сферы всюду монотонно возрастает вдоль $\tilde{\rho}$, а в нижней — всюду монотонно убывает, принимая нулевые значения в точках горизонтальной диаметральной плоскости. При изменении радиальной координаты от свободной поверхности к закрепленной второй инвариант J_{σ}^{II} возрастает всюду по абсолютной величине. Поскольку своих наибольших по абсолютной величине значений J_{σ}^I и J_{σ}^{II} достигают в точках вертикальной диаметральной плоскости, эти точки являются наиболее опасными с точки зрения возможности начала разрушения тяжелого центрально-симметричного тела от растяжения или сжатия в окружном и радиальном направлении. Четвертый инвариант J_{σ}^{IV} принимает нулевые значения.

Определение перемещений, деформаций и напряжений в толстостенной сфере с жестко закрепленной внешней поверхностью, находящейся в равно-

вессии под действием гравитационных сил, было проведено численно методом конечных элементов в пакетах ANSYS 13.0 и ABAQUS 6.11. Краевая задача осесимметрична относительно вертикальной диаметральной оси. Этот очевидный вывод следует из центральной симметрии рассматриваемого тела и осевой симметрии действующей нагрузки.

Проведено сравнение результатов расчетов методом конечных элементов с полученным аналитическим решением (6) и (7), позволившее установить совпадение численно определенных значений компонент вектора перемещений, тензоров деформаций и напряжений в осесимметричной постановке для трансверсально-изотропного тела в сферической системе координат в точках экстремумов с величинами, вычисленными аналитически, с погрешностью, не превышающей 0.1 %.

Исследование напряженно-деформированного состояния анизотропных элементов конструкций сложной формы требует решения краевых задач в трехмерных постановках, учитывающих особенности геометрии конструкций и характер приложенных нагрузок. В связи с этим следует обратить внимание на ограничения, отмеченные в документации к пакету ANSYS (ANSYS Release 13.0 Documentation): “Singularities also occur in the spherical coordinate system at $\varphi = \pm 90^\circ$, such that these locations should not be used” (из-за возникающей сингулярности для сферической системы координат не следует использовать сечения сферы с окружной координатой $\varphi = \pm \pi/2$).

Проведем в пакете ANSYS 13.0 дискретизацию симметричной четвертой части толстостенного центрально-симметричного тела в локальной сферической системе координат, развернутой на угол $\varphi = -\pi/4$ относительно вертикальной оси OY, на 1920 (5 элементов вдоль радиуса) и на 15360 (10 элементов вдоль радиуса, для проверки сходимости) гексаэдральных элементов Solid95 с квадратичной аппроксимацией поля перемещений так, чтобы получилась регулярная сетка конечных элементов, согласующаяся с симметрией тела. В пакете ABAQUS 6.11 были использованы те же самые конечноэлементные сетки, которые состояли из элементов C3D20R с квадратичной аппроксимацией поля перемещений и имели такие же степени дискретизации (1920 и 15360 элементов). При использовании сферической системы координат в пакете ANSYS индекс X отождествляется с радиальным ρ , Y — с меридиональным θ , а Z — с окружным φ направлением.

Вследствие особенностей определения в пакетах ANSYS и ABAQUS сферической системы координат результат численного конечноэлементного решения задачи соответствует осесимметричному случаю, рассмотренному ранее, только в точках вертикальной диаметральной плоскости при $\varphi = 0$. В любых других точках тяжелого центрально-симметричного тела радиальные компоненты искомых полей совпадают с вычисленными аналитически. Однако меридианальные u_θ и окружные u_φ компоненты вектора перемещений, а также сдвиговые деформации $\gamma_{\rho\theta}$ и касательные напряжения $\tau_{\rho\theta}$ значительно отличаются. Так, например, в аналитическом решении (6) перемещения u_φ являются нулевыми. А результаты конечноэлементного решения, полученные с использованием пакета ANSYS 13.0 (рис. 2), показывают, что эти же самые окружные перемещения оказываются сопоставимыми по абсолютной величине с экстремальными значениями остальных компонент u_ρ и u_θ . Аналогичные ненулевые значения имеют место в полученном численном конечно-

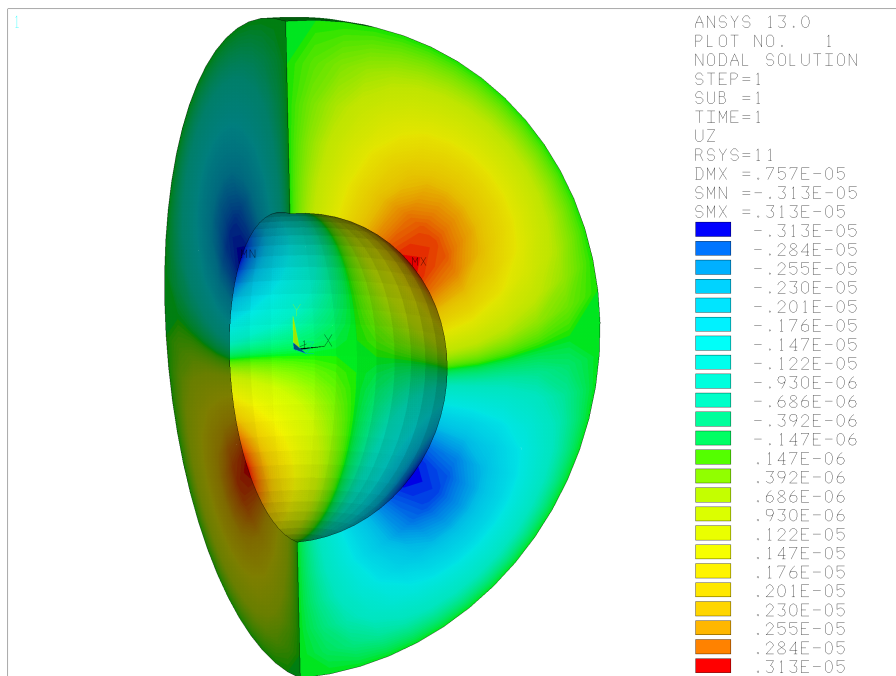


Рис. 2. Распределение окружной компоненты вектора перемещений UZ (обозначения пакета ANSYS 13) в тяжелой толстостенной сфере с жестко закрепленной внешней поверхностью

[Figure 2. The distribution of the hoop component of the displacement vector UZ (notation used in package ANSYS 13.0) in the heavy thick-walled sphere with a fixed external surface]

элементном решении и для компонент тензоров деформаций и напряжений, которые по постановке задачи должны быть нулевыми.

Для исключения зависимости искомых полей напряжений и деформаций, полученных в результате численного решения краевых задач методом конечных элементов, от системы координат представим результаты в инвариантной форме. Как следствие, сравнение аналитического (7) и численного решений будем проводить по инвариантным величинам (8).

Следует обратить особое внимание на то, что в пакетах ANSYS 13.0 и ABAQUS 6.11 отсутствует возможность представления напряжений и деформаций в инвариантном виде (8). Однако необходимые величины могут быть вычислены путем алгебраических преобразований над полученными результатами в компонентной форме.

Максимальные по абсолютной величине значения инварианты тензора напряжений принимают в точках, принадлежащих вертикальной оси (J_{σ}^I и J_{σ}^{II}) и горизонтальной диаметральной плоскости (J_{σ}^{IV}). Было обнаружено хорошее качественное и количественное совпадение полученных численных результатов в инвариантной форме с аналитическим решением. Максимальная погрешность не превышала 2%.

В табл. 15 и 2 представлены значения независимых инвариантов тензора напряжений (8) в характерных точках 1–6 (рис. 1). При определении искомых величин в результате численных конечноэлементных решений в пакетах ANSYS 13.0 и ABAQUS 6.11 использовалось среднее значение по узлам линии, проходящей через соответствующую точку. При этом координата φ изменя-

Таблица 1

Значения независимых инвариантов тензора напряжений в характерных точках тяжелой сферы [Values of the independent invariants of the stress tensor at the characteristic points of the heavy sphere calculated by ANSYS 13.0]

Points	J_{σ}^I , kPa	J_{σ}^{II} , kPa	J_{σ}^{III} , kPa	J_{σ}^{IV} , kPa
1	15.31	0.33	0.01	0.00
	15.15	0.06	0.00	0.00
	15.07	0.00	0.00	0.00
2	10.83	0.24	0.07	0.54
	10.71	0.05	0.00	0.16
	10.66	0.00	0.00	0.00
3	0.00	0.00	0.00	0.76
	0.00	0.00	0.00	0.22
	0.00	0.00	0.00	0.00
4	28.94	111.66	0.00	0.00
	28.92	111.48	0.00	0.00
	28.91	111.42	0.00	0.00
5	20.45	78.89	0.14	34.92
	20.44	78.81	0.02	34.87
	20.44	78.79	0.00	34.85
6	0.00	0.00	0.00	49.37
	0.00	0.00	0.00	49.31
	0.00	0.00	0.00	49.29

Верхнее и среднее число — значения независимых инвариантов, полученные при численном решении краевой задачи в пакете ANSYS 13.0 (дискретизации толстостенной сферы на 1920 и 15360 элементов Solid95 соответственно), нижнее число — аналитическое решение.

The upper and middle numbers are the values of independent invariants obtained by numerically solving the boundary value problem in the ANSYS 13.0 package (discretization of the thick-walled sphere by 1920 and 15360 Solid95 elements, respectively), the lower numbers are the analytical solution.

лась в пределах от $-\pi/4$ до $\pi/4$, а радиальная ρ и меридиональная θ координаты были постоянны. Обратим еще раз внимание на то, что численные решения краевых задач получены на одних и тех же сетках. Представленные в первых двух строках значения независимых инвариантов для всех характерных точек тяжелой трансверсально-изотропной сферы демонстрируют сходимость полученных численных решений к аналитическим при увеличении степени дискретизации.

Закключение. Таким образом, полученное точное аналитическое решение задачи о равновесии жестко закрепленного по внешней поверхности трансверсально-изотропного центрально-симметричного тела, находящегося под действием равномерного внутреннего давления и гравитационных сил, позволило провести качественное и количественное сравнение полей напряжений в точках поперечных сечений с результатами численного решения той же задачи в осесимметричной и трехмерной постановках в конечноэлементных пакетах ANSYS 13.0 и ABAQUS 6.11. Определенные численно методом конечных элементов напряжения и деформации в сферической системе координат (трехмерная постановка) необходимо представлять в инвариантной относительно ортогональных преобразований, допустимых над трансверсально-изотропным телом, форме. Это позволит исключить ошибки, связанные только с особенностями определения указанной системы координат в конечноэлементных пакетах ANSYS 13.0 и ABAQUS 6.11.

Таблица 2

Значения независимых инвариантов тензора напряжений в характерных точках тяжелой сферы [Values of the independent invariants of the stress tensor at the characteristic points of the heavy sphere calculated by ABAQUS 6.11]

Points	J_{σ}^I , kPa	J_{σ}^{II} , kPa	J_{σ}^{III} , kPa	J_{σ}^{IV} , kPa
1	15.34	0.22	0.01	0.05
	15.07	0.00	0.01	0.00
	15.07	0.00	0.00	0.00
2	10.83	0.23	0.01	0.42
	10.67	0.00	0.00	0.02
	10.66	0.00	0.00	0.00
3	0.00	0.00	0.00	0.54
	0.00	0.00	0.00	0.03
	0.00	0.00	0.00	0.00
4	28.94	111.71	0.00	0.07
	28.91	111.43	0.00	0.00
	28.91	111.42	0.00	0.00
5	20.46	78.84	0.01	34.96
	20.44	78.79	0.00	34.86
	20.44	78.79	0.00	34.85
6	0.00	0.00	0.00	49.37
	0.00	0.00	0.00	49.31
	0.00	0.00	0.00	49.29

Верхнее и среднее число — значения независимых инвариантов, полученные при численном решении краевой задачи в пакете ABAQUS 6.11 (дискретизация толстостенной сферы на 1920 и 15360 элементов C3D20R соответственно), нижнее число — аналитическое решение.

The upper and middle numbers are the values of independent invariants obtained by numerically solving the boundary value problem in the ABAQUS 6.11 package (discretization of the thick-walled sphere by 1920 and 15360 C3D20R elements, respectively), the lower numbers are the analytical solution.

Конкурирующие интересы. Заявляем, что в отношении авторства и публикации этой статьи конфликта интересов не имеем.

Авторский вклад и ответственность. А.А. Фукалов — получение аналитического и численных решений в пакете ANSYS 13.0 и их анализ, визуализация и верификация результатов, работа с черновиком и переработанным вариантом рукописи. А.В. Зайцев — идея исследования, получение аналитического решения и его анализ, визуализация и верификация результатов, работа с черновиком и переработанным вариантом рукописи. Ю.В. Соколкин — идея исследования, формулировка целей и задач исследования, анализ аналитических решений, консультирование, работа с черновиком рукописи. Ю.В. Баяндин — получение численных решений в пакете ABAQUS 6.11 и их анализ, визуализация и верификация результатов, работа с черновиком и переработанным вариантом рукописи. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Работа выполнена в рамках государственного задания Минобр-РФ FSNM-2020-0027 на выполнение фундаментальных научных исследований на 2020 г. и плановый период 2021 и 2022 гг. и при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант РФФИ-Урал № 19-41-590026_a).

Библиографический список

1. Morse P. M., Feshbach H. *Methods of theoretical physics*. vol. II. New York: McGraw-Hill Book Co., 1953.
2. Лурье А. И. *Пространственные задачи теории упругости*. М.: Гостехиздат, 1955. 491 с.
3. Зайцев А. В., Фукалов А. А. Упругое равновесие тяжелой трансверсально-изотропной толстостенной сферы с жёстко закреплённой внутренней поверхностью // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2010. № 5(21). С. 85–95. <https://doi.org/10.14498/vsgtu818>.
4. Фукалов А. А., Кутергин А. В. Точные аналитические решения задач о равновесии упругих анизотропных тяжелых тел с центральной и осевой симметрией и их приложения // *Вестник Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского*, 2011. № 4. С. 1831–1833.
5. Зайцев А. В., Соколкин Ю. В., Фукалов А. А. Механизмы начального разрушения железобетонной крепи сферической горной выработки в массиве осадочных пород // *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика*, 2013. № 4. С. 59–74. <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2013.4.59-74>.
6. Зайцев А. В., Соколкин Ю. В., Фукалов А. А. Равновесие жестко закрепленных по внешней поверхности тяжелых упругих анизотропных тел с центральной симметрией в поле гравитационных сил // *Вестн. КРСУ*, 2017. Т. 17, № 8. С. 13–17.
7. Zaitsev A. V., Fukalov A. A., Sokolkin Y. V. Initial strength analysis of anisotropic concrete supports for spherical mine workings in a sedimentary rock mass / *Physical and Mathematical Modeling of Earth and Environment Processes*. Cham: Springer, 2019. pp. 463–471. https://doi.org/10.1007/978-3-030-11533-3_46.
8. Кожевникова Л. Л., Кузнецов Г. Б., Матвеев В. П., Шардаков И. Н. Аналитическое исследование упругого равновесия полой сферы, жестко закрепленной по внешнему контуру // *Пробл. прочности*, 1974. № 9. С. 20–23.
9. Кузнецов Г. Б. *Упругость, вязкоупругость и длительная прочность цилиндрических и сферических тел*. М.: Наука, 1979. 112 с.
10. Saint-Venant B. Mémoire sur les divers genres d'homogénéité semi-polaire ou cylindrique et sur les homogénéités polaires ou sphéro-coniques et sphériques // *J. Math. Pures Appl.*, 1865. vol. 10. pp. 297–349.
11. Лехницкий С. Г. *Теория упругости анизотропного тела*. М.: Наука, 1977. 416 с.
12. Победря Б. Е. *Механика композиционных материалов*. М.: МГУ, 1984. 336 с.
13. Вильдеман В. Э., Соколкин Ю. В., Ташкинов А. А. *Механика неупругого деформирования и разрушения композиционных материалов*. М.: Наука, 1997. 288 с.

MSC: 74B05

The equilibrium state of a hollow transversally-isotropic thick-walled sphere, which is fixed on the external surfaces and is subject to a uniform internal lateral pressure and weight forces

© A. A. Fukalov¹, A. V. Zaitsev¹,
Yu. V. Sokolkin¹, Yu. V. Bayandin²

¹ Perm State National Research Polytechnical University,
29, Komsomolskiy pr., 614990, Perm, Russian Federation.

² Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS,
1, Academician Korolev st., Perm, 614013, Russian Federation.

Abstract

We use the decomposition of the components of the displacement vector along the hoop and radial coordinates in series in Legendre polynomials and generalized power series to obtain an exact analytical solution to the equilibrium problem of a thick-walled transversely isotropic centrally symmetric hollow body, which is rigidly fixed on the external surface and is subject to a uniform internal pressure and weight forces.

As an example of using the obtained analytical solution, we analyzed the influence of weight forces on distribution of independent invariants of the stress tensor in the cross section of a heavy reinforced concrete sphere, which internal surface is free from pressure. Based on the multicriteria approach describing various loss of strength mechanisms (from tension or compression in the radial and hoop direction and interlayer shear), we found the regions of a heavy reinforced concrete sphere, in which damage can be initiated.

A qualitative and quantitative comparison of the stress fields at the points of the cross-sections of the thick-walled heavy spheres with the results of the numerical solution of the same problem in the axisymmetric and 3D formulations in the FEM packages ANSYS 13.0 and ABAQUS 6.11 is carried out. Both packages demonstrated the minimum deviation of the numerically determined values of the stress invariants from the exact analytical solution in the axisymmetric formulation. Also the difference with a comparable error

Research Article

 The content is published under the terms of the [Creative Commons Attribution 4.0 International License](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Fukalov A. A., Zaitsev A. V., Sokolkin Yu. V., Bayandin Yu. V. The equilibrium state of a hollow transversally-isotropic thick-walled sphere, which is fixed on the external surfaces and is subject to a uniform internal lateral pressure and weight forces, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2021, vol. 25, no. 2, pp. 303–319. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1829> (In Russian).

Authors' Details:

Anton A. Fukalov  <https://orcid.org/0000-0003-3009-7379>

Senior Lecturer; Dept. of Mechanics of Composite Material and Structures;
e-mail: mr_aa@mail.ru

Alexey V. Zaitsev  <https://orcid.org/0000-0003-0578-7917>

Cand. Phys. & Math. Sci.; Associate Professor; Dept. of Mechanics of Composite Material and Structures; e-mail: a-zaitsev@mail.ru

in the 3D setting was found. In the latter case, the presentation of the FEM results for stresses and strains in the component form led to an unexpected result, i.e. significant errors in comparison with the exact analytical solution. To eliminate the errors found in determining the stress-strain state, which are caused only by features of determining the spherical coordinate system in the FEM packages ANSYS 13.0 and ABAQUS 6.11, it is necessary to use the presentation of the results obtained in the invariant form.

Keywords: thick-walled transversally-isotropic heavy sphere, equilibrium state, weight forces, exact analytical solution, mechanisms of initial stage of damage evolution, verification of FEM solutions, ANSYS 13.0, ABAQUS 6.11.

Received: 5th October, 2020 / Revised: 19th April, 2021 /

Accepted: 11th May, 2021 / First online: 11th June, 2021

Competing interests. We declare that we have no conflicts of interest in the authorship and publication of this article.

Authors' contributions and responsibilities. A.A. Fukalov: Obtaining analytical and numerical solutions by ANSYS 13.0 and their analysis; Visualization and verification of results; Writing — original draft and review & editing. A.V. Zaitsev: Idea of study; Obtaining the analytical solution and its analysis; Visualization and verification of results; Writing — original draft and review & editing. Yu.V. Sokolkin: Idea of study; Formulation of research goals and aims; Consulting; Writing — original draft. Yu.V. Bayandin: Obtaining analytical and numerical solutions by ABAQUS 6.11 and their analysis; Visualization and verification of results; Writing — original draft and review & editing. The authors are absolutely responsible for submitting the final manuscript in print. Each author has approved the final version of manuscript.

Funding. The study is supported by the Russian Ministry of Science and Education (State Assignment FSNM–2020–0027 for Basic Researches in 2020–2022) and by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 19–41–590026_a).

References

1. Morse P. M., Feshbach H. *Methods of theoretical physics*, vol. II. New York, McGraw-Hill Book Co., 1953.
2. Lurie A. I. *Prostranstvennye zadachi teorii uprugosti* [Spatial Problems of Theory of Elasticity]. Moscow, Gostekhizdat, 1955, 491 pp. (In Russian)
3. Zaitsev A. V., Fukalov A. A. Elastic equilibrium state of thick-walled heavy transversely-isotropic spheres fixed on the interior surface, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2010, no. 5(21), pp. 85–95 (In Russian). <https://doi.org/10.14498/vsgtu818>.
4. Fukalov A. A., Kutergin A. V. Exact analytical solutions to problems of the equilibrium state of elastic anisotropic heavy central and axial-symmetric bodies and their applications, *Vestnik of Lobachevsky University of Nizhni Novgorod*, 2011, no. 4, pp. 1831–1833 (In Russian).

Yuriy V. Sokolkin  <https://orcid.org/0000-0003-3255-1360>

Dr. Phys. & Math. Sci.; Professor; Dept. of Mechanics of Composite Material and Structures

Yuriy V. Bayandin  <https://orcid.org/0000-0002-1824-1940>

Cand. Phys. & Math. Sci.; Senior Researcher; Lab. of Physical Foundation of Strength;

e-mail: buv@icmm.ru

5. Zaitsev A. V., Sokolkin Y. V., Fukalov A. A. Initial damage mechanisms of reinforced concrete monolithic supports for spherical mine workings located in sedimentary rock mass, *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2013, no. 4, pp. 54–74 (In Russian). <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2013.4.59-74>.
6. Zaitsev A. V., Sokolkin Yu. V., Fukalov A. A. Equilibrium state of heavy anisotropic central-symmetric bodies which are fixed on the external surfaces, *Vestn. KRSU*, 2017, vol. 17, no. 8, pp. 13–17 (In Russian).
7. Zaitsev A. V., Fukalov A. A., Sokolkin Y. V. Initial strength analysis of anisotropic concrete supports for spherical mine workings in a sedimentary rock mass, In: *Physical and Mathematical Modeling of Earth and Environment Processes*. Cham, Springer, 2019, pp. 463–471. https://doi.org/10.1007/978-3-030-11533-3_46.
8. Kozhevnikova L. L., Kuznetsov G. B., Matveenkov V. P., Shardakov I. N. Analytical investigation of the elastic equilibrium of a hollow sphere rigidly fixed along the outer contour, *Strength Mater.*, 1974, vol. 6, no. 9, pp. 1057–1061. <https://doi.org/10.1007/BF01528263>.
9. Kuznetsov G. B. *Uprugost', viazkouprugost' i dlitel'naya prochnost' tsilindricheskikh i sfericheskikh tel* [Elasticity, Viscoelasticity and Long-term Strength of Cylindrical and Spherical Bodies]. Moscow, Nauka, 1979, 112 pp. (In Russian)
10. Saint-Venant B. Mémoire sur les divers genres d'homogénéité semi-polaire ou cylindrique et sur les homogénéités polaires ou sphéro-coniques et sphériques, *J. Math. Pures Appl.*, 1865, vol. 10, pp. 297–349.
11. Lekhnitskii S. G. *Theory of Elasticity of an Anisotropic Body*. Moscow, Mir Publ., 1981, 430 pp.
12. Pobedrya B. E. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov* [Mechanics of Composite Materials]. Moscow, Moscow State Univ., 1984, 336 pp. (In Russian)
13. Wildemann V. E., Sokolkin Yu. V., Tashkinov A. A. *Mekhanika neuprugogo deformirovaniia i razrusheniia kompozitsionnykh materialov* [Mechanics of Inelastic Deformation and Failure of Composite Materials]. Moscow, Nauka, 1997, 288 pp. (In Russian)