Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2024. Т. 28, № 4. С. 615–650
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu2103
EDN: KECQQD

УДК 519.65 + 512.3

Некоторые необходимые и некоторые достаточные условия локального экстремума для полиномов и степенных рядов двух переменных

В. Н. Нефедов

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет),
Россия, 125993, Москва, Волоколамское ш., 4.

Аннотация

Настоящее исследование развивает предыдущие работы автора, устанавливающие необходимые и достаточные условия локального экстремума в стационарной точке полинома или абсолютно сходящегося в ее окрестности степенного ряда. Известно, что в одномерном случае необходимые и достаточные условия экстремума совпадают, образуя единое критериальное условие.

Следующим этапом анализа становится двумерный случай, составляющий предмет настоящего исследования. Проверка условий экстремума в этом случае сводится к алгоритмически выполнимым процедурам: вычислению действительных корней одномерных многочленов и решению ряда практически реализуемых вспомогательных задач.

Предложен алгоритм, основанный на указанных процедурах. Для ситуаций, когда его применение ограничено, разработан метод подстановки многочленов с неопределенными коэффициентами. На его основе построен алгоритм однозначной верификации наличия локального минимума в стационарной точке для полиномов, представимых суммой двух A-квазиоднородных форм, где A — двумерный вектор с натуральными компонентами.

Ключевые слова: полиномы, степенные ряды, необходимые условия экстремума, достаточные условия экстремума, квазиоднородные формы.

Получение: 12 июля 2024 г. / Исправление: 23 октября 2024 г. / Принятие: 28 октября 2024 г. / Публикация онлайн: 26 декабря 2024 г.

Дифференциальные уравнения и математическая физика
Научная статья

Образец для цитирования
Нефедов В. Н. Некоторые необходимые и некоторые достаточные условия локального экстремума для полиномов и степенных рядов двух переменных // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2024. Т. 28, № 4. С. 615–650. EDN: KECQQD. DOI: 10.14498/vsgtu2103.

Сведения об авторе
Виктор Николаевич Нефедов https://orcid.org/0000-0001-6053-2066
кандидат физико-математических наук, доцент; доцент; каф. 805 «Математическая кибернетика»; e-mail: nefedovvn54@yandex.ru

Введение. Настоящая работа развивает исследования, представленные в [1, 2], где были установлены необходимые и достаточные условия экстремума (в частности минимума) в стационарной точке полинома или степенного ряда, абсолютно сходящегося в некоторой окрестности этой точки. Рассмотрим $x = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m$, где $p(x)$ — полином (или степенной ряд), $0_{(m)} = (0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^m$, $p(0_{(m)}) = 0$, $p'(0_{(m)}) = 0_{(m)}$, т. е. $0_{(m)}$ — стационарная точка. Возникает вопрос: является ли $0_{(m)}$ точкой локального минимума? Для ответа на него исследуется матрица вторых производных $p''(0_{(m)})$ с использованием критерия Сильвестра (см., например, [3]). Однако этот критерий позволяет утверждать наличие локального минимума только в случае, когда квадратичная форма $\langle p''(0_{(m)})x, x\rangle$ (где $\langle x, y\rangle$ — скалярное произведение векторов x, $y \in \mathbb{R}^m$) является положительно определенной. В противном случае требуются более тонкие методы анализа. Особый интерес представляет случай, когда матрица вторых производных нулевая. В работах [1, 2] предложено использовать для таких исследований многогранник Ньютона — выпуклую оболочку векторов степеней членов полинома. Например, многогранник Ньютона для полинома (где x, y — скалярные переменные)

$$p(x, y) = x^4y^2 + 2x^2y^3 + y^4 + 3x^6y^2 + 3x^4y^3 + 0.01x^8y^3$$

изображен на рис. 1 (выделен темно-серым цветом).

В [1, 2] приведены и доказаны некоторые необходимые и некоторые достаточные условия, основанные на анализе полиномиальных форм, соответствующих граням многогранника Ньютона, находящимся в множестве его минимальных по Парето точек. Напомним, что отношение Парето $\leqslant$ на $\mathbb{R}^m$ определяется как $x \leqslant y \Leftrightarrow x_1 \leqslant y_1, \ldots, x_m \leqslant y_m$. В двумерном случае многогранник становится многоугольником, а исследуемыми гранями являются отрезки (размерности 1) или вершины, расположенные в его «юго-западной» части. Для полинома $p(x, y)$ из примера таких граней три: две вершины $(0, 4)$ и $(4, 2)$ и один отрезок (см. рис. 1). Необходимое условие локального минимума — неотрицательность этих форм. Достаточное условие — их неотрицательность и слабая невырожденность (т. е. неравенство нулю при ненулевых значениях переменных). Эти результаты, полученные в [1, 2] для произвольного

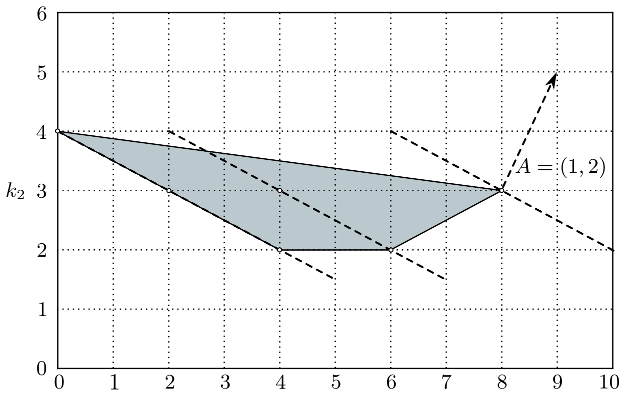

Рис. 1. Многогранник Ньютона для полинома $p(x, y)$
[Figure 1. The Newton polyhedron for the polynomial $p(x, y)$]

числа переменных m, позволяют решить задачу для большинства случаев.

Однако существуют ситуации, когда необходимое условие выполнено, а достаточное — нет. Для таких случаев в [2] предложена методика, основанная на разложении полинома (или степенного ряда) на сумму A-квазиоднородных форм. Под A-квазиоднородной формой, где $A \in \mathbb{Z}^m$, понимается полином, все члены которого имеют одинаковое значение скалярного произведения вектора A на вектор степеней его переменных. Однородная форма является частным случаем A-квазиоднородной при $A = (1, \ldots, 1) \in \mathbb{Z}^m$. Для анализа локального минимума рассматриваются только разложения при $A \in \mathbb{N}^m$, где $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел.

На рис. 1 показано разложение полинома $p(x, y)$ на три A-квазиоднородные формы при $A = (1, 2)$. В [2] доказаны необходимые и достаточные условия локального минимума для таких разложений. Однако для произвольного m не удалось сформулировать единый критерий. Для $m = 1$ такой критерий легко формулируется.

Следующим по сложности является случай $m = 2$, которому и посвящена настоящая работа. Для двумерного случая многие процедуры, сложные в общем случае, становятся простыми и легко проверяемыми. Например, неотрицательность или невырожденность квазиоднородной формы проверяется через нахождение действительных корней соответствующего многочлена (процедура, реализуемая в режиме онлайн). Это позволило разработать алгоритмы решения задачи с использованием «юго-западных» граней многогранника Ньютона, а также разложения на A-квазиоднородные формы при $A \in \mathbb{N}^2$.

Для случаев, когда эти алгоритмы не дают ответа, предложен метод подстановки многочленов с неопределенными коэффициентами. Приведены примеры, иллюстрирующие его применение. Доказано, что множество коэффициентов при главных членах таких многочленов может быть сужено до двух возможных вариантов.

Кроме того, в работе выделен класс полиномов — сумма двух A-квазиоднородных форм при $A \in \mathbb{N}^2$ — для которых получен единый критерий локального минимума. Этот результат имеет самостоятельное значение и усиливает утверждение 15 из [2], где условие локального минимума формулируется для суммы первых нескольких квазиоднородных форм.

В настоящей работе вопрос о строгости локального минимума в исследуемой стационарной точке не рассматривался.

Основные результаты работ [1, 2], а также настоящей работы получены с использованием леммы 7 из [1, с. 208] (см. утверждение 8, являющееся ее следствием для двумерного случая). Эта лемма доказана в [1] с использованием метода последовательного исключения переменных в полиномиальных задачах оптимизации, а также теорем 21.7 и 21.8 из [4], где обосновывается метод нахождения всех решений уравнения $f(x, y) = 0$ для степенного ряда $f(x, y)$, абсолютно сходящегося в окрестности точки $0_{(2)}$, $f(0, 0) = 0$, а решения ищутся в виде степенных рядов $y(x)$ с рациональными показателями степеней, абсолютно сходящихся в окрестности $x = 0$, где $y(0) = 0$. В работе [5] эта лемма была обобщена с полиномиального случая на случай степенного ряда, абсолютно сходящегося в окрестности нулевой точки.

В работе всюду, где это необходимо, подчеркиваются существенные отличия двумерного случая от случаев с тремя и более переменными (см. замечания 3 и 5).

1. Постановка задачи. Случай, когда полином является квазиоднородной формой. В настоящей работе рассматриваются полиномы $p(x,y)$ от двух действительных переменных x, y. Кроме того, в замечаниях 4 и 8 будет показано, что $p(x,y)$ может быть и степенным рядом. Однако для простоты изложения далее речь пойдет только о полиномах. Пусть $p(x,y) \not\equiv 0$, $p(0,0) = 0$, $p'(0,0) = (0,0) = 0_{(2)}$, т. е. $0_{(2)}$ является стационарной точкой. Целью статьи является получение практически проверяемых необходимых и достаточных условий того, что $0_{(2)}$ является точкой локального минимума $p(x,y)$. При этом в последнем случае не проводится дополнительного исследования того, является ли $0_{(2)}$ точкой строгого или нестрогого локального минимума.

Следуя [2], воспользуемся некоторыми понятиями и обозначениями. Будем использовать *носитель полинома* N_p — множество целочисленных векторов $(\alpha,\beta) \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^2$ таких, что в $p(x,y)$ входит член вида $ax^\alpha y^\beta$ при $a \neq 0$. Выпуклая оболочка этого множества $\operatorname{Co} N_p$ называется *многогранником Ньютона* полинома $p(x,y)$, а $\dim \operatorname{Co} N_p$ — его размерностью [3]. Если для некоторого вектора (очевидно, не единственного) $A = (A_1, A_2) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0_{(2)}\}$ найдется число $B \in \mathbb{Z}$, для которого выполняется $\forall\, (\alpha,\beta) \in N_p\ \langle A, (\alpha,\beta)\rangle = B$ ($\langle (x_1,y_1),(x_2,y_2)\rangle = x_1x_2 + y_1y_2$ — скалярное произведение векторов (x_1,y_1), $(x_1,y_1) \in \mathbb{R}^2$), то полином $p(x,y)$ называется *A-квазиоднородной* (*полиномиальной*) *формой*. Будем называть полином $p(x,y)$ *квазиоднородной формой*, если для некоторого $A \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0_{(2)}\}$ он является A-квазиоднородной формой.

Пример 1. Следующие полиномы являются квазиоднородными формами (в скобках указаны подходящие A и B):

(а) $p_1(x,y) = 2xy^2 - 3x^2y^3 + 5x^3y^4$ ($A = (1,-1)$, $B = -1$);
(б) $p_2(x,y) = 2xy^2 + 3x^3y^2 - 5x^5y^2$ ($A = (0,1)$, $B = 2$);
(в) $p_3(x,y) = 2xy^2 + 3xy^3 + 4xy^5$ ($A = (1,0)$, $B = 1$);
(г) $p_4(x,y) = 2x^4y^2 + 3x^2y^3 + 2y^4$ ($A = (1,2)$, $B = 8$).

Очевидно, что если полином $p(x,y)$ является A-квазиоднородной формой, то он является λA-квазиоднородной формой для любого $\lambda \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, при котором $\lambda A \in \mathbb{Z}^2$ (в том числе при $\lambda = -1$), где $\mathbb{Q}$ — множество рациональных чисел.

Заметим, что если полином $p(x,y)$ является квазиоднородной формой, то $\dim \operatorname{Co} N_p < 2$, поскольку для некоторого $A \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0_{(2)}\}$ все точки $(\alpha,\beta) \in N_p$ (а следовательно, и точки из $\operatorname{Co} N_p$) принадлежат прямой, заданной уравнением $A_1(\alpha-\alpha_1) + A_2(\beta-\beta_1) = 0$, где (α_1,β_1) — произвольная пара из N_p. При этом возможны случаи: $\dim \operatorname{Co} N_p = 0$ (тривиальный случай, когда $p(x,y)$ состоит из одного члена) либо $\dim \operatorname{Co} N_p = 1$. Нетрудно показать [2], что справедливо и обратное утверждение: если $\dim \operatorname{Co} N_p < 2$, то $p(x,y)$ является квазиоднородной формой.

В этом разделе приведем необходимое и достаточное условие того, что точка $0_{(2)}$ является точкой локального минимума полинома $p(x,y)$ для простейшего случая, когда он является квазиоднородной формой. Начнем с наиболее сложного случая, когда $p(x,y)$ является A-квазиоднородной формой для некоторого вектора $A = (A_1, A_2) \in \mathbb{N}^2$ (далее будет показано, что рассмотрение других случаев, при которых $A \in \mathbb{Z}^2 \setminus (\mathbb{N}^2 \cup \{0_{(2)}\})$, вполне очевидно), т. е. имеет вид $p(x,y) = \varphi_1^A(x,y)$, где для некоторого $s \in \mathbb{N}$ выполняется

$$\varphi_1^A(x,y) = \sum_{i=1}^{s} a_i x^{\alpha_i} y^{\beta_i}, \tag{1}$$

$$\begin{gathered} a_i \neq 0,\ \alpha_i, \beta_i \in \mathbb{N} \cup \{0\},\ A_1\alpha_i + A_2\beta_i = B_1^A \in \mathbb{N}, \\ i = 1, \dots, s,\ \alpha_1 > \alpha_2 > \dots > \alpha_s \geqslant 0 \end{gathered} \tag{2}$$

(при этом $0 \leqslant \beta_1 < \beta_2 < \dots < \beta_s$).

Для простоты считаем, что НОД$(A_1, A_2) = 1$ (иначе разделим A_1, A_2 на НОД(A_1, A_2)). Будем предполагать, что $s \geqslant 2$, поскольку случай $s = 1$ очевиден. Точки (α_i, β_i) находятся на одной прямой, координаты (α, β) которой удовлетворяют уравнению $A_1\alpha + A_2\beta = B_1^A$ (или $\frac{\alpha-\alpha_1}{-A_2} = \frac{\beta-\beta_1}{A_1}$), с направляющим вектором $e = (-A_2, A_1)$, а следовательно, $(\alpha_i, \beta_i) = (\alpha_1, \beta_1) + \nu_i e$, $i = 1, \dots, s$, где $\nu_1 = 0$, $\nu_i > 0$, $i = 2, \dots, s$. Используя то, что НОД$(|e_1|, |e_2|) =$ $=$ НОД$(A_1, A_2) = 1$, $(\alpha_i - \alpha_1, \beta_i - \beta_1) = \nu_i e$, получаем $\nu_i \in \mathbb{N}$, $i = 2, \dots, s$, $\nu_1 = 0$.

Таким образом, при $x \neq 0$ имеем

$$\begin{aligned} \varphi_1^A(x,y) &= \sum_{i=1}^{s} a_i x^{\alpha_i} y^{\beta_i} = \sum_{i=1}^{s} a_i x^{\alpha_1 + \nu_i e_1} y^{\beta_1 + \nu_i e_2} = \\ &= x^{\alpha_1} y^{\beta_1} \sum_{i=1}^{s} a_i (x^{e_1} y^{e_2})^{\nu_i} = x^{\alpha_1} y^{\beta_1} \sum_{i=1}^{s} a_i u^{\nu_i} = x^{\alpha_1} y^{\beta_1} g_1^A(u), \end{aligned} \tag{3}$$

$$u = x^{e_1} y^{e_2}, \quad e = (-A_2, A_1), \quad g_1^A(u) = \sum_{i=1}^{s} a_i u^{\nu_i},$$

где $g_1^A(u)$ — многочлен от одной переменной $u \in \mathbb{R}$. Так как НОД$(|e_1|, |e_2|) = 1$, хотя бы одно из чисел среди e_1, e_2 является нечетным, а следовательно, переменная $u = x^{e_1} y^{e_2}$ может принимать при $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ любые действительные значения. Будем в дальнейшем $g_1^A(u)$ называть *характеристическим многочленом*[1] для квазиоднородной формы $\varphi_1^A(x,y)$, а $a_1 x^{\alpha_1} y^{\beta_1}$ — ее *главным членом*. Соответственно, в случае $x = 0$ имеем

$$\varphi_1^A(0,y) = \begin{cases} 0, & \alpha_s > 0; \\ a_s y^{\beta_s}, & \alpha_s = 0. \end{cases}$$

Справедливо следующее

Утверждение 1. *Полином $p(x,y) = \varphi_1^A(x,y)$ вида (1)–(3) при $A = (A_1, A_2) \in \mathbb{N}^2$ является неотрицательным тогда и только тогда, когда выполняются условия:*

[1] Отметим, что термин «характеристический многочлен» используется в теории матриц, а здесь этот термин используется применительно к квазиоднородным формам и к матрицам никакого отношения не имеет.

1) $a_1 > 0$, $a_s > 0$, α_1, β_1, α_s, $\beta_s \in 2\mathbb{N} \cup \{0\}$;
2) *многочлен* $g_1^A(u) = \sum\limits_{i=1}^{s} a_i u^{\nu_i}$ *является неотрицательным, т. е.* (*в силу того, что* $g_1^A(0) = a_1 > 0$; *см. предыдущее условие*) *либо не имеет действительных корней, либо все его действительные корни имеют четную кратность.*

Доказательство. Докажем необходимость (достаточность очевидна). Покажем сначала справедливость условия 1. Например, если $a_1 > 0$, α_1 — нечетно, β_1 — любое, то $p(-t^{A_1}, t^{A_2+1}) = -a_1 t^{B_1^A+\beta_1} + o(t^{B_1^A+\beta_1})$, т. е. полином $p(x, y)$ не является неотрицательным. Соответственно, если $a_1 > 0$, α_1 — четно, β_1 — нечетно, то $p(t^{A_1}, -t^{A_2+1}) = -a_1 t^{B_1^A+\beta_1} + o(t^{B_1^A+\beta_1})$, т. е. полином $p(x, y)$ снова не является неотрицательным. Остальные случаи невыполнения условия 1 рассматриваются аналогично.

Покажем теперь справедливость условия 2. Предположим, что для некоторого $u_0 \in \mathbb{R}$ выполняется $g_1^A(u_0) < 0$. Тогда $u_0 \neq 0$ (поскольку $g_1^A(0) = a_1 > 0$). Используя то, что хотя бы одно из чисел среди e_1, e_2 является нечетным, нетрудно подобрать $x \neq 0$, $y \neq 0$, являющиеся решениями уравнения $u_0 = x^{e_1} y^{e_2}$ (например, если e_1 — нечетно, то полагаем: $y = 1$, $x = (u_0)^{1/e_1}$). Тогда в силу (3) при выбранных x, y с учетом четности α_1, β_1 выполняется $p(x, y) = x^{\alpha_1} y^{\beta_1} g_1^A(u_0) < 0$. $\square$

Таким образом, получено необходимое и достаточное условие неотрицательности полинома $p(x, y) = \varphi_1^A(x, y)$ вида (1)–(3), где $A = (A_1, A_2) \in \mathbb{N}^2$. Очевидно, что в случае неотрицательности этого полинома точка $0_{(2)}$ является точкой его локального (и даже глобального) минимума (возможно, строгого, а возможно, нестрогого), а в случае, если неотрицательность не выполняется, то $0_{(2)}$ не является точкой локального минимума этого полинома. Действительно, если нашлась точка $(x^*, y^*) \in \mathbb{R}^2$, для которой $\varphi_1^A(x^*, y^*) < 0$, то для $u_1(t) = x^* t^{A_1}$, $u_2(t) = y^* t^{A_2}$ при всех $t > 0$ (в том числе сколь угодно малых) имеем $\varphi_1^A(u_1(t), u_2(t)) = \varphi_1^A(x^*, y^*) t^{B_1^A} < 0$.

Пример 2. Заметим, что полином $p_4(x, y)$ из примера 1 является A-квазиоднородной формой при $A = (1, 2)$, т. е. находится в области применения утверждения 1. Для этого полинома условие 1 утверждения 1 выполняется, характеристический многочлен $g_1^A(u)$, удовлетворяющий (3), имеет вид $g_1^A(u) = 2 + 3u + 2u^2$, где $u = x^{-2}y$. Этот квадратный трехчлен имеет отрицательный дискриминант, т. е. у него нет действительных корней, а следовательно, в силу утверждения 1 точка $0_{(2)}$ является точкой локального (и глобального) минимума полинома $p_4(x, y)$.

Рассмотрим теперь случай, когда полином $p(x, y) = \varphi_1^A(x, y)$ вида (1)–(3) является A-квазиоднородной формой для некоторого $A = (A_1, A_2) \in \mathbb{Z}^2 \backslash \{0_{(2)}\}$ такого, что $A \notin \mathbb{N}^2$. Поскольку, как уже отмечалось, любая A-квазиоднородная форма, где $A \in \mathbb{Z}^2 \backslash \{0_{(2)}\}$, будет одновременно $(-A)$-квазиоднородной формой, достаточно ограничиться рассмотрением случаев: (а) $A_1 > 0$, $A_2 < 0$, (б) $A_1 = 0$, $A_2 > 0$, (в) $A_1 > 0$, $A_2 = 0$ (например, если $A_1 < 0$, $A_2 > 0$, то $-A_1 > 0$, $-A_2 < 0$), и при этом одновременно с $A \notin \mathbb{N}^2$ предполагаем, что $-A \notin \mathbb{N}^2$.

Произведем некоторые изменения в условии (2). В случаях (а), (б) заменяем в (2) условие $\alpha_1 > \alpha_2 > \cdots > \alpha_s \geqslant 0$ на $0 \leqslant \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_s$ (тогда в случае (а) $0 \leqslant \beta_1 < \beta_2 < \cdots < \beta_s$, а в случае (б) $\beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_s$; см. полиномы $p_1(x,y)$, $p_2(x,y)$ в примере 1). Соответственно, в случае (в) заменяем условие $\alpha_1 > \alpha_2 > \cdots > \alpha_s \geqslant 0$ на $0 \leqslant \beta_1 < \beta_2 < \cdots < \beta_s$ (в этом случае $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_s$; см. полином $p_3(x,y)$ в примере 1). В каждом из этих случаев $a_1 x^{\alpha_1} y^{\beta_1}$ является главным членом полинома $p(x,y) = \varphi_1^A(x,y)$,[2] который и определяет, будет ли точка $0_{(2)}$ точкой локального минимума этого полинома или нет. Чтобы $0_{(2)}$ была точкой локального минимума, необходимо и достаточно, чтобы этот член был неотрицательным, т. е. при $a_1 > 0$, $\alpha_1, \beta_1 \in 2\mathbb{N} \cup \{0\}$. В примере 1 для всех трех полиномов этим членом является $2xy^2$, который может принимать отрицательные значения в сколь угодно малой окрестности точки $0_{(2)}$, т. е. она не является точкой локального минимума этих полиномов. Действительно, для каждого из этих полиномов подстановка $x = -t$, $y = t$ дает многочлен, являющийся отрицательным в достаточно малой окрестности точки $t = 0$ при $t > 0$. Совершенно аналогично и в общем случае, если не выполняется условие $a_1 > 0$, α_1, $\beta_1 \in 2\mathbb{N} \cup \{0\}$, нетрудно выбрать числа C_1, $C_2 \in \{1, -1\}$, для которых $a_1 C_1^{\alpha_1} C_2^{\beta_1} < 0$, и при этом в окрестности точки $t = 0$ при достаточно малых $t > 0$ выполняется

$$\varphi_1^A(C_1 t, C_2 t) = a_1 C_1^{\alpha_1} C_2^{\beta_1} t^{\alpha_1+\beta_1} + o(t^{\alpha_1+\beta_1}) < 0.$$

Замечание 1. Ранее отмечалось, что выбор вектора $A \in \mathbb{Z}^2 \backslash \{0_{(2)}\}$ для A-квазиоднородной формы не является однозначным. Однако, накладывая на A некоторые простые дополнительные условия, можно прийти к однозначности этого выбора. Например, для квазиоднородной формы, состоящей из одного члена, он может быть выбран произвольно (в частности, $A = (1,1)$). В этом случае проверка неотрицательности этого полинома является тривиальной (см. условие 1 утверждения 1). Пусть теперь квазиоднородная форма содержит по крайней мере два члена (α_1, β_1), (α_2, β_2). Тогда если $A_1 \neq 0$, $A_2 \neq 0$, то дополнительное условие $A_1 > 0$ приводит к системе

$$A_1 > 0, \quad A_1(\alpha_2 - \alpha_1) + A_2(\beta_2 - \beta_1) = 0,$$

которая при добавлении условия $\text{НОД}(A_1, |A_2|) = 1$ всегда имеет единственное решение, которое обозначим через $\bar{A}$. Понятно, что при выборе другого вектора, удовлетворяющего этой системе без дополнительного условия $\text{НОД}(A_1, |A_2|) = 1$, получим вектор $A = \lambda \bar{A}$ при $\lambda \in \mathbb{N}$. При таком изменении результат исследования точки $0_{(2)}$ на локальный минимум останется прежним, т. е. всегда можно ограничиться использованием $A = \bar{A}$. Соответственно, в случае $A_1 = 0$ достаточно взять $A = (0,1)$, а в случае $A_2 = 0$ — взять $A = (1,0)$.

Замечание 2. Простые примеры показывают, что приведенные утверждения для случая двух переменных не переносятся на случай трех переменных, что указывает на исключительность этого случая (равно как и случая с одной переменной). Например, полином $p(x,y,z) = x^2 + 2xy + y^2 + x^2y^2z$ является A-квазиоднородной формой, где $A = (1,1,-2) \in \mathbb{Z}^3 \backslash \{0_{(3)}\}$, $A \notin \mathbb{N}^3$. Этот полином имеет уже не один, а три главных члена, не сравнимых по Парето. Сумма этих членов дает неотрицательную $(1,1)$-квазиоднородную форму от двух переменных. При

[2] Для любого другого члена этого полинома $a_i x^{\alpha_i} y^{\beta_i}$, где $i \in \{2, \ldots, s\}$, выполняются условия $\alpha_i \geqslant \alpha_1$, $\beta_i \geqslant \beta_1$, причем одно из этих неравенств строгое.

этом $0_{(3)}$ не является точкой локального минимума исходного полинома, поскольку $p(t,-t,-t)=-t^5<0$ при всех $t>0$.

2. Случай, когда многогранник Ньютона имеет размерность 2. Использование главных квазиоднородных форм. Выпуклое непустое множество $C\subseteq\mathbb{R}^n$ называется *гранью* [3] выпуклого замкнутого множества $Y\subseteq\mathbb{R}^n$, если $C\subseteq Y$ и $\forall\, y^{(1)},\, y^{(2)}\in Y,\, \forall\,\alpha\in(0,1)$ в случае $\alpha y^{(1)}+(1-\alpha)y^{(2)}\in C$ $y^{(1)},\ y^{(2)}\in C$. Грань C называется *собственной*, если $C\neq Y$. Точка $y\in Y$ называется *угловой*, если $\{y\}$ — грань.

Пусть теперь $\dim\operatorname{Co}N_p=2$. В этом случае полином $p(x,y)$ не может быть квазиоднородной формой (см. раздел 1). Тем не менее, у него можно выделить так называемые *главные квазиоднородные формы*, соответствующие граням многогранника Ньютона $\operatorname{Co}N_p$ размерности меньше 2. В случае $\dim\operatorname{Co}N_p=2$ каждой собственной грани $C\subset\operatorname{Co}N_p$ соответствует главная квазиоднородная форма

$$\varphi_C(x,y)=p_{N_p\cap C}(x,y),$$

где для любого непустого множества $N\subseteq N_p$ под $p_N(x,y)$ понимается сумма членов полинома $p(x,y)$, векторы степеней которых принадлежат N (N — *укорочение* полинома $p(x,y)$). Таким образом, $N_{\varphi_C}=N_p\cap C$ и все члены полинома $\varphi_C(x,y)$ являются членами полинома $p(x,y)$.

Следует отметить, что многогранники Ньютона являются инструментом для исследования широкого класса задач (см., например, [6–9]). В частности, теория многогранников Ньютона связывает геометрию многогранников с алгебраической геометрией [9].

В рассматриваемом случае с $\dim\operatorname{Co}N_p=2$ главные квазиоднородные формы могут соответствовать только собственным граням многогранника $\operatorname{Co}N_p$: угловым точкам (граням размерности 0) и сторонам $\operatorname{Co}N_p$ (граням размерности 1).

Следует отметить, что существует также другое определение главной квазиоднородной формы полинома $p(x,y)$ [2]. Полином $\varphi^A(x,y)$ называется главной A-квазиоднородной формой полинома $p(x,y)$, где $A=(A_1,A_2)\in\mathbb{Z}^2\backslash\{0_{(2)}\}$, если все члены $\varphi^A(x,y)$ являются членами $p(x,y)$ и $N_{\varphi^A}=\operatorname{Arg\,min}\big\{\langle A,k\rangle\mid k\in N_p\big\}=\big\{k\in N_p\mid \langle A,k\rangle=\min\limits_{k'\in N_p}\langle A,k'\rangle\big\}$, т. е. каждому $A=(A_1,A_2)\in\mathbb{Z}^2\backslash\{0_{(2)}\}$ соответствует единственная главная A-квазиоднородная форма этого полинома. Полином $\varphi(x,y)$ называется главной квазиоднородной формой полинома $p(x,y)$, если для некоторого $A\in\mathbb{Z}^2\backslash\{0_{(2)}\}$ он является его главной A-квазиоднородной формой. В [2] показано, что оба определения эквивалентны. В частности, это означает, что для любой собственной грани C многогранника $\operatorname{Co}N_p$ найдется вектор $A\in\mathbb{Z}^2\backslash\{0_{(2)}\}$ такой, что $p_{N_p\cap C}(x,y)$ является главной A-квазиоднородной формой полинома $p(x,y)$, т. е. $N_p\cap C=$ $=\operatorname{Arg\,min}\big\{\langle A,k\rangle\mid k\in N_p\big\}$. Как будет видно из дальнейшего, нахождение подходящего вектора A для рассматриваемых ниже граней $\operatorname{Co}N_p$ является несложной задачей.

Соответственно, если для некоторого $A\in\mathbb{Z}^2\backslash\{0_{(2)}\}$ $\varphi^A(x,y)$ — главная A-квазиоднородная форма полинома $p(x,y)$, откуда $N_{\varphi^A}=\operatorname{Arg\,min}\big\{\langle A,k\rangle\mid$

$k \in N_p\bigr\}$, то, как показано в [2], ей соответствует собственная грань (многогранника $\operatorname{Co} N_p$) $C_A = \operatorname{Arg\,min}\bigl\{\langle A, k\rangle \mid k \in \operatorname{Co} N_p\bigr\}$, и при этом

$$N_{\varphi^A} = N_p \cap C_A, \quad C_A = \operatorname{Co}(N_p \cap C_A) = \operatorname{Co} N_{\varphi^A}, \quad \varphi^A(x,y) = p_{N_p \cap C_A}(x,y).$$

Используя только главные квазиоднородные формы полинома, уже можно получить некоторые необходимые и некоторые достаточные условия локального минимума полинома $p(x,y)$ в точке $0_{(2)}$.

Определение 1. Пусть функция $f(x,y)$ определена на всем пространстве $\mathbb{R}^2$. Функцию $f(x,y)$ будем называть *неотрицательной*, если $\forall\ (x,y) \in \mathbb{R}^2$ $f(x,y) \geqslant 0$; функцию $f(x,y)$ — *невырожденной в слабом смысле*, если $\forall\ (x,y) \in \mathbb{R}^2$ выполняется $[x \neq 0, y \neq 0] \Rightarrow f(x,y) \neq 0$.

Теорема 1 [1, Теорема 2]. *Пусть $p(x,y)$ — полином, $p(0,0) = 0$, $p'(0,0) = 0_{(2)}$ и $\forall\ A \in \mathbb{N}^2$ главные A-квазиоднородные формы полинома $p(x,y)$ являются неотрицательными и невырожденными в слабом смысле. Тогда $0_{(2)}$ — точка локального минимума $p(x,y)$.*

Лемма 1 [1, Лемма 8]. *Пусть $0_{(2)}$ — точка локального минимума $p(x,y)$, $p(0,0) = 0$, $p'(0,0) = 0_{(2)}$. Тогда $\forall\ A \in \mathbb{N}^2$ главные A-квазиоднородные формы полинома $p(x,y)$ являются неотрицательными.*

Замечание 3. Следует отметить, что в теореме 1 и лемме 1 рассматриваются главные A-квазиоднородные формы полинома $p(x,y)$ не для всех $A \in \mathbb{Z}^2 \backslash \{0_{(2)}\}$, а лишь для $A \in \mathbb{N}^2$. Между тем во многих других задачах могут понадобиться A-квазиоднородные формы полинома $p(x,y)$ для всех векторов $A \in \mathbb{Z}^2 \backslash \{0_{(2)}\}$, например, при исследовании[3] полинома на знакоопределенность в положительном ортанте $\bigl\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y > 0\bigr\}$.

Заметим, что в случае $A \in \mathbb{N}^2$ для главной A-квазиоднородной формы $\varphi^A(x,y) = p_{N_{\varphi^A}}(x,y)$, где $N_{\varphi^A} = \operatorname{Arg\,min}\bigl\{\langle A, k\rangle \mid k \in N_p\bigr\}$, и соответствующей ей грани $C_A = \operatorname{Co} N_{\varphi^A}$ (для которой $N_{\varphi^A} = N_p \cap C_A$) выполняется

$$N_{\varphi^A} = \operatorname{Arg\,min}\bigl\{\langle A, k\rangle \mid k \in N_p\bigr\} \subseteq P(N_p), \quad C_A \subseteq P(\operatorname{Co} N_p),$$

где $P(Y) = \{y^* \in Y \mid \forall\ y \in Y\ (y_1 \leqslant y_1^*\ \&\ y_2 \leqslant y_2^*) \Rightarrow y = y^*\bigr\}$ — множество парето-оптимальных точек произвольного множества $Y \subset \mathbb{R}^2$. Здесь было использовано простое утверждение:

$$C_A = \operatorname{Arg\,min}\bigl\{\langle A, k\rangle \mid k \in \operatorname{Co} N_p\bigr\} \subseteq P(\operatorname{Co} N_p).$$

Таким образом, при использовании теоремы 1 и леммы 1 понадобятся главные квазиоднородные формы, соответствующие не всем граням, а только граням, содержащимся в «юго-западной» границе многогранника $\operatorname{Co} N_p$ («юго-западные» грани). Для небольших задействованных степеней эти грани легко выделяются даже визуально. Кроме того, в [2, 10] описаны практически реализуемые алгоритмы подбора подходящих $A \in \mathbb{N}^2$ для выделения

[3] См. [11], где это исследование проводилось для любого числа переменных в полиноме, а также приведенные там ссылки на другие работы.

всех главных A-квазиоднородных форм полинома, соответствующих случаям $A \in \mathbb{N}^2$.

Замечание 4. В случае $A \in \mathbb{N}^2$ можно ставить задачу о нахождении совокупности главных A-квазиоднородных форм не только для полинома, но и для степенного ряда, абсолютно сходящегося в некоторой окрестности стационарной точки, поскольку в этом случае их число конечно и потребуется конечное число «первых» членов из этого разложения. При этом теорема 1 и лемма 1 остаются в силе и для степенного ряда $p(x, y)$ [5].

Заметим теперь, что множество всех главных квазиоднородных форм полинома (или степенного ряда; см. замечание 4) $p(x, y)$, являющихся A-квазиоднородными при некоторых $A \in \mathbb{N}^2$ можно разбить на три группы.

Группа 1. В эту группу входят главные квазиоднородные формы полинома $p(x, y)$, соответствующие граням многогранника $\operatorname{Co} N_p$ размерности 0. Каждая из таких форм представляет собой одночлен вида $ax^\alpha y^\beta$, являющийся членом полинома $p(x, y)$. При этом пишем $\operatorname{coef}(p, (\alpha, \beta)) = a$. Как показано в [2], эти одночлены соответствуют угловым точкам многогранника $\operatorname{Co} N_p$, т. е. $(\alpha, \beta) \in \Psi(N_p) \subseteq N_p$, где через $\Psi(N_p)$ в [2] обозначается множество угловых точек $\operatorname{Co} N_p$. Более того, векторы (α, β) являются оптимальными по Парето на множестве N_p, т. е. $(\alpha, \beta) \in P(N_p)$. Таким образом, $(\alpha, \beta) \in \Omega(N_p)$, где в соответствии с обозначениями из [2] $\Omega(N_p) = P(N_p) \cap \Psi(N_p)$.

Справедливо и обратное утверждение [2]: одночлен полинома $p(x, y)$, соответствующий каждой точке из $\Omega(N_p)$ является для некоторого $A \in \mathbb{N}^2$ A-квазиоднородной формой этого полинома. Выделение (даже визуальное, с использованием графического изображения многогранника $\operatorname{Co} N_p$) точек из $\Omega(N_p)$, является достаточно простой задачей.[4] Необходимым и достаточным условием неотрицательности таких форм, которая в этом случае влечет также невырожденность в слабом смысле, в силу утверждения 1 является (см. условие 1) условие $a > 0$, α, $\beta \in 2\mathbb{N} \cup \{0\}$. Таким образом, необходимым условием того, что $0_{(2)}$ будет точкой локального минимума полинома $p(x, y)$, является

$$\forall\ (\alpha, \beta) \in \Omega(N_p) \quad \operatorname{coef}(p, (\alpha, \beta)) > 0,\ \alpha, \beta \in 2\mathbb{N} \cup \{0\}. \tag{4}$$

Будем в дальнейшем считать, что это условие выполнено.[5]

Группа 2. В эту группу войдут главные квазиоднородные формы полинома $p(x, y)$ размерности 1 (т. е. соответствующие сторонам многогранника $\operatorname{Co} N_p$), представляющие собой сумму двух одночленов, каждый из которых в этом случае соответствует одной из двух угловых точек этой стороны, являющихся угловыми точками $\operatorname{Co} N_p$ и одновременно принадлежащих $P(N_p)$ (т. е. каждая из них принадлежит $\Omega(N_p)$ и тем самым входит в группу 1). Таким образом, в группу 2 войдут некоторые суммы квазиоднородных форм из группы 1, являющихся одночленами. Поскольку для одночленов, входящих в эту сумму, предполагается выполнение условия вида (4), обеспечивающее неотрицательность и невырожденность в слабом смысле каждого из них,

[4]См. также в [2, 10] алгоритмы их выделения для произвольного числа переменных.

[5]В первом же случае его невыполнения рассматриваемая задача решена и $0_{(2)}$ не является точкой локального минимума полинома $p(x, y)$.

сумма этих одночленов будет, очевидно, также неотрицательной и невырожденной в слабом смысле.

Группа 3. В эту группу войдут все остальные главные квазиоднородные формы полинома $p(x, y)$ (не вошедшие в группы 1, 2), соответствующие граням (сторонам) многогранника $\mathrm{Co}\, N_p$, размерности 1, являющиеся суммами, по крайней мере, трех одночленов (два соответствуют угловым точкам этой грани (т. е. входят в группу 1), и имеется, по крайней мере, один одночлен, соответствующий промежуточной точке этой грани, находящейся между ее угловыми точками).

Таким образом, в случае, когда выполняется условие (4) и все главные A-квазиоднородные формы полинома $p(x, y)$, соответствующие случаям $A \in \mathbb{N}^2$, принадлежат группам 1 и 2, в силу теоремы 1 точка $0_{(2)}$ является точкой локального минимума полинома $p(x, y)$. Пусть теперь множество казиоднородных форм из группы 3 не является пустым и была выделена одна из таких форм. Тогда для некоторого $A \in \mathbb{N}^2$ это будет полином $\varphi_1^A(x, y)$ вида (1), (2).

Задача определения вектора $A = (A_1, A_2) \in \mathbb{N}^2$ по членам выделенной квазиоднородной формы[6] является простой вычислительной задачей. Этот вектор определяется по любым двум членам, входящим в эту форму, например, $a_1 x^{\alpha_1} y^{\beta_1}$, $a_2 x^{\alpha_2} y^{\beta_2}$ из уравнения $A_1\alpha_1 + A_2\beta_1 = A_1\alpha_2 + A_2\beta_2$, откуда $\frac{A_1}{A_2} = \frac{\beta_2 - \beta_1}{\alpha_1 - \alpha_2}$. Приводим правую часть этого равенства к несократимой дроби вида $\frac{m}{n}$, где m, $n \in \mathbb{N}$, и тогда полагаем $A_1 = m$, $A_2 = n$. При этом $\text{НОД}(A_1, A_2) = 1$.

Множество векторов $A = (A_1, A_2) \in \mathbb{N}^2$, удовлетворяющих условию $\text{НОД}(A_1, A_2) = 1$, обозначим через $\mathbb{N}_0^2$.

Используя лемму 1, можно воспользоваться полученным ранее утверждением 1. В силу леммы 1 неотрицательность $\varphi_1^A(x, y)$ является лишь необходимым условием того, что $0_{(2)}$ является точкой локального минимума полинома $p(x, y)$. Поэтому и воспользоваться утверждением 1 можно лишь для получения отрицательного результата. А именно, если главная A-квазиоднородная форма $\varphi_1^A(x, y)$ полинома $p(x, y)$ не является неотрицательной (т. е. не удовлетворяет необходимым и достаточным условиям из утверждения 1), то $0_{(2)}$ не является точкой локального минимума полинома $p(x, y)$.

Если все главные квазиоднородные формы полинома (или степенного ряда; см. замечание 4) $p(x, y)$ из группы 3 оказались неотрицательными, то необходимое условие из леммы 1 выполняется и мы переходим к проверке достаточных условий. Самым простым из них является проверка квазиоднородных форм из группы 3 на невырожденность в слабом смысле. Если все они оказались невырожденными в слабом смысле, то согласно теореме 1 точка $0_{(2)}$ является точкой локального минимума полинома $p(x, y)$. Для проверки этого наиболее простого условия можно использовать

Утверждение 2. *Квазиоднородная форма $\varphi_1^A(x, y)$ вида (1)–(3), удовлетворяющая условию 1 утверждения 1, является неотрицательной и невырожденной в слабом смысле тогда и только тогда, когда $g_1^A(u) > 0$ при всех $u \in \mathbb{R}$, т. е. (в силу того, что $g_1^A(0) = a_1 > 0$) этот многочлен не имеет действительных корней.*

[6] Например, они могут быть определены визуально исходя из изображения $\mathrm{Co}\, N_p$; см. также в [2, 10] алгоритмы их выделения для произвольного числа переменных.

Доказательство. Достаточность. Пусть $g_1^A(u) > 0$ при всех $u \in \mathbb{R}$. В силу утверждения 1 квазиоднородная форма $\varphi_1^A(x, y)$ является неотрицательной. Покажем, что она является невырожденной в слабом смысле. Предположим, что нашлась точка $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ такая, что $x_0 \neq 0$, $y_0 \neq 0$, $\varphi_1^A(x_0, y_0) = 0$. Тогда для $u_0 = x_0^{e_1} y_0^{e_2}$, где $e = (-A_2, A_1)$, в силу (3) выполняется $g_1^A(u_0) = 0$, что противоречит исходному предположению.

Необходимость. Предположим, что квазиоднородная форма $\varphi_1^A(x, y)$ является неотрицательной и невырожденной в слабом смысле. Покажем, что $g_1^A(u) > 0$ при всех $u \in \mathbb{R}$. Предположим, что нашлась точка $u_0 \in \mathbb{R}$ такая, что $g_1^A(u_0) = 0$. Поскольку $g_1^A(0) = a_1 > 0$, имеем $u_0 \neq 0$. Используя то, что хотя бы одно из чисел среди e_1, e_2 является нечетным (в силу того, что НОД$(A_1, A_2) = 1$), нетрудно подобрать $x_0 \neq 0$, $y_0 \neq 0$, являющиеся решениями уравнения $u_0 = x_0^{e_1} y_0^{e_2}$ (например, если e_1 — нечетно, то полагаем, что $y_0 = 1$, $x_0 = (u_0)^{1/e_1}$). Тогда в силу (3) при выбранных x_0, y_0, u_0 имеем

$$\varphi_1^A(x_0, y_0) = x_0^{\alpha_1} y_0^{\beta_1} g_1^A(u_0) = 0,$$

что противоречит невырожденности $\varphi_1^A(x, y)$ в слабом смысле. □

Таким образом, для проверки главных квазиоднородных форм из группы 3 на невырожденность в слабом смысле достаточно найти действительные корни их характеристических многочленов. Если все они оказались невырожденными в слабом смысле (т. е. действительных корней нет), то согласно теореме 1 точка $0_{(2)}$ является точкой локального минимума полинома (или степенного ряда; см. замечание 4) $p(x, y)$. В случае если для некоторого $A = (A_1, A_2) \in \mathbb{N}_0^2$ нашлась главная квазиоднородная форма $\varphi_1^A(x, y)$ из группы 3, являющаяся неотрицательной, но для которой не выполняется условие невырожденности в слабом смысле, т. е. ее характеристический многочлен имеет действительные корни (хотя бы один) четной кратности, то потребуются более сложные исследования, приводимые ниже. Такая форма из группы 3 может оказаться неединственной. Другие формы будут соответствовать другим $A = (A_1, A_2) \in \mathbb{N}_0^2$ и каждая из них должна быть рассмотрена отдельно.

Следует отметить, что в рассматриваемом двумерном случае метод, представленный в этом разделе, идейно близок методу диаграммы Ньютона. Например, главные квазиоднородные формы из групп 2 и 3 являются аналогами *опорных многочленов* [4] в методе диаграммы Ньютона.

Пример 3. Пусть $p_a(x, y) = x^2y^6 - (2+a)x^4y^5 + x^6y^4 + y^{10} - 10xy^9 - 0.1x^8y^4$ — полином, где a — параметр, $a \neq -2$. Тогда

$$N_{p_a} = \{(2, 6),\ (4, 5),\ (6, 4),\ (0, 10),\ (1, 9),\ (8, 4)\}$$

(см. изображение, N_{p_a}, $\operatorname{Co} N_{p_a}$ на рис. 2). Для этого полинома выполняется условие (4) (здесь $\Omega(N_{p_a}) = \{(0, 10),\ (2, 6),\ (6, 4)\}$) и единственной квазиоднородной формой из группы 3 является $\varphi_a(x, y) = x^6y^4 - (2 + a)x^4y^5 + x^2y^6$ (это (1, 2)-квазиоднородная форма), характеристическим многочленом которой является $g_a(u) = 1 - (2+a)u + u^2$. Тогда при $a = 0.01$ многочлен $g_a(u) = g_{0.01}(u)$ не является неотрицательным ($g_{0.01}(1) = -0.01 < 0$), а следовательно, в силу утверждения 1 квазиоднородная форма $\varphi_{0.01}(x, y)$ не является неотрицательной, и тогда в силу леммы 1 точка $0_{(2)}$ не является точкой локального

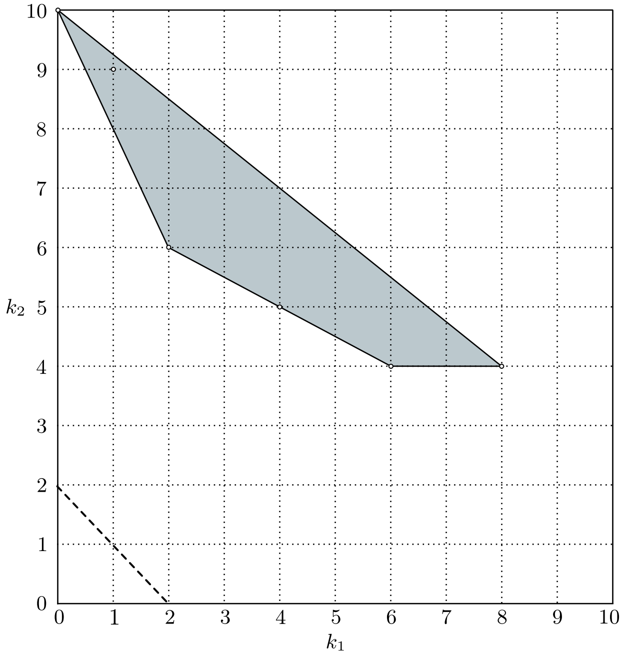

Рис. 2. Многогранник Ньютона для полинома $p_a(x, y)$
[Figure 2. The Newton polyhedron for the polynomial $p_a(x, y)$]

минимума полинома $p_{0.01}(x, y)$. При $a = -0.01$ многочлен $g_a(u) = g_{-0.01}(u)$ не имеет действительных корней, поскольку $g_{-0.01}(u) = 1 - 1.99u + u^2 = 0.995(1-u)^2 + 0.005(1+u^2) > 0$ при всех $u \in \mathbb{R}$. Но тогда в силу утверждения 2 квазиоднородная форма $\varphi_{-0.01}(x, y)$ является неотрицательной и невырожденной в слабом смысле, а следовательно, в силу теоремы 1 точка $0_{(2)}$ будет точкой локального минимума полинома $p_{-0.01}(x, y)$. При $a = 0$ многочлен $g_a(u) = g_0(u) = 1 - 2u + u^2 = (1-u)^2$ является неотрицательным и имеет действительный корень $u = 1$ кратности 2. Таким образом, в этом случае условия леммы 1 не нарушаются, а теорема 1 не работает, а следовательно, для дальнейшего исследования потребуются более тонкие методы, которые будут приведены далее.

Замечание 5. Снова подчеркнем существенное различие между случаем двух и большего числа переменных. Утверждения леммы 1 и теоремы 1 справедливы для произвольного числа переменных [2]. Однако проверка неотрицательности и невырожденности в слабом смысле квазиоднородных форм, существенно зависящих от трех и большего числа переменных, потребует исследования конечной совокупности многочленов с рациональными показателями степеней при переменных на неотрицательность и строгую положительность в положительном ортанте [2]. Такая задача исследуется в [11], где предлагается алгоритм ее решения, существенно более сложный, чем вычисление действительных корней от многочлена (к чему сводится случай двух переменных). Здесь можно отметить, что есть возможность упростить задачу, заменив проверку для квазиоднородной формы невырожденности в слабом смысле на невырожденность в сильном смысле, которая в случае неотрицательности этой формы выполняется тогда и только тогда, когда исследуемая квазиоднородная форма, зависящая от переменных $x_1, \ldots, x_m$, строго положительна на поверхности координатного куба $Q = \{(x_1,\dots,x_m) \in \mathbb{R}^m \mid |x_i| \leqslant 1,\ i = 1,\dots,m\}$. Последняя задача сводится к решению нескольких задач глобальной оптимизации многочлена (т. е. липшицевой функции) на координатных кубах размерностей $1, 2, \dots, m-1$ (см. некоторые методы решения этой задачи в [12] и других работах этих авторов).

3. Использование разложения полинома на сумму A-квазиоднородных форм. Будем в этом разделе считать, что многогранник Ньютона полинома (или степенного ряда; см. ниже замечание 8) $p(x,y)$ снова имеет размерность 2 и при этом все главные A-квазиоднородные формы этого полинома при всех $A \in \mathbb{N}^2$ неотрицательны, т. е., в частности, выполняется условие (4). В связи с этим введем в рассмотрение для данного полинома $p(x,y)$ множество $\mathbf{A}_p \subset \mathbb{N}_0^2$ целочисленных векторов $A \in \mathbb{N}_0^2$ таких, что $A \in \mathbf{A}_p$ тогда и только тогда, когда одновременно выполняются следующие условия:

1) главная A-квазиоднородная форма $\varphi_1^A(x,y)$ полинома $p(x,y)$ принадлежит группе 3 (т. е. является суммой не менее чем трех одночленов);
2) характеристический многочлен $g_1^A(u)$, определяемый согласно (3), является неотрицательным (см. утверждение 1);
3) многочлен $g_1^A(u)$ имеет действительные корни, т.е. рассматриваемая квазиоднородная форма не является невырожденной в слабом смысле.

Обозначим $U_p(A) = \{u \in \mathbb{R} \mid g_1^A(u) = 0\}$. Заметим, что $0 \notin U_p(A)$, так как $g_1^A(0) = a_1 > 0$.

Если $\mathbf{A}_p = \varnothing$, то, как мы уже видели, вопрос о том, является ли точка $0_{(2)}$ точкой локального минимума полинома $p(x,y)$, решается просто с использованием утверждения 2 и теоремы 1, т. е. в этом случае $0_{(2)}$ является точкой локального минимума этого полинома.

Пусть теперь $\mathbf{A}_p \neq \varnothing$. Тогда для каждого $A \in \mathbf{A}_p$ рассмотрим разложение полинома $p(x,y)$ на сумму A-квазиоднородных форм:

$$p(x,y) = \varphi_1^A(x,y) + \varphi_2^A(x,y) + \dots + \varphi_{r_A}^A(x,y); \tag{5}$$

$$\varphi_i^A(x,y) \not\equiv 0;\ \forall\ k \in N_{\varphi_i^A}\ \langle A, k\rangle = B_i^A \in \mathbb{N}, \tag{6}$$

где $i = 1,\dots,r_A$, $B_1^A < B_2^A < \dots < B_{r_A}^A$; $r_A \geqslant 2$, так как рассматривается случай $\dim \operatorname{Co} N_p = 2$.

Пусть $H_{\varphi_i^A} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \varphi_i^A(x,y) = 0\}$, $i = 1,\dots,r_A$. Воспользуемся леммой 3 и утверждением 15 из [2]. Перепишем эти утверждения применительно к случаю с двумя переменными.

Лемма 2. *Пусть $0_{(2)}$ — точка локального минимума $p(x,y)$, $p(0,0) = 0$, $p'(0,0) = 0_{(2)}$. Тогда $\forall\ A \in \mathbb{N}^2$ для разложения (5), (6) выполняется следующее: $\forall\ i \in \{1,2,\dots,r_A\}$, $\forall\ (x,y) \in H_{\varphi_1^A} \cap \dots \cap H_{\varphi_{i-1}^A}$ $\varphi_i^A(x,y) \geqslant 0$ (в частности при $i = 1$ имеем $\forall\ (x,y) \in \mathbb{R}^2$ $\varphi_1^A(x,y) \geqslant 0$).*

Теорема 2. *Пусть $p(x,y)$ — полином, $p(0,0) = 0$, $p'(0,0) = 0_{(2)}$, и $\forall\ A \in \mathbb{N}^2$ все главные A-квазиоднородные формы полинома $p(x,y)$ являются неотрицательными (т. е. выполняются необходимые условия локального минимума из леммы 1). Пусть для любого $A \in \mathbb{N}^2$ для разложения (5), (6) справедливо, что для некоторого $j \in \{1,2,\dots,r_A\}$ точка $0_{(2)}$ является точкой локального минимума полиномов $\varphi_1^A(x,y)$, $\varphi_1^A(x,y) + \varphi_2^A(x,y)$, $\dots$, $\varphi_1^A(x,y) + \dots +$*

$+\varphi_{j-1}^A(x,y)$. *При этом либо* $H_{\varphi_1^A}\cap\dots\cap H_{\varphi_{j-1}^A}\cap[\mathbb{R}\backslash\{0\}]^2=\varnothing$, *либо* $\forall\ (x,y)\in H_{\varphi_1^A}\cap\dots\cap H_{\varphi_{j-1}^A}\cap[\mathbb{R}\backslash\{0\}]^2\ \varphi_j^A(x,y)>0$. *Тогда* $0_{(2)}$ — *точка локального минимума* $p(x,y)$.

Как это следует из приведенных утверждений, в случае $\mathbf{A}_p\neq\varnothing$ для дальнейших исследований могут потребоваться другие члены разложения (5), (6) (помимо $\varphi_1^A(x,y)$) и, в частности, $\varphi_2^A(x,y)$. Поскольку $\varphi_2^A(x,y)$ также является A-квазиоднородной формой, аналогично $\varphi_1^A(x,y)$ эту форму можно представить в виде

$$\varphi_2^A(x,y)=\sum_{i=1}^{v}b_ix^{\chi_i}y^{\eta_i}, \tag{7}$$

где

$$b_i\neq0;\quad \chi_i,\ \eta_i\in\mathbb{N}\cup\{0\};$$

$$A_1\chi_i+A_2\eta_i=B_2^A,\quad i=1,\dots,v,\ v\in\mathbb{N};$$

$$\chi_1>\chi_2>\dots>\chi_v\geqslant0.$$

Точки (χ_i,η_i) находятся на одной прямой, координаты (χ,η) которой удовлетворяют уравнению $A_1\chi+A_2\eta=B_2^A$ или $\frac{\chi-\chi_1}{-A_2}=\frac{\eta-\eta_1}{A_1}$ с направляющим вектором $e=(-A_2,A_1)$, а следовательно, $(\chi_i,\eta_i)=(\chi_1,\eta_1)+\mu_ie$, $i=1,\dots,v$, где $\mu_1=0$, $\mu_i>0$, $i=2,\dots,v$. Так как НОД$(|e_1|,|e_2|)=$ НОД$(A_1,A_2)=1$, $(\chi_i-\chi_1,\eta_i-\eta_1)=\mu_ie$ получаем, что $\mu_i\in\mathbb{N}$, $i=2,\dots,v$ $(\mu_1=0)$. Таким образом, при $x\neq0$ имеем

$$\varphi_2^A(x,y)=\sum_{i=1}^{v}b_ix^{\chi_i}y^{\eta_i}=\sum_{i=1}^{v}b_ix^{\chi_1+\mu_ie_1}y^{\eta_1+\mu_ie_2}=x^{\chi_1}y^{\eta_1}\sum_{i=1}^{v}b_i(x^{e_1}y^{e_2})^{\mu_i}=$$
$$=x^{\chi_1}y^{\eta_1}\sum_{i=1}^{v}b_iu^{\mu_i}=x^{\chi_1}y^{\eta_1}g_2^A(u),\quad u=x^{e_1}y^{e_2},\quad g_2^A(u)=\sum_{i=1}^{v}b_iu^{\mu_i}, \tag{8}$$

где $g_2^A(u)$ — характеристический многочлен квазиоднородной формы $\varphi_2^A(x,y)$, а $b_1x^{\chi_1}y^{\eta_1}$ — ее главный член.

Рассмотрим два условия:

$(\text{У}1)_A$: $\exists\ (x_0,y_0)\in H_{\varphi_1^A}:\varphi_2^A(x_0,y_0)<0$;

$(\text{У}2)_A$: $\forall\ (x,y)\in H_{\varphi_1^A}\ (x\neq0\ \&\ y\neq0\Rightarrow\varphi_2^A(x,y)>0)$.

Следствием леммы 2 и теоремы 2 является

Теорема 3. *Пусть* $p(x,y)$ — *полином,* $p(0,0)=0$, $p'(0,0)=0_{(2)}$, $\dim\operatorname{Co}N_p=2$ *и выполняется условие* (4) (*т. е. все главные квазиоднородные формы из групп 1 и 2 являются неотрицательными и невырожденными в слабом смысле*). *Тогда, если* $\mathbf{A}_p=\varnothing$, *то* $0_{(2)}$ *является точкой локального минимума полинома* $p(x,y)$. *Если* $\mathbf{A}_p\neq\varnothing$, *то возможны случаи:*

1) *если* $\exists\ A\in\mathbf{A}_p$, *для которого выполняется условие* $(\text{У}1)_A$, *то* $0_{(2)}$ *не является точкой локального минимума полинома* $p(x,y)$;
2) *если* $\forall\ A\in\mathbf{A}_p$ *не выполняется условие* $(\text{У}1)_A$, *но справедливо* $(\text{У}2)_A$, *то* $0_{(2)}$ *является точкой локального минимума полинома* $p(x,y)$.

Приведем теперь утверждения, сводящие проверку условий $(У1)_A$, $(У2)_A$ к решению очень простых вычислительных задач. Пусть все главные квазиоднородные формы полинома $p(x,y)$ из групп 1–3 неотрицательны и $\mathbf{A}_p \neq \varnothing$. Рассмотрим для $A \in \mathbf{A}_p$, $u_0 \in U_p(A)$ условие $(У3)_{A,u_0}$, которое выполняется тогда и только тогда, когда не является совместной система

$$\begin{cases} x \neq 0 \ \&\ y \neq 0, \\ x^{e_1} y^{e_2} = u_0, \\ \varphi_2^A(x,y) = x^{\chi_1} y^{\eta_1} g_2^A(u_0) < 0. \end{cases} \tag{9}$$

Утверждение 3. *Пусть выполнены условия теоремы 3 и* $A \in \mathbf{A}_p \neq \varnothing$. *Тогда для выполнения условия* $(У1)_A$ *(при выполнении которого* $0_{(2)}$ *не является точкой локального минимума полинома* $p(x,y)$*) необходимо и достаточно, чтобы было справедливо хотя бы одно из трех нижеследующих условий*:

$$\alpha_s > 0, \quad \chi_v = 0, \quad (b_v < 0) \vee (\eta_v \notin 2\mathbb{N}), \tag{10}$$

$$\beta_1 > 0, \quad \eta_1 = 0, \quad (b_1 < 0) \vee (\chi_1 \notin 2\mathbb{N}), \tag{11}$$

$$\begin{aligned} &\exists\ u_0 \in U_p(A),\ \text{что не выполняется условие } (У3)_{A,u_0} \\ &(\text{т.е. для заданных } A, u_0 \text{ система } (9) \text{ совместна}). \end{aligned} \tag{12}$$

Доказательство. Достаточность. В случае (10) (случай (11) рассматривается аналогично), если $b_v < 0$, то при $x = 0$, $y = 1$ имеем $\varphi_1^A(0,1) = 0$, $\varphi_2^A(0,1) = b_v < 0$, а если $b_v > 0$, $\eta_v \notin 2\mathbb{N}$ ($\eta_v \neq 0$, т. к. $\chi_v = 0$), то при $x = 0, y = -1$ имеем: $\varphi_1^A(0,-1) = 0$, $\varphi_2^A(0,-1) = -b_v < 0$. В случае (12), используя (3), получаем, что при x, y, удовлетворяющих (9), выполняется $(x,y) \in H_{\varphi_1^A}$, $\varphi_2^A(x,y) < 0$, т. е. справедливо условие $(У1)_A$, и в силу теоремы 3 точка $0_{(2)}$ не является точкой локального минимума полинома $p(x,y)$.

Необходимость. Пусть $\exists\ (x_0,y_0) \in H_{\varphi_1^A} : \varphi_2^A(x_0,y_0) < 0$. Покажем, что тогда справедливо хотя бы одно из условий (10)–(12). Рассмотрим сначала случай, когда $x_0 \neq 0$, $y_0 \neq 0$. Тогда для $u_0 = x_0^{e_1} y_0^{e_2}$ выполняется

$$\varphi_1^A(x_0,y_0) = x_0^{\alpha_1} y_0^{\beta_1} g_1^A(u_0), \quad \varphi_2^A(x_0,y_0) = x_0^{\chi_1} y_0^{\eta_1} g_2^A(u_0)$$

и, поскольку $(x_0,y_0) \in H_{\varphi_1^A}$, имеем $g_1^A(u_0) = 0$, а следовательно, $u_0 \in U_p(A)$. Но тогда $x = x_0$, $y = y_0$, u_0 являются решением системы (9), т. е. справедливо (12). Пусть теперь $x_0 = 0$. Тогда из условия $\varphi_2^A(x_0,y_0) < 0$ (с учетом $B_2^A > 0$) получаем, что $y_0 \neq 0$. При этом не может выполняться $\alpha_s = 0$, так как, если $\alpha_s = 0$, то $\varphi_1^A(0,y) = a_s y^{\beta_s}$, откуда из условия $(x_0,y_0) = (0,y_0) \in H_{\varphi_1^A}$ получаем $\varphi_1^A(0,y_0) = a_s y_0^{\beta_s} = 0$, а это противоречит тому, что $y_0 \neq 0$. Таким образом, $\alpha_s > 0$. Заметим теперь, что не может выполняться $\chi_v > 0$, так как тогда

$$\varphi_2^A(0,y_0) = b_v \cdot 0^{\chi_v} \cdot y_0^{\eta_v} = 0.$$

Таким образом, $\chi_v = 0$. Далее, не может быть одновременно $b_v > 0$ и $\eta_v \in 2\mathbb{N}$, так как тогда

$$\varphi_2^A(x_0,y_0) = \varphi_2^A(0,y_0) = b_v y_0^{\eta_v} > 0.$$

Совершенно аналогично доказывается, что в случае $y_0 = 0$ выполняется (11). $\square$

Пример 4.

1. Случаю (10) соответствует полином

$$p(x,y) = \varphi_1^A(x,y) + \varphi_2^A(x,y) = x^2(x-y)^2 + 2y^5.$$

Здесь $A = (1,1) \in \mathbb{N}^2$, $\varphi_1^A(x,y) = x^2(x-y)^2$, $\varphi_2^A(x,y) = 2y^5$, $\varphi_1^A(0,-1) = 0$, $\varphi_2^A(0,-1) = -2 < 0$.

2. Случаю (11) соответствует полином

$$p(x,y) = \varphi_1^A(x,y) + \varphi_2^A(x,y) = y^2(x-y)^2 + 2x^5.$$

Здесь $A = (1,1) \in \mathbb{N}^2$, $\varphi_1^A(x,y) = y^2(x-y)^2$, $\varphi_2^A(x,y) = 2x^5$, $\varphi_1^A(-1,0) = 0$, $\varphi_2^A(-1,0) = -2 < 0$.

3. Случаю (12) соответствует полином

$$p(x,y) = \varphi_1^A(x,y) + \varphi_2^A(x,y) = (x-y)^2 + (x-2y)^3.$$

Здесь $A = (1,1) \in \mathbb{N}^2$, $\varphi_1^A(x,y) = (x-y)^2 = x^2 g_1^A(u)$, $u = x^{e_1}y^{e_2} = x^{-1}y$, $e = (-A_2, A_1) = (-1,1)$, $g_1^A(u) = (1-u)^2$, $\varphi_2^A(x,y) = (x-2y)^3 = x^3 g_2^A(u)$, $g_2^A(u) = (1-2u)^3$, $A = (1,1) \in \mathbf{A}_p \neq \varnothing$, $u_0 = 1 \in U_p(A)$.
Тогда, например, при $x = 1$, $y = 1$ имеем

$$x \neq 0 \;\&\; y \neq 0, \quad x^{e_1}y^{e_2} = 1 = u_0,$$

$$\varphi_2^A(x,y) = x^{\chi_1}y^{\eta_1}g_2^A(u_0) = x^3 g_2^A(u_0) = -1 < 0,$$

т. е. система (9) совместна, а следовательно, не выполняется условие $(У3)_{A,u_0}$ и согласно утверждению 3 точка $0_{(2)}$ не является точкой локального минимума полинома $p(x,y)$.

Утверждение 4. *Пусть выполняются условия теоремы 3, $A \in \mathbf{A}_p \neq \varnothing$ и справедливо условие $(У2)_A$. Тогда $\forall\, u_0 \in U_p(A)$ выполняется условие $(У3)_{A,u_0}$.*

Доказательство. Предположим, что для некоторого $u_0 \in U_p(A)$ не выполняется условие $(У3)_{A,u_0}$, т. е. система (9) является совместной. Тогда для x, y, удовлетворяющих этой системе, выполняется

$$\varphi_1^A(x,y) = x^{\alpha_1}y^{\beta_1}g_1^A(u_0) = 0, \quad \varphi_2^A(x,y) = x^{\chi_1}y^{\eta_1}g_2^A(u_0) < 0, \quad x \neq 0, \; y \neq 0,$$

а это противоречит условию $(У2)_A$. $\square$

Утверждение 5. *Пусть выполняются условия теоремы 3, $A \in \mathbf{A}_p \neq \varnothing$ и $\forall\, u_0 \in U_p(A)$ выполняется условие $(У3)_{A,u_0}$ при $g_2^A(u_0) \neq 0$. Тогда справедливо условие $(У2)_A$.*

Доказательство. В случае невыполнения условия $(У2)_A$ найдутся $(x,y) \in H_{\varphi_1^A}$ такие, что $x \neq 0$, $y \neq 0$, $\varphi_2^A(x,y) \leqslant 0$. Но тогда $\varphi_1^A(x,y) = x^{\alpha_1}y^{\beta_1}g_1^A(u_0) = 0$, где $x^{e_1}y^{e_2} = u_0$, откуда $g_1^A(u_0) = 0$, а следовательно,

$u_0 \in U_p(A)$. При этом $\varphi_2^A(x,y) = x^{\chi_1} y^{\eta_1} g_2^A(u_0) \neq 0$, следовательно, $\varphi_2^A(x,y) = x^{\chi_1} y^{\eta_1} g_2^A(u_0) < 0$, т. е. система (9) оказалась совместной, что противоречит исходному предположению о выполнении условия $(\text{У3})_{A,u_0}$. □

Из утверждений 4, 5 получаем, что справедливо

Следствие 1. *Пусть выполняются условия теоремы 3, $A \in \mathbf{A}_p \neq \varnothing$, $\forall\ u_0 \in U_p(A)$ $g_2^A(u_0) \neq 0$. Тогда для выполнения условия $(\text{У2})_A$ необходимо и достаточно, чтобы $\forall\ u_0 \in U_p(A)$ выполнялось условие $(\text{У3})_{A,u_0}$ (т. е. система (9) не являлась совместной).*

Таким образом, проверка для некоторого $A \in \mathbf{A}_p \neq \varnothing$ условий $(\text{У1})_A$, $(\text{У2})_A$ сводится к вычислению $g_2^A(u_0)$, $u_0 \in U_p(A)$, и проверке (в случае $g_2^A(u_0) \neq 0$) совместности системы (9). Исследование на совместность (или на несовместность) системы (9) в случае $g_2^A(u_0) \neq 0$ является несложным. Поскольку НОД$(|e_1|,|e_2|) = 1$, хотя бы одно из чисел среди e_1, e_2 является нечетным. Пусть, например, число e_1 является нечетным. Тогда для любого значения $y \in \mathbb{R}$ из второго равенства в (9) однозначно определяем значение x согласно формуле $x = (u_0 y^{-e_2})^{1/e_1}$, подставляя которое в третье условие из (9), получаем неравенство $(u_0 y^{-e_2})^{\chi_1/e_1} y^{\eta_1} g_2^A(u_0) < 0$ или

$$[u_0^{\chi_1/e_1} g_2^A(u_0)] y^{\frac{e_1\eta_1 - e_2\chi_1}{e_1}} < 0. \tag{13}$$

Если целое число $e_1\eta_1 - e_2\chi_1$ является четным, то условие (13) эквивалентно легко проверяемому условию

$$u_0^{\chi_1/e_1} g_2^A(u_0) < 0, \tag{14}$$

в случае выполнения которого убеждаемся, что система (9) является совместной. В противном случае $u_0^{\chi_1/e_1} g_2^A(u_0) > 0$ (напомним, что $u_0 \neq 0$) и система (9) несовместна (поскольку из ее совместности в рассматриваемом случае следует (14)). Если же число $e_1\eta_1 - e_2\chi_1$ является нечетным, то при любом значении величины $u_0^{\chi_1/e_1} g_2^A(u_0)$, которое в рассматриваемом случае отлично от 0, можно подобрать значение y (например, выбрать его из чисел 1, -1), чтобы условие (13) выполнялось, т. е. в этом случае система (9) совместна (после подбора y полагаем $x = (u_0 y^{-e_2})^{1/e_1}$, чтобы выполнилось равенство $x^{e_1} y^{e_2} = u_0$).

Пусть теперь число e_2 является нечетным. Тогда для любого значения $x \in \mathbb{R}$ из второго равенства в (9) однозначно определяем значение y согласно формуле $y = (u_0 x^{-e_1})^{1/e_2}$, подставляя которое в третье условие из (9), получаем неравенство $x^{\chi_1}(u_0 x^{-e_1})^{\eta_1/e_2} g_2^A(u_0) < 0$ или

$$[u_0^{\eta_1/e_2} g_2^A(u_0)] x^{\frac{e_2\chi_1 - e_1\eta_1}{e_2}} < 0. \tag{15}$$

Если целое число $e_2\chi_1 - e_1\eta_1$ (или, что то же самое, $e_1\eta_1 - e_2\chi_1$; см. предыдущий случай) является четным, то условие (15) эквивалентно легко проверяемому условию

$$u_0^{\eta_1/e_2} g_2^A(u_0) < 0, \tag{16}$$

в случае выполнения которого убеждаемся, что система (9) является совместной. В противном случае $u_0^{\eta_1/e_2} g_2^A(u_0) > 0$ и система (9) несовместна (поскольку из ее совместности в рассматриваемом случае следует (16)). Если же число $e_2\chi_1 - e_1\eta_1$ является нечетным, то при любом значении величины $u_0^{\eta_1/e_2} g_2^A(u_0)$, которое в этом случае отлично от 0, можно подобрать значение x (например, выбрать его из чисел 1, -1), чтобы условие (15) выполнялось, т. е. в этом случае система (9) совместна (после подбора x полагаем $y = (u_0 x^{-e_1})^{1/e_2}$, чтобы выполнилось равенство $x^{e_1} y^{e_2} = u_0$). Действуя таким образом, мы для каждого $u_0 \in U_p(A)$, при котором $g_2^A(u_0) \neq 0$, однозначно определим, является ли система (9) совместной или нет.

На основании полученных результатов уже можно описать достаточно простой алгоритм проверки для полинома (или степенного ряда; см. ниже замечание 8) $p(x, y) \not\equiv 0$, где $p(0,0) = 0$, $p'(0,0) = 0_{(2)}$ (т. е. точка $0_{(2)}$ является стационарной точкой), является ли точка $0_{(2)}$ точкой локального минимума этого полинома. Будем рассматривать нетривиальный случай, когда $\dim \operatorname{Co} N_p = 2$ и одночлены полинома $p(x, y)$, соответствующие точкам из $\Omega(N_p)$, являются неотрицательными (а следовательно, и невырожденными) квазиоднородными формами, т. е. выполняется (4).

Алгоритм

Шаг 1. Выделяем все главные квазиоднородные формы полинома $p(x, y)$ из группы 3. Если множество таких форм пусто, то в силу теоремы 1 точка $0_{(2)}$ является точкой локального минимума рассматриваемого полинома $p(x, y)$ и на этом работа алгоритма заканчивается. Иначе полагаем $\tilde{\mathbf{A}}_p = \varnothing$, где $\tilde{\mathbf{A}}_p$ — множество всех $A \in \mathbb{N}_0^2$, для которых после окончания работы алгоритма потребуются более тонкие исследования, и переходим к шагу 2.

Шаг 2. Выбираем любую очередную главную квазиоднородную форму из группы 3. Если все они были уже рассмотрены, то в случае $\tilde{\mathbf{A}}_p = \varnothing$ (всюду в алгоритме к шагу 2 переходим в одном из трех случаев: либо в случае, когда очередная квазиоднородная форма $\varphi_1^A(x, y)$ из группы 3 оказалась неотрицательной и невырожденной в слабом смысле, т. е. при $A \notin \mathbf{A}_p$, либо, если $A \in \mathbf{A}_p$ и при этом не выполняется условие $(\text{У}1)_A$, но справедливо $(\text{У}2)_A$, т. е. не нарушается условие 2 теоремы 3, либо в случае $A \in \tilde{\mathbf{A}}_p$) точка $0_{(2)}$ является точкой локального минимума рассматриваемого полинома $p(x, y)$, а если $\tilde{\mathbf{A}}_p \neq \varnothing$, то требуются более тонкие исследования (см. ниже модификацию алгоритма, замечание 7, а также раздел 4), и на этом работа алгоритма заканчивается. В противном случае определяем по любым двум членам выбранной формы вектор $A \in \mathbb{N}_0^2$ такой, что эта форма является главной A-квазиоднородной формой полинома $p(x, y)$. В силу того, что $\dim \operatorname{Co} N_p = 2$, $p(x, y)$ содержит по крайней мере два члена в разложении (5), (6), первый из которых $\varphi_1^A(x, y)$ и соответствует очередной выбранной форме из группы 3.

Шаг 3. В силу (4) получаем, что для $\varphi_1^A(x, y)$ выполняется условие 1 утверждения 1 (используя утверждение 10 и замечание 9 из [2], нетрудно показать, что $(\alpha_1, \beta_1), (\alpha_s, \beta_s) \in \Omega(N_p) = \Psi(N_p) \cap P(N_p)$). Находим характеристический многочлен $g_1^A(u)$ для квазиоднородной формы $\varphi_1^A(x, y)$ согласно формуле (3), а также множество $U_p(A)$. Если $U_p(A) = \varnothing$, то в этом случае в силу утверждения 2 квазиоднородная форма $\varphi_1^A(x, y)$ является неотрицательной и невырожденной в слабом смысле. Тогда $A \notin \mathbf{A}_p$ и переходим к шагу 2. Иначе $U_p(A) \neq \varnothing$ и переходим к шагу 4.

Шаг 4. Находим кратности корней из $U_p(A)$, по которым проверяем неотрицательность многочлена $g_1^A(u)$. Если она не выполняется, то в силу утверждения 1 квазиоднородная форма $\varphi_1^A(x,y)$ не является неотрицательной, а следовательно, в силу леммы 1 точка $0_{(2)}$ не является точкой локального минимума $p(x,y)$ и на этом работа алгоритма заканчивается. Иначе $A \in \mathbf{A}_p$, и переходим к шагу 5.

Шаг 5. Проверяем выполнение условия $(У1)_A$. Для этого сначала определяем справедливость (10), (11). Если хотя бы одно из этих условий выполняется, то в силу утверждения 3 точка $0_{(2)}$ не является точкой локального минимума $p(x,y)$ и на этом работа алгоритма заканчивается. Иначе переходим к шагу 6.

Шаг 6. Находим характеристический многочлен $g_2^A(u)$ квазиоднородной формы $\varphi_2^A(x,y)$ согласно формуле (8). Если $\forall\ u_0 \in U_p(A)\ g_2^A(u_0) = 0$, то переходим к шагу 7. Иначе рассматриваем два случая.

1. Пусть целое число $e_1\eta_1 - e_2\chi_1$ является нечетным. Тогда система (9) совместна для каждого $u_0 \in U_p(A)$, для которого $g_2^A(u_0) \neq 0$, и согласно утверждению 3 точка $0_{(2)}$ не является точкой локального минимума $p(x,y)$. На этом работа алгоритма заканчивается.
2. Пусть целое число $e_1\eta_1 - e_2\chi_1$ является четным. Тогда для каждого $u_0 \in U_p(A)$, для которого $g_2^A(u_0) \neq 0$, проверяем выполнение условия (14), если число e_1 является нечетным, или условия (16), если число e_2 является нечетным.[7] В первом же случае выполнения (14) при нечетном e_1 или (16) при нечетном e_2 система (9) совместна, а следовательно, в силу утверждения 3 точка $0_{(2)}$ не является точкой локального минимума $p(x,y)$, и на этом работа алгоритма заканчивается. В случае, если при всех $u_0 \in U_p(A)$ $g_2^A(u_0) \neq 0$ и при этом система (9) несовместна (что однозначно определяется проверкой одного из условий (14) или (16)), то в силу следствия 1 выполняется $(У2)_A$, а в силу утверждения 3 не выполняется $(У1)_A$, т. е. для рассматриваемого $A \in \mathbf{A}_p$ не нарушается условие 2 теоремы 3. В этом случае рассматриваем очередную главную квазиоднородную форму из группы 3, т. е. переходим к шагу 2. Если же нашлось число $u_0 \in U_p(A)$, при котором $g_2^A(u_0) = 0$, то переходим к шагу 7.

Шаг 7. На этом шаге мы оказываемся в случае, когда $A \in \mathbf{A}_p$, $g_2^A(u_0) = 0$ для некоторых (хотя бы для одного) $u_0 \in U_p(A)$, и при этом система (9) несовместна для тех $u_0 \in U_p(A)$, для которых $g_2^A(u_0) \neq 0$. Тогда для данного $A \in \mathbf{A}_p$ потребуются еще более тонкие исследования. Поэтому присваиваем $\tilde{\mathbf{A}}_p := \tilde{\mathbf{A}}_p \cup \{A\}$. В любом случае можно продолжить работу алгоритма, исследуя очередную главную квазиоднородную форму из группы 3 (поскольку это исследование может привести к ситуации, показывающей, что $0_{(2)}$ не является точкой локального минимума $p(x,y)$), т. е. переходим к шагу 2.

[7]Если оба нечетны, то эти условия эквивалентны, поскольку в этом случае числа χ_1, η_1 либо одновременно четны, либо одновременно нечетны, т. е. величины $u_0^{\eta_1/e_2}$, $u_0^{\chi_1/e_1}$ имеют один знак.

Применяя изложенный алгоритм к полиному $p(x,y)$ рассматриваемого вида, мы либо определим, является ли точка $0_{(2)}$ точкой локального минимума этого полинома или нет, либо выделим непустое множество $\tilde{\mathbf{A}}_p$ всех $A \in \mathbf{A}_p$, для которых требуются более тонкие исследования. Опишем некоторые из них.

Эти исследования могут, в частности, базироваться на применении теоремы 2 для случаев с $j \geqslant 3$, т. е. с использованием других членов в разложении (5), (6), в частности, квазиоднородной формы $\varphi_3^A(x,y)$. Опишем модификацию алгоритма, использующую $\varphi_3^A(x,y)$. Аналогичным образом могут быть описаны модификации, использующие $\varphi_4^A(x,y)$ и т. д.

Замечание 6. Заметим, что возможен случай, когда $p(x,y) = \varphi_1^A(x,y)+\varphi_2^A(x,y)$, т. е. $p(x,y)$ является суммой двух первых квазиоднородных форм. Этот случай будет рассмотрен в разделе 5 и для него будет получена процедура, позволяющая однозначно ответить на вопрос, является ли точка $0_{(2)}$ точкой локального минимума этого полинома или нет. В связи с этим перейдем к рассмотрению случая, когда $\forall\ A \in \tilde{\mathbf{A}}_p\ \varphi_3^A(x,y) \not\equiv 0$.

По аналогии с условием (У2)$_A$ введем в рассмотрение условие (см. также ниже замечание 7)

$(\tilde{\text{У}}2)_A$: $\forall\ (x,y) \in H_{\varphi_1^A} \cap H_{\varphi_2^A}\ [x \neq 0, y \neq 0 \Rightarrow \varphi_3^A(x,y) > 0]$;
$\forall\ (x,y) \in \mathbb{R}^2\ \varphi_2^A(x,y) \geqslant 0$.

Заметим, что второе условие в $(\tilde{\text{У}}2)_A$ проверяется в соответствии с утверждением 1 по аналогии с $\varphi_1^A(x,y)$. Это условие можно заменить на более слабое (см. ниже замечание 7).

Следствием леммы 2 и теоремы 2 (при $j=3$) является

Теорема 4. *Пусть мы находимся в условиях теоремы 3. Тогда условие 2 в теореме 3 можно заменить на условие*

2′) *если $\forall\ A \in \mathbf{A}_p$ выполняется условие* (У2)$_A$ *или* $(\tilde{\text{У}}2)_A$, *то точка* $0_{(2)}$ *является точкой локального минимума полинома* $p(x,y)$.

Обозначим

$$\tilde{U}_p(A) = \{u \in U_p(A) \mid g_2^A(u) = 0\} = \{u \in \mathbb{R} \mid g_1^A(u) = 0, g_2^A(u) = 0\}.$$

По аналогии с условием (У3)$_{A,u_0}$ рассмотрим для $A \in \mathbf{A}_p \neq \varnothing$, $u_0 \in \tilde{U}_p(A)$ условие $(\tilde{\text{У}}3)_{A,u_0}$, которое выполняется тогда и только тогда, когда не является совместной система

$$\begin{array}{l} x \neq 0,\ y \neq 0, \\ x^{e_1}y^{e_2} = u_0, \\ \varphi_3^A(x,y) = x^{\omega_1}y^{\xi_1}g_3^A(u_0) < 0, \end{array} \tag{17}$$

полученная из $\varphi_3^A(x,y)$ по аналогии с системой (9), используя $g_3^A(u)$ — характеристический многочлен квазиоднородной формы $\varphi_3^A(x,y)$. Здесь ω_1, ξ_1 — степени переменных x, y в главном члене формы $\varphi_3^A(x,y)$.

Аналогично утверждениям 4, 5 нетрудно показать, что справедливы следующие утверждения.

Утверждение 6. *Пусть мы находимся в условиях теоремы 3, $A \in \mathbf{A}_p \neq \varnothing$ и справедливо условие $(\tilde{\text{У}}2)_A$. Тогда $\forall\, u_0 \in \tilde{U}_p(A)$ выполняется условие $(\tilde{\text{У}}3)_{A,u_0}$.*

Утверждение 7. *Пусть $\forall\, u_0 \in \tilde{U}_p(A)$ выполняются условия $(\tilde{\text{У}}3)_{A,u_0}$, $g_2^A(u_0) \neq 0$. Тогда выполняется условие $(\tilde{\text{У}}2)_A$.*

Используя теорему 4, а также утверждения 6, 7, можно модифицировать предложенный алгоритм, заменив шаг 7 на новый — шаг $7'$ (при этом возникает дополнительный шаг 8).

Шаг $7'$. На этом шаге мы оказываемся в случае, когда $A \in \mathbf{A}_p$, $g_2^A(u_0) = 0$ для некоторых (хотя бы для одного) $u_0 \in U_p(A)$, и при этом система (9) несовместна для тех $u_0 \in U_p(A)$, для которых $g_2^A(u_0) \neq 0$. В этом случае потребуется рассмотрение квазиоднородной формы $\varphi_3^A(x,y)$. Если $\varphi_3^A(x,y) \equiv 0$, то в соответствии с замечанием 6 можно, используя указанную в нем процедуру, однозначно определить, является ли точка $0_{(2)}$ точкой локального минимума полинома $p(x,y)$ или нет. В противном случае исследуем на неотрицательность $\varphi_2^A(x,y)$ аналогично исследованию на неотрицательность $\varphi_1^A(x,y)$, описанному на шагах 3–5 рассматриваемого алгоритма (см. также ниже замечание 7). Если она не выполняется, то для данного $A \in \mathbb{N}_0^2$ потребуются еще более тонкие исследования (см. раздел 5). Поэтому присваиваем $\tilde{\mathbf{A}}_p := \tilde{\mathbf{A}}_p \cup \{A\}$ и переходим к шагу 2. В противном случае второе условие в $(\tilde{\text{У}}2)_A$ выполнено и проверяем выполнение первого. Действуем аналогично шагу 6, применяя все описанные в нем действия к квазиоднородной форме $\varphi_3^A(x,y)$ (вместо $\varphi_2^A(x,y)$) со всеми вытекающими в связи с этим переобозначениями. В случае если при всех $u_0 \in \tilde{U}_p(A)$ $g_3^A(u_0) \neq 0$ и при этом система (17) несовместна, то в силу утверждения 7 выполняется $(\tilde{\text{У}}2)_A$, т. е. для рассматриваемого $A \in \mathbb{N}_0^2$ не нарушается условие $2'$ теоремы 4. В этом случае рассматриваем очередную главную квазиоднородную форму из группы 3, т. е. переходим к шагу 2.

Шаг 8. На этом шаге мы оказываемся в случае, когда $A \in \mathbf{A}_p$, $g_3^A(u_0) = 0$ для некоторых (хотя бы для одного) $u_0 \in \tilde{U}_p(A)$, и при этом система (17) несовместна для тех $u_0 \in \tilde{U}_p(A)$, для которых $g_3^A(u_0) \neq 0$. В этом случае может потребоваться рассмотрение квазиоднородной формы $\varphi_4^A(x,y)$ и дальнейшая модификация алгоритма вплоть до исчерпания всех квазиоднородных форм в разложении (5), (6). Отметим однако, что дальнейшая модификация алгоритма возможна, например, в случае выполнения условия неотрицательности $\varphi_3^A(x,y)$ (см. также замечание 7 относительно ослабления этого условия). В противном случае присваиваем $\tilde{\mathbf{A}}_p := \tilde{\mathbf{A}}_p \cup \{A\}$ и переходим к шагу 2.

Замечание 7. В теореме 2 используется условие, при выполнении которого для некоторого $j \in \{2, \ldots, r_A\}$ точка $0_{(2)}$ является точкой локального минимума полиномов $\varphi_1^A(x,y)$, $\varphi_1^A(x,y) + \varphi_2^A(x,y)$, …, $\varphi_1^A(x,y) + \cdots + \varphi_{j-1}^A(x,y)$. Это условие заведомо выполняется, если справедливо легко проверяемое условие неотрицательности[8] $\varphi_1^A(x,y), \ldots, \varphi_{j-1}^A(x,y)$. В разделе 5 описывается процедура, позволяющая однозначно ответить на вопрос, является ли $0_{(2)}$ точкой локального минимума по-

[8]При этом в силу $A \in \mathbb{N}^2$ условие неотрицательности квазиоднородной формы $\varphi_1^A(x,y)$ эквивалентно условию, что точка $0_{(2)}$ является точкой локального минимума $\varphi_1^A(x,y)$.

линома $\varphi_1^A(x,y)+\varphi_2^A(x,y)$ или нет. В связи с этим второе условие в $(\tilde{\text{У}}2)_A$ (т. е. условие неотрицательности $\varphi_2^A(x,y)$) можно заменить на проверку локального минимума функции $\varphi_1^A(x,y)+\varphi_2^A(x,y)$ в точке $0_{(2)}$. Но тогда и в модификации рассматриваемого алгоритма можно заменить проверку условия неотрицательности $\varphi_2^A(x,y)$ на проверку более слабого условия локального минимума $0_{(2)}$ для $\varphi_1^A(x)+\varphi_2^A(x)$. Соответственно, при дальнейшей модификации рассматриваемого алгоритма можно и далее условия неотрицательности полиномов $\varphi_3^A(x,y)$, $\varphi_4^A(x,y)$ и т. д. заменить на более слабые условия: точка $0_{(2)}$ является точкой локального минимума полиномов $\varphi_1^A(x,y)+\varphi_2^A(x,y)+\varphi_3^A(x,y)$, $\varphi_1^A(x,y)+\varphi_2^A(x,y)+\varphi_3^A(x,y)+\varphi_4^A(x,y)$ и т. д.

Замечание 8. Все используемые в алгоритме и его модификации утверждения остаются в силе и для степенного ряда $p(x,y)$, абсолютно сходящегося в некоторой окрестности точки $0_{(2)}$ (см. [5]), а следовательно, эти алгоритмы могут быть применены к $p(x,y)$ и в этом случае. При этом множество главных A-квазиоднородных форм, где $A\in\mathbb{N}_0^2$, а затем множество векторов $\mathbf{A}_p$ определяем по $P(N_p)$, которое является конечным (см. [5]). Таким образом, квазиоднородные формы $\varphi_1^A(x,y)$, где $A\in\mathbf{A}_p$, находятся по членам ряда $p(x,y)$, соответствующим конечному множеству $P(N_p)$. Далее для $\varphi_2^A(x,y)$ могут потребоваться члены ряда, соответствующие конечному множеству $P(N_p\backslash N_{\varphi_1^A})$ и т. д.

Пример 5. Рассмотрим полином $p(x,y,a)$ (см. N_p, $\mathrm{Co}\,N_p$ на рис. 1), для которого при $A=(1,2)$ выполняется

$$p(x,y,a)=\varphi_1^A(x,y)+\varphi_2^A(x,y,a)+\varphi_3^A(x,y),$$

где $\varphi_1^A(x,y)=x^4y^2+2x^2y^3+y^4=y^2(x^2+y)^2$, $\varphi_2^A(x,y,a)=3ax^6y^2+3x^4y^3$, $\varphi_3^A(x,y)=0.01x^8y^3$ — полиномы, являющиеся A-квазиоднородными формами, $B_1^A=8$, $B_2^A=10$, $B_3^A=14$ (см. (5), (6)), $a\in\{0.99,1,1.01\}$ — параметр. В этом примере $p(0,0,a)=0$, $p'(0,0,a)=0_{(2)}$, т. е. точка $0_{(2)}$ является стационарной. Применим к $p(x,y,a)$ рассмотренный алгоритм. Заметим (см. рис. 1), что у полинома $p(x,y,a)$ при любом из указанных значений a имеются три «юго-западные» грани, находящиеся в множестве минимальных по Парето точек этого многогранника: две размерности 0 (угловые точки $(0,4)$, $(4,2)$) и одна размерности 1 (отрезок прямой, соединяющий эти угловые точки). Угловой точке $(0,4)$ соответствует главная $(1,1)$-квазиоднородная форма x^4y^2, а угловой точке $(4,2)$ соответствует главная $(2,1)$-квазиоднородная форма y^4, т. е. эти формы принадлежат группе 1. Грани размерности 1 соответствует главная $(1,2)$-квазиоднородная форма $\varphi_1^A(x,y)=x^4y^2+2x^2y^3+y^4$, где $A=(1,2)$, принадлежащая группе 3 (т. е. ни одна из трех форм не принадлежит группе 2). Рассмотрим условие (4), проверяемое для $\Omega(N_p)=P(N_p)\cap\Psi(N_p)=\{(0,4),\ (4,2)\}$. Поскольку $\mathrm{coef}(p,(0,4))=1>0$ и при этом $(0,4)\in 2\mathbb{N}\cup\{0\}$, а также $\mathrm{coef}(p,(4,2))=1>0$ и при этом $(4,2)\in 2\mathbb{N}\cup\{0\}$, условие (4) выполняется. Единственной главной квазиоднородной формой из группы 3 является $\varphi_1^A(x,y)$. При этом соответствующий ей вектор $A=(1,2)\in\mathbb{N}_0^2$ однозначно определяется по членам этой формы (по любым двум из них). На шагах 3, 4 исследуем на неотрицательность $\varphi_1^A(x,y)$. Заметим, что x^4y^2 — ее главный член, $\varphi_1^A(x,y)=x^4y^2g_1^A(u)$, где $g_1^A(u)=(1+u)^2$ — ее характеристический многочлен, $u=x^{-2}y=x^{e_1}y^{e_2}$, $e_1=-A_2=-2$, $e_2=A_1=1$. Таким образом, характеристический многочлен имеет единственный корень $u_0=-1$

кратности 2, т. е. $U_p(A) = \{-1\}$. При этом выполняются условия утверждения 1, т.е. квазиоднородная форма $\varphi_1^A(x, y)$ является неотрицательной. Таким образом, $\mathbf{A}_p = \{(1, 2)\}$. На шаге 5 проверяем выполнение условий (10), (11), которые в рассматриваемом случае не выполняются. На шаге 6 исследуем квазиоднородную форму $\varphi_2^A(x, y, a) = x^{\chi_1} y^{\eta_1} g_2^A(u, a)$, где $b_1 x^{\chi_1} y^{\eta_1} = 3ax^6y^2$ — ее главный член, а $g_2^A(u, a) = 3(a + u)$ — характеристический многочлен, т. е. $\chi_1 = 6$, $\eta_1 = 2$. Заметим, что число $e_1\eta_1 - e_2\chi_1 = (-2)\cdot 2 - 1\cdot 6 = -4 - 6 = -10$ является четным. Поэтому согласно шагу 6, поскольку число $e_1 = -A_2 = -2$ является четным, а число $e_2 = A_1 = 1$ — нечетным, проверяем выполнение условия (16), имеющее вид

$$u_0^{\eta_1/e_2} g_2^A(u_0, a) < 0 \Leftrightarrow g_2^A(-1, a) < 0 \Leftrightarrow 3(a - 1) < 0$$

(т. к. $u_0^{\eta_1/e_2} = (-1)^{2/1} = (-1)^2 = 1$). В случае $a = 0.99$ это условие выполняется, а следовательно, точка $0_{(2)}$ не является точкой локального минимума полинома $p(x, y, 0.99)$. В случае $a = 1.01$ оно не выполняется, т. е. справедливо условие $(\text{У3})_{A,u_0}$. Но тогда в силу следствия 1 имеет место $(\text{У2})_A$, а в силу утверждения 3 не выполняется $(\text{У1})_A$. При этом из единственности $A = (1, 2) \in \mathbf{A}_p$ следует справедливость условия 2 теоремы 3, в силу которой $0_{(2)}$ является точкой локального минимума полинома $p(x, y, 1.01)$. В случае $a = 1$ выполняется $g_2^A(u_0, 1) = 0$, т. е. этот случай требует более тонких исследований (в частности, предлагаемых в разделе 4). Заметим, что в третьем случае ($a = 1$) при подстановке $x(t) = t$, $y(t) = -t^2$ выполняется $p(x(t), y(t), 1) = -0.01t^{14}$, т. е. $0_{(2)}$ не является точкой локального минимума полинома $p(x, y, 1)$. Отметим, что в третьем случае был на самом деле применен метод подстановки многочленов, который подробно рассматривается в разделе 4.

4. Метод подстановки многочленов с неопределенными коэффициентами. Из рассмотрения предложенного алгоритма и его модификации видно, что его применение к некоторым полиномам приводит к случаю, когда результатом работы является непустое множество $\tilde{\mathbf{A}}_p$, показывающее, что исследуемый вопрос остается невыясненным и требуется дополнительное исследование разложений полинома на A-квазиоднородные формы для $A \in \tilde{\mathbf{A}}_p$. Это связано с тем, что алгоритм и его модификация базируются на утверждениях леммы 2 и теоремы 2, которые дают отдельно необходимое условие (лемма 2) и отдельно достаточное условие (теорема 2), не объединенные в единый общий критерий локального минимума.

В настоящем разделе рассмотрим метод, который основан на общем критерии локального минимума полинома $p(x, y)$. В этом методе рассматриваем многочлены с переменной $t \in \mathbb{R}$ вида (эти многочлены могут содержать любое конечное число членов)

$$\begin{aligned} &x(t) = c_0 t^{\nu_1} + c_1 t^{\nu_1+1} + o(t^{\nu_1+1}),\\ &y(t) = d_0 t^{\nu_2} + d_1 t^{\nu_2+1} + o(t^{\nu_2+1}),\\ &c_0,\ d_0 \neq 0, \quad \nu_1,\ \nu_2 \in \mathbb{N}. \end{aligned} \tag{18}$$

Будем подбирать многочлены $x(t)$, $y(t)$ вида (18) таким образом, чтобы

$$p(x(t), y(t)) = g_0 t^\sigma + o(t^\sigma), \quad \sigma \in \mathbb{N}, \quad g_0 < 0. \tag{19}$$

При этом будем использовать приводимое далее утверждение 8, являющееся следствием леммы 7 из [1].

Утверждение 8. *Пусть $p(x,y)$ — полином, $p(x,y) \not\equiv 0$, $p(0,0) = 0$, $p'(0,0) = 0_{(2)}$, т. е. точка $0_{(2)}$ является стационарной. Для того чтобы $0_{(2)}$ не являлась точкой локального минимума полинома $p(x,y)$ необходимо и достаточно существование многочленов вида* (18), *таких, чтобы выполнялось* (19).

Заметим, что для $A = (A_1, A_2) = (\nu_1, \nu_2)/\nu_0 \in \mathbb{N}_0^2$, где $\nu_0 = \text{НОД}(\nu_1, \nu_2)$, для разложения (5), (6) выполняется

$$p(x(t), y(t)) = \varphi_1^A(x(t), y(t)) + \varphi_2^A(x(t), y(t)) + \ldots + \varphi_{r_A}^A(x(t), y(t)),$$

где $\varphi_1^A(x,y)$ — главная A-квазиоднородная форма полинома $p(x,y)$, удовлетворяющая (1)–(3), а следовательно,

$$p(x(t), y(t)) = \varphi_1^A(c_0, d_0)t^{B_1^A} + o(t^{B_1^A}). \tag{20}$$

Метод неопределенных коэффициентов применяется в нетривиальном случае, когда главные A-квазиоднородные формы полинома $p(x,y)$ при $A \in \mathbb{N}_0^2$ неотрицательны, т. е., в частности, выполняется условие (4) и при этом $\mathbf{A}_p \neq \varnothing$. Если $\mathbf{A}_p = \varnothing$, то, как показано в разделе 2, вопрос о том, является ли точка $0_{(2)}$ точкой локального минимума полинома $p(x,y)$, решается просто с использованием утверждения 2 и теоремы 1, т. е. в этом случае $0_{(2)}$ является точкой локального минимума полинома $p(x,y)$. Из неотрицательности $\varphi_1^A(x,y)$ следует, что в силу (20) условие (19) может выполняться только при $\varphi_1^A(c_0, d_0) = 0$, и поэтому для дальнейшего представляет интерес только этот случай, при котором в силу (1)–(3) имеем

$$\begin{cases} \varphi_1^A(c_0, d_0) = c_0^{\alpha_1} d_0^{\beta_1} g_1^A(u_0) = 0, \\ u_0 = c_0^{e_1} d_0^{e_2} \in U_p(A); \\ A = (A_1, A_2) = (\nu_1, \nu_2)/\nu_0 \in \mathbf{A}_p, \\ \nu_0 = \text{НОД}(\nu_1, \nu_2),\ e_1 = -A_2,\ e_2 = A_1. \end{cases} \tag{21}$$

Таким образом, удалось сузить множество рассматриваемых многочленов вида (18), проверяемых на выполнение условия (19). Множество $\mathbf{A}_p$ является конечным, поскольку число векторов в $\mathbf{A}_p$ не превосходит количество главных квазиоднородных форм полинома $p(x,y)$, принадлежащих группе 3. Нередко $\mathbf{A}_p$ состоит из единственного вектора.

Рассмотрим условие для полинома $p(x,y)$, у которого $\mathbf{A}_p \neq \varnothing$, формулируемое относительно $A \in \mathbf{A}_p$, $u_0 \in U_p(A)$:

(У4)$_{A,u_0}$: существуют $c_0 \neq 0$, $d_0 \neq 0$ такие, что для многочленов вида (18) выполняются условия (19), (21).

Сформулируем также условие для полинома $p(x,y)$, у которого $\mathbf{A}_p \neq \varnothing$:

(У4): существуют вектор $A \in \mathbf{A}_p$ и число $u_0 \in U_p(A)$, для которых выполняется условие (У4)$_{A,u_0}$.

Следствием приведенных рассуждений, а также утверждения 8, является

Утверждение 9. *Пусть $p(x, y)$ — полином, $p(x, y) \not\equiv 0$, $p(0, 0) = 0$, $p'(0, 0) = 0_{(2)}$, т. е. точка $0_{(2)}$ является стационарной. Пусть далее все главные квазиоднородные формы полинома $p(x, y)$ из групп 1 и 2 являются неотрицательными и невырожденными в слабом смысле, и при этом $\mathbf{A}_p \neq \varnothing$. Тогда для того, чтобы $0_{(2)}$ не являлась точкой локального минимума полинома $p(x, y)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие* (У4).

Для удобства применения утверждения 9 желательно для каждого $A \in \mathbf{A}_p$ сузить множество многочленов вида (18), проверяемых в условии $(\text{У4})_{A,u_0}$ на выполнение (21).

Пусть $A \in \mathbf{A}_p$, $u_0 \in U_p(A)$, и мы собираемся проверить выполнение условия $(\text{У4})_{A,u_0}$. Заметим, что условию $u_0 = c_0^{e_1} d_0^{e_2}$ удовлетворяет бесчисленное множество пар (c_0, d_0). Сузим это множество до конечного. Заметим, что в силу НОД$(|e_1|, |e_2|) = 1$ хотя бы одно из чисел среди e_1, e_2 является нечетным. Таким образом, возможны три случая, для каждого из которых рассмотрим соответствующие множества:

1) пусть $e_1 = -A_2$ четно, а $e_2 = A_1$ нечетно; положим

$$C_1 = \{(1, u_0^{1/e_2}), (-1, u_0^{1/e_2})\};$$

2) пусть e_1 нечетно, а e_2 четно; положим

$$C_2 = \{(u_0^{1/e_1}, 1), (u_0^{1/e_1}, -1)\};$$

3) пусть e_1, e_2 нечетны; положим

$$C_3 = \{(1, u_0^{1/e_2}), (-1, -u_0^{1/e_2})\}, \quad C_4 = \{(u_0^{1/e_1}, 1), (-u_0^{1/e_1}, -1)\}.$$

Покажем, что в любом из этих случаев можно при проверке условия $(\text{У4})_{A,u_0}$ ограничиться рассмотрением выбранных конечных множеств пар (c_0, d_0).

Предварительно покажем, что в каждом из этих случаев, если $u_0 = c_0^{e_1} d_0^{e_2}$ для некоторых $c_0 \neq 0$, $d_0 \neq 0$, то найдется (и легко вычисляется) $\tau > 0$ такое, что для пары чисел $\tilde{c}_0 = c_0 \tau^{1/A_2}$, $\tilde{d}_0 = d_0 \tau^{1/A_1}$ справедливо следующее. В случае 1 имеем $\{(\tilde{c}_0, \tilde{d}_0), (-\tilde{c}_0, \tilde{d}_0)\} = C_1$. В случае 2 — $\{(\tilde{c}_0, \tilde{d}_0), (\tilde{c}_0, -\tilde{d}_0)\} = C_2$. В случае 3 найдутся два значения для числа $\tau > 0$, при одном из которых $\{(\tilde{c}_0, \tilde{d}_0), (-\tilde{c}_0, -\tilde{d}_0)\} = C_3$, а при другом $\{(\tilde{c}_0, \tilde{d}_0), (-\tilde{c}_0, -\tilde{d}_0)\} = C_4$.

Рассмотрим случай 1. Остальные случаи рассматриваются аналогично. Действительно, в случае 1 достаточно положить $\tau = c_0^{-A_2} = c_0^{e_1} = |c_0|^{e_1}$ (при этом $|c_0| = \tau^{-1/A_2}$, $\tau = |c_0|^{-A_2}$). Тогда, учитывая, что в силу $u_0 = c_0^{e_1} d_0^{e_2} = |c_0|^{e_1} d_0^{e_2}$ выполняется $(u_0)^{1/A_1} = (u_0)^{1/e_2} = d_0 |c_0|^{e_1/e_2} = d_0 |c_0|^{-A_2/A_1}$, получаем, что для $\tilde{c}_0 = \pm c_0 \tau^{1/A_2}$, $\tilde{d}_0 = d_0 \tau^{1/A_1}$ справедливо следующее: $|\tilde{c}_0| = |c_0| \tau^{1/A_2} = 1$, $\tilde{d}_0 = d_0 \tau^{1/A_1} = d_0 |c_0|^{-A_2/A_1} = (u_0)^{1/A_1} = (u_0)^{1/e_2}$, т. е.

$$\{(\tilde{c}_0, \tilde{d}_0), (-\tilde{c}_0, \tilde{d}_0)\} = \{(1, u_0^{1/e_2}), (-1, u_0^{1/e_2})\} = C_1.$$

Вернемся к задаче проверки условия $(\text{У4})_{A,u_0}$ для некоторых $A \in \mathbf{A}_p$, $u_0 \in U_p(A)$. Покажем, что эту проверку достаточно проводить для конечного числа наборов $c_0 \neq 0$, $d_0 \neq 0$ таких, что $u_0 = c_0^{e_1} d_0^{e_2} \in U_p(A)$.

Воспользуемся тем, что для вектора $A \in \mathbf{A}_p$ выполняется один из перечисленных ранее случаев относительно четности или нечетности его компонент. Пусть, например, выполняется случай 1, когда $e_1 = -A_2$ является четным, а $e_2 = A_1$ нечетным. Остальные случаи рассматриваются аналогично. Предположим, что для некоторого $u_0 \in U_p(A)$ выполняется условие $(\text{У4})_{A,u_0}$. Тогда существуют $c_0 \neq 0$, $d_0 \neq 0$ такие, что для многочленов вида (18) справедливы условия (19), (21). Рассмотрим подстановку $t = (\tau^{1/(\nu_0 A_1 A_2)})\tilde{t}$, $\tau > 0$. Тогда, учитывая (19), получаем

$$p(x(t), y(t)) = p\big(x(\tau^{1/(\nu_0 A_1 A_2)}\tilde{t}), y(\tau^{1/(\nu_0 A_1 A_2)}\tilde{t})\big) = \tilde{g}_0 \tilde{t}^{\sigma} + o(\tilde{t}^{\sigma}),$$

где $\tilde{g}_0 = g_0 \tau^{\sigma/(\nu_0 A_1 A_2)} < 0$. При этом

$$x(t) = x(\tau^{1/(\nu_0 A_1 A_2)}\tilde{t}) = c_0 \tau^{\nu_1/(\nu_0 A_1 A_2)} \tilde{t}^{\nu_1} + c_1 \tau^{(\nu_1+1)/(\nu_0 A_1 A_2)} \tilde{t}^{\nu_1+1} + o(\tilde{t}^{\nu_1+1}),$$
$$y(t) = y(\tau^{1/(\nu_0 A_1 A_2)}\tilde{t}) = d_0 \tau^{\nu_2/(\nu_0 A_1 A_2)} \tilde{t}^{\nu_2} + d_1 \tau^{(\nu_2+1)/(\nu_0 A_1 A_2)} \tilde{t}^{\nu_2+1} + o(\tilde{t}^{\nu_2+1}).$$

Заметим, что $\tilde{c}_0 = c_0 \tau^{\nu_1/(\nu_0 A_1 A_2)} = c_0 \tau^{1/A_2}$, $\tilde{d}_0 = d_0 \tau^{\nu_2/(\nu_0 A_1 A_2)} = d_0 \tau^{1/A_1}$, а следовательно, при выборе $\tau = c_0^{-A_2} = c_0^{e_1} = |c_0|^{e_1}$ (как было показано при рассмотрении случая 1) выполняется $(\tilde{c}_0, \tilde{d}_0) \in C_1 = \{(1, u_0^{1/e_2}), (-1, u_0^{1/e_2})\}$, т. е. $\tilde{d}_0 = u_0^{1/e_2}$ выбирается однозначно, а $\tilde{c}_0 \in \{1, -1\}$.

Таким образом, показано, что при проверке для любых $A \in \mathbf{A}_p$, $u_0 \in U_p(A)$ условия $(\text{У4})_{A,u_0}$ в случае 1 на многочлены вида (18), удовлетворяющие (19), можно наложить дополнительное условие $(c_0, d_0) \in C_1$, которое из бесконечного числа случаев выполнения $u_0 = c_0^{e_1} d_0^{e_2}$ позволяет ограничиться рассмотрением лишь двух из них. Аналогичная ситуация имеет место и для остальных двух случаев.

Таким образом, было показано, что вместо условия $(\text{У4})_{A,u_0}$ можно рассматривать эквивалентное ему условие

$(\tilde{\text{У}}4)_{A,u_0}$: существуют $c_0 \neq 0$, $d_0 \neq 0$ такие, что для многочленов вида (18), выполняются условия (19), (21) и при этом в случае 1 — $(c_0, d_0) \in C_1$, в случае 2 — $(c_0, d_0) \in C_2$, а в случае 3 — $(c_0, d_0) \in C_3$ или $(c_0, d_0) \in C_4$ (выбираем любое из этих условий).

Рассмотрим теперь вопрос о выборе для многочленов вида (18) вектора $(\nu_1, \nu_2) \in \mathbb{N}^2$ при проверке условия $(\text{У4})_{A,u_0}$ или $(\tilde{\text{У}}4)_{A,u_0}$. Одним из ограничений является условие (21), при выполнении которого должно найтись число $\nu \in \mathbb{N}$ такое, что $(\nu_1, \nu_2) = \nu A$. В связи с этим возникает вопрос: можно ли при этом обойтись случаем $\nu = 1$?

Следующий пример показывает, что при применении метода подстановки многочленов с неопределенными коэффициентами не всегда можно ограничиться значением $\nu = 1$.

Пример 6. Пусть $p(x,y) = (x-y)^6 - (x-y)^2 x^5 + x^8$. Тогда для $A = (A_1, A_2) = (1,1)$ выполняется $p(x,y) = \varphi_1^A(x,y) + \varphi_2^A(x,y) + \varphi_3^A(x,y)$, где (см. (5), (6))

$$\varphi_1^A(x,y) = (x-y)^6 = x^6 g_1^A(u),\ u = yx^{-1},\ g_1^A(u) = (1-u)^6,\ B_1^A = 6;$$
$$\varphi_2^A(x,y) = -(x-y)^2 x^5 = x^7 g_2^A(u),\ g_2^A(u) = -(1-u)^2,\ B_2^A = 7;$$
$$\varphi_3^A(x,y) = x^8 = x^8 g_3^A(u),\ g_3^A(u) = 1,\ B_1^A = 8.$$

Характеристический многочлен $g_1^A(u) = (1-u)^6$ имеет единственный действительный корень $u_0 = 1$. Заметим, что $A = (A_1, A_2) = (1,1) \in \mathbf{A}_p$, и при проверке условия $(\tilde{\text{У}}4)_A$ в общем случае должны рассматриваться многочлены $x(t)$, $y(t)$ вида

$$x(t) = c_0 t^\nu + c_1 t^{\nu+1} + o(t^{\nu+1}),\ y(t) = d_0 t^\nu + d_1 t^{\nu+1} + o(t^{\nu+1}),\ \text{где } \nu \in \mathbb{N}. \quad (22)$$

Здесь имеет место случай 3, когда оба числа $e_1 = -A_2 = -1$, $e_2 = A_1 = 1$ являются нечетными, а следовательно, пару чисел (c_0, d_0) можно выбирать из множества $C_3 = \{(1,1), (-1,-1)\}$. В случае $\nu = 1$ при $c_0 = 1$, $d_0 = 1$ многочлены (22) имеют вид (для простоты обозначаем $c_1 = c$, $d_1 = d$)

$$x(t) = t + ct^2 + o(t^2), \quad y(t) = t + dt^2 + o(t^2). \quad (23)$$

Тогда

$$\begin{aligned}
&\varphi_1^A(x(t), y(t)) = (x(t) - y(t))^6 = (c-d)^6 t^{12} + o(t^{12});\\
&\varphi_2^A(x(t), y(t)) = -(x(t) - y(t))^2 [x(t)]^5 = -(c-d)^2 t^9 + o(t^9);\\
&\varphi_3^A(x(t), y(t)) = [x(t)]^8 = t^8 + o(t^8).
\end{aligned}$$

Таким образом, $p(x(t), y(t)) = (c-d)^6 t^{12} + o(t^{12}) - (c-d)^2 t^9 + o(t^9) + t^8 + o(t^8)$, а следовательно, для любых многочленов вида (23) выполняется $p(x(t), y(t)) = t^8 + o(t^8)$. Совершенно аналогично в случае выбора $c_0 = -1$, $d_0 = -1$, т. е. для многочленов вида $x(t) = -t + ct^2 + o(t^2)$, $y(t) = -t + dt^2 + o(t^2)$, также выполняется $p(x(t), y(t)) = t^8 + o(t^8)$.

Рассмотрим теперь многочлены вида (22) при $\nu = 2$, $c_0 = 1$, $d_0 = 1$ (снова для простоты обозначаем $c_1 = c$, $d_1 = d$):

$$x(t) = t^2 + ct^3 + o(t^3), \quad y(t) = t^2 + dt^3 + o(t^3). \quad (24)$$

Тогда

$$\begin{aligned}
&\varphi_1^A(x(t), y(t)) = (x(t) - y(t))^6 = (c-d)^6 t^{18} + o(t^{18});\\
&\varphi_2^A(x(t), y(t)) = -(x(t) - y(t))^2 x^5(t) = -(c-d)^2 t^{16} + o(t^{16});\\
&\varphi_3^A(x(t), y(t)) = x^8(t) = t^{16} + o(t^{16});\\
&p(x(t), y(t)) = (c-d)^6 t^{18} + o(t^{18}) - (c-d)^2 t^{16} + o(t^{16}) + t^{16} + o(t^{16}),
\end{aligned}$$

а следовательно, например, при $c = 2$, $d = 0$ для многочленов $x(t) = t^2 + 2t^3$, $y(t) = t^2$ выполняется $p(x(t), y(t)) = 2^6 t^{18} - 2^2 t^{16} + t^{16} + o(t^{16}) = -3t^{16} + o(t^{16})$. Таким образом, рассмотрение многочленов вида (24) показало, что $0_{(2)}$ не является точкой локального минимума полинома $p(x, y)$, т. е. рассмотрение только многочленов вида (23), соответствующих случаю $\nu = 1$, оказалось недостаточным. Отметим, что при использовании рассмотренного в разделе 3 алгоритма мы не получим ответа на вопрос, является ли точка $0_{(2)}$ точкой локального минимума полинома $p(x, y)$ из этого примера.

Замечание 9. Все используемые в этом разделе утверждения остаются в силе и для степенного ряда $p(x, y)$ [5], а следовательно, могут быть применены к $p(x, y)$ и в этом случае.

5. Случай, когда $p(x, y)$ является суммой двух A-квазиоднородных форм, где $A \in \mathbb{N}_0^2$. Рассмотрим теперь один частный случай, когда для полинома $p(x, y)$, удовлетворяющего условиям утверждения 9, для некоторого $A \in \mathbb{N}_0^2$ разложение (5), (6) состоит из двух A-квазиоднородных форм, т. е. $r_A = 2$. Покажем, что в этом случае с помощью простых вычислительных процедур можно однозначно ответить на вопрос, является ли $0_{(2)}$ точкой локального минимума $p(x, y)$.

Утверждение 10. *Пусть для некоторого $A \in \mathbb{N}_0^2$ разложение* (5), (6) *полинома $p(x, y)$ состоит из двух A-квазиоднородных форм, т. е. имеет вид $p(x, y) = \varphi_1^A(x, y) + \varphi_2^A(x, y)$. Тогда не существует вектора $\bar{A} \in \mathbb{N}_0^2$ такого, что $\bar{A} \neq A$, и главная $\bar{A}$-квазиоднородная форма $\varphi_1^{\bar{A}}(x, y)$ полинома $p(x, y)$ содержит более двух одночленов.*

Доказательство. Предположим, что для некоторого $\bar{A} = (\bar{A}_1, \bar{A}_2) \in \mathbb{N}_0^2$ главная $\bar{A}$-квазиоднородная форма $\varphi_1^{\bar{A}}(x, y)$ полинома $p(x, y)$ содержит по крайней мере три одночлена. При этом по крайней мере два из них будут принадлежать одной из двух форм $\varphi_1^A(x, y)$ или $\varphi_2^A(x, y)$ (носитель каждой из которых лежит на одной прямой). Поскольку прямая на плоскости однозначно определяется любыми двумя точками, находящимися на этой прямой, принадлежность двух одночленов любой из этих форм означает, что $\bar{A} = A$ (поскольку A, $\bar{A} \in \mathbb{N}_0^2$), т. е. пришли к противоречию с $\bar{A} \neq A$. □

Утверждение 11. *Пусть $A = (A_1, A_2) \in \mathbb{N}_0^2$, $u_0 \neq 0$, l — четное натуральное число, $p(x, y)$, $\bar{p}(x, y)$ — полиномы, $p(x, y) = (y^{A_1} - u_0 x^{A_2})^l \bar{p}(x, y)$, $\bar{p}(0, 0) = 0$. Тогда $0_{(2)}$ является точкой локального минимума полинома $p(x, y)$ тогда и только тогда, когда она является точкой локального минимума полинома $\bar{p}(x, y)$.*

Доказательство. Пусть сначала $0_{(2)}$ не является точкой локального минимума полинома $p(x, y)$. Тогда найдется последовательность точек $(x(n), y(n)) \in \mathbb{R}^2$ таких, что

$$p(x(n), y(n)) = [(y(n))^{A_1} - u_0(x(n))^{A_2}]^l \bar{p}(x(n), y(n)) < 0, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

$$(x(n), y(n)) \to 0_{(2)} \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Из этих условий, используя четность l, получаем

$$[y(n)]^{A_1} - u_0[x(n)]^{A_2} \neq 0, \quad \bar{p}((x(n), y(n))) < 0, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

т. е. $0_{(2)}$ не является точкой локального минимума полинома $\bar{p}(x, y)$.

Пусть теперь $0_{(2)}$ не является точкой локального минимума полинома $\bar{p}(x, y)$. Тогда найдется последовательность точек $(x(n), y(n)) \in \mathbb{R}^2$ таких, что $\bar{p}((x(n), y(n))) < 0$, $n = 1, 2, \ldots$, $(x(n), y(n)) \to 0_{(2)}$ при $n \to \infty$. При этом в силу непрерывности $\bar{p}(x, y)$ можно считать, что $x(n) \neq 0$, $y(n) \neq 0$, $n = 1, 2, \ldots$. Заметим, что если для некоторых $x_0 \neq 0$, $y_0 \neq 0$, $u_0 \neq 0$ выполняется $y_0^{A_1} - u_0 x_0^{A_2} = 0$, то $\forall\ \nu \in (0, 1)$ справедливо $(\nu y_0)^{A_1} - u_0 x_0^{A_2} \neq 0$. Действительно, если $(\nu y_0)^{A_1} - u_0 x_0^{A_2} = 0$, то $(\nu y_0)^{A_1} = y_0^{A_1}$, откуда $\nu^{A_1} = 1$, что противоречит условию $\nu \in (0, 1)$. Но тогда, используя непрерывность $\bar{p}(x, y)$, для любого номера $n = 1, 2, \dots$, можно подобрать число $\nu_n \in (1 - 1/n, 1]$ такое, что

$$\bar{p}(x(n), \nu_n y(n)) < 0, \quad (\nu_n y(n))^{A_1} - u_0(x(n))^{A_2} \neq 0$$

(если $(y(n))^{A_1} - u_0(x(n))^{A_2} \neq 0$, то полагаем $\nu_n = 1$). Таким образом, получаем

$$p(x(n), \nu_n y(n)) = [(\nu_n y(n))^{A_1} - u_0(x(n))^{A_2}]^l \bar{p}(x(n), \nu_n y(n)) < 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

и при этом $(x(n), \nu_n y(n)) \to 0_{(2)}$ при $n \to \infty$, т. е. $0_{(2)}$ не является точкой локального минимума полинома $p(x, y)$. Утверждение 11 доказано. □

Нам понадобятся некоторые дополнительные сведения относительно произвольной A-квазиоднородной формы $\varphi_1^A(x, y)$, где $A = (A_1, A_2) \in \mathbb{N}_0^2$, вида (1)–(3). Пусть, как и ранее, $e = (-A_2, A_1)$, $u = x^{e_1} y^{e_2} = x^{-A_2} y^{A_1}$,

$$\varphi_1^A(x, y) = \sum_{i=1}^{s} a_i x^{\alpha_i} y^{\beta_i} = x^{\alpha_1} y^{\beta_1} g_1^A(x^{-A_2} y^{A_1}) = x^{\alpha_1} y^{\beta_1} g_1^A(x^{e_1} y^{e_2}) = x^{\alpha_1} y^{\beta_1} g_1^A(u),$$

$$r_1 = \deg g_1^A(u) = \nu_s = (\alpha_1 - \alpha_s)/A_2, \quad \alpha_1 = \alpha_s + r_1 A_2, \quad \alpha_1 - r_1 A_2 = \alpha_s,$$

где $\deg g(u)$ — степень произвольного многочлена $g(u)$. Пусть далее u_0 — корень кратности $k \in \mathbb{N}$ многочлена $g_1^A(u)$, т. е. $g_1^A(u) = (u - u_0)^k \bar{g}_1^A(u)$, где $\bar{g}_1^A(u)$ — многочлен, $\bar{g}_1^A(u_0) \neq 0$, $\bar{r}_1 = \deg \bar{g}_1^A(u) = r_1 - k$. Тогда

$$\begin{aligned}
\varphi_1^A(x, y) &= x^{\alpha_1} y^{\beta_1} g_1^A(x^{-A_2} y^{A_1}) = x^{\alpha_1} y^{\beta_1} (x^{-A_2} y^{A_1} - u_0)^k \bar{g}_1^A(x^{-A_2} y^{A_1}) = \\
&= (y^{A_1} - u_0 x^{A_2})^k x^{\alpha_1 - r_1 A_2} y^{\beta_1} [x^{\bar{r}_1 A_2} \bar{g}_1^A(x^{-A_2} y^{A_1})] = \\
&= (y^{A_1} - u_0 x^{A_2})^k \bar{\varphi}_1^A(x, y), \qquad (25)
\end{aligned}$$

где полином

$$\bar{\varphi}_1^A(x, y) = x^{\alpha_1 - r_1 A_2} y^{\beta_1} [x^{\bar{r}_1 A_2} \bar{g}_1^A(x^{-A_2} y^{A_1})] = x^{\alpha_1 - k A_2} y^{\beta_1} \bar{g}_1^A(x^{-A_2} y^{A_1}) \qquad (26)$$

имеет члены вида

$$\begin{aligned}
\bar{a}_i x^{\bar{\alpha}_i} y^{\bar{\beta}_i} &= \bar{a}_i x^{\alpha_1 - k A_2} y^{\beta_1} (x^{-A_2} y^{A_1})^{\bar{\nu}_i} = \\
&= \bar{a}_i x^{\alpha_1 - (k + \bar{\nu}_i) A_2} y^{\beta_1 + A_1 \bar{\nu}_i}, \quad \bar{\nu}_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \ \bar{\nu}_i \leqslant \bar{r}_1,
\end{aligned}$$

и при этом

$$\begin{aligned}
&\bar{\alpha}_i = \alpha_1 - (k + \bar{\nu}_i) A_2 \geqslant \alpha_1 - (k + \bar{r}_1) A_2 = \alpha_1 - r_1 A_2 = \alpha_s \geqslant 0, \\
&\bar{\beta}_i = \beta_1 + A_1 \bar{\nu}_i \geqslant \beta_1, \\
&B_1^A = A_1 \alpha_1 + A_2 \beta_1 = A_1(\alpha_s + r_1 A_2) + A_2 \beta_1 = \\
&\qquad = r_1 A_1 A_2 + \alpha_s A_1 + A_2 \beta_1, \\
&A_1 \bar{\alpha}_i + A_2 \bar{\beta}_i = A_1[\alpha_1 - (k + \bar{\nu}_i) A_2] + A_2(\beta_1 + A_1 \bar{\nu}_i) = \\
&\qquad = A_1[\alpha_1 - k A_2] + A_2 \beta_1 = A_1 \alpha_1 + A_2 \beta_1 - k A_1 A_2 = \\
&\qquad\qquad = B_1^A - k A_1 A_2 = (r_1 - k) A_1 A_2 + \alpha_s A_1 + A_2 \beta_1 \geqslant 0.
\end{aligned}$$

Таким образом, $\bar{\varphi}_1^A(x, y)$ также является A-квазиоднородной полиномиальной формой, для членов $\bar{a}_i x^{\bar{\alpha}_i} y^{\bar{\beta}_i}$ которой при $\bar{B}_1^A = B_1^A - k A_1 A_2$ выполняется

$$A_1 \bar{\alpha}_i + A_2 \bar{\beta}_i = \bar{B}_1^A = (r_1 - k) A_1 A_2 + \alpha_s A_1 + A_2 \beta_1 \geqslant 0$$

и при этом $\bar{B}_1^A = 0 \Rightarrow [r_1 = k,\ \alpha_s = 0,\ \beta_1 = 0]$. Если $\bar{B}_1^A = 0$, то равенство $r_1 = k$ означает, что многочлен $\bar{g}_1^A(u)$ имеет степень $r_1 - k = 0$, т. е. является константой $G \neq 0$ (поскольку $\bar{g}_1^A(u_0) \neq 0$), и тогда

$$\bar{\varphi}_1^A(x,y) = x^{\alpha_1 - kA_2} y^{\beta_1} \bar{g}_1^A(x^{-A_2} y^{A_1}) = G x^{\alpha_1 - kA_2} y^{\beta_1} = \\ = G x^{\alpha_s + r_1 A_2 - kA_2} y^{\beta_1} = G x^0 y^0 = G,$$

т. е. A-квазиоднородная форма $\bar{\varphi}_1^A(x,y)$ является этой же константой.

Перейдем теперь к изложению главного результата этого раздела, а именно к получению общего критерия локального минимума в стационарной точке для полинома, являющегося суммой двух A-квазиоднородных форм, где $A \in \mathbb{N}_0^2$. Пусть $p(x,y)$ — полином, для которого выполнены условия утверждения 9: $p(x,y) \not\equiv 0$, $p(0,0) = 0$, $p'(0,0) = 0_{(2)}$ (т. е. $0_{(2)}$ является стационарной точкой), все главные квазиоднородные формы полинома $p(x,y)$ из групп 1 и 2 являются неотрицательными и невырожденными в слабом смысле, и при этом $\mathbf{A}_p \neq \varnothing$, $A = (A_1, A_2) \in \mathbf{A}_p$. Пусть далее

$$p(x,y) = \varphi_1^A(x,y) + \varphi_2^A(x,y) = x^{\alpha_1} y^{\beta_1} g_1^A(u) + x^{\chi_1} y^{\eta_1} g_2^A(u),$$

где $\varphi_1^A(x,y)$ удовлетворяет условиям (1)–(3), а $\varphi_2^A(x,y)$ — условиям (7)–(8). Как это следует из утверждения 10, в этом случае $\mathbf{A}_p = \{A\}$.

Пусть $u_0 \in U_p(A)$, и при этом кратность корня u_0 в многочлене $g_1^A(u)$ равна четному натуральному числу $k \in 2\mathbb{N}$ (см. утверждение 1), а кратность корня u_0 в многочлене $g_2^A(u)$ равна $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Тогда $g_1^A(u) = (u-u_0)^k \bar{g}_1^A(u)$, $g_2^A(u) = (u-u_0)^l \bar{g}_2^A(u)$, где $\bar{g}_1^A(u_0) > 0$ (в силу неотрицательности $g_1^A(u)$; см. утверждение 1), $\bar{g}_2^A(u_0) \neq 0$. Пусть $r_1 = \deg g_1^A(u)$, $\bar{r}_1 = \deg \bar{g}_1^A(u)$, $r_2 = \deg g_2^A(u)$, $\bar{r}_2 = \deg \bar{g}_2^A(u)$. Возможны следующие 4 случая:

1) $l = 0$, т. е. $g_2^A(u_0) \neq 0$;
2) $0 < l < k$ и l четно;
3) $k \leqslant l$;
4) $0 < l < k$ и l нечетно.

Используя утверждение 11, а также приведенные ранее рассуждения относительно произвольной A-квазиоднородной формы $\varphi_1^A(x,y)$ (см. представление (25), (26), где $\bar{\varphi}_1^A(x,y)$ — снова A-квазиоднородная форма), нетрудно от полинома $p(x,y) = \varphi_1^A(x,y) + \varphi_2^A(x,y)$ перейти к полиному $\tilde{p}(x,y) = \tilde{\varphi}_1^A(x,y) + \tilde{\varphi}_2^A(x,y)$, также являющемуся суммой двух A-квазиоднородных форм, такому, что $U_{\tilde{p}}(A) \subseteq U_p(A)$, полином $\tilde{\varphi}_1^A(x,y)$ является неотрицательным и для нового полинома $\tilde{p}(x,y)$ для любого $u_0 \in U_{\tilde{p}}(A)$ будут выполняться только случаи вида 1, 4 и при этом в случае вида 4 будет $l = 1$. Действительно, используя утверждение 11, при каждом фиксированном $u_0 \in U_{\tilde{p}}(A)$ от случая 2 легко переходим к случаю вида 1; от случая 3 — к случаю, когда $u_0 \notin U_{\tilde{p}}(A)$; от случая 4 при $l > 1$ — к случаю вида 4 при $l = 1$. Более того, в силу утверждения 11 при таком переходе $0_{(2)}$ является точкой локального минимума полинома $p(x,y)$ тогда и только тогда, когда она является точкой локального минимума полинома $\tilde{p}(x,y)$. Если при этом для полинома $\tilde{p}(x,y)$ для любого $u_0 \in U_{\tilde{p}}(A)$ выполняется случай вида 1, то мы находимся в области применимости описанного в разделе 3 алгоритма, используя который, получим однозначный ответ, является ли $0_{(2)}$ точкой локального минимума полинома $\tilde{p}(x,y)$ (а тем самым и $p(x,y)$).

Покажем теперь, что в случае выполнения для полинома $\tilde{p}(x,y)$ условия вида 4, где $l=1$ хотя бы при одном $u_0 \in U_{\tilde{p}}(A)$, точка $0_{(2)}$ не является точкой локального минимума полинома $\tilde{p}(x,y)$ (а тем самым и $p(x,y)$). Для простоты обозначений считаем, что $\tilde{p}(x,y)=p(x,y)$.

Таким образом, рассматриваем случай, когда (см. (1)–(3), (7)–(8))

$$\begin{aligned} p(x,y) = \varphi_1^A(x,y) + \varphi_2^A(x,y) = x^{\alpha_1}y^{\beta_1}g_1^A(u) + x^{\chi_1}y^{\eta_1}g_2^A(u) = \\ = x^{\alpha_1}y^{\beta_1}(u-u_0)^k\bar{g}_1^A(u) + x^{\chi_1}y^{\eta_1}(u-u_0)\bar{g}_2^A(u), \quad k \in 2\mathbb{N}, \end{aligned}$$

где, как и ранее, $e=(-A_2,A_1)$, $u=x^{e_1}y^{e_2}=x^{-A_2}y^{A_1}$, и при этом, используя (25), (26), имеем:

$$\begin{aligned} &p(x,y) = (y^{A_1}-u_0x^{A_2})^k\bar{\varphi}_1^A(x,y) + (y^{A_1}-u_0x^{A_2})\bar{\varphi}_2^A(x,y),\\ &\bar{\varphi}_1^A(x,y) = x^{\alpha_1-r_1A_2}y^{\beta_1}[x^{\bar{r}_1A_2}\bar{g}_1^A(x^{-A_2}y^{A_1})] = x^{\alpha_1-kA_2}y^{\beta_1}\bar{g}_1^A(x^{-A_2}y^{A_1}),\\ &\bar{\varphi}_2^A(x,y) = x^{\chi_1-r_2A_2}y^{\eta_1}[x^{(r_2-1)A_2}\bar{g}_2(x^{-A_2}y^{A_1})] = x^{\chi_1-A_2}y^{\eta_1}\bar{g}_2(x^{-A_2}y^{A_1}). \end{aligned}$$

Пусть для некоторых $c_0 \neq 0$, $d_0 \neq 0$ выполняется $u_0 = c_0^{e_1}d_0^{e_2} = c_0^{-A_2}d_0^{A_1}$. Рассмотрим многочлены

$$x(t) = c_0t^{A_1}, \quad y(t) = d_0t^{A_2} \pm d_0t^{A_2+\kappa} = d_0t^{A_2}(1 \pm t^\kappa), \quad \kappa \in \mathbb{N}.$$

Тогда[9]

$$\begin{aligned} &[x(t)]^{-A_2} = [c_0t^{A_1}]^{-A_2} = c_0^{-A_2}t^{-A_1A_2},\\ &[y(t)]^{A_1} = [d_0t^{A_2}(1 \pm t^\kappa)]^{A_1} = d_0^{A_1}t^{A_1A_2} + o(t^{A_1A_2}),\\ &[x(t)]^{-A_2}[y(t)]^{A_1} = c_0^{-A_2}d_0^{A_1} + O(t) = u_0 + O(t),\\ &\bar{g}_1^A([x(t)]^{-A_2}[y(t)]^{A_1}) = \bar{g}_1^A(u_0+O(t)) = \bar{g}_1^A(u_0) + O(t),\\ &\bar{g}_2^A([x(t)]^{-A_2}[y(t)]^{A_1}) = \bar{g}_2^A(u_0+O(t)) = \bar{g}_2^A(u_0) + O(t),\\ &\bar{\varphi}_1^A(x(t),y(t)) = [x(t)]^{\alpha_1-kA_2}[y(t)]^{\beta_1}\bar{g}_1^A([x(t)]^{-A_2}[y(t)]^{A_1}) =\\ &\qquad = h_1t^{\sigma_1} + o(t^{\sigma_1}), \quad h_1 > 0, \quad \sigma_1 \in \mathbb{N}\cup\{0\},\\ &\bar{\varphi}_2^A(x(t),y(t)) = [x(t)]^{\chi_1-A_2}[y(t)]^{\eta_1}\bar{g}_2^A([x(t)]^{-A_2}[y(t)]^{A_1}) =\\ &\qquad = h_2t^{\sigma_2} + o(t^{\sigma_2}), \quad h_2 \neq 0, \quad \sigma_2 \in \mathbb{N}\cup\{0\},\\ &[y(t)]^{A_1} - u_0[x(t)]^{A_2} = d_0^{A_1}t^{A_1A_2}(1\pm t^\kappa)^{A_1} - u_0c_0^{A_2}t^{A_1A_2} =\\ &\qquad = d_0^{A_1}t^{A_1A_2}(1 \pm A_1t^\kappa + o(t^\kappa)) - u_0c_0^{A_2}t^{A_1A_2} =\\ &\qquad = [d_0^{A_1} - u_0c_0^{A_2}]t^{A_1A_2} \pm d_0^{A_1}A_1t^{A_1A_2+\kappa} + o(t^{A_1A_2+\kappa}) =\\ &\qquad = \pm d_0^{A_1}A_1t^{A_1A_2+\kappa} + o(t^{A_1A_2+\kappa}). \end{aligned}$$

Соответственно,

$$([y(t)]^{A_1} - u_0[x(t)]^{A_2})^k = h_3t^{\sigma_3+k\kappa} + o(t^{\sigma_3+k\kappa}), \quad h_3 > 0, \quad \sigma_3 \in \mathbb{N}.$$

[9] Конкретные значения некоторых величин: $h_1, \ldots, h_5$, $\sigma_1, \ldots, \sigma_5$ не играют роли.

Таким образом, получаем

$$p(x(t), y(t)) = ([y(t)]^{A_1} - u_0[x(t)]^{A_2})^k \bar{\varphi}_1^A(x(t), y(t)) + \\ + ([y(t)]^{A_1} - u_0[x(t)]^{A_2})\bar{\varphi}_2^A(x(t), y(t)) = \\ = h_4 t^{\sigma_4 + k\kappa} + h_5 t^{\sigma_5+\kappa} + o(t^{\sigma_4+k\kappa}) + o(t^{\sigma_5+\kappa}), \quad (27)$$

где при соответствующем выборе знака в многочлене $y(t) = d_0 t^{A_2}(1 \pm t^\kappa)$ (учитываем знак величины $h_2 \neq 0$) выполняется $h_4 > 0$, $h_5 < 0$, σ_4, $\sigma_5 \in \mathbb{N}$. Выберем число $\kappa \in \mathbb{N}$ столь большим, чтобы $\sigma_4 + k\kappa > \sigma_5 + \kappa$. Это можно сделать, поскольку $k \geqslant 2$ (т. е. достаточно взять любое $\kappa > \sigma_5 - \sigma_4$). Тогда из (27) получаем

$$p(x(t), y(t)) = h_5 t^{\sigma_5+\kappa} + o(t^{\sigma_5+\kappa}), \quad h_5 < 0, \quad \sigma_5 + \kappa \in \mathbb{N},$$

т. е. выполняется условие (У4), а следовательно, точка $0_{(2)}$ не является точкой локального минимума полинома $p(x, y)$. Описание критерия, обеспечивающего однозначную проверку локального минимума в стационарной точке для рассматриваемого случая, завершено.

Заключение. В работе изложены необходимые и достаточные условия локального минимума в стационарной точке полинома или абсолютно сходящегося степенного ряда $p(x, y)$ от двух переменных x, y для случаев, когда использование матрицы вторых производных невозможно.

В простейших случаях, когда $p(x, y)$ является квазиоднородной полиномиальной формой или суммой двух A-квазиоднородных форм (где A — двумерный вектор с натуральными компонентами), сформулировано единое критериальное условие, применимое на практике.

В более сложных случаях отдельно представлены необходимые и достаточные условия локального минимума. Для их анализа используется многогранник Ньютона полинома (степенного ряда) $p(x, y)$, а при необходимости — разложение $p(x, y)$ на сумму квазиоднородных форм. Эти условия могут быть проверены с помощью практически реализуемого алгоритма и его модификаций, описанных в работе. Основные шаги алгоритма включают вычисление действительных корней многочленов от одной переменной и решение других практически выполнимых задач. Однако остаются случаи, когда предложенный алгоритм неприменим.

Для таких случаев разработан метод «подстановки многочленов с неопределенными коэффициентами». В частности, на его основе удалось построить алгоритм, однозначно определяющий наличие локального минимума в стационарной точке для полиномов, являющихся суммой двух A-квазиоднородных форм с натуральными компонентами вектора A. Этот результат используется также как вспомогательный инструмент для исследования более общих задач.

С одной стороны, полученные результаты применимы к широкому классу практических задач. С другой стороны, объединение необходимых и достаточных условий в единое критериальное условие удалось лишь для узкого класса задач. Расширение этого класса или добавление новых условий представляет собой важное направление дальнейших исследований. Перспективным представляется развитие метода «подстановки многочленов с неопределенными коэффициентами». В настоящей работе этот метод применялся преимущественно для доказательства отсутствия локального минимума, однако его потенциал для формулировки достаточных условий требует дополнительного изучения.

Отдельно отметим важность задачи поиска линейного преобразования переменных, приводящего исходную задачу к виду, удобному для применения предложенных методов (в случаях их изначальной неприменимости). Вполне вероятно, что подобный подход, использованный в [1, 5], может быть применен и для рассматриваемого класса задач.

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Ответственность автора. Автор несет полную ответственность за подготовку окончательной версии рукописи и подтверждает ее одобрение для публикации.

Финансирование. Исследование выполнено без привлечения внешнего финансирования.

Библиографический список

1. Нефедов В. Н. Об оценивании погрешности в выпуклых полиномиальных задачах оптимизации // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 1990. Т. 30, № 2. С. 200–216.
2. Нефедов В. Н. Необходимые и достаточные условия экстремума в сложных задачах оптимизации систем, описываемых полиномиальными и аналитическими функциями // *Изв. РАН. Теория и системы управления*, 2023. № 2. С. 3–25. EDN: JCHPKN. DOI: https://doi.org/10.31857/S0002338823020154.
3. Васильев Ф. П. *Методы оптимизации.* Т. 1: Конечномерные задачи оптимизации. Принцип максимума. Динамическое программирование. М.: МЦНМО, 2011. 620 с.
4. Красносельский М. А., Вайникко Г. М., Забрейко П. П. и др. *Приближенное решение операторных уравнений.* М.: Наука, 1969. 456 с.
5. Нефедов В. Н. Необходимые и достаточные условия экстремума в аналитических задачах оптимизации // *Труды МАИ*, 2009. № 33, 4. EDN: JWKQVV.
6. Гиндикин С. Г. Энергетические оценки, связанные с многогранником Ньютона // *Тр. ММО*, 1974. Т. 31. С. 189–236.
7. Брюно А. Д. *Степенная геометрия в алгебраических и дифференциальных уравнениях.* М.: Физматлит, 1998. 288 с.
8. Волевич Л. Р., Гиндикин С. Г. *Метод многогранника Ньютона в теории дифференциальных уравнений в частных производных.* М.: Эдиториал УРСС, 2002. 312 с.
9. Хованский А. Г. Многогранники и алгебра // *Труды ИСА РАН*, 2008. Т. 38. С. 23–35. EDN: KGCDTJ.
10. Nefedov V. Methods and algorithms for determining the main quasi-homogeneous forms of polynomials and power series // *MATEC Web of Conferences*, 2022. vol. 362, 01017. EDN: LJOIEO. DOI: https://doi.org/10.1051/matecconf/202236201017.
11. Нефедов В. Н. Об одном методе исследования полинома на знакоопределенность в положительном ортанте // *Труды МАИ*, 2006. № 22, 6. EDN: ISVGRT.
12. Евтушенко Ю. Г., Ратькин В. Г. Метод половинных делений для глобальной оптимизации функции многих переменных // *Изв. АН СССР. Техн. кибернетика*, 1987. № 1. С. 119–127.

Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2024, vol. 28, no. 4, pp. 615–650
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu2103

MSC: 26B05, 26C10, 32A05

Some necessary and some sufficient conditions for local extrema of polynomials and power series in two variables

V. N. Nefedov

Moscow Aviation Institute (National Research University),
4, Volokolamskoe shosse, Moscow, 125993, Russian Federation.

Abstract

This study extends the author's previous works establishing necessary and sufficient conditions for a local extremum at a stationary point of a polynomial or an absolutely convergent power series in its neighborhood. It is known that in the one-dimensional case, the necessary and sufficient conditions for an extremum coincide, forming a single criterion.

The next stage of analysis focuses on the two-dimensional case, which constitutes the subject of the present research. Verification of extremum conditions in this case reduces to algorithmically feasible procedures: computing real roots of univariate polynomials and solving a series of practically implementable auxiliary problems.

An algorithm based on these procedures is proposed. For situations where its applicability is limited, a method of substituting polynomials with undetermined coefficients is developed. Building on this method, an algorithm is constructed to unambiguously verify the presence of a local minimum at a stationary point for polynomials representable as a sum of two A-quasihomogeneous forms, where A is a two-dimensional vector with natural components.

Keywords: polynomials, power series, necessary conditions for an extremum, sufficient conditions for an extremum, quasi-homogeneous forms.

Received: 12th July, 2024 / Revised: 23rd October, 2024 / Accepted: 28th October, 2024 / First online: 26th December, 2024

Conflict of interest. The author declares no conflict of interest.

Author's Responsibilities. The author is solely responsible for preparing the final version of the manuscript and approves it for publication.

Differential Equations and Mathematical Physics
Research Article

Please cite this article in press as:
Nefedov V. N. Some necessary and some sufficient conditions for local extrema of polynomials and power series in two variables, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2024, vol. 28, no. 4, pp. 615–650. EDN: KECQQD. DOI: 10.14498/vsgtu2103 (In Russian).

Author's Details:
Victor N. Nefedov https://orcid.org/0000-0001-6053-2066
Cand. Phys. & Math. Sci., Associate Professor; Associate Professor; Dept. of Mathematical Cybernetics; e-mail: nefedovvn54@yandex.ru

Funding. The research was conducted without external funding.

References

1. Nefedov V. N. Estimation of the error in convex polynomial optimization problems, *U.S.S.R. Comput. Math. Math. Phys.*, 1990, vol. 30, no. 1, pp. 147–158. DOI: https://doi.org/10.1016/0041-5553(90)90024-M.
2. Nefedov V. N. Necessary and sufficient conditions for an extremum in complex problems of optimization of systems described by polynomial and analytic functions, *J. Comput. Syst. Sci. Int.*, 2023, vol. 62, no. 2, pp. 179–200. EDN: AHYZCK. DOI: https://doi.org/10.1134/s1064230723020156.
3. Vasil'ev F. P. *Metody optimizatsii* [Optimization Methods], vol. 1, Konechnomernye zadachi optimizatsii. Printsip maksimuma. Dinamicheskoe programmirovanie [Finite-dimensional Optimization Problems. Maximum Principle. Dynamic Programming]. Moscow, MTsNMO, 2011, 620 pp. (In Russian)
4. Krasnosel'skiy M. A., Vainikko G. M., Zabreiko P. P., et al. *Approximate Solution of Operator Equations*, Wolters-Noordhoff Series of Monographs and Textbooks on Pure and Applied Mathematics. Groningen, Wolters-Noordhoff Publ., 1972, xii+484 pp.
5. Nefedov V. N. Necessary and sufficient conditions of the extremum in the analytical optimization problems, *Trudy MAI*, 2009, no. 33, 4 (In Russian). EDN: JWKQVV.
6. Gindikin S. G. Energy estimates connected with the Newton polyhedron, *Tr. Mosk. Mat. Obs.*, 1974, vol. 31, pp. 189–236 (In Russian).
7. Bruno A. D. *Power Geometry in Algebraic and Differential Equations*, North-Holland Mathematical Library, vol. 57. Amsterdam, North-Holland, 2000, ix+385 pp.
8. Gindikin S. G., Volevich L. R. *The Method of Newton's Polyhedron in the Theory of Partial Differential Equations*, Mathematics and Its Applications. Soviet Series, vol. 86. Dordrecht, Kluwer Academic Publ, 1992, x+266 pp.
9. Khovansky A. G. Polyhedra and algebra, *Trudy ISA RAN*, 2008, vol. 38, pp. 23–35 (In Russian). EDN: KGCDTJ.
10. Nefedov V. Methods and algorithms for determining the main quasi-homogeneous forms of polynomials and power series, *MATEC Web of Conferences*, 2022, vol. 362, 01017. EDN: LJOIEO. DOI: https://doi.org/10.1051/matecconf/202236201017.
11. Nefedov V. N. On one method of analysis of a polynomial on constancy of signs in the positive orthant, *Trudy MAI*, 2006, no. 22, 6 (In Russian). EDN: ISVGRT.
12. Evtushenko Yu. G., Rat'kin V. A. The method of half-divisions for global optimization of a function of many variables, *Sov. J. Comput. Syst. Sci.*, 1987, vol. 25, no. 5, pp. 75–84.